



**PENYELESAIAN PERSAMAAN UMUM GELOMBANG BOLA DENGAN
NILAI AWAL DAN SYARAT BATAS MENGGUNAKAN
TRANSFORMASI LAPLACE**

SKRIPSI

oleh:

**Linda Budi Astutik
NIM 141810101031**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2019**



**PENYELESAIAN PERSAMAAN UMUM GELOMBANG BOLA DENGAN
NILAI AWAL DAN SYARAT BATAS MENGGUNAKAN
TRANSFORMASI LAPLACE**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

oleh:

**Linda Budi Astutik
NIM 141810101031**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2019**

PERSEMBAHAN

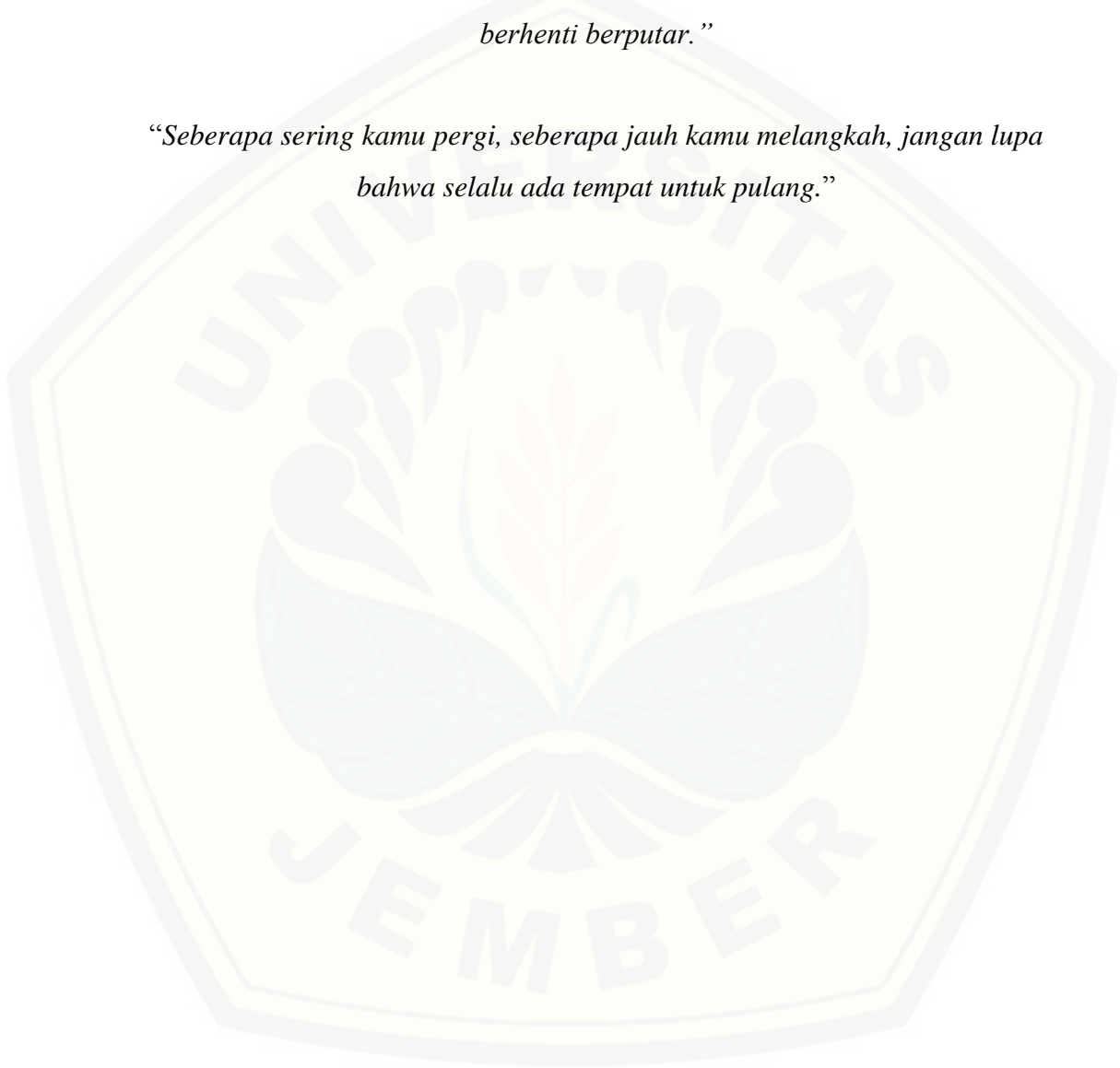
Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua saya, yaitu Bapak Mispan dan Ibu Sismiati yang senantiasa memberi doa, semangat, inspirasi, dukungan serta kasih sayang yang tiada henti;
2. Saudara-saudara saya beserta keluarga besar baik dari keluarga Ibu maupun keluarga Bapak yang tanpa lelah memberi semangat, doa, dan dukungannya;
3. Seluruh guru dan dosen mulai dari sekolah dasar hingga perguruan tinggi yang telah memberikan ilmu dan bimbingannya;
4. Almamater Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, SMA Negeri 1 Genteng, SMP Negeri 1 Purwoharjo, dan SD Negeri 8 Grajagan.

MOTTO

“Seberapa banyak masalahmu, seberapa besar rasa sakitmu, dunia tidak akan berhenti berputar.”

“Seberapa sering kamu pergi, seberapa jauh kamu melangkah, jangan lupa bahwa selalu ada tempat untuk pulang.”



PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Linda Budi Astutik

NIM : 141810101031

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah berjudul “Penyelesaian Persamaan Umum Gelombang Bola dengan Nilai Awal dan Syarat Batas Menggunakan Transformasi Laplace” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan dan materi yang telah disebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik bila ternyata kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2019
yang menyatakan,

Linda Budi Astutik
NIM 141810101031

SKRIPSI

**PENYELESAIAN PERSAMAAN UMUM GELOMBANG BOLA DENGAN
NILAI AWAL DAN SYARAT BATAS MENGGUNAKAN
TRANSFORMASI LAPLACE**

Oleh

Linda Budi Astutik
NIM 141810101031

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
Dosen Pembimbing Anggota : Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “Penyelesaian Persamaan Umum Gelombang Bola dengan Nilai Awal dan Syarat Batas Menggunakan Transformasi Laplace” karya Linda Budi Astutik telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Anggota I,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP 196610121993031001

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.
NIP 197006061998031003

Anggota II,

Anggota III,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.
NIP 196908281998021001

Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP 197704302005011001

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D

NIP 196102041987111001

RINGKASAN

Penyelesaian Persamaan Umum Gelombang Bola dengan Nilai Awal dan Syarat Batas menggunakan Transformasi Laplace; Linda Budi Astutik, 141810101031; 2019: 49 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Gelombang terbentuk karena adanya sumber yang berupa getaran dan adanya getaran yang merambat, oleh karena itu gelombang dapat diartikan sebagai getaran yang merambat. Berdasarkan dimensinya, gelombang dapat dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu gelombang dimensi satu, gelombang dimensi dua, dan gelombang dimensi tiga. Secara garis besar, gelombang dimensi satu merupakan gelombang yang merambat pada satu arah, gelombang dimensi dua merambat pada bidang, dan gelombang dimensi tiga merambat dalam ruang atau ke segala arah. Contoh-contoh gelombang pada dimensi satu, dua, dan tiga secara berturut-turut yaitu gelombang pada dawai, gelombang pada permukaan air, dan gelombang bunyi. Gelombang-gelombang tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan, yaitu persamaan diferensial yang disebut persamaan gelombang.

Solusi dari permasalahan yang muncul dalam persamaan gelombang dapat diselesaikan dengan beberapa metode yang ada pada materi Persamaan Diferensial (PD) yaitu formula D'Alembert, transformasi Laplace, dan separasi variabel. Permasalahan yang dimunculkan pada penelitian ini yaitu tentang nilai awal dan syarat batas, yang mana metodenya menggunakan transformasi Laplace, karena metode ini mampu mereduksi persamaan yang akan diselesaikan yaitu dari persamaan diferensial parsial ke persamaan diferensial biasa, sehingga lebih mudah untuk diselesaikan.

Persamaan gelombang yang diambil yaitu gelombang bola pada dimensi satu, yang mana akan bergerak dari persamaan umum gelombang dimensi tiga yang kemudian ditransformasi ke dalam dimensi satu. Hasil dari transformasi ini, yaitu berupa persamaan umum gelombang bola dimensi satu, mengharuskan

untuk memberikan dua kondisi nilai awal, sehingga penulis memutuskan untuk mengambil nilai awal dengan salah satu bernilai nol, dan lainnya diberikan sebarang konstanta satuan, fungsi trigonometri, dan trigonometri hiperbolik.

Pada penelitian yang telah dilakukan dengan memberikan nilai awal dalam tiga kondisi nilai awal, syarat batas, dan diaplikasikan dengan metode transformasi Laplace serta untuk visualisasi gelombang menggunakan aplikasi Maple, didapat bahwa gelombang yang diciptakan dengan pengambilan suatu konstanta satuan adalah lurus, atau tidak adanya gelombang yang diciptakan. Pada nilai awal dengan fungsi trigonometri, tidak ditemukan adanya penyelesaian atau solusi karena terdapat nilai *imaginer* di dalamnya, sehingga tidak dapat divisualisasikan. Nilai awal dengan trigonometri hiperbolik, menghasilkan gelombang hiperbolik.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Persamaan Umum Gelombang Bola dengan Nilai Awal dan Syarat Batas Menggunakan Transformasi Laplace”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

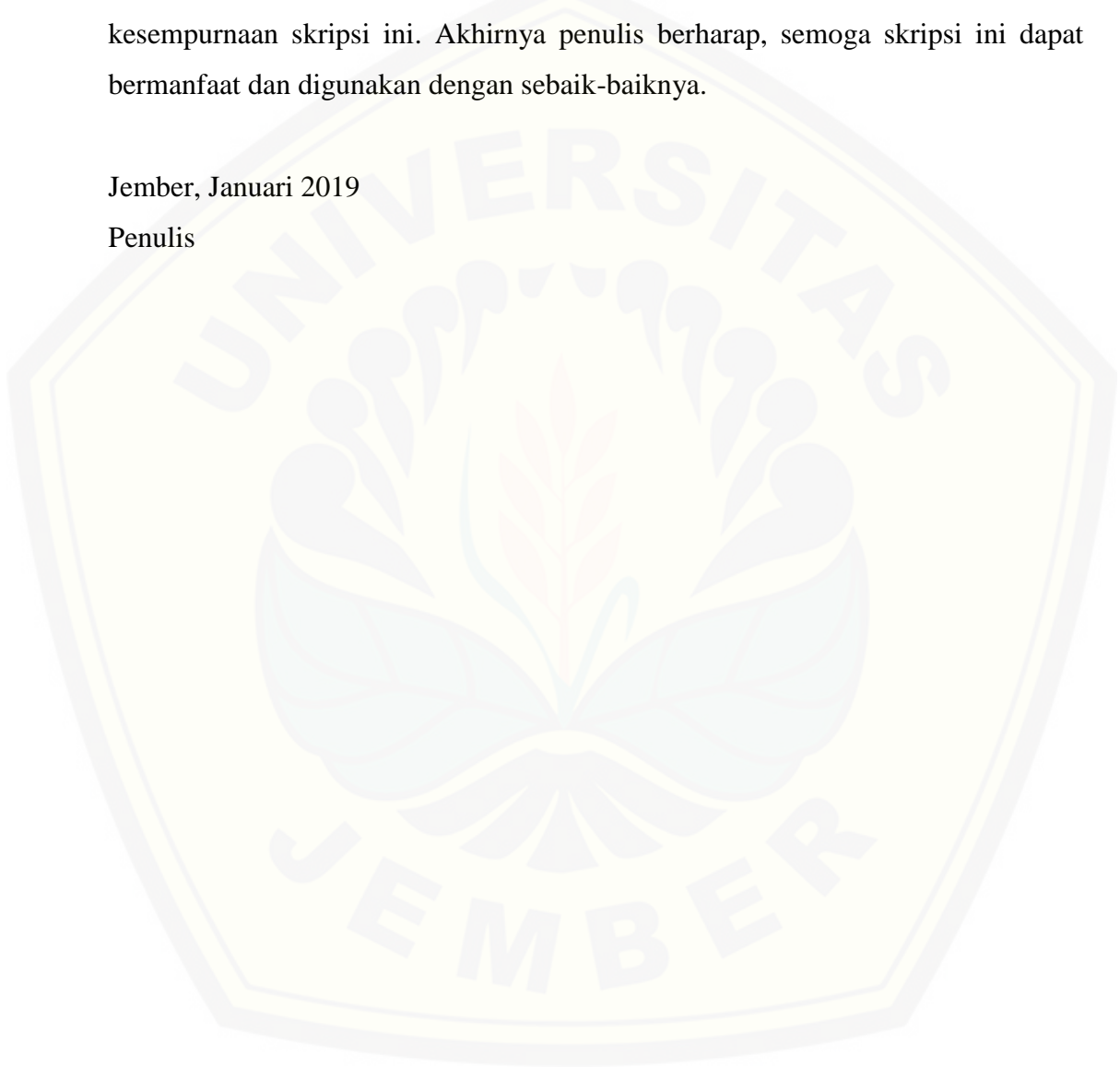
1. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan masukan-masukan dan saran terhadap penulisan skripsi ini;
3. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. Kedua orang tua tercinta, yaitu Bapak Mispan dan Ibu Sismiati yang senantiasa memanjatkan doa dan tanpa lelah menemani selama kegiatan mengerjakan tugas maupun dalam belajar, serta sebagai titik motivasi sehingga skripsi ini mampu terselesaikan;
5. Saudara-saudara tercinta yaitu empat kakak perempuan serta satu-satunya adik laki-laki, dan seluruh keluarga besar baik dari pihak Ibu maupun pihak Bapak, yang selalu memberikan dorongan, dukungan, dan motivasi selama masa-masa pengerjaan skripsi ini;
6. Sahabat “The Gang” dan sahabat semasa SD, SMP, dan SMA hingga sekarang yang selalu memberikan semangat dan motivasi serta bantuan selama proses perkuliahan sampai penulisan skripsi ini selesai;

7. Teman-teman angkatan 2014 “EXTREME” atas bantuan, info-info, canda dan tawa, serta memberikan warna-warni kehidupan perkuliahan;
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan digunakan dengan sebaik-baiknya.

Jember, Januari 2019

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
PERSEMBAHAN	ii
MOTTO	iii
PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBING	v
PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Turunan Parsial	5
2.2 Persamaan Diferensial Parsial	5
2.3 Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas Persamaan Diferensial	6
2.4 Persamaan Gelombang	7
2.4.1 Persamaan Gelombang Dimensi Satu	7
2.4.2 Persamaan Gelombang Dimensi Dua	9
2.4.3 Persamaan Gelombang Dimensi Tiga	11
2.5 Transformasi Laplace	12
2.5.1 Sifat Kelinearan Transformasi Laplace	13

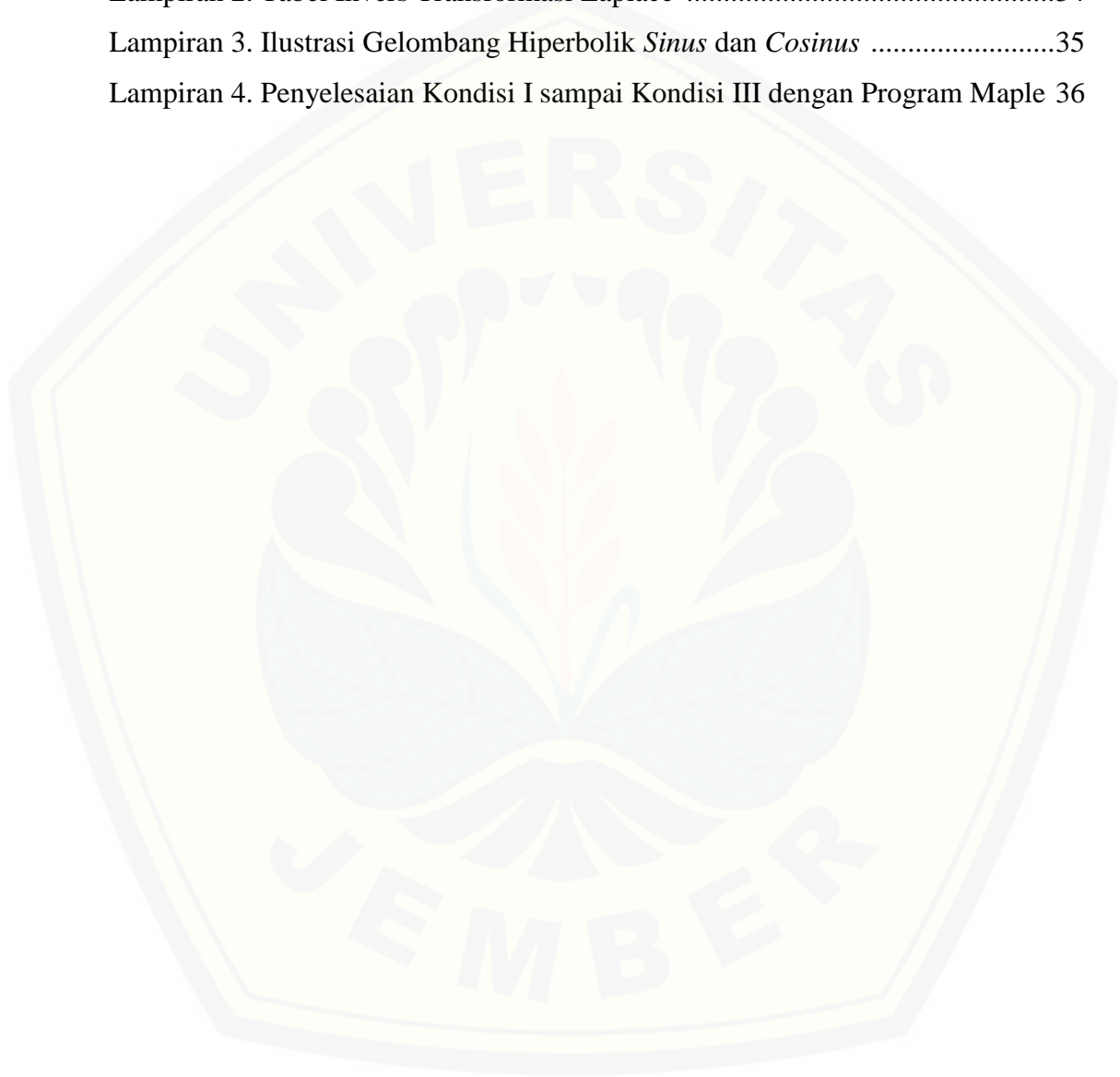
2.5.2 Sifat Kelinearan Invers Transformasi Laplace	14
2.5.3 Transformasi dari Turunan	15
2.6 Metode Variasi Parameter untuk Penyelesaian PD Linier Tak	
Homogen Orde-2	16
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	18
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	20
4.1 Pemodelan Persamaan Gelombang Bola	20
4.2 Penentuan Nilai Awal dan Syarat Batas	23
4.3 Penyelesaian Persamaan Gelombang Bola dengan Metode	
Transformasi Laplace	23
4.3.1 Kondisi I	23
4.3.2 Kondisi II	24
4.3.3 Kondisi III	27
BAB V PENUTUP	30
5.1 Kesimpulan	30
5.2 Saran	30
DAFTAR PUSTAKA	31
LAMPIRAN	33

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Gelombang pada dawai	8
Gambar 2.2 Getaran pada membran	10
Gambar 2.3 Gelombang bola	12
Gambar 3.1 Bagan Metodologi Penelitian	18
Gambar 4.1 Gelombang bola dimensi satu	22
Gambar 4.2 Profil awal kondisi II $t = 0$	26
Gambar 4.3 Ilustrasi gelombang kondisi II dengan $t = 0; 0,5; 0,8; 1; 1,5; 2$	26
Gambar 4.4 Profil awal kondisi III untuk $t = 0$	27
Gambar 4.5 Ilustrasi gelombang kondisi III dengan $t = 0; 0,5; 1; 1,5; 2$	28

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Tabel Transformasi Laplace	33
Lampiran 2. Tabel Invers Transformasi Laplace	34
Lampiran 3. Ilustrasi Gelombang Hiperbolik <i>Sinus</i> dan <i>Cosinus</i>	35
Lampiran 4. Penyelesaian Kondisi I sampai Kondisi III dengan Program Maple	36



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Terbentuknya sebuah gelombang karena adanya sumber yang berupa getaran dan adanya getaran yang merambat. Jadi, gelombang adalah getaran yang merambat. Sebagai simulasi, ketika batu dijatuhkan di atas permukaan air. Getaran merambat dari sumber getaran ke segala arah di atas permukaan air, dalam perambatannya tersebut getaran memerlukan waktu atau dengan kata lain getaran mempunyai periode, dan getaran juga mempunyai kecepatan yang disebut kecepatan gelombang. Permukaan air yang mendapat gangguan berupa getaran, mempunyai bentuk gelombang berupa lingkaran. Lingkaran tempat kedudukan titik yang mendapat gangguan getaran dengan simpangan yang sama dalam waktu yang bersamaan disebut muka gelombang. Muka gelombang ada juga yang berbentuk bola, seperti gelombang bunyi di udara.

Berdasarkan dimensinya, gelombang dapat dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu gelombang dimensi satu, gelombang dimensi dua, dan gelombang dimensi tiga. Gelombang dimensi satu merupakan gelombang yang merambat pada satu arah, misalnya gelombang tali dan gelombang pada dawai. Gelombang dimensi dua merupakan gelombang yang merambat pada bentuk bidang, seperti gelombang pada permukaan air. Sedangkan gelombang dimensi tiga yaitu gelombang yang merambat dalam ruang atau ke segala arah, seperti gelombang radio, gelombang bunyi, gelombang micro, dan gelombang cahaya. Gelombang dalam tiga dimensi ruang yang berbeda ini dapat dirumuskan ke dalam suatu persamaan yang dinamakan persamaan gelombang. Sedangkan solusi dari penyelesaian persamaan gelombang salah satunya dapat menggunakan metode-metode yang ada pada persamaan diferensial parsial (PDP). Masalah persamaan gelombang bunyi, dimana gelombang bunyi merupakan gelombang bola, dapat

diperoleh dengan menerapkan solusi penyelesaian untuk gelombang dimensi tiga. Hasil ini kemudian dapat digunakan untuk mendapatkan solusi dalam ruang dimensi satu dan dimensi dua.

Definisi bola adalah himpunan titik-titik di dalam ruang berdimensi tiga yang mempunyai jarak konstan (jari-jari) dari sebuah titik tetap (pusat). Sedangkan gelombang bola merupakan gelombang bunyi yang menyebar (merambat) ke segala arah. Penyelesaian dari persamaan gerak gelombang bola ini dapat diturunkan dengan menggunakan banyak cara, salah satunya dengan transformasi Laplace. Transformasi Laplace adalah metode transformasi yang digunakan untuk penyelesaian persamaan diferensial yang digagas oleh Piere Simon Laplace. Transformasi Laplace merupakan suatu transformasi dari fungsi yang menggunakan integral tak wajar. Metode penyelesaian dengan transformasi Laplace banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah nilai awal suatu persamaan diferensial biasa dan masalah-masalah syarat batas, khususnya transformasi Laplace sangat ampuh untuk menyelesaikan persamaan gelombang dan persamaan panas dimensi satu. Gelombang terbentuk akibat cara pandang waktu dan bersifat kontinu, sedang transformasi Laplace merupakan suatu metode yang sering dianggap sebagai transformasi dari cara pandang domain-waktu ke cara pandang domain-keluaran persatuan waktu. Transformasi ini juga mengurangi kerumitan perhitungan dari persamaan diferensial menjadi persamaan atau fungsi biasa, sehingga mampu menyederhanakan proses analisis suatu kelakuan atau keadaan menjadi sistem baru yang berupa kumpulan fungsi spesifikasi dari perlakuan. Perkembangan transformasi Laplace banyak digunakan di bidang fisika, optik, dan pengolahan sinyal (Nababan, 2014).

Tulisan dari Meyriska Aulia Harini (2005) dengan judul “Transformasi Laplace dari Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Parsial”, membahas persamaan konduksi panas dimensi satu. Kemudian Yuli Purwandari (2008) dengan judul “Penyelesaian Numeris Masalah Nilai Batas Menggunakan Metode Tembakan”, dimana permasalahan dari tiga tulisan tersebut hampir sama hanya saja menggunakan objek dan metode yang berbeda. Hingga Agus Supratama dan Hartono (2017) dengan judul “Tinjauan Kasus Persamaan Gelombang Dimensi

Satu dengan Berbagai Nilai Awal dan Syarat Batas”, membahas penyelesaian gelombang dimensi satu yaitu dawai, dengan nilai awal berupa fungsi yang menyatakan simpangan awal dan kecepatan transversal awal, serta syarat batas Dirichlet dimana setiap permasalahan diberikan syarat batas yang berbeda. Pertama diberikan dawai dengan panjang berhingga (memiliki dua syarat batas) yaitu $x = 0$ dan $x = l$, permasalahan ini diselesaikan menggunakan formula D’Alembert. Kedua diberikan dawai dengan panjang semi-tak berhingga (memiliki satu syarat batas) yaitu $x = 0$ dan $x = \infty$, permasalahan ini diselesaikan menggunakan transformasi Laplace. Terakhir diberikan dawai dengan panjang tak berhingga (tidak memiliki syarat batas) yaitu $x = -\infty$ dan $x = \infty$, permasalahan ini diselesaikan menggunakan formula D’Alembert. Hal ini membuktikan bahwa banyaknya permasalahan di sekitar atau lingkungan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dan dapat diselesaikan dengan persamaan diferensial, sehingga penulis mencoba untuk menyelesaikan permasalahan yang dekat dengan kehidupan sehari-hari yang mungkin juga menjadi pertanyaan bagi pembaca, yaitu tentang persamaan gelombang yang menyebar dari satu titik tetap dengan memberikan nilai awal serta syarat batas.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasar pada latar belakang, maka masalah yang dapat dirumuskan adalah:

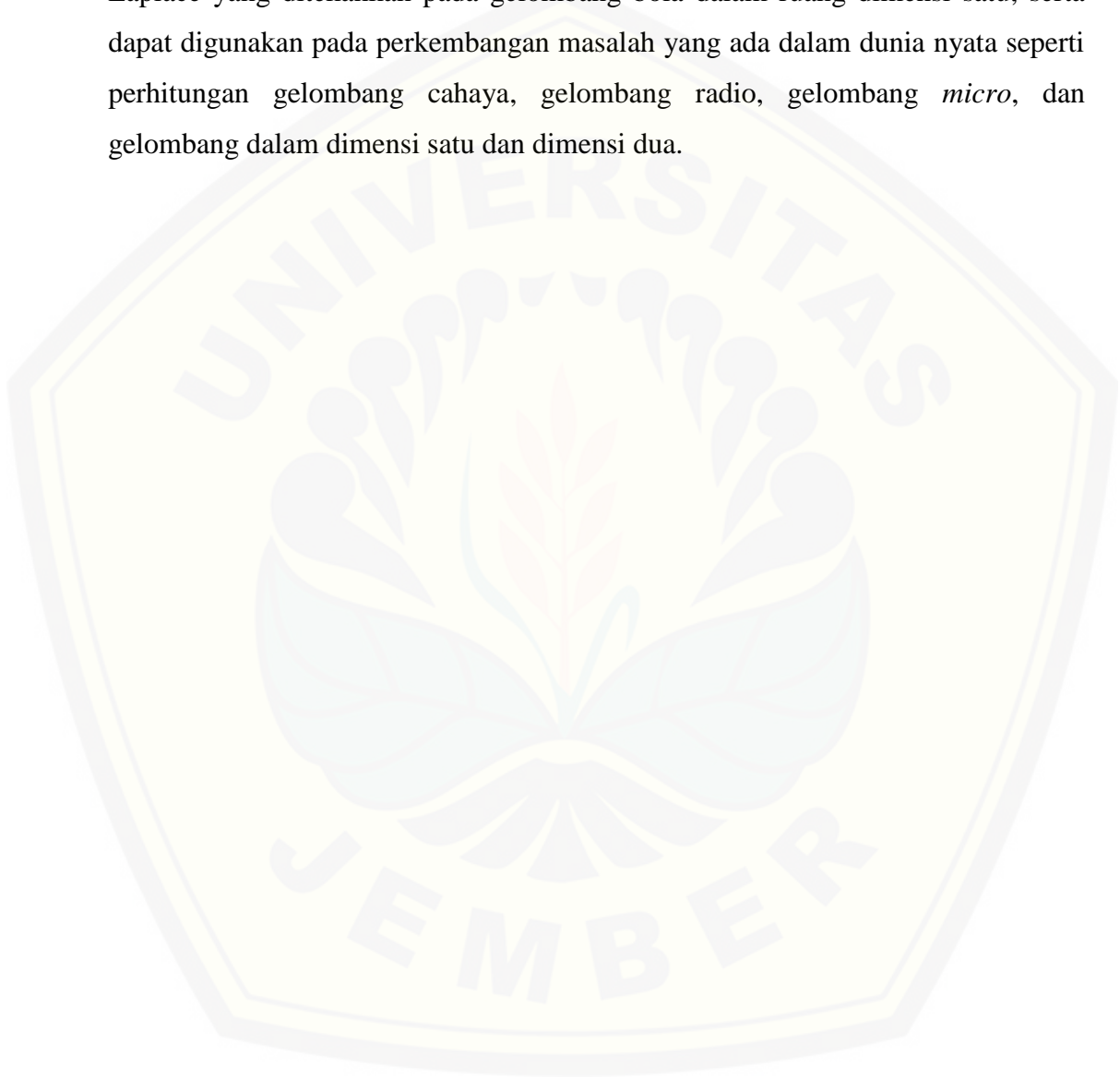
Bagaimana cara menyelesaikan atau meninjau kasus persamaan gelombang bola dimensi satu dengan memberikan nilai awal dan syarat batas menggunakan metode transformasi Laplace?

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui penyelesaian khusus dari persamaan gelombang bola dimensi satu dengan memberikan nilai awal dan syarat batas menggunakan metode transformasi Laplace serta memberikan gambaran gelombangnya menggunakan program Maple.

1.4 Manfaat

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah pemahaman tentang persamaan gelombang dalam tiga dimensi ruang yang berbeda, dengan memberikan nilai awal dan syarat batas menggunakan metode transformasi Laplace yang ditekankan pada gelombang bola dalam ruang dimensi satu, serta dapat digunakan pada perkembangan masalah yang ada dalam dunia nyata seperti perhitungan gelombang cahaya, gelombang radio, gelombang *micro*, dan gelombang dalam dimensi satu dan dimensi dua.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Turunan Parsial

Definisi 2.1

Jika f fungsi dua variabel (x dan y) maka:

- a. Turunan parsial f terhadap x , dinotasikan dengan $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ atau $f_x(x,y)$, didefinisikan sebagai,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

jika limit ruas kanan ada.

- b. Turunan parsial f terhadap y , dinotasikan dengan $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ atau $f_y(x,y)$, didefinisikan sebagai,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Pada umumnya persamaan diferensial dibedakan menjadi dua kelompok, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Persamaan Diferensial Biasa didefinisikan sebagai suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan biasa suatu fungsi yang tidak diketahui dengan dua atau lebih peubah bebas. Sedangkan Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Tingkat tertinggi dari fungsi derivatif yang ada dalam persamaan diferensial parsial disebut orde, dan pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi dalam persamaan diferensial parsial dinamakan derajat. Persamaan diferensial parsial linier adalah suatu bentuk persamaan diferensial parsial yang berderajat satu dalam peubah tak bebasnya dan turunan parsialnya (Hutahean,1993).

Beberapa contoh persamaan diferensial parsial yang penting adalah sebagai berikut:

- a. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ persamaan gelombang satu dimensi
- b. $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ persamaan konduksi panas satu dimensi
- c. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ persamaan Laplace dua dimensi
- d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ persamaan Poisson dua dimensi
- e. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ persamaan Laplace tiga dimensi

Persamaan umum dari persamaan diferensial parsial linear orde dua fungsi dua peubah adalah :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (2.1)$$

dengan:

A, B, C, D, E, F, G = koefisien (bisa konstan, fungsi dari x atau y dan bukan fungsi dari u atau turunannya)

u = variabel terikat (fungsi dari x dan y)

x, y = variabel bebas

Jika G adalah 0 (nol), maka persamaan (2.1) dinamakan persamaan diferensial homogen, dan jika sebaliknya yaitu G tidak sama dengan 0 (nol), maka dinamakan persamaan diferensial non homogen.

Jika $B^2 - 4AC < 0$ maka persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial eliptik, jika $B^2 - 4AC = 0$ disebut persamaan diferensial parabolik, dan jika $B^2 - 4AC > 0$ disebut persamaan diferensial hiperbolik.

2.3 Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial dengan syarat awal disebut sebagai masalah nilai awal. Syarat awal sendiri yaitu suatu syarat tambahan pada persamaan diferensial untuk satu nilai variabel bebas yang mempunyai satu atau lebih nilai syarat. Jika syarat yang diberikan pada persamaan diferensial lebih dari satu nilai variabel

bebas, disebut syarat batas dan merupakan persamaan diferensial dengan masalah nilai batas.

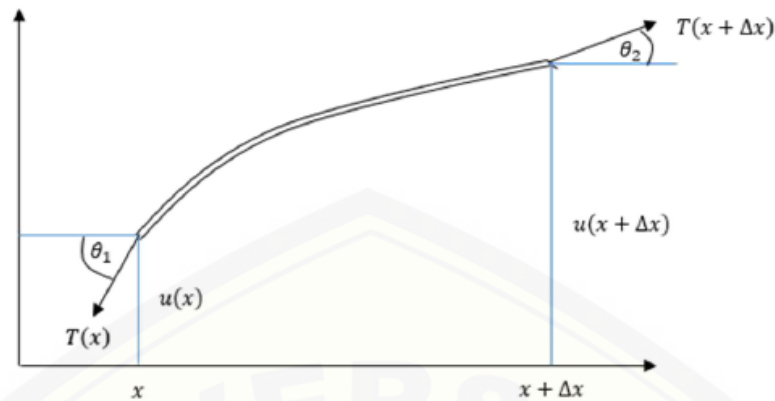
Suatu masalah nilai awal adalah suatu masalah yang mempunyai kondisi-kondisi spesifik pada saat $t = t_0$. Masalah ini umumnya terdapat pada kedua jenis persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Sedangkan suatu masalah nilai batas merupakan suatu masalah yang pasti diperlukan dan ada ketika membahas persamaan diferensial. Nilai batas sendiri tergantung pada masalah dan nilai yang telah ditetapkan. Secara matematika, masalah nilai batas ditentukan melalui suatu fungsi yang dapat memberikan kemudahan pada suatu persamaan diferensial parsial dengan syarat batas yang telah ditentukan. Secara fisika, masalah nilai batas merupakan suatu masalah yang tidak terikat pada waktu, melainkan hanya memerlukan ruang koordinat.

2.4 Persamaan Gelombang

Telah dijelaskan sebelumnya, bahwa gelombang menurut dimensinya dikelompokkan menjadi tiga bagian, yaitu satu dimensi, dua dimensi, dan tiga dimensi. Gelombang tiga dimensi merupakan gelombang yang merambat dalam ruang atau ke segala arah, misalnya gelombang radio, gelombang mikro, dan gelombang cahaya. Pemantulan gelombang tiga dimensi berhubungan dengan muka gelombang. Muka gelombang dapat secara mudah diamati, yaitu sebagai contoh ketika sebuah batu dijatuhkan pada permukaan air, batu yang jatuh menyebabkan munculnya riak atau gelombang air yang berbentuk lingkaran dan menyebar keluar dari pusat lingkaran. Sehingga menyebabkan gelombang tersebut bersifat simetris. Berikut ilustrasi gelombang beserta persamaannya.

2.4.1 Persamaan Gelombang Dimensi Satu

Untuk menyelesaikan persamaan gelombang pada dimensi satu, akan diambil gelombang pada dawai atau tali yang salah satu ujungnya diikat. Gambar 2.1 merupakan ilustrasi dari gelombang pada dawai atau tali,



Gambar 2.1 Gelombang pada dawai

Pada Gambar 2.1, u menyatakan simpangan gelombang sehingga $u(x)$ adalah simpangan di titik x dan $u(x + \Delta x)$ adalah simpangan pada titik $x + \Delta x$. Diasumsikan bahwa dawai hanya bergerak pada arah vertikal, maka resultan gaya yang bekerja pada sumbu horizontal adalah nol, yaitu

$$\sum F_x = T(x + \Delta x) \cos \theta_2 - T(x) \cos \theta_1 = 0.$$

Tegangan pada bagian dawai ($T(x)$) saat diberikan tegangan sebesar T_0 adalah,

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos \theta_1}$$

$$T(x + \Delta x) = \frac{T_0}{\cos \theta_2}.$$

Sedangkan resultan gaya pada arah vertikal yaitu,

$$\sum F_u = T(x + \Delta x) \sin \theta_2 - T(x) \sin \theta_1$$

$$= T_0 \tan \theta_2 - T_0 \tan \theta_1.$$

Karena akan menghitung nilai simpangan ketika $\Delta t \rightarrow 0$, maka dinyatakan dalam bentuk persamaan parsial. Dengan demikian diperoleh,

$$\sum F_u = T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right).$$

Berdasarkan Hukum II Newton,

$$\sum F_u = \Delta m \cdot a$$

dimana $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$ dengan μ adalah koefisien gesekan. Percepatan a didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu sesaat, sehingga

$$\sum F_u = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Dengan demikian diperoleh hubungan,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)}{\Delta x}.$$

Jika $\Delta x \rightarrow 0$, maka berdasarkan definisi turunan parsial (lihat subbab 2.1) diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Atau dapat dituliskan sebagai,

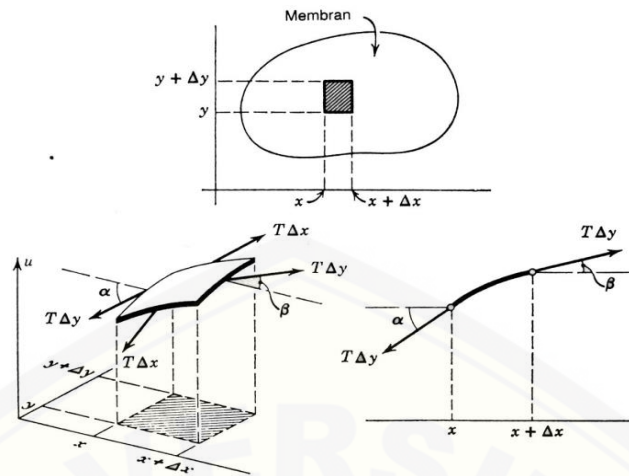
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

dengan $C = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

(Supratama dan Hartono, 2017).

2.4.2 Persamaan Gelombang Dimensi Dua

Gelombang dimensi dua merupakan rambatan getaran pada sebuah membran atau gelombang di permukaan air. Dalam hal ini membran diasumsikan berbentuk persegi panjang. Untuk memecahkan masalah membran yang bergetar, maka harus menentukan solusi $u(x, y, t)$ dimana u menyatakan simpangan pada titik x, y dan waktu $t \geq 0$. Gambar 2.2 merupakan ilustrasi dari getaran membran,



Gambar 2.2 Getaran pada membran

Sesuai dengan Gambar 2.2, dimana komponen vertikal gaya tersebut sepanjang sisi yang sejajar dengan bidang adalah $T \Delta y \sin \beta$ dan $-T \Delta y \sin \alpha$. Berdasarkan Hukum II Newton yaitu resultan gaya yang bekerja pada suatu benda sebanding dengan massa ($\rho \Delta x \Delta y$) dan percepatannya ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$), yang dihitung pada titik antara y dan $y + \Delta y$ dimana ρ adalah massa membran persatuan luas, sedangkan Δx dan Δy adalah luas bagian membran. Jadi menurut Hukum II Newton yaitu,

$$T \Delta y \sin \beta + (-T \Delta y \sin \alpha) = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$T \Delta y \sin \beta - T \Delta y \sin \alpha = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$T \Delta y (\sin \beta - \sin \alpha) = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{atau}$$

$$\rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \Delta y (\sin \beta - \sin \alpha)$$

Maka resultan kedua komponen vertikal itu adalah,

$$\begin{aligned} T \Delta y (\sin \beta - \sin \alpha) &\approx T \Delta y (\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= T \Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

dimana y_1 dan y_2 mempunyai nilai antara y dan $y + \Delta y$. Dengan cara yang sama, maka resultan komponen horizontal dari gaya yang bekerja pada kedua sisi lainnya adalah,

$$T \Delta x (\sin \beta - \sin \alpha) \approx T \Delta x (\tan \beta - \tan \alpha)$$

$$= T \Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, y) \right] \quad (2.4)$$

Menurut Hukum II Newton, jumlah gaya-gaya yang diberikan pada persamaan (2.3) dan (2.4) sama dengan massa $\rho \Delta x \Delta y$ dan percepatannya $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, maka:

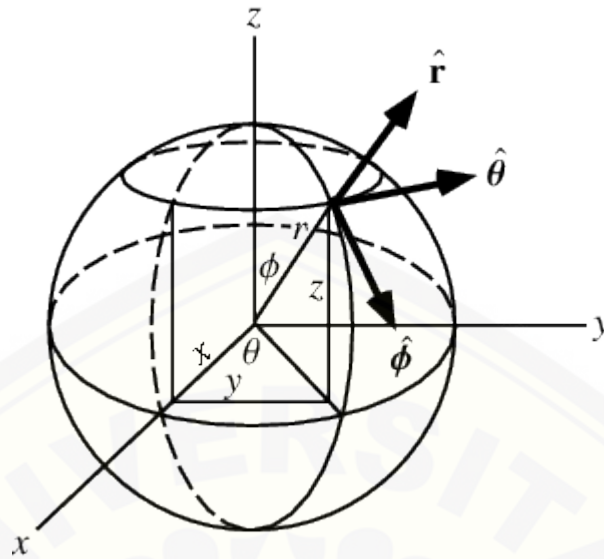
$$\begin{aligned} \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T \Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2) \right] + T \Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, y) \right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho} \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, y)}{\Delta y} \right] \\ \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, y)}{\Delta y} \right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.5) \end{aligned}$$

dengan $C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

(I Gede Astina, dkk, 2011).

2.4.3 Persamaan Gelombang Dimensi Tiga

Gelombang dimensi tiga dapat digunakan untuk mendeskripsikan berbagai macam gelombang seperti, gelombang suara, gelombang udara, gelombang elektromagnetik, dan gelombang gravitasi. Sebagai contoh, perambatan gelombang bunyi pada fluida yang mana gelombangnya berupa gelombang bola (*sferis*). Gambar 2.3 merupakan ilustrasi dari gelombang bola (*sferis*), dengan $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, dan $\phi \in [0, \pi]$.



Gambar 2.3 Gelombang bola

Persamaan gelombang bola (*Sferis*) dapat diperoleh seperti pada satu dimensi (persamaan (2.2)) dan dua dimensi (persamaan (2.5)). Sehingga persamaan gelombang pada tiga dimensi yaitu,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.6)$$

dengan C cepat rambat gelombang.

dimana pada persamaan (2.6) $u = u(x, y, z, t)$ dan x, y , dan z merupakan variabel-variabel pada koordinat Kartesius. Pada masalah ini u menyatakan perpindahan (tekanan) longitudinal dari fluida sebagai gelombang menyebar yang melaluinya pada waktu t (Riffe, 2012). Sehingga penyelesaian persamaan (2.6) harus memenuhi persamaan gelombang bola yaitu,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \right). \quad (2.7)$$

2.5 Transformasi Laplace

Definisi 2.2

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi yang didefinisikan untuk $t \geq 0$. Bila integral tak wajar $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ konvergen ke suatu fungsi $F(s)$, maka $F(s)$ disebut

transformasi Laplace dari $f(t)$ dan dinyatakan dengan $L\{f(t)\}$. Jadi transformasi Laplace dari $f(t)$ adalah,

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Selanjutnya, $f(t)$ disebut invers transformasi Laplace dari $F(s)$ dan dinyatakan dengan $L^{-1}\{F(s)\}$, sehingga

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Contoh 2.3

Bila diketahui $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, maka tentukan $L\{f(t)\}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t(s-a)} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t(s-a)} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s-a} e^{-t(s-a)} \right) \Big|_{t=0}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{s-a} (e^{-b(s-a)} - 1). \end{aligned}$$

untuk $s - a > 0$ atau $s > a$, maka $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b(s-a)} = 0$.

Jadi,

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

2.5.1 Sifat Kelinearan Transformasi Laplace

Teorema 2.1

Bila $F(s) = L\{f(t)\}$ dan $G(s) = L\{g(t)\}$ maka untuk setiap konstanta-konstanta α, β berlaku,

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}.$$

Bukti:

$$\begin{aligned} L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} \\
 &= \alpha F(s) + \beta G(s).
 \end{aligned}$$

Contoh 2.4

Untuk $f(t) = \cosh at$, tentukan $L\{f(t)\}$.

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$.

Jadi, dari Teorema 2.1 dan Contoh 2.3 diperoleh,

$$\begin{aligned}
 L\{\cosh at\} &= L\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{at}\} + \frac{1}{2}L\{e^{-at}\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

untuk $s > a$ dan $s > -a$ atau $s > |a|$. Jadi,

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|.$$

2.5.2 Sifat Kelinearan Invers Transformasi Laplace

Teorema 2.2

Bila $L\{f(t)\} = F(s)$ dan $L\{g(t)\} = G(s)$ maka untuk setiap konstanta-konstanta α, β berlaku,

$$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha L^{-1}\{F(s)\} + \beta L^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

Bukti:

Dari Teorema 2.1 telah diketahui bahwa,

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Jadi,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\}$$

atau

$$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t) = \alpha L^{-1}\{F(s)\} + \beta L^{-1}\{G(s)\}$$

Contoh 2.5

Tentukan $L^{-1}\left\{\frac{5s+7}{s^2+3s+2}\right\}$.

Penyelesaian:

Lakukan pemisahan variabel, yaitu

$$\frac{5s + 7}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5s + 7}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} = \frac{A(s + 2) + B(s + 1)}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$5s + 7 = A(s + 2) + B(s + 1)$$

untuk,

$$s = -1 \rightarrow 2 = A(-1 + 2) = A \rightarrow A = 2$$

$$s = -2 \rightarrow -3 = B(-2 + 2) = -B \rightarrow B = 3.$$

Jadi,

$$\frac{5s + 7}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}$$

dan dari tabel (Lampiran 1 dan Lampiran 2) diperoleh,

$$L^{-1}\left\{\frac{5s + 7}{s^2 + 3s + 2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} + 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} = 2e^{-t} + 3e^{-2t}$$

(Nababan, 2014).

2.5.3 Transformasi Laplace dari Turunan

Misalkan $f'(t)$ menyatakan turunan pertama dari $f(t)$, $f''(t)$ menyatakan turunan kedua dari $f(t)$, dan seterusnya. Sehingga,

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

$$= [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \{-se^{-st}\} dt$$

$$= -f(0) + sL\{f(t)\}$$

Dengan mengganti $f(t)$ menjadi $f'(t)$, maka diperoleh

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + sL\{f(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = -f'(0) + sL\{f'(t)\}$$

$$= -f'(0) + s(-f(0) + sL\{f(t)\})$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0), \text{ dan seterusnya.}$$

2.6 Metode Variasi Parameter untuk Penyelesaian PD Linier Tak Homogen Orde-2

Metode variasi parameter adalah metode untuk menentukan penyelesaian khusus PD linier tak homogen dengan koefisien variabel. PD linier tak homogen dengan koefisien variabel yang diselesaikan dengan metode ini mempunyai bentuk umum,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \quad (2.8)$$

Penyelesaiannya yaitu,

Langkah I. Menentukan penyelesaian PD homogen.

Penyelesaian PD homogen dari persamaan (2.8) adalah,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Langkah II. Menentukan penyelesaian PD tak homogen dengan metode variasi parameter.

a. Menentukan solusi umum,

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x).$$

b. Menentukan turunan y_p ,

$$y_p' = v_1'(x)y_1(x) + v_1(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_2(x)y_2'(x).$$

c. Menentukan persamaan syarat,

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$$

sehingga,

$$y_p' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)$$

$$y_p'' = v_1(x)y_1''(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2''(x) + v_2'(x)y_2'(x).$$

d. substitusi y_p, y_p', y_p'' pada persamaan (2.8),

$$[v_1(x)y_1''(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2''(x) + v_2'(x)y_2'(x)] +$$

$$p(y)[v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)] + q(y)[v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)] = r(x)$$

karena,

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

maka diperoleh,

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = 0.$$

e. Menentukan $v_1(x)$ dan $v_2(x)$,

$$\left. \begin{aligned} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) &= r(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

dari persamaan 2.9, maka

$$v_1'(x) = -\frac{y_2(x).r(x)}{W} \rightarrow v_1(x) = \int -\frac{y_2(x).r(x)}{W}$$

$$v_2'(x) = \frac{y_1(x).r(x)}{W} \rightarrow v_2(x) = \int \frac{y_1(x).r(x)}{W}$$

dengan $W = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$.

Sehingga,

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

$$= \int -\frac{y_2(x).r(x)}{W}y_1(x) + \int \frac{y_1(x).r(x)}{W}y_2(x)$$

Langkah III. Solusi umum PD

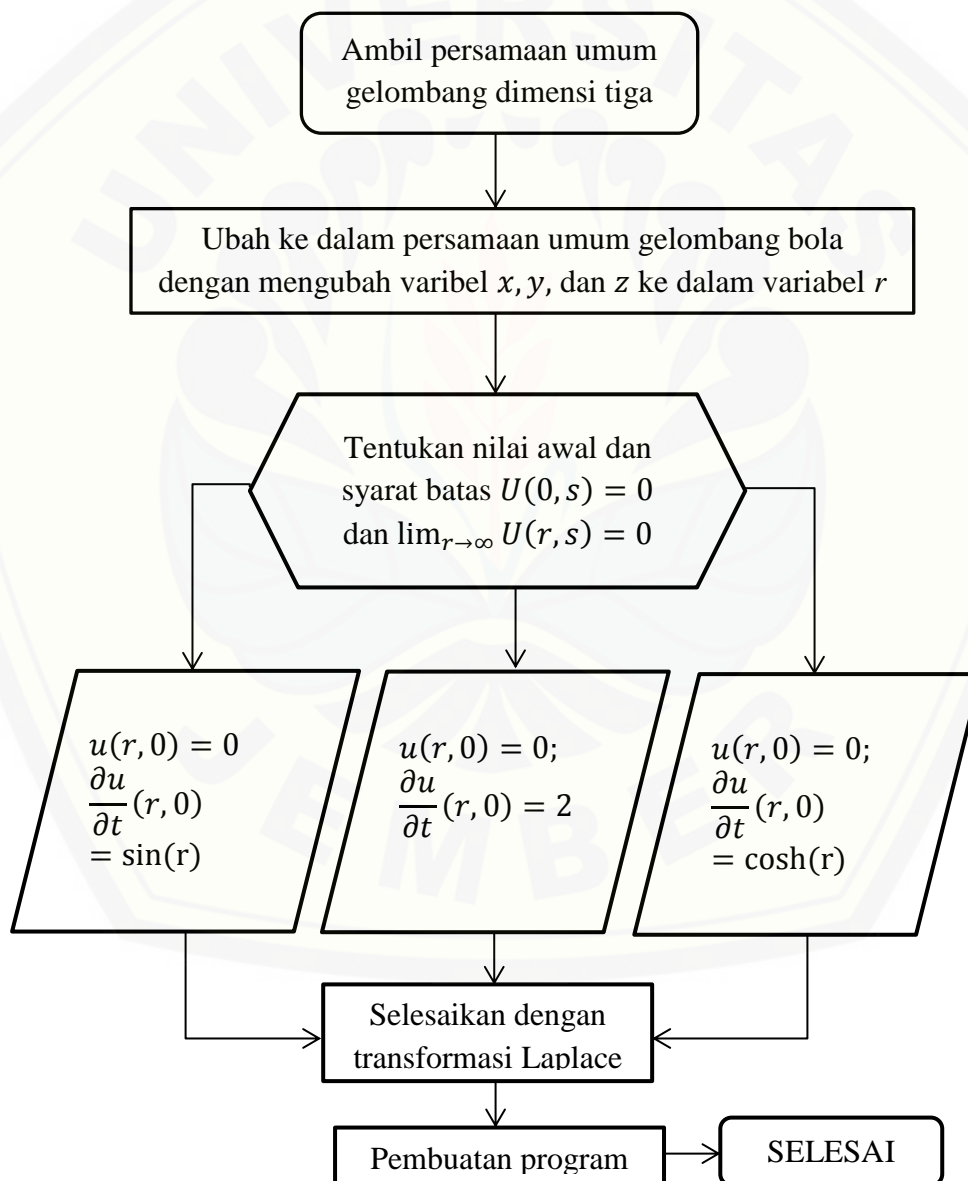
$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int -\frac{y_2(x).r(x)}{W}y_1(x) + \int \frac{y_1(x).r(x)}{W}y_2(x)$$

(Kusmaryanto, 2018).

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Secara umum, penelitian ini adalah mencari penyelesaian persamaan gelombang bola yang solusinya dicari dengan metode Laplace yang diberikan berbagai nilai awal dan syarat batas. Selanjutnya, penyelesaian ini akan dimuat dalam bentuk *script* menggunakan program *Maple*. Gambar 3.1 merupakan langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini,



Gambar 3.1 Bagan Metodologi Penelitian

Berdasarkan pada Gambar 3.1, maka uraian metodologi penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Gelombang bola umumnya merupakan gelombang pada dimensi tiga, maka dari itu akan diambil persamaan umum gelombang dimensi tiga.
- b. Dari persamaan umum pada gelombang dimensi tiga, akan dicari solusi umum dari persamaan gelombang bola dimensi satu dengan men-transformasi operator Kartesius ke dalam operator r dengan kaitan $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
- c. Selanjutnya ditentukan nilai awal dan syarat batas dengan syarat batas $r = [0, \infty)$ pada tiga kondisi nilai awal, yaitu:
 - i. $u(r, 0) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \sin(r)$
 - ii. $u(r, 0) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = 2$, dan
 - iii. $u(r, 0) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \cosh(r)$.
- d. Selesaikan dengan metode transformasi Laplace.
- e. Setelah itu dibuat program (*script*) dengan bantuan Maple, sekaligus mem-plotkan persamaan khusus yang telah dihasilkan, sehingga menunjukkan gambaran gelombang yang terbentuk.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada hasil dan pembahasan, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

- a. Nilai awal yang diambil yaitu sebarang nilai awal pada konstanta satuan, fungsi trigonometri, dan trigonometri hiperbolik.
- b. Jika diberikan nilai awal suatu konstanta satuan, maka gelombang yang tercipta yaitu lurus, atau dalam artian tidak terciptanya sebuah gelombang.
- c. Jika diberikan nilai awal suatu fungsi trigonometri maka tidak dapat ditemukan sebuah penyelesaian, karena penyelesaian Laplace-nya mengandung nilai *imaginer*.
- d. Jika diberikan nilai awal suatu fungsi trigonometri hiperbolik, maka gelombang yang dihasilkan yaitu gelombang hiperbolik.

5.2 Saran

Persamaan gelombang dimensi tiga tidak hanya dapat diselesaikan dengan aturan $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, namun juga bisa dengan menggunakan aturan koordinat ruang pada dimensi tiga yang lain, seperti koordinat bola dengan memperhatikan sudut dan koordinat silinder. Selain itu juga dapat diselesaikan dengan metode lain yang ada pada persamaan diferensial parsial. Maka dari itu, pembaca dapat melakukan penelitian lebih lanjut mengenai penelitian ini dengan menggunakan metode-metode lain yang sesuai atau dengan mengambil suatu kasus dari sudut pandang yang diinginkan dan perlu untuk diteliti.

DAFTAR PUSTAKA

- Akhsan, M. 2005. *Studi Profil Persamaan Gelombang Dengan Variasi Syarat Batas*. Jember: Universitas Jember.
- Astina, I. G. 2011. *Gelombang Dalam Dua Dimensi (untuk memenuhi tugas mata kuliah gelombang I)*. Bali: Universitas Udayana.
- Awang. 2018. *Bab 11: Persamaan Diferensial Parsial*. [dokumen PDF]. Diakses dari: <http://www.unsri.ac.id/upload/arsip/persamaan%20diferensial%20parsial.pdf>.
- Gunaryati, A. 2018. *Turunan Parsial*. [dokumen PDF]. Diakses dari: http://aris_gunaryati.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/40466/Kalkulus-lanjut3.pdf.
- Harini, M. A. 2005. *Transformasi Laplace dari Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Parsial*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.
- Hutahean, E. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan*. Jakarta: Erlangga.
- Kusmaryanto, S. 2018. *Metode Variasi Parameter untuk Penyelesaian PD Linier Tak Homogen Orde-2*. [dokumen PDF]. Diakses dari: <http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/files/2013/11/Metode-VariasiParameter.pdf>.
- Nababan, S. M. 2014. *Metode Matematis II, Edisi 1*. Tangerang: Universitas Terbuka.
- Novita, M. 2013. *Pengertian Gelombang dan Lanjutan Jenis-Jenis Gelombang*. [blog]. Diakses dari: <http://mayaerna.blogspot.co.id>.
- Purwandari, Y. 2008. *Penyelesaian Numeris Masalah Nilai Batas Menggunakan Metode Tembakan (Linear Shooting Method)*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.
- Randi. 2013. *Persamaan Gelombang (Wave Equation) 2 Dimensi dan 3 Dimensi*. [blog]. Diakses dari: <http://blog.ub.ac.id/randi18/2013/10/15/persamaan-gelombang-wave-equation-2-dimensi-dan-3-dimensi/>.
- Riffe. 2012. *3D Wave Equation and Plane Waves / 3D Differential Operators*. [dokumen PDF]. Diakses dari: http://www.physics.usu.edu/riffe/37_50/Lecture%2018.pdf.

- Sigit. 2012. *BAB V: Persamaan Diferensial Parsial*. [dokumen PDF]. Diakses dari: http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/files/2012/11/BAB-V_PERSAM AAN-DIFERENSIAL-PARSIAL.pdf.
- Supratama, A., dan Hartono. 2017. *Tinjauan Kasus Persamaan Gelombang Dimensi Satu dengan Berbagai Nilai Awal dan Syarat Batas*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- Utomo, R. B. 2016. *Persamaan Diferensial Parsial Gelombang Homogen pada Selang $R(-\infty, \infty)$ dengan Syarat Batas Dirichlet dan Neumann*. Tangerang: Universitas Muhammadiyah Tangerang.
- Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Widyaningrum, Ismi, Waluyo, S. B., dan Wuryanto. 2012. *Metode Multiple Time Scale untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Tak Linear Sistem Double Shockbreaker*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.
- Zacoeb, A. 2014. *Sesi XII: Differensial*. [dokumen PDF]. Diakses dari: <http://www.zacoeb.lecture.ub.ac.id/files/2014/11/XII-Differensial.pdf>.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Tabel Transformasi Laplace

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, n = 1, 2, 3, L$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$t^\alpha, \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s > a$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}, \quad s > a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $

Lampiran 2

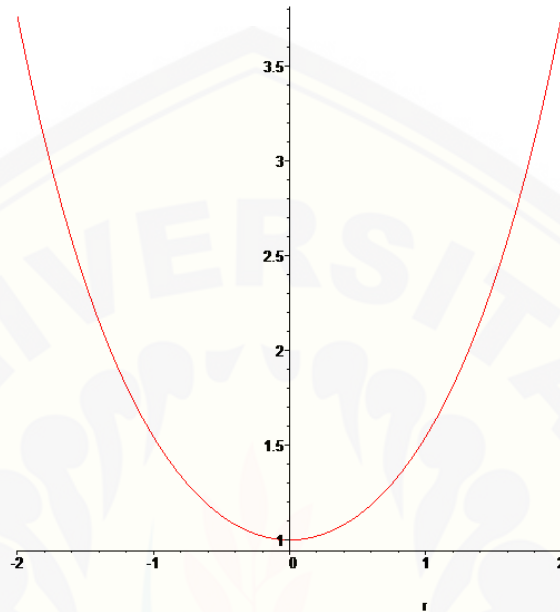
Tabel Invers Transformasi Laplace

$F(s)$	$L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s^{\alpha+1}}, \quad n = \alpha > 0$	$e^{at} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$
$\frac{1}{s - a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2 + a^2}, \quad a \neq 0$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2 - a^2}, \quad a \neq 0$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad a \neq 0$	$\cosh at$

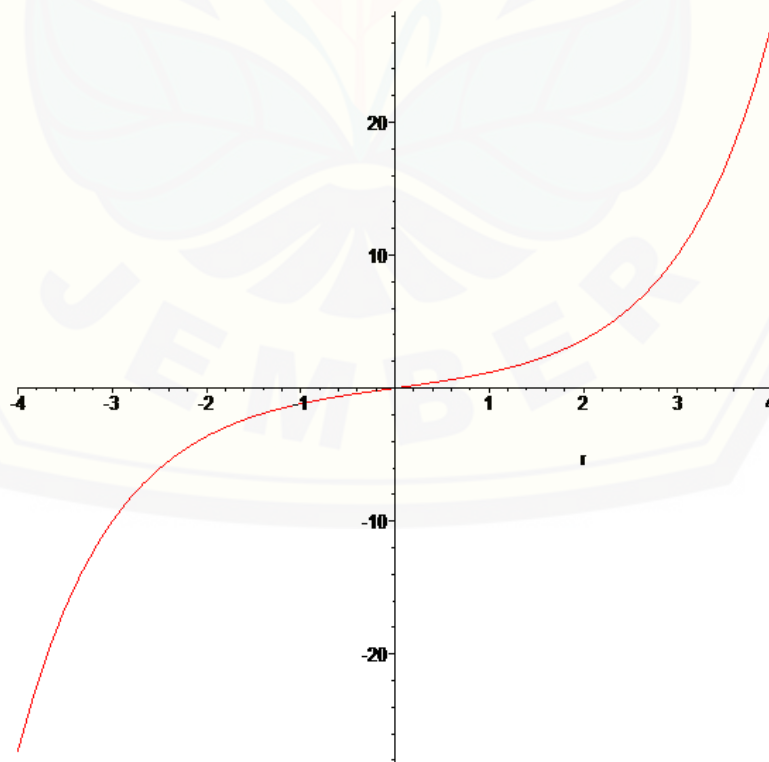
Lampiran 3

Ilustrasi Gelombang Hiperbolik *Sinus* dan *Cosinus*

```
> plot(cosh(r),r=-2..2);
```



```
> plot(sinh(r),r=-4..4);
```



Lampiran 4

Penyelesaian Kondisi I sampai Kondisi III dengan Program Maple

Solusi Persamaan Gelombang Bersimetri Bola

> **restart; with(PDETools): with(inttrans): with(plots):**> **a:=u(x,y,z,t);** $a := u(x, y, z, t)$ > **p1:=diff(a,t\$2)=C^2*(diff(a,x\$2)+diff(a,y\$2)+diff(a,z\$2));**

$$p1 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, z, t) = C^2 \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, z, t) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, z, t) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, y, z, t) \right) \right)$$

> **p2:=diff(u(r,t),t\$2)=k*(diff(u(r,t),r\$2)+(2/r)*diff(u(r,t),r));**

$$p2 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r, t) = k \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, t) \right) + \frac{2 \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, t) \right)}{r} \right)$$

1.1 Jika diketahui bahwa nilai awal yaitu $u(r,0)=0$ dan $u'(r,0)=\sin(r)$ dengan $C^2=k=1$

> **p3:=laplace(p2,t,s);**

$$p3 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - D_2(u)(r, 0) - s u(r, 0) =$$

$$k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2 k \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p4:=subs(k=1,u(r,0)=0,D[2](u)(r,0)=sin(r),p3);**

$$p4 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - \sin(r) =$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p5:=diff(u(r,s),`\$`(r,2))+2/r*diff(u(r,s),r)-s^2*u(r,s)=-sin(r);**

$$p5 := \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s) \right) + \frac{2 \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, s) \right)}{r} - s^2 u(r, s) = -\sin(r)$$

> **p6:=dsolve(p5,u(r,s));**

$$p6 := u(r, s) = \frac{\sinh(s r) _F2(s)}{r} + \frac{\cosh(s r) _F1(s)}{r} + \frac{1}{4} ($$

$$(s^3 r I + (-r - I) s^2 + (r I + 2) s + I - r) (-\sinh(s r) + \cosh(s r)) e^{(-r(-s+I))}$$

$$- (\sinh(s r) + \cosh(s r)) (s^3 r I + (I - r) s^2 + (-2 + r I) s - r - I) e^{(r(-s+I))}$$

$$+ (\sinh(s r) + \cosh(s r)) (s^3 r I + (r + I) s^2 + (r I + 2) s - I + r) e^{(-r(s+I))}$$

$$- (s^3 r I + (-I + r) s^2 + (-2 + r I) s + r + I) e^{(r(s+I))} (-\sinh(s r) + \cosh(s r))) / (s$$

$$r (s^2 + 1)^2)$$

1.2 Jika diketahui bahwa nilai awal yaitu $u(r,0)=0$ dan $u'(r,0)=2$ dengan $C^2=k=3$

> **p32:=laplace(p2,t,s);**

$$p32 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - D_2(u)(r, 0) - s u(r, 0) =$$

$$k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2k \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p42:=subs(k=3,u(r,0)=0,D[2](u)(r,0)=2,p32);**

$$p42 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - 2 =$$

$$3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p52:=3*diff(u(r,s),`r`)+6/r*diff(u(r,s),r)-s^2*u(r,s)=-2;**

$$p52 := 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, s) \right)}{r} - s^2 u(r, s) = -2$$

> **p62:=dsolve(p52,u(r,s));**

$$p62 := u(r, s) = \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s)}{r} + \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s)}{r} + \frac{2}{s^2}$$

dengan memasukkan $U(0,s)=0$ didapat

>

p72:=sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s)+cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s)+r*2/s^2=0;

$$p72 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s) + \frac{2r}{s^2} = 0$$

> **p82:=subs(r=0,p72);**

$$p82 := \sinh(0) _F2(s) + \cosh(0) _F1(s) = 0$$

> **f1_2:=0;**

f1_2 := 0

selanjutnya dari limit r mendekati tak hingga = 0, diperoleh

> **p92:=limit(p72,r=infinity);**

$$p92 := \lim_{r \rightarrow \infty} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F1(s) + \frac{2 r}{s^2} = 0$$

> **p102:=cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s)=-sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s);**

$$p102 := \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F1(s) = -\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F2(s)$$

> **p112:=subs(_F1(s)=f1_2,p102);**

$$p112 := 0 = -\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F2(s)$$

> **f2_2=0;**

f2_2 = 0

> **p122:=subs(_F1(s)=0,_F2(s)=0,p62);**

$$p122 := u(r, s) = \frac{2}{s^2}$$

> **p132:=invlaplace(p122,s,t);**

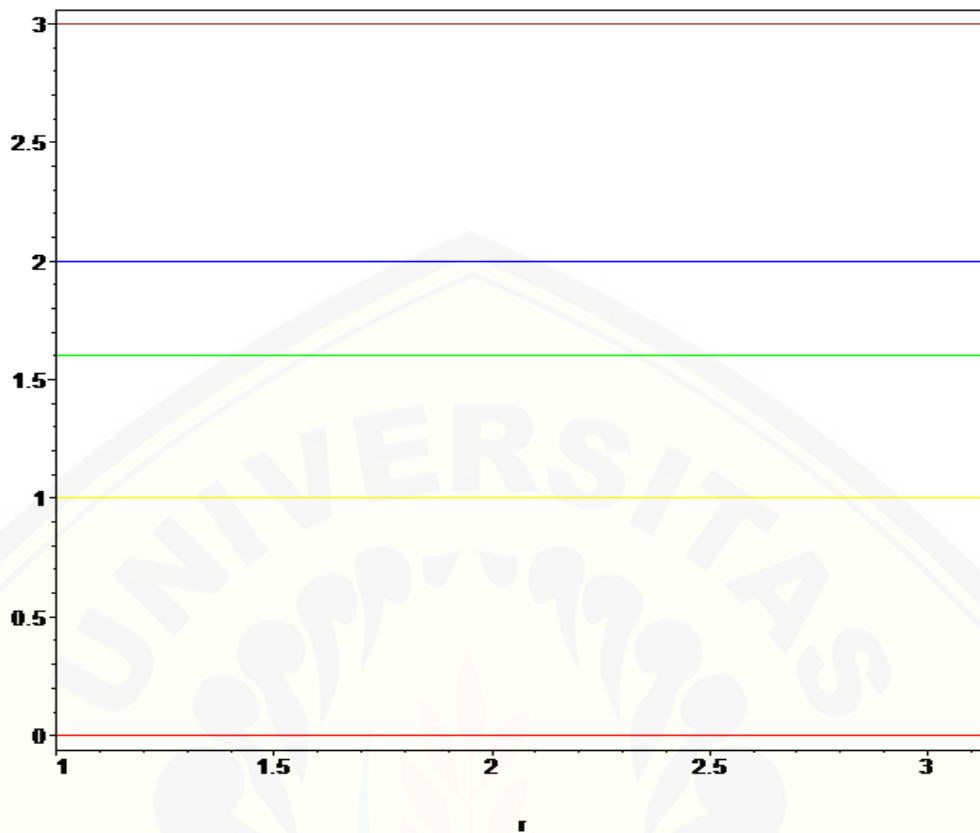
$$p132 := \text{invlaplace}(u(r, s), s, t) = 2 t$$

> **u12:=(r,t)->2*t;**

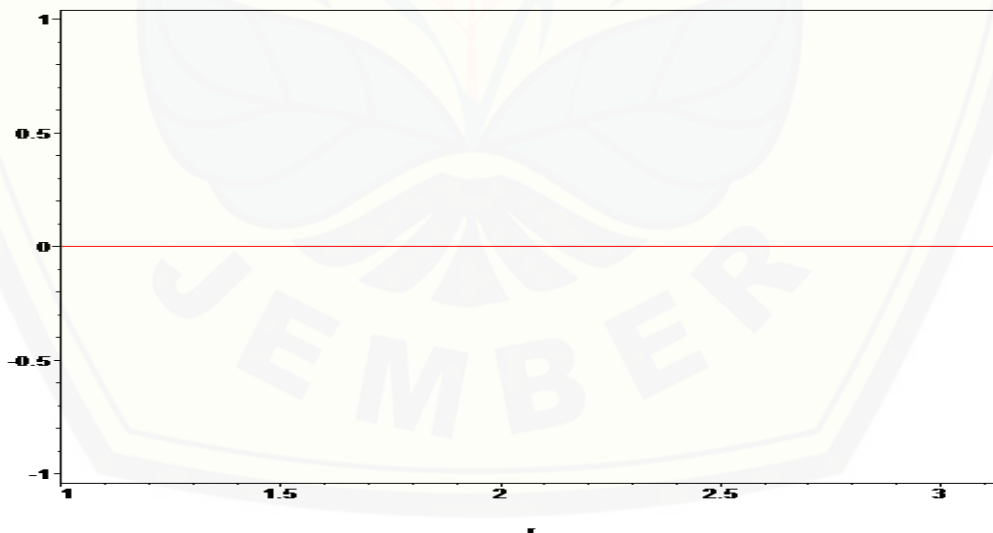
u12 := (r, t) → 2 t

>

plot({u12(r,0),u12(r,0.5),u12(r,0.8),u12(r,1),u12(r,1.5)},r=Pi..1,axes=boxed,color=[red,blue,yellow,green,brown]);



```
> plot(u12(r,0),r=Pi..1,axes=boxed,color=red);
```



1.3 Jika diketahui bahwa nilai awal yaitu $u(r,0)=0$ dan $u'(r,0)=\cosh(r)$ dengan $C^2=k=3$

```
> p33:=laplace(p2,t,s);
```

$$p33 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - D_2(u)(r, 0) - s u(r, 0) =$$

$$k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2k \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p43:=subs(k=3,u(r,0)=0,D[2](u)(r,0)=cosh(r),p33);**

$$p43 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - \cosh(r) =$$

$$3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p53:=3*diff(u(r,s),r)+(6/r)*diff(u(r,s),r)-s^2*u(r,s)=-cosh(r);**

$$p53 := 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, s) \right)}{r} - s^2 u(r, s) = -\cosh(r)$$

> **p63:=dsolve(p53,u(r,s));**

$$p63 := u(r, s) =$$

$$\frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s)}{r} + \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s)}{r} + \frac{r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)}{r(s^2 - 3)^2}$$

dengan memasukkan syarat batas $U(0,s)=0$ didapat

> **p73:=sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s)+cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s)+(r*(s^2-3)*cosh(r)+6*sinh(r))/(s^2-3)^2=0;**

$$p73 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s) + \frac{r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)}{(s^2 - 3)^2} = 0$$

> **p83:=subs(r=0,p73);**

$$p83 := \sinh(0) _F2(s) + \cosh(0) _F1(s) + \frac{6 \sinh(0)}{(s^2 - 3)^2} = 0$$

> **f1_3=0;**

$$f1_3 = 0$$

selanjutnya limit r mendekati tak hingga = 0, didapat

> **p93:=limit(p73,r=infinity);**

`p93 :=`

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s) + \frac{r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)}{(s^2 - 3)^2} = 0$$

`> p103:=sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s)=-cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s);`

$$p103 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) = -\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s)$$

`> p113:=subs(_F1(s)=0,p103);`

$$p113 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) = 0$$

`> p123:=subs(_F1=0,_F2=0,p63);`

`p123 :=`

$$u(r, s) = \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) 0(s)}{r} + \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) 0(s)}{r} + \frac{r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)}{r(s^2 - 3)^2}$$

`> p133:=(r*(s^2-3)*cosh(r)+6*sinh(r))/r/(s^2-3)^2;`

$$p133 := \frac{r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)}{r(s^2 - 3)^2}$$

`> p143:=invlaplace(p133,s,t);`

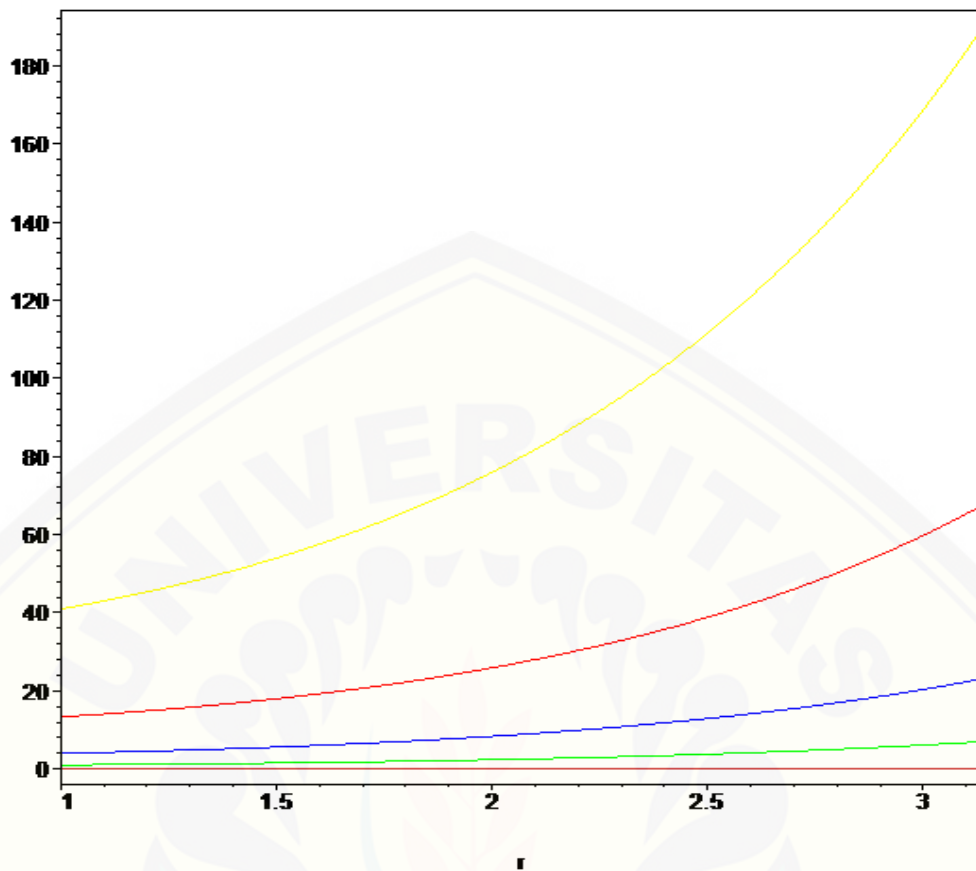
$$p143 := \frac{t \sinh(r) \cosh(\sqrt{3} t)}{r} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3} (\cosh(r) r - \sinh(r)) \sinh(\sqrt{3} t)}{r}$$

`> u13:=(r,t)->t*sinh(r)*cosh(3^(1/2)*t)/r+1/3*3^(1/2)*(cosh(r)*r-sinh(r))*sinh(3^(1/2)*t)/r;`

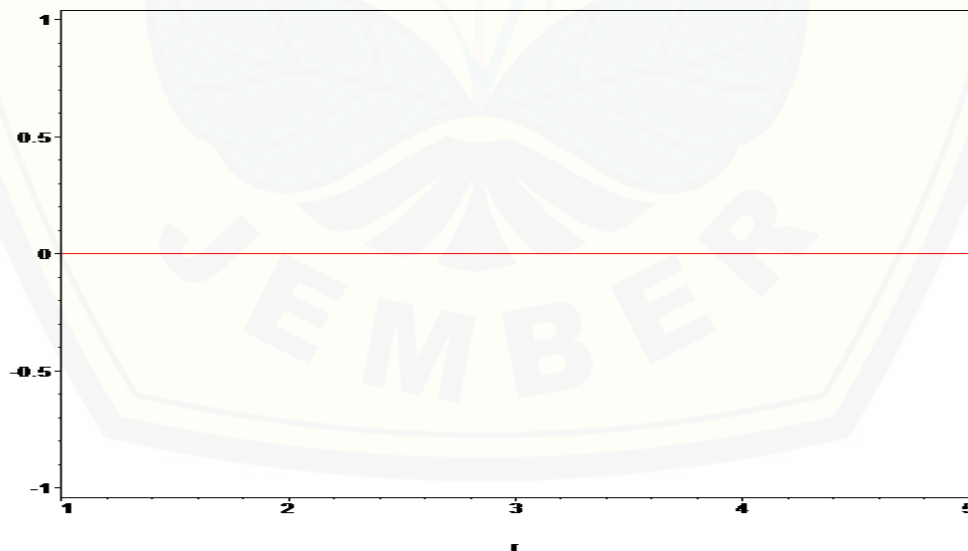
$$u13 := (r, t) \rightarrow \frac{t \sinh(r) \cosh(\sqrt{3} t)}{r} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3} (\cosh(r) r - \sinh(r)) \sinh(\sqrt{3} t)}{r}$$

`>`

`plot({u13(r,0),u13(r,0.5),u13(r,1),u13(r,1.5),u13(r,2)},r=Pi..1,axes=boxed,color=[orange,blue,yellow,green,red]);`



> `plot(u13(r,0),r=1..5,axes=boxed,color=red);`



2.1 Jika diketahui bahwa nilai awal yaitu $u(r,0)=\sin(r)$ dan $u'(r,0)=0$ dengan $C^2=k=1$

> `p3_2:=laplace(p2,t,s);`

$$p3_2 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - D_2(u)(r, 0) - s u(r, 0) =$$

$$k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2k \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p4_2:=subs(k=1,u(r,0)=sin(r),D[2](u)(r,0)=0,p3_2);**

$$p4_2 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - s \sin(r) =$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p5_2:=diff(u(r,s),`\$(r,2))+2/r*diff(u(r,s),r)-s^2*u(r,s)=-s*sin(r);**

$$p5_2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s) \right) + \frac{2 \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, s) \right)}{r} - s^2 u(r, s) = -s \sin(r)$$

> **p6_2:=dsolve(p5_2,u(r,s));**

$$p6_2 := u(r, s) = \frac{\sinh(s r) _F2(s)}{r} + \frac{\cosh(s r) _F1(s)}{r} + \frac{1}{4} \left(\begin{aligned} &(s^3 r I + (-r - I) s^2 + (r I + 2) s + I - r) (-\sinh(s r) + \cosh(s r)) e^{(-r(-s+I))} \\ &- (\sinh(s r) + \cosh(s r)) (s^3 r I + (I - r) s^2 + (-2 + r I) s - r - I) e^{(r(-s+I))} \\ &+ (\sinh(s r) + \cosh(s r)) (s^3 r I + (r + I) s^2 + (r I + 2) s - I + r) e^{(-r(s+I))} \\ &- (s^3 r I + (-I + r) s^2 + (-2 + r I) s + r + I) e^{(r(s+I))} (-\sinh(s r) + \cosh(s r)) \end{aligned} \right) / (r (s^2 + 1)^2)$$

1.2 Jika diketahui bahwa nilai awal yaitu $u(r,0)=2$ dan $u'(r,0)=0$ dengan $C^2=k=3$

> **p32_2:=laplace(p2,t,s);**

$$p32_2 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - D_2(u)(r, 0) - s u(r, 0) =$$

$$k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2k \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p42_2:=subs(k=3,u(r,0)=2,D[2](u)(r,0)=0,p32_2);**

$$p42_2 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - 2 s =$$

$$3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p52_2:=3*diff(u(r,s),`\$(r,2))+6/r*diff(u(r,s),r)-s^2*u(r,s)=-2*s;**

$$p52_2 := 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, s) \right)}{r} - s^2 u(r, s) = -2s$$

> **p62_2:=dsolve(p52_2,u(r,s));**

$$p62_2 := u(r, s) = \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s)}{r} + \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s)}{r} + \frac{2}{s}$$

dengan memasukkan $U(0,s)=0$ didapat

>

p72_2:=sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s)+cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s)+r*2/s=0;

$$p72_2 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s) + \frac{2r}{s} = 0$$

> **p82_2:=subs(r=0,p72_2);**

$$p82_2 := \sinh(0) _F2(s) + \cosh(0) _F1(s) = 0$$

> **f1_22:=0;**

$$f1_22 := 0$$

selanjutnya dari limit r mendekati tak hingga = 0, diperoleh

> **p92_2:=limit(p72_2,r=infinity);**

$$p92_2 := \lim_{r \rightarrow \infty} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s) + \frac{2r}{s} = 0$$

> **p102_2:=sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s)=-cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s);**

$$p102_2 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) = -\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s)$$

> **p112_2:=subs(_F1(s)=f1_22,p102_2);**

$$p112_2 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) = 0$$

> **f2_22=0;**

$$f2_22 = 0$$

> **p122_2:=subs(_F1(s)=0,_F2(s)=0,p62_2);**

$$p122_2 := u(r, s) = \frac{2}{s}$$

> **p132_2:=invlaplace(p122_2,s,t);**

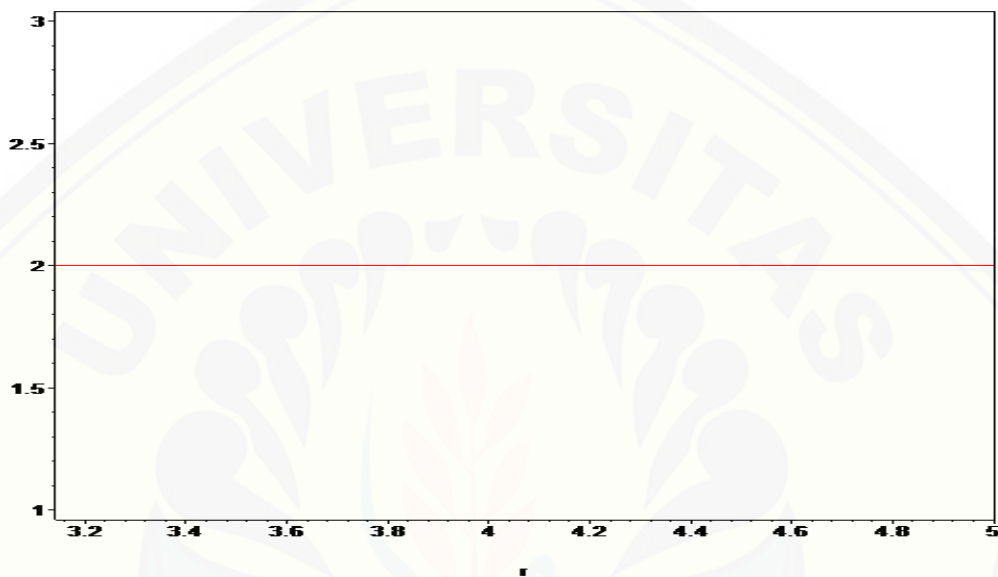
```
p132_2 := invlaplace(u(r, s), s, t) = 2
```

```
> u12_2 := (r, t) -> 2;
```

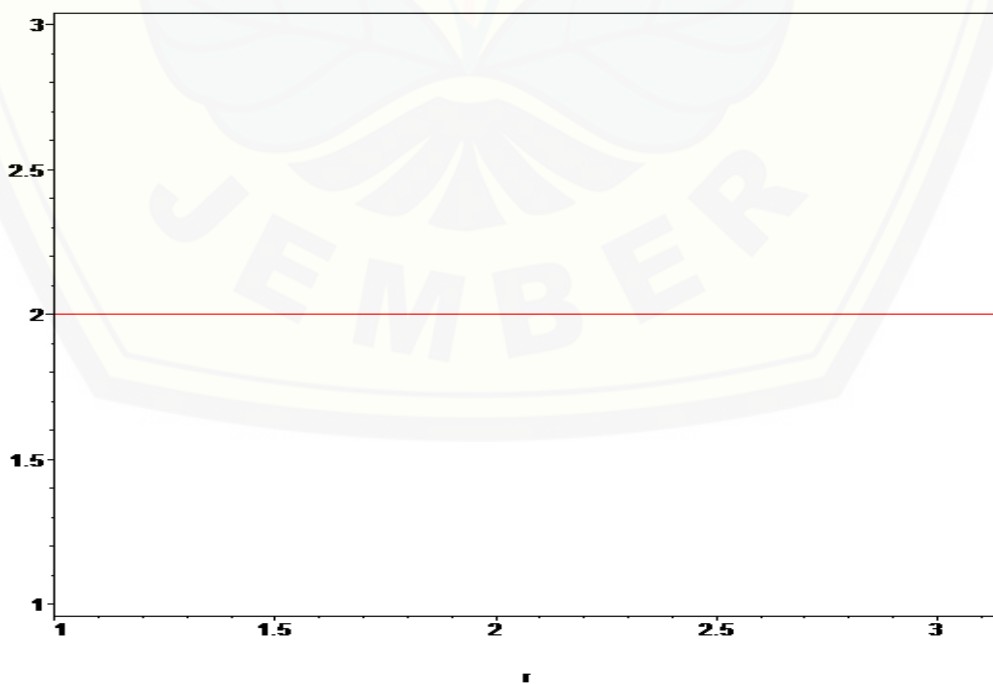
```
u12_2 := (r, t) -> 2
```

```
>
```

```
plot({u12_2(r,0),u12_2(r,0.5),u12_2(r,0.8),u12_2(r,1),u12_2(r,1.5)},r=Pi..5,axe  
s=boxed,color=[red,blue,yellow,green,brown]);
```



```
> plot(u12_2(r,0),r=Pi..1,axes=boxed,color=red);
```



2.3 Jika diketahui bahwa nilai awal yaitu $u(r,0)=\cosh(r)$ dan $u'(r,0)=0$ dengan $C^2=k=3$

> **p33_2:=laplace(p2,t,s);**

$$p33_2 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - D_2(u)(r, 0) - s u(r, 0) =$$

$$k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{2k \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p43_2:=subs(k=3,u(r,0)=cosh(r),D[2](u)(r,0)=0,p33_2);**

$$p43_2 := s^2 \text{laplace}(u(r, t), t, s) - s \cosh(r) =$$

$$3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, t), t, s) \right)}{r}$$

> **p53_2:=3*diff(u(r,s),`r`)+6/r*diff(u(r,s),r)-s^2*u(r,s)=-s*cosh(r);**

$$p53_2 := 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s) \right) + \frac{6 \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, s) \right)}{r} - s^2 u(r, s) = -s \cosh(r)$$

> **p63_2:=dsolve(p53_2,u(r,s));**

$$p63_2 := u(r, s) =$$

$$\frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s)}{r} + \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s)}{r} + \frac{(r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)) s}{r(s^2 - 3)^2}$$

dengan memasukkan syarat batas $U(0,s)=0$ didapat

>

p73_2:=sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s)+cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s)+r*(r*(s^

2-3)*cosh(r)+6*sinh(r))*s/r/(s^2-3)^2;

$$p73_2 :=$$

$$\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) _F1(s) + \frac{(r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)) s}{(s^2 - 3)^2}$$

> **p83_2:=subs(r=0,p73_2);**

$$p83_2 := \sinh(0) _F2(s) + \cosh(0) _F1(s) + \frac{6 \sinh(0) s}{(s^2 - 3)^2}$$

> **f1_32=0;**

$$f1_32 = 0$$

selanjutnya limit r mendekati tak hingga = 0, didapat

> **p93_2:=limit(p73_2,r=infinity);**

$$p93_2 := \lim_{r \rightarrow \infty} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F2(s) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F1(s) + \frac{(r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)) s}{(s^2 - 3)^2}$$

> **p103_2:=sinh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F2(s)=-cosh(1/3*3^(1/2)*s*r)*_F1(s);**

$$p103_2 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F2(s) = -\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F1(s)$$

> **p113_2:=subs(_F1(s)=0,p103_2);**

$$p113_2 := \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) F2(s) = 0$$

> **p123_2:=subs(_F1=0,_F2=0,p63_2);**

$$p123_2 := u(r, s) = \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) 0(s)}{r} + \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right) 0(s)}{r} + \frac{(r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)) s}{r(s^2 - 3)^2}$$

> **p133_2:=(r*(s^2-3)*cosh(r)+6*sinh(r))*s/r/(s^2-3)^2;**

$$p133_2 := \frac{(r(s^2 - 3) \cosh(r) + 6 \sinh(r)) s}{r(s^2 - 3)^2}$$

> **p143_2:=invlaplace(p133_2,s,t);**

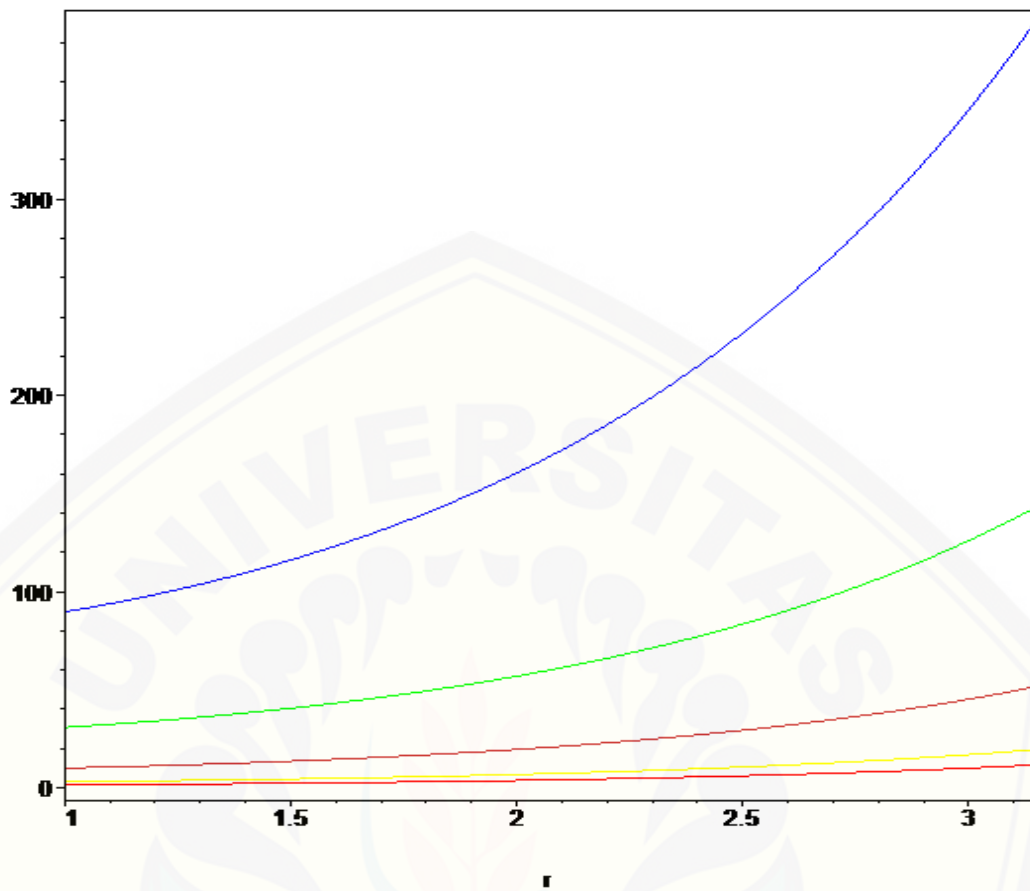
$$p143_2 := \cosh(r) \cosh(\sqrt{3} t) + \frac{\sinh(r) t \sqrt{3} \sinh(\sqrt{3} t)}{r}$$

> **u13_2:=(r,t)->cosh(r)*cosh(3^(1/2)*t)+sinh(r)*t*3^(1/2)*sinh(3^(1/2)*t)/r;**

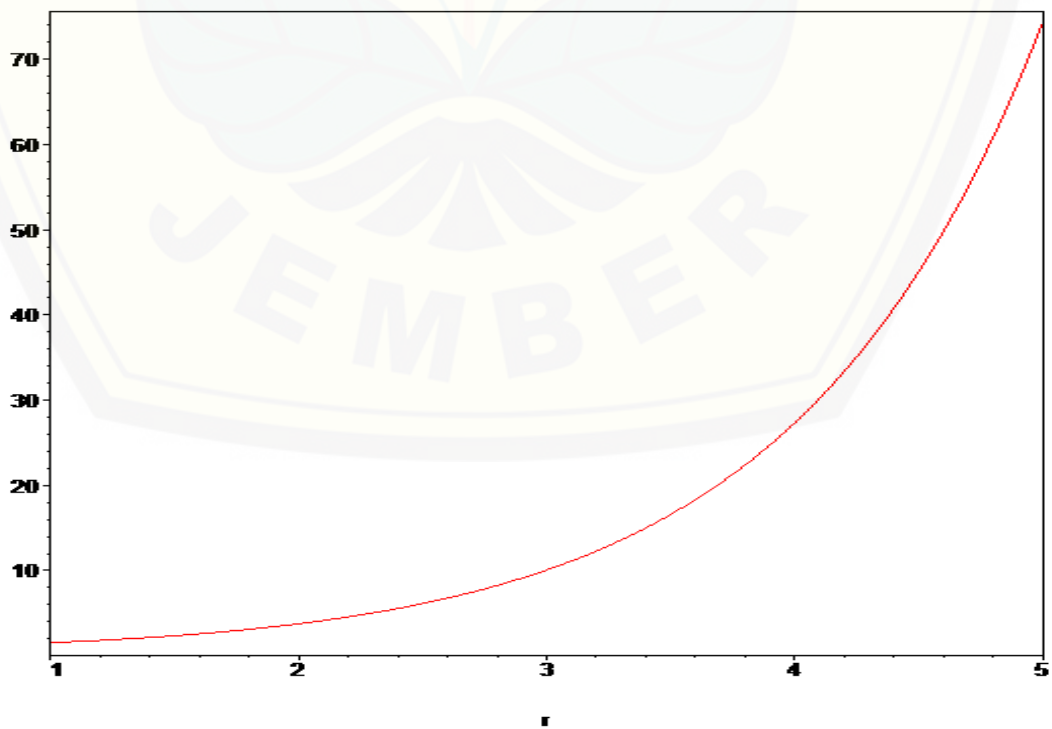
$$u13_2 := (r, t) \rightarrow \cosh(r) \cosh(\sqrt{3} t) + \frac{\sinh(r) t \sqrt{3} \sinh(\sqrt{3} t)}{r}$$

>

**plot({u13_2(r,0),u13_2(r,0.5),u13_2(r,1),u13_2(r,1.5),u13_2(r,2)},r=Pi..1,axes
=boxed,color=[orange,blue,yellow,green,red]);**



```
> plot(u13_2(r,0),r=1..5,axes=boxed,color=red);
```



> **limit(sinh(1/3*3^(1/2)*s*r),r=infinity);**

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right)$$

> **limit(cosh(1/3*3^(1/2)*s*r),r=infinity);**

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \cosh\left(\frac{\sqrt{3} s r}{3}\right)$$

> **limit((r*(s^2-3)*cosh(r)+6*sinh(r))/(s^2-3)^2,r=infinity);**

$$\frac{\infty}{\text{signum}(s^2 - 3)}$$

