MATEMATIKA DASAR

Buku ini dibuat sebagai buku pendamping mahasiswa yang dilengkapi ringkasan materi dengan latihan soal serta penyelesaiannya.

Sumber Gambar: https://www.youtube.com/watch?v=UMd-y2Q5I2c

Dr. Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.

PRAKATA

Buku ini ditulis guna memenuhi kebutuhan adanya buku pegangan kuliah, khususnya bagi matakuliah Matematika Dasar untuk Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar (PGSD) di FKIP Universitas Jember. Kebutuhan ini sangat dirasakan terutama karena buku Matematika Dasar untuk mahasiswa PGSD tidak ada. Dengan adanya buku ini diharapkan dapat membantu mahasiswa dalam perkuliahan, dan kekurangan buku dapat teratasi.

Buku ini memuat 3 bab yaitu: bab 1 tentang penalaran matematika; bab 2 tentang teori himpunan; dan bab 3 tentang relasi dan fungsi.

Disadari dengan dengan sepenuh hati, bahwa buku ini belum sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi sempurnanya buku ini. Demikian, semoga buku ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Program Studi PGSD FKIP Universitas Jember.

Jember, Agustus 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENALARAN MATEMATIKA

1.1 Deskripsi Matakuliah

Membahas masalah Kalimat pernyataan, negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi, konvers, invers, kontraposisi, modus ponens, modus tollen, dan silogisme.

1.2 Capaian Pembelajaran

Meningkatkan wawasan untuk mampu berpikir secara deduktif dalam memahami konsep-konsep dasar matematika, khususnya yang banyak digunakan yaitu penalaran matematika.

1.3 Kompetensi dasar

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan mahasiswa dapat:

a. membedakan pernyataan dan bukan pernyataan;
b. membuat contoh-contoh pernyataan dan contoh-contoh kalimat yang bukan pernyataan;
c. menentukan negasi suatu pernyataan;
d. menentukan nilai kebenaran dari konjungsi dan disjungsi serta dapat menentukan negasinya;
e. menentukan nilai kebenaran suatu implikasi serta invers, konvers dan kontraposisinya;
f. menentukan negasi dari suatu impliksai;
g. menentukan konvers, invers dan kontraposisi dari suatu implikasi;
h. menerapkan aturan-aturan penyimpulan untuk memperoleh argumen yang benar;
i. menggunakan modus ponens, modus tolens dan silogisme untuk menarik kesimpulan.

1.4 Uraian Materi

1.4.1 Kalimat Pernyataan (Proposisi)

Kalimat pernyataan (proposisi) adalah kalimat yang hanya mempunyai nilai "**benar**" saja atau "**salah**" saja, tetapi tidak sekaligus bernilai **benar** dan **salah** (kedua-duanya).

Contoh 1

Proposisi bernilai benar

a. Kota Jember terletak di Propinsi Jawa Timur.
b. Sebuah segi empat mempunyai empat sisi.

Contoh 2

Proposisi bernilai salah

a. Surabaya adalah ibukota Jawa Tengah.
b. Kambing adalah hewan berkaki dua.

Kalimat bukan pernyataan adalah kalimat yang tidak dapat atau belum dapat diketahui nilai kebenarannya. Kata “kalimat” yang termasuk dalam pembahasan ini adalah kalimat terbuka, kalimat perintah, kalimat tanya, dan kalimat harapan.

Contoh 3

a. $2x - 5 = 7$ (**kalimat terbuka)**.
b. Hapuslah papan tulis itu! (**kalimat perintah)**.
c. Mengapa Ani hari ini tidak masuk? (**kalimat pertanyaan**).
d. Mudah-mudahan kamu lulus ujian. (**Kalimat harapan**).

Secara lengkap penjelasan dan contoh disajikan pada bagian berikut.

1.4.2 Kalimat Terbuka

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum diketahui nilai kebenarannya, karena masih memiliki variabel atau peubah.

Contoh 4

a. $3n + 2 = 20$;
b. $y^2 + 3y + 2 = 0$;
c. $x - y = 30$;
d. $x - y = 4 + z$.

1.4.3 Pernyataan Berkuantor

Pernyataan berkuantor adalah proposisi yang menunjukkan suatu keberadaan dan biasanya menggunakan kata-kata **semua** atau **setiap, beberapa** atau **ada**. Terdapat dua jenis kuantor, yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial.

A. Kuantor Universal

Suatu proposisi yang benar secara menyeluruh dalam semesta pembicaraan, kuantifikasi ini menggunakan kata **semua** atau **setiap**.

Contoh 5

a. Semua mahasiswa penerima beasiswa mengikuti upacara bendera setiap tanggal 17 Agustus.

b. Setiap mahasiswa menggunakan baju berkrah saat ke kampus.
c. Semua dosen minimal berijazah S2.

B. Kuantor Eksistensial

Proposisi ini dimaksudkan untuk menyatakan bahwa paling tidak ada satu unsur yang membuat proposisi itu benar. Kata yang digunakan adalah **beberapa** atau **ada**.

Contoh 6

a. Beberapa mahasiswa sedang melamun.
b. Ada mahasiswa yang sedang berdoa sebelum belajar.

1.4.4 Ingkaran/Negasi

Ingkaran/negasi yaitu suatu kebalikan dari suatu pernyataan. Misalnya *p* adalah suatu pernyataan, maka negasi atau ingkaran *p* biasa ditulis dengan simbol "$\sim p$".

Contoh 7

1) Kalimat biasa
   a. p : Jakarta ibukota Indonesia
      $\sim p$: Jakarta *bukan* ibukota Indonesia
   b. p : $3+4=7$
      $\sim p$: Tidak benar bahwa $3+4=7$ atau $3+4\neq 7$

2) Kalimat berkuantor
   Aturan negasi untuk kuantifikasi adalah sebagai berikut.
   (1) Semua p adalah q **negasinya** beberapa p bukan q.
   (2) Beberapa p adalah q **negasinya** semua p bukan q

Contoh 8

a. Semua mahasiswa membawa buku matematika **negasinya** beberapa mahasiswa tidak membawa buku matematika.
b. Setiap mahasiswa tidak membeli buku **negasinya** beberapa mahasiswa membeli buku.

1.4.5 Pernyataan Majemuk

Pernyataan majemuk adalah kalimat yang dirangkai dengan perangkai logika. Pernyataan-pernyataan yang dirangkai masing-masing disebut pernyataan tunggal. Perangkai logika terdiri dari konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi.

A. Konjungsi ($\wedge$)

Konjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perangkai "dan". Konjungsi dua pernyataan p dan q ditulis "$p \wedge q$" dibaca (p dan q). Pernyataan majemuk p dan q bernilai benar (B) jika dan hanya jika masing-masing pernyataan p dan q bernilai benar (B), sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran p dan q lain dari pernyataan majemuk "$p \wedge q$" bernilai salah (S).

Contoh 9

1. p : Jakarta adalah Ibu Kota RI. (B)
   q : Bandung terletak di pulau Jawa. (B)
   $p \wedge q$: Jakarta adalah Ibu Kota RI **dan** Bandung terletak di pulau Jawa. (B)
2. p : 7 adalah bilangan prima. (B)
   q : 7 adalah bilangan genap. (S)
   $p \wedge q$: 7 adalah bilangan prima **dan** 7 adalah bilangan genap. (S)
3. p : 8 lebih besar dari 13. (S)
   q : matahari terbit dari timur. (B)
   $p \wedge q$: 8 lebih besar dari 13 **dan** matahari terbit dari timur. (S)
4. p : seekor lembu berkaki seribu. (S)
   q : 13 habis dibagi 4. (S)
   $p \wedge q$: seekor lembu berkaki seribu **dan** 13 habis dibagi 4. (S)

Dari keempat contoh di atas, dapat disimpulkan seperti terlihat pada Tabel berikut.

Tabel 1. Tabel Nilai Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

B. Disjungsi ($\vee$)

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perangkai "$\vee$". Proposisi p atau q dinotasikan $p \vee q$. Disjungsi dibedakan menjadi 2 macam, yaitu disjungsi **inklusif** dan disjungsi **ekslusif**.

Contoh 10

p : Amin pergi ke pasar
q : Amin bermai bola
$p \vee q$: Amin pergi ke pasar **atau** Amin bermain bola

1. Disjungsi inklusif

Jika p dan q merupakan dua buah pernyataan, maka $p \vee q$ bernilai benar (B). Jika p dan q keduanya bernilai benar atau salah satu bernilai salah. Sebaliknya $p \vee q$ bernilai salah (S) jika keduanya bernilai salah.

Contoh 11

p : Pak Budi orang kaya

q : Pak Budi rajin bekerja

$p \vee q$: Pak Budi orang kaya atau rajin bekerja

Di sini mempunyai dua pengertian yaitu:

(1) pak Budi orang kaya saja atau rajin bekerja saja tetapi tidak keduanya.

(2) pak Budi orang kaya saja atau rajin bekerja saja tetapi mungkin juga keduanya.

Tabel 2. Tabel nilai kebenaran disjungsi inklusif

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

2. Disjungsi eksklusif

Adalah jika p dan q merupakan dua buah pernyataan maka $p \vee q$ bernilai benar (B) jika salah satu bernilai salah (S). Sebaliknya $p \vee q$ **bernilai salah (S)** jika keduanya bernilai benar (B) atau keduanya bernilai salah (S).

Contoh 12

p : Andi makan Nasi

q : Andi makan roti

$p \vee q$: Andi makan nasi atau roti

Dalam contoh di atas, Andi hanya makan nasi saja atau roti saja, dan tidak mungkin makan nasi dan sekaligus makan roti.

Tabel 3. Tabel nilai kebenaran disjungsi eksklusif

p	q	$p \underline{\vee} q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

1.4.6 Implikasi (Kondisional)

Implikasi adalah operasi penggabungan dua buah pernyataan yang menggunakan penghubung logika "jika…, maka...”, yang lambangnya "$\rightarrow$" atau "$\Rightarrow$". Implikasi dari pernyataan p dan q ditulis $p \rightarrow q$ atau $p \Rightarrow q$ dibaca "jika p, maka q".

Pernyataan bersyarat $p \rightarrow q$ juga dapat dibaca "p **hanya jika** q" atau "p adalah **syarat cukup** bagi q" atau "q adalah **syarat perlu** bagi p".

Tabel 4. Tabel nilai kebenaran Implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Catatan:
Dari tabel di atas dapat dikatakan bahwa implikasi $p \rightarrow q$ bernilai salah (S) jika antiseden bernilai benar (B) dan konsekuen bernilai salah (S), jika tidak demikian maka $p \rightarrow q$ bernilai benar (B).

Contoh 13
Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan yang disusun oleh proposisi p dan q berikut.

p : Hari ini matahari bersinar terang. (B)

q : Hari ini angin bertiup kencang. (S)

Tentukan **konklusi** dari pernyataan-pernyataan berikut.
1) Jika hari ini matahari bersinar terang, maka angin bertiup kencang.
2) Jika hari ini matahari bersinar terang, maka angin tidak bertiup kencang.
3) Jika hari ini matahari tidak bersinar terang, maka angin bertiup kencang.
4) Jika hari ini matahari tidak bersinar terang, maka angin tidak bertiup kencang.

Penyelesaian
1) Pernyataan majemuk bernilai salah (S)
2) Pernyataan majemuk bernilai benar (B)
3) Pernyataan majemuk bernilai benar (B)
4) Pernyataan majemuk bernilai benar (B)

1.4.7 Biimplikasi (Bikondisional)

Biimplikasi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan penghubung logika "… jika dan hanya jika …” **disimbolkan** "$\leftrightarrow$" atau "$\Leftrightarrow$". Biimplikasi dari pernyataan p dan q ditulis "$p \leftrightarrow q$" atau "$p \Leftrightarrow q$" dibaca p jika dan hanya jika

q dan sering juga dibaca p equivalen q dimana p adalah syarat perlu dan cukup bagi q.

Tabel 5. Tabel nilai kebenaran Biimplikasi

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dari tabel di atas dapat disebutkan bahwa $p \leftrightarrow q$ bernilai benar jika kedua komponen penyusunnya memiliki nilai kebenaran yang sama (benar semua atau salah semua).

Contoh 14

Tentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk yang disusun oleh proposisi p dan q jika $p: 2$ adalah bilangan prima dan $q: 2+6=12$

1) 2 adalah bilangan prima jika dan hanya jika $2+6=12$
2) 2 bilangan prima jika dan hanya jika $2+6 \neq 12$
3) 2 bukan bilangan prima jika dan hanya jika $2+6=12$
4) 2 bukan bilangan prima jika dan hanya jika $2+6 \neq 12$

Penyelesaian

1) Pernyataan majemuk bernilai salah (S).
2) Pernyataan majemuk bernilai benar (B).
3) Pernyataan majemuk bernilai salah (S).
4) Pernyataan majemuk bernilai benar (B).

1.4.8 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

A. Konvers

Dapat dibentuk implikasi baru dengan menukarkan pendahulu dengan pengikutnya dan sebaliknya. Jadi, jika diketahui implikasi $p \rightarrow q$ maka **konversnya** adalah $q \rightarrow p$.

Contoh 15

Tentukan konvers dari implisai berikut ini.

1) Jika 7 membagi habis 15 maka sisanya daripembagiannya adalah nol.
2) Jika Andi rajin belajar maka dia pasti naik kelas.

Penyelesaian

1) Konvers: Jika sisa pembagiannya adalah nol maka 7 membagi habis 15.
2) Konvers: Jika Andi naik kelas maka dia rajin belajar.

B. Invers

Suatu implikasi, selain dapat dibentuk konversnya dapat pula dibentuk implikasi baru dengan negasinya yang disebut Invers. Jika diketahui implikasi $p \to q$ maka **inversnya** adalah $\sim p \to \sim q$.

Contoh 16

Tuliskan invers dari implikasi-implikasi berikut ini

1) Jika 0 adalah bilangan genap maka akan habis dibagi 2.
2) Jika mahasiswa PGSD belajar Logika maka mereka menempuh Matakuliah Matematika Dasar.

Penyelesaian

1) Inversnya: Jika 0 **bukan** bilangan genap maka 0 **tidak** akan habis dibagi 2.
2) Inversnya: Jika mahasiswa PGSD **tidak** belajar Logika maka mereka **tidak** menempuh Matakuliah Matematika Dasar

C. Kontraposisi

Dari suatu implikasi, selain dapat dibentuk konvers dan invers juga dapat dibentuk implikasi baru disebut kontraposisi. Jika diketahui implikasi $p \to q$ maka **kontraposisinya** adalah $\sim q \to \sim p$.

Contoh 17

Tentukan kontraposisi dari implikasi berikut ini!

1) Jika matahari terbit dari Barat maka Budi lulus ujian.
2) Jika 7 adalah faktor dari 16 maka 16 kelipatan dari 8.

Penyelesaian

1) Kontraposisinya: Jika Budi tidak lulus ujian maka matahari tidak terbit dari Barat.
2) Kontraposisinya: Jika 16 bukan kelipatan dari 8 maka 7 bukan faktor dari 16.

D. Hubungan Antara Implikasi, Konvers, Invers dan Kontraposisi

Berdasarkan pembahasan di atas terkait implikasi, konversi, invers dan kontraposisi dapat disajikan hubungan antar keempat pembahasan di atas seperti terlihat pada tabel berikut.

Tabel 6. Tabel Nilai Kebenaran Konvers, Invers, dan Kontraposisi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \to q$	Konvers $q \to p$	Invers $\sim p \to \sim q$	Kontraposisi $\sim q \to \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	S	B	B

Keterangan:
- Implikasi equivalen dengan kontraposisi.
- Konvers equivalen dengan invers.

1.4.9 Penarikan Kesimpulan

Sebuah penarikan kesimpulan dikatakan valid jika kebenaran konjungsi proposisi pada premis mengakibatkan secara logika kebenaran konklusi. Penarikan kesimpulan ada 3 macam, yaitu:

A. Modus Ponens

Modus ponens adalah salah satu bentuk dari hukum pengasingan yang bentuknya argumentasi.

Premis 1 : $p \to q$
Premis 2 : p
Konklusi : q

Jika dinyatakan sebagai sebuah implikasi maka argumen $[(p \to q) \wedge p] \to q$ yang merupakan sebuah *tautologi*. Oleh karena itu, argumen tersebut **valid**. Perhatikan Tabel berikut.

Tabel 7. Tabel Kebenaran Modus Ponens

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Nilai kebenaran pada kolom terakhir menunjukan bahwa $[(p \to q) \wedge p] \to q$ adalah Tautologi.

Contoh 18

Diberikan dua pernyataan berikut.

Premis 1: Jika mahasiswa belajar maka dia pasti lulus matakuliah matematika dasar

Premis 2: Mahasiswa lulus matakuliah matematia dasar.

Tentukan kesimpulan yang valid dari kedua argumen di atas.

Penyelesaian

Premis 1 : $p \to q$
Premis 2 : p
Konklusi : q

Jadi kesimpulan yang sah pada contoh di atas adalah **mahasiswa lulus matakuliah matematika dasar.**

B. Modus Tollen

Jika diketahui premis-premisnya $p \to q$ dan $\sim q$ maka dapat diambil konklusi $\sim p$. Penarikan kesimpulan seperti itu disebut modus tollen atau kaidah penolakan.

Premis 1 : $p \to q$
Premis 2 : $\sim q$
Konklusi : $\sim p$

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam Modus Tollen $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$

Tabel 8. Tabel Kebenaran Modus Tollen

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \sim q$	$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Nilai kebenaran pada kolom terakhir menunjukan bahwa $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$ adalah Tautologi.

Contoh 19

Premis 1: Jika nilai akhir dapat minimal 80 maka akan mendapatkan A.
Premis 2: Toni mendapat nilai bukan A.

Penyelesaian

Premis 1 : $p \to q$
Premis 2 : $\sim q$
Konklusi : $\sim p$

Jadi nilai akhir Toni tidak sampai 80.

C. Silogisme

Jika keterangan premis-premisnya $p \to q$ dan $q \to r$ maka dapat diambil konklusi $p \to r$. Penarikan kesimpulan seperti itu disebut Silogisme.

$$\begin{array}{lcl} \textbf{Premis 1} & : & p \to q \\ \textbf{Premis 2} & : & \underline{q \to r} \\ \textbf{Konklusi} & : & p \to r \end{array}$$

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam silogisme

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

Tabel 9. Tabel Kebenaran Silogisme

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Nilai kebenaran pada kolom terakhir menunjukan bahwa $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ adalah Tautologi.

Contoh 20

Premis 1 : Jika mahasiswa belajar maka akan memahami logika matematika.

Premis 2 : Jika memahami logika matematika maka akan mendapatkan nilai bagus.

Penyelesaian

$$\begin{array}{lcl} \textbf{Premis 1} & : & p \to q \\ \textbf{Premis 2} & : & \underline{q \to r} \\ \textbf{Konklusi} & : & p \to r \end{array}$$

Jadi jawabannya adalah jika mahasiswa belajar maka akan mendapatkan nilai bagus

1.5 Rangkuman

1. Kalimat pernyataan/roposisi adalah kalimat yang hanya mempunyai nilai **benar** saja atau **salah** saja, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua-duanya.
2. Pernyataan berkuantor adalah proposisi yang menunjukkan suatu keberadaan dan biasanya menggunakan kata-kata **semua, setiap, beberapa, ada**. Ada dua jenis kuantor, yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial. **Kuantor Universal:** Suatu proposisi yang benar secara menyeluruh dalam semesta pembicaraan, kuantifikasi ini menggunakan kata **semua** atau **setiap**. **Kuantor Eksistensial:** Proposisi ini dimaksudkan untuk menyatakan bahwa paling tidak ada satu unsur yang membuat proposisi itu benar, kata yang digunakan adalah **beberapa** atau **ada**.
3. Ingkaran disebut juga **negasi** yaitu suatu kebalikan dari suatu pernyataan. Misalnya p adalah suatu pernyataan, maka negasi atau ingkaran p biasa ditulis dengan lambang $(\sim p)$.
4. Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang dirangkai dengan perangkai logika. Pernyataan-pernyataan yang dirangkai masing-masing disebut pernyataan tunggal. Perangkai logika terdiri dari konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi.
5. Konjungsi adalah proposisi majemuk yang menggunakan perangkai “dan“. Konjungsi dua pernyataan p dan q ditulis $p \wedge q$ dibaca “ p dan q ”. Pernyataan majemuk p dan q bernilai benar (B) jika dan hanya jika masing-masing pernyataan p dan q bernilai benar (B), sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran p dan q lainnya pernyataan majemuk “ $p \wedge q$ ” bernilai salah (S).
6. Disjungsi adalah proposisi majemuk yang menggunakan perangkai “ $\vee$ “. Proposisi “ p atau q “ dinotasikan $p \vee q$. Disjungsi dibedakan menjadi 2 macam, yaitu disjungsi inklusif dan disjungsi ekslusif.
7. Implikasi adalah operasi penggabungan dua buah pernyataan yang menggunakan penghubung logika "jika.., maka...”, yang lambangnya " $\rightarrow$ " atau " $\Rightarrow$ ". Implikasi dari pernyataan p dan q ditulis " $p \rightarrow q$ " atau " $p \Rightarrow q$ " dibaca "jika p, maka q ".
8. Biimplikasi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan penghubung logika "… jika dan hanya jika … " diberi lambang " $\Leftrightarrow$ " atau " $\leftrightarrow$ ". Biimplikasi dari pernyataan p dan q ditulis " $p \Leftrightarrow q$ " atau " $p \leftrightarrow q$ " dibaca " p jika dan hanya jika q " dan sering juga dibaca " p equivalen q " dimana p adalah syarat perlu dan cukup bagi q.

9. Dapat dibentuk implikasi baru dengan menukarkan pendahulu dengan pengikutnya dan sebaliknya. Jadi, jika diketahui implikasi "$p \to q$" maka **konversnya adalah** "$q \to p$"**.**
10. Suatu implikasi, selain dapat dibentuk konversnya dapat pula dibentuk implikasi baru dengan negasinya yang disebut Invers. Jika diketahui implikasi "$p \to q$" maka **inversnya adalah** "$\sim p \to \sim q$"**.**
11. Dari suatu implikasi, selain dapat dibentuk konvers dan invers juga dapat pula dibentuk implikasi baru yang disebut kontraposisi. Jika diketahui implikasi "$p \to q$" maka **kontraposisinya adalah** "$\sim q \to \sim p$".
12. Modus ponens adalah salah satu bentuk dari hukum pengasingan yang bentuknya argumentasi.

$$\begin{array}{lcl} \textbf{Premis 1} & : & p \to q \\ \textbf{Premis 2} & : & \underline{p \qquad\quad} \\ \textbf{Konklusi} & : & q \end{array}$$

Jika dinyatakan sebagai sebuah implikasi maka argumen $[(p \to q) \wedge p] \to q$ merupakan sebuah tautologi. Oleh karena itu, argumen tersebut adalah valid.

- Jika diketahui premis-premisnya $p \to q$ dan $\sim q$ maka dapat diambil konklusi $\sim p$. Penarikan kesimpulan seperti itu disebut modus tollen atau kaidah penolakan.

$$\begin{array}{lcl} \textbf{Premis 1} & : & p \to q \\ \textbf{Premis 2} & : & \underline{\quad \sim q} \\ \textbf{Konklusi} & : & \sim p \end{array}$$

- Jika keterangan premis-premisnya $p \to q$ dan $q \to r$ maka dapat diambil konklusi p → r. Penarikan kesimpulan seperti itu disebut Silogisme.

$$\begin{array}{lcl} \textbf{Premis 1} & : & p \to q \\ \textbf{Premis 2} & : & \underline{q \to r} \\ \textbf{Konklusi} & : & p \to r \end{array}$$

1.6 Soal dan Pembahasan

1. Negasi dari pernyataan: “Jika Eksa pandai mengoperasikan komputer maka diterima sebagai karyawan” adalah…
   A. Eksa pandai mengoperasikan computer tetapi tidak diterima sebagai karyawan
   B. Eksa pandai mengoprasikan computer dan diterima sebagai karyawan
   C. Eksa tidak pandai mengoprasikan computer dan diterima sebagai karyawan

D. Eksa tidak pandai mengoprasikan computer tetapi diterima sebagai karyawan

Penyelesaian

p : Eksa pandai mengoperasikan computer

q : diterima sebagai karyawan

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Sehingga negasi dari pernyataan di atas yaitu

$$\sim (\sim p \vee q) = p \wedge \sim q$$

Jadi jawaban yang benar adalah Eksa pandai mengoperasikan computer tetapi tidak diterima sebagai karyawan (A)

2. Negasi dari kalimat : “Beberapa peserta ujian tidak membawa kartu peserta“ adalah ....
   A. Ada peserta ujian yang tidak membawa kartu peserta
   B. Semua peserta ujian tidak membawa kartu peserta
   C. Setiap peserta ujian membawa kartu peserta
   D. Tidak benar semua peserta ujian membawa kartu peserta

Penyelesaian

Soal nomor dua ini merupakan soal berkuantor. Sehingga Anda harus lebih cermat dalam menyelesaikan soal tipe seperti ini.

Beberapa peserta ujian tidak membawa kartu peserta

Soal di atas dapat ditulis $(\exists(\sim p))$

Sehingga negasi dari pernyataan di atas yaitu

$$\sim (\exists(\sim p))$$

Setiap peserta ujian membawa kartu peserta (C)

3. Nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ adalah …
   A. SSBB
   B. SBSB
   C. SSSB
   D. BBBB

Penyelesaian

Salah satu cara yang dapat digunakan adalah menggunakan tabel

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee q) \to (\sim p \wedge q)$
B	B	S	B	S	S
B	S	S	B	S	S
S	B	B	B	B	B
S	S	B	S	S	B

1.7 Latihan Soal

Agar Anda dapat memahami materi ini dengan baik maka diharapkan Anda dapat menyelesaikan soal-soal berikut dengan tepat.

1. Negasi dari pernyataan "Jika harga naik maka permintaan turun adalah ....
2. Negasi dari pernyataan : "Semua siswa ingin lulus UAN" adalah ....
3. Buktikan bahwa $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$!
4. p : aku sekarang berada di Banyuwangi
   q : aku sekarang berada di Malang
   Dari pernyataan di atas tentukan nilai konjungsinya !
5. Buktikan bahwa $(p \wedge q) \wedge ((\sim p \vee q))$ merupakan kontradiksi!
6. Tentukan nilai kebenaran dari $(p \wedge q) \to \sim (p \wedge q)$
7. Tentukan negasi dari pernyataan : "Jika tidak ada api, maka tidak ada asap"
8. Tentukan nilai kebenaran dari biimplikasi $(16)^{\frac{1}{2}} = 4$ jika dan hanya jika $^{16}\log 4 = \frac{1}{2}$!
9. Carilah nilai x agar kalimat berikut menjadi biimplikasi yang bernilai benar. $3x - 4 = 2x + 2$ jika dan hanya jika 6 adalah bilangan genap?
10. Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan: "jika harga BBM naik maka harga beras naik"?
11. Tentukan pernyataan yang equivalen dengan implikasi berikut: "Jika Indonesia menang maka Markus Horison kiper terbaik"
12. Tentukan kontraposisi dari pernyataan berikut:
    a. "Jika suatu segitiga samakaki maka kedua sudut alasnya sama".
    b. "Jika Ani tersenyum, maka ia bahagia".
    c. "Jika x habis dibagi 4, maka x merupakan bilangan genap".
13. Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari proposisi berikut:
    a. $(p \wedge q) \to r$
    b. $p \to (q \wedge r)$
    c. $\sim p \to (q \wedge \sim r)$
    d. $(p \vee \sim q) \to (\sim p \vee q)$

e. $(q \vee \sim r) \rightarrow (p \wedge r)$

14. Diberikan premis-premis berikut.
    Premis 1 : "Jika Kevin rajin belajar dan patuh pada guru maka ia lulus UAN"
    Premis 2 : "Ia tidak lulus UAN"
    Kesimpulan yang sah dari kedua premis tersebut adalah ....
15. Diketahui premis-premis berikut
    Premis 1 : "Jika n bilangan genap maka n^2 bilangan genap"
    Premis 2 : "Jika n^2 bilangan genap maka n^2+1 bilangan ganjil"
    Kesimpulan dari kedua premis tersebut adalah ....
16. Diketahui premis-premis:
    Premis 1 : "Jika harga BBM naik maka harga sembako naik"
    Premis 2 : "Harga sembako naik"
    Kesimpulan dari kedua premis tersebut adalah ....
17. Diketahui premis-premis berikut.
    Premis 1 : "Jika dolar naik maka harga BBM naik"
    Premis 2 : "Jika harga BBM naik maka harga sembako naik"
    Kesimpulan dari kedua premis tersebut adalah…..

BAB 2
TEORI HIMPUNAN

2.1. Deksripsi Matakuliah

Membahas masalah pengertian himpunan, himpunan bagian, irisan dan gabungan himpunan, himpunan komplemen, dan hukum De Morgan.

2.2. Capaian Pembelajaran

Meningkatkan wawasan untuk mampu berpikir secara deduktif dalam memahami konsep-konsep dasar matematika, khususnya yang banyak digunakan yaitu teori himpunan.

2.3. Kompetensi Dasar

Setelah selesai perkuliahan ini, mahasiswa diharapkan dapat:

1. menjelaskan pengertian himpunan.
2. menentukan himpunan bagian.
3. menentukan irisan himpunan.
4. menenukan gabungan himpunan.
5. menentukan himpunan komplemen.
6. menjelaskan hokum de Morgan.

2.4. Uraian Materi

2.4.1. Pengertian Himpunan

Istilah kelompok, kumpulan, kelas, maupun gugus dalam matematika dikenal sebagai istilah himpunan. Konsep tentang himpunan pertama kali dikemukakan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Jerman, yaitu George Cantor (1845-1918). Himpunan adalah kumpulan benda-benda atau obyek yang didefinisikan (diberi batasan) dengan jelas.

Yang dimaksud "didefinisikan dengan jelas" yaitu dapat ditentukan dengan tegas benda atau obyek apa saja yang termasuk dan yang tidak termasuk dalam suatu himpunan yang diketahui. Benda-benda atau obyek yang termasuk dalam suatu himpunan disebut anggota, elemen, atau unsur dari suatu himpunan.

Himpunan yang dibahas dalam modul ini adalah himpunan tegas/tradisional bukan himpunan kabur/*fuzzy*. Terkait pembahasan masalah himpunan tegas/tradisional dan himpunan kabur/*Fuzzy* dapat dilihat pada contoh berikut.

1. Kumpulan atau kelompok yang merupakan suatu himpunan (himpunan tegas/tradisional)

   Contoh 21

   a. Kumpulan hewan berkaki empat
      - Yang merupakan anggota dari pernyataan di atas yaitu: {kerbau, sapi, kucing, kuda}.
      - Yang bukan anggota yaitu: {ayam, itik, burung}.

   b. Kumpulan bilangan faktor dari 12
      - Yang merupakan anggota yaitu: 1, 2, 3, 4, 6, dan 12.
      - Yang bukan anggota yaitu: 5, 7, 8, 9, 10, 11.

2. Kumpulan atau kelompok yang bukan merupakan suatu himpunan (akan dibahas pada himpunan kabur/*Fuzzy*).

   Contoh 22

   a. Kumpulan lukisan indah

      Pengertian **indah** tidak jelas batasannya harus seperti apa indahnya. Tetapi dalam lingkup pembahasan himpunan kabur kata "indah" dapat di definisikan dengan derajat. Mungkin indah 20% atau 25% atau bahkan 90%.

   b. Kelompok orang kaya di Jember

      Pengertian **kaya** tidak jelas berapa banyak harta yang harus dimilikinya. Tetapi dalam lingkup pembahasan himpunan kabur kata "kaya" dapat didefinisikan juga seperti contoh di atas.

Secara umum, baik himpunan tradisional maupun himpunan kabur dapat dinyatakan dengan menggunakan tanda kurung kurawal "{ }" dan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital, misalnya A, B, C, D, dan seterusnya sampai Z. Yang akan di bahas dalam buku ini adalah himpunan tegas/tradisional saja. Sedangkan himpunan kabur/*fuzzy* akan di bahas di buku lain.

Contoh 23

Himpunan bilangan asli genap yang kurang dari 9. Misalnya himpunan itu diberi nama Z, maka Z = {bilangan asli genap yang kurang dari 9}.

2.4.2. Pengertian Anggota Himpunan

Dalam suatu himpunan, masing-masing anggota berbeda dengan anggota lainnya.

Contoh 24

P = {huruf-huruf pembentuk kata "mahasiswa"}. Kata siswa terdiri atas 9 huruf, yaitu m, a, h, a, s, i, s, w, dan a. Huruf s ada dua buah, tetapi karena ada anggota yang sama dalam himpunan tersebut maka hanya ditulis satu kali, sehingga salah jika ditulis P = {m, a, h, a, s, i, s, w, a}, dan seharusnya $P = \{$m, h, s, i, w, a$\}$.

2.4.3. Menyatakan Banyak Anggota Suatu Himpunan

Banyak anggota himpunan A dapat dinyatakan dengan notasi $n(A)$. Jadi, notasi $n(R)$ artinya banyak anggota pada himpunan R.

Contoh 25

$P = \{$s, i, w, a$\}$

Banyak anggota himpunan P adalah 4 buah, ditulis $n(P) = 4$

a. **Mengenal Beberapa Himpunan Bilangan**

Dalam himpunan bilangan, terdapat beberapa macam himpunan bilangan yaitu sebagai berikut.

1. Himpunan bilangan bulat, biasanya disimbolkan dengan huruf B
   $B = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$
2. Himpunan bilangan asli, biasanya disimbolkan dengan huruf A.
   $A = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
3. Himpunan bilangan cacah, biasanya disimbolkan dengan huruf C.
   $C = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
4. Himpunan bilangan ganjil (tidak ada penciri khusus, sehingga bisa menggunakan huruf lainnya).
   $P = \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$
5. Himpunan bilangan cacah genap (tidak ada penciri khusus, sehingga bisa menggunakan huruf lainnya).
   $D = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$
6. Himpunan bilangan prima.
   $V = \{2, 3, 5, 7, \cdots\}$
   Bilangan prima adalah bilangan yang hanya mempunyai dua faktor, atau bilangan yang hanya habis dibagi oleh 1 dan bilangan itu sendiri, kecuali bilangan 0 dan 1.
7. Himpunan bilangan cacah kuadrat.
   $J = \{0, 1, 4, 9, \cdots\}$
8. Himpunan bilangan komposit.
   $L = \{4, 6, 8, 10, \cdots\}$
   Bilangan komposit adalah bilangan cacah yang mempunyai lebih dari dua faktor.

b. **Menyatakan Suatu Himpunan**

Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara berikut.

(1) Dengan kata-kata;

Menyatakan himpunan dengan kata-kata sangat bermanfaat untuk himpunan yang memiliki anggota sangat banyak dan tak beraturan, sehingga tidak akan mengalami kesulitan bila anggota-anggotanya ditulis satu demi satu.

Contoh 26

A adalah himpunan lima bilangan asli yang pertama.

$A = \{\text{lima bilangan asli yang pertama}\}$.

(2) Dengan notasi pembentuk himpunan;

Contoh 27

$K = \{x \mid x < 5, x \in A\}$, dengan A adalah himpunan bilangan asli.

Dibaca:

"K adalah himpunan x, sehingga x kurang dari 5 dan x anggota A".

(3) Dengan mendaftar anggota-anggotanya.

Dengan cara ini anggota-anggota himpunan ditulis dalam kurung kurawal dan dipisahkan dengan tanda koma. Pada penulisan himpunan dengan cara mendaftar anggota-anggotanya, jika semua anggota dapat ditulis, maka urutan penulisan boleh diabaikan.

Contoh 28

$A = \{\text{lima bilangan cacah yang pertama}\}$

Penulisan dengan mendaftar anggota-anggotanya adalah: $A = \{0,1,2,3,4\}$ atau $A = \{2,4,3,0,1\}$.

c. **Himpunan Tak Berhingga**

1) $A = \{\text{bilangan asli}\}$, maka dapat dituliskan sebagai $A = \{1,2,3,\cdots\}$

2) $R = \{x \mid x \text{ adalah bilangan cacah genap}\}$, maka $R = \{0,2,4,\cdots\}$

Jadi, dikatakan himpunan tak berhingga apabila mempunyai anggota yang banyaknya tak berhingga.

d. **Himpunan Berhingga**

Contoh 29

$P = \{\text{bilangan cacah ganjil kurang dari 2017}\}$, maka $P = \{1,3,5,\cdots,2017\}$.

Himpunan P tidak boleh ditulis: $P = \{1,3,5,\cdots\}$ karena anggotanya terbatas hanya sampai 2017.

Jadi, suatu himpunan dikatakan himpunan berhingga apabila memiliki anggota-anggota yang banyaknya berhingga.

e. **Himpunan Nol**

Himpunan nol (0) adalah himpunan yang mempunyai satu anggota saja yaitu nol (0).

Contoh 30

$B = \{$bilangan cacah yang kurang dari 1$\}$, maka $B = \{0\}$. Jadi, $n(B) = 1$

f. **Himpunan Kosong**

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong ditulis dengan notasi atau simbol { } atau Ø.

Contoh 31

Berapakah banyak anggota himpunan-himpunan berikut?

a) $A = \{$siswa kelas IA yang umurnya lebih dari 20 tahun$\}$
b) $B = \{$siswa SMP yang tinggi badannya lebih dari 2,5 meter$\}$
c) $C = \{$bilangan asli yang kurang dari 1$\}$

Penyelesaian

a) Himpunan A tidak mempunyai anggota, sebab tidak ada siswa kelas IA yang umurnya lebih 20 tahun, maka, $n(A) = 0$.
b) Himpunan B tidak mempunyai anggota, sebab tidak ada siswa SMP yang tinggi badannya lebih dari 2,5 meter, maka, $n(B) = 0$.
c) Himpunan C tidak mempunyai anggota, sebab tidak ada bilangan asli yang kurang dari 1, maka, $n(C) = 0$.

Perhatikan bahwa $\{0\}$ tidak sama dengan $\{\ \}$, atau $\{0\} \neq \{\ \}$. Simbol $\{0\}$ bukan himpunan kosong, sebab mempunyai anggota yaitu 0. Sedangan simbol $\{\ \}$ tidak mempunyai anggota, maka disebut himpunan kosong. Simbol $\{\ \}$ merupakan suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota, tetapi himpunannya ada.

g. **Himpunan Semesta**

Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua anggota himpunan yang dibicarakan. Himpunan semesta disebut juga semesta pembicaraan atau himpunan universum. Lambang himpunan semesta adalah S.

Contoh 32

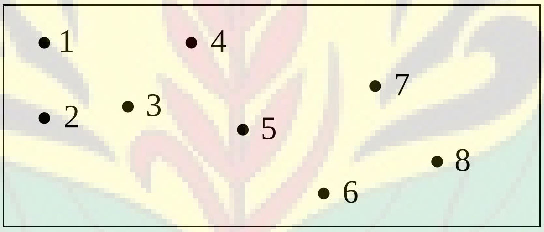
1) Untuk himpunan $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, himpunan semestanya dapat berupa: {bilangan cacah}, {bilangan asli}, {bilangan asli kurang dari 10}, atau {bilangan ganjil}.
2) Untuk $A = \{$vespa, sepeda motor$\}$, himpunan semestanya dapat berupa: {kendaraan beroda dua}, {kendaraan bermotor}, atau {kendaraan}.

h. **Membuat Diagram Venn**

Pada materi ini telah dipelajari bahwa himpunan dapat dinyatakan dengan kata-kata, notasi pembentukan himpunan, dan mendaftarkan anggota-anggotanya. Berikut ini akan dipelajari cara lain menyatakan suatu himpunan, yaitu dengan gambar atau diagram yang disebut diagram Venn. Diagram ini diperkenalkan pertama kali oleh John Venn seorang ahli matematika berkebangsaan Inggris yang hidup pada tahun 1834-1923. Ketentuan di dalam membuat diagram Venn adalah sebagai berikut:

a. Himpunan semesta digambarkan dengan sebuah persegi panjang dan di pojok kiri atas diberi simbol S.
b. setiap anggota himpunan semesta ditunjukkan dengan sebuah noktah di dalam persegi panjang (boleh juga bentuk lainnya), dan nama anggotanya ditulis berdekatan dengan noktahnya.

Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, diagram Venn dari himpunan S seperti gambar berikut:

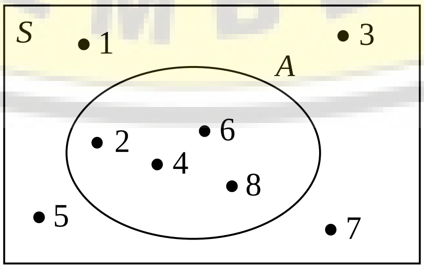


Gambar 1. Contoh Diagram Venn Bagian 1

c. Setiap himpunan yang termuat di dalam himpunan semesta ditunjukkan oleh kurva tertutup sederhana.

Contoh 33

Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dan $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Diagram Venn dari kondisi di atas ditunjukkan sebagai berikut.

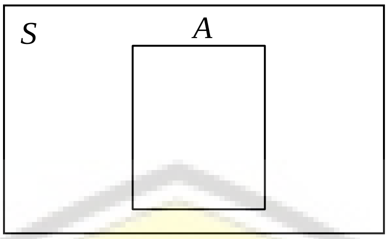


Gambar 2. Contoh Diagram Venn Bagian 2

d. Dalam menggambar himpunan yang mempunyai anggota sangat banyak, pada diagram Venn tidak menggunakan noktah.

Contoh 34

Misalkan $S = \{$Mahasiswa Universitas Jember$\}$ dan $A = \{$Mahasiswa PGSD$\}$

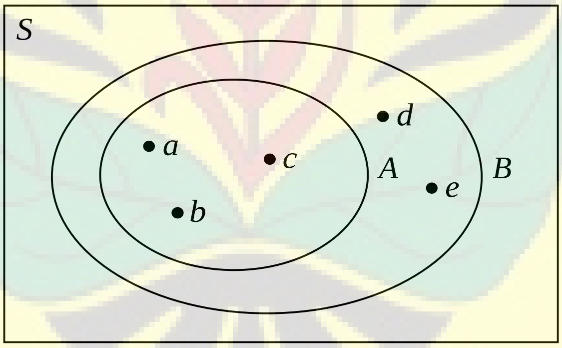


Gambar 3. Contoh Diagram dengan Bentuk Lain

2.4.4. Himpunan Bagian

a. Pengertian Himpunan Bagian

Dalam buku ini penulis tidak akan langsung mendefinisikan apa itu Himpunan Bagian, tetapi penulis menginginkan pembaca untuk memahami pengertian himpunan bagian dengan cara mengkonstruk pengetahuannya, perhatikan himpunan $A = \{$a, b, c$\}$ dan $B = \{$a, b, c, d, e$\}$. Dari kedua himpunan tersebut, ternyata setiap anggota A, yaitu a, b, dan c menjadi anggota B, maka dikatakan bahwa A adalah bagian dari B. Diagram Vennnya adalah sebagai berikut.



Gambar 4. Contoh Diagram Venn dengan A bagian dari B

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan: Himpunan A merupakan himpunan bagian dari B, bila setiap anggota A menjadi anggota B, ditulis dengan notasi $A \subset B$. Dapat juga dikatakan bahwa himpunan B memuat A, ditulis dengan notasi $B \supset A$. $A \subset B$ dibaca A himpunan bagian dari B dan $B \supset A$ dibaca B memuat A.

Contoh 35

Diberikan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{$anggota A yang genap$\}$; $C = \{$anggota A yang ganjil$\}$; $D = \{$anggota A yang kurang dari 3$\}$; dan $E = \{$anggota A yang lebih dari 3$\}$. Tentukan: hubungan antara himpunan B, C, D, dan E terhadap A.

Penyelesaian

a. $B = \{2, 4\}$, maka $\{2,4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

b. $C = \{1, 3\}$, maka $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

c. $D = \{1, 2\}$, maka $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
d. $E = \{4\}$, maka $\{4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

Berikut ini akan dibahas hubungan suatu himpunan dengan himpunan itu sendiri dengan memperhatikan uraian berikut ini:

Contoh 36

Untuk $M = \{1,2,3\}$, tulislah himpunan bagian dari himpunan M dengan mendaftar anggota-anggotanya.

a. {anggota M yang lebih dari 1}.
b. {anggota M yang kurang dari 4}.

Penyelesaian

a. {2,3}.
b. {1,2,3}.

Dari hasil di atas dapat dinyatakan bahwa $\{2,3\} \subset \{1,2,3\}$ atau $\{2,3\} \subset M$ dan $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3\}$ atau $\{1,2,3\} \subset M$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa: Setiap himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan itu sendiri. Untuk sebarang himpunan A, berlaku $A \subset A$.

Untuk selanjutnya akan dibahas hubungan antara himpunan kosong terhadap himpunan lain dengan memperhatikan contoh-contoh berikut ini:

Contoh 37

Diketahui: A = {1,3,5}.
Tulislah himpunan bagian dari A dengan mendaftar anggota- anggotanya.

a. {bilangan prima anggota A}
b. {bilangan genap anggota A}

Penyelesaian

a. {3,5}
b. Ø

Berdasarkan hasil di atas, maka dapat dinyatakan
$\{3,5\} \subset \{1,3,5\}$ atau $\{3,5\} \subset A$ dan $\emptyset \subset \{1,3,5\}$ atau $\emptyset \subset A$.

Dengan demikian dapat disimpulkan: Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan. Untuk sebarang himpunan A, berlaku $\{\ \} \subset A$ atau $\emptyset \subset A$.

b. Menentukan Semua Himpunan Bagian dan Banyaknya Himpunan Bagian dari Suatu Himpunan

Contoh 38

Himpunan p atau {p} memiliki himpunan bagian { } dan {p}. Jadi {p} mempunyai himpunan bagian sebanyak dua.

Untuk menentukan banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan, perhatikanlah Tabel berikut ini.

Tabel 10. Menentukan Banyaknya Himpunan Bagian

Himpunan	Banyaknya Anggota	Himpunan Bagiannya	Banyaknya Himpunan Bagian
$\{p\}$	1	$\{\}$ dan $\{p\}$	$2 = 2^1$
$\{p, q\}$	2	$\{\}, \{p\}, \{q\}$, dan $\{p, q\}$	$4 = 2^2$
$\{p, q, r\}$	3	$\{\}, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}$, dan $\{p, q, r\}$	$8 = 2^3$
$\{p, q, r, s\}$	4	$\{\}, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}, \{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}$, dan $\{p, q, r, s\}$	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{p, q, r, s, \cdots\}$	n	$\{\}, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \cdots, \{p, q, r, s, \cdots\}$	2^n untuk setiap n anggota bilangan Asli

Berdasarkan tabel di atas diperoleh hubungan antara banyaknya anggota suatu himpunan dengan banyaknya himpunan bagian. Banyaknya himpunan bagian dapat dinyatakan dengan 2^n, dengan n menunjukkan banyaknya anggota himpunan.

Menentukan Banyak Himpunan Bagian dengan Pola Bilangan Segitiga Pascal

Dalam pola bilangan ***Segitiga Pascal*** terdapat hubungan antara suatu bilangan dengan jumlah dua bilangan berdekatan yang terdapat pada baris yang berada tepat di atasnya seperti berikut ini.

$(a+b)^0 \rightarrow$ 1

$(a+b)^1 \rightarrow$ 1 1

$(a+b)^2 \rightarrow$ 1 2 1

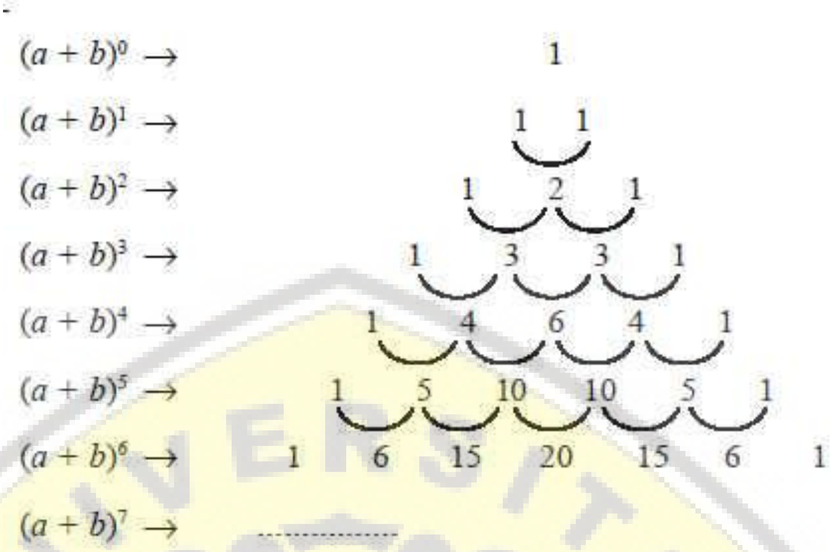
$(a+b)^3 \rightarrow$ 1 3 3 1

$(a+b)^4 \rightarrow$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5 \rightarrow$ 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6 \rightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

$(a+b)^7 \rightarrow$ ....



Jika banyaknya anggota himpunan adalah n, maka banyaknya himpunan bagian adalah 2^n.

Contoh 39

Tentukan banyaknya semua himpunan bagian dari $K = \{$bilangan prima kurang dari 13$\}$.

Penyelesaian

$K = \{2,3,5,711\}$; $n(K) =$ 5. Banyaknya semua himpunan bagian dari K adalah $2^5 = 32$

c. Himpunan yang Sama

Dua himpunan A dan B dikatakan sama, ditulis "A = B", jika dan hanya jika A ⊆ B dan B ⊆ A.

Contoh 40

A = {*a, b, c, d, e, f*}, B = {*b, a, e, c, f, d*}.
A dan B adalah himpunan yang sama, yaitu A = B

d. Himpunan Berpotongan

Dua himpunan A dan B dikatakan berpotongan ditulis "A ∞ B" jika dan hanya jika ada anggota A yang menjadi anggota B.

Contoh 41

A = {3, 4, 5, 6} dan B = {2, 5, 8}, maka A ∞ B = {5}.
A dan B adalah dua himpunan yang saling berpotongan karena 5 merupakan anggota himpunan A dan juga anggota himpunan B.

e. **Himpunan Lepas**

Dua himpunan A dan B dikatakan himpunan lepas ditulis "A // B" jika dan hanya jika kedua himpunan tersebut tidak kosong dan tidak mempunyai anggota yang sama.

Contoh 42

A = {1, 2, 3, 4}, dan B = {5, 6, 7}

Maka himpunan A dan B merupakan himpunan yang lepas karena kedua himpunan tersebut tidak kosong dan tidak mempunyai anggota yang sama.

f. Himpunan Finit yang Ekivalen

Dua himpunan finit A dan B dikatakan Ekivalen ditulis “A~B” jika dan hanya jika banyak anggota kedua himpunan itu sama.

Contoh 43

A = {1, 2, 3} dan B = {a, b, c}, maka A ~ B karena n(A) = n(B).

g. **Himpunan yang Sama dan Ekivalen (Sederajat)**

Himpunan sama adalah dua himpunan atau lebih yang memiliki anggota yang sama.

Contoh 44

A = {a, n, i}, B = {i, n, a }, C = {n, i, a} maka A= B = C dan n(A) = n(B) = n(C).

2.4.5. Irisan Himpunan

Pengertian irisan

Irisan himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan ***anggota himpunan A*** dan sekaligus merupakan anggota himpunan B. Dengan notasi pembentuk himpunan, **irisan A dan B** didefinisikan sebagai $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

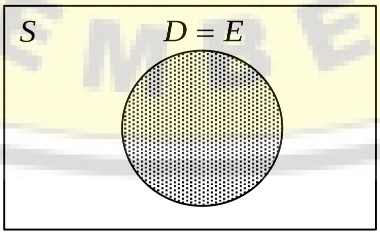
Contoh 45

D = {*k*,*i*,*t*,*a*,*b*} dan E = {*b*,*a*,*t*,*i*,*k*}.

a. Tentukan D ∩ E dengan mendaftar anggota-anggotanya.
b. Buatlah diagram Venn-nya dan arsirlah daerah yang menyatakan D ∩ E.

Penyelesaian

a. D = {k,i,t,a,b} dan E = {b,a,t,i,k}, maka D ∩ E = {k,i,t,a,b}.
b. diagram venn



Gambar 5. Diagram Venn (Irisan)

2.4.6. Gabungan (Union)

Pengertian Gabungan Dua Himpunan

Gabungan himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota A saja, anggota B saja, dan anggota persekutuan A dan B. Dengan notasi pembentuk himpunan, gabungan A dan B didefinisikan sebagai: A ∪ B = {x | x ∈ A atau x ∈ B}.

Contoh 46

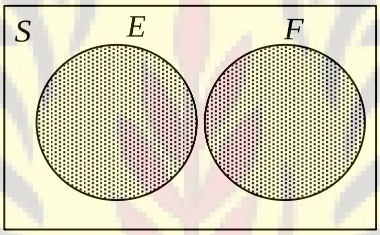
E = {bilangan asli genap kurang dari 10} dan
F = {bilangan asli ganjil kurang dari 10}.

a. Nyatakan E ∪ F dengan mendaftar anggota-anggotanya.
b. Buatlah diagram Vennnya dan arsirlah E ∪ F.

Jawab:

a. E = {2, 4, 8} dan F = {1, 3, 5, 7, 9}, maka E ∪ F = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

b. diagram venn



Gambar 6. Diagram Venn (Gabungan)

2.4.7. Penggunaan Diagram Venn untuk Irisan dan Gabungan Himpunan

Berikut ini contoh penerapan materi himpunan disertai dengan visualisasi menggunakan diagram Venn.

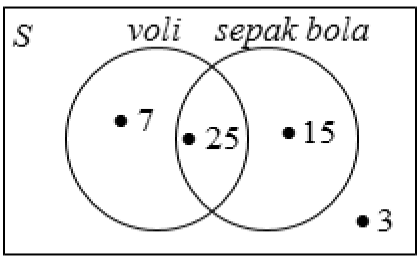
Contoh 47

Setelah diadakan pencatatan terhadap 50 anak, terdapat 32 anak gemar voli, 40 anak gemar sepak bola, dan 25 anak gemar kedua-duanya.

a. Buat diagram Venn dari keterangan di atas!
b. Berapa anak yang tidak gemar voli maupun sepak bola?

Penyelesaian

a. **diagram venn**



b. Berdasarkan diagram Venn pada poin a di atas maka kita peroleh $7+25+15+x=50$. Ini berarti nilai $x=3$

2.4.8. Komplemen

Komplemen suatu himpunan A (ditulis A' atau A^c) adalah himpunan anggota-anggota di dalam semesta pembicaraan yang bukan anggota A.

Contoh 48

a. Ditentukan E ={0, 2, 4, 6, . . .} di dalam semesta pembicaraan himpunan bilangan cacah, maka E^c = {1, 3, 5, 7, . . . }.
b. Semesta pembicaraan S = {*i, n, d, o, n, e, s, i, a*} dan X = {vokal} maka X^c = {*n, d, s*}

2.4.9. Selisih Dua Himpunan *(Difference)*

Selisih dua himpunan A dan B sama dengan irisan A dan B'.

$$A-B=A\cap B'$$

Contoh 49

Jika P = {1, 2, 3, 4} dan Q = {2, 5, 6, 4, 7}, maka P – Q = {1,3}.

2.4.10. Jumlah Dua Himpunan *(Symmetry Difference)*

Jumlah dua himpunan A dan B (ditulis A + B) adalah himpunan anggota A atau B tetapi bukan anggota persekutuan A dan B.

Contoh 50

Jika M = {*h, i, n, d, u*} dan N = {*b, u, d, h, a*} maka M + N = {*i, b, a, n*}.

2.4.11. Hukum De Morgan

Contoh 51

A = {*a, b, c, d, e*}, B = {*b, d, e, g, h*}, dan S = {*a, b, c, d, e, f, g, h*}

Tentukan: $(A-B)^c$ $\quad$ $(A\cap B)^c$
B^c-A^c $\quad$ $A^c\cap B^c$
A^c-B^c $\quad$ $A^c\cup B^c$
$(B-A)^c$ $\quad$ $(A\cup B)^c$

Penyelesaian

$(A-B)^c = (\{a, b, c, d, e\} - \{b, d, e, g, h\})^c = \{a, c\}^c = \{b, d, e, f, g, h\}$
$B^c-A^c = \{b, d, e, g, h\}^c - \{a, b, c, d, e\}^c = \{a, c, f\} - \{f, g, h\} = \{a, c\}$
$A^c-B^c = \{a, b, c, d, e\}^c - \{b, d, e, g, h\}^c = \{f, g, h\} - \{a, c, f\} = \{g, h\}$
$(B-A)^c = (\{b, d, e, g, h\} - \{a, b, c, d, e\})^c = \{g, h\}^c = \{a, b, c, d, e, f\}$
$(A\cap B)^c = (\{a, b, c, d, e\} \cap \{b, d, e, g, h\})^c = \{b, d, e\}^c = \{a, c, f, g, h\}$
$A^c\cap B^c = \{a, b, c, d, e\}^c \cap \{b, d, e, g, h\}^c = \{f, g, h\} \cap \{a, c, f\} = \{f\}$
$A^c\cup B^c = \{a, b, c, d, e\}^c \cup \{b, d, e, g, h\}^c = \{f, g, h\} \cup \{a, c, f\} = \{a, c, f, g, h\}$
$(A\cup B)^c = (\{a, b, c, d, e\} \cup \{b, d, e, g, h\})^c = \{a, b, c, d, e, g, h\}^c = \{f\}$

Kesimpulan: $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$; $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$

2.4.12. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa dari himpunan A adalah keluarga himpunan yang beranggotakan semua subset dari himpunan A dan disebut himpunan kuasa A, ditulis “2^{A}”

Contoh 52

Jika A = {1, 2, 3}, maka himpunan kuasanya adalah {{ }, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}, {1,2,3}}.

2.5. Rangkuman

1. Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara berikut ini.
   (1) Dengan kata-kata;
   (2) Dengan notasi pembentuk himpunan;
   (3) Dengan mendaftar anggota-anggotanya.
2. Banyak anggota himpunan A dapat dinyatakan dengan notasi n(A). Jadi, notasi n(R) artinya banyak anggota himpunan R.
3. Himpunan A merupakan himpunan bagian dari B, bila setiap anggota A menjadi anggota B, ditulis dengan notasi $A \subset B$. Dapat juga dikatakan bahwa himpunan B memuat A, ditulis dengan notasi $B \supset A$. $A \subset B$ dibaca A himpunan bagian dari B dan $B \supset A$ dibaca B memuat A.
4. Dua himpunan A dan B dikatakan sama, ditulis “A = B”, jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.
5. Dua himpunan A dan B dikatakan berpotongan ditulis “$A \infty B$” jika dan hanya jika ada anggota A yang menjadi anggota B.
6. Dua himpunan A dan B dikatakan himpunan lepas ditulis “A // B” jika dan hanya jika kedua himpunan tersebut tidak kosong dan tidak mempunyai anggota yang sama.
7. Irisan himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A dan sekaligus merupakan anggota himpunan B. Dengan notasi pembentuk himpunan, irisan A dan B didefinisikan sebagai $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.
8. Gabungan himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota A saja, anggota B saja, dan anggota persekutuan A dan B. Dengan notasi pembentuk himpunan, gabungan A dan B didefinisikan sebagai: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$.
9. Komplemen suatu himpunan A (ditulis A^1 atau A^c) adalah himpunan dengan anggota-anggota di dalam semesta pembicaraan yang bukan anggota A
10. Selisih Dua Himpunan *(Difference)* A dan B sama dengan irisan A dan B^1, atau $A - B = A \cap B^1$
11. Jumlah Dua Himpunan *(Symmetry Difference)* A dan B (ditulis A + B) adalah himpunan anggota A atau B tetapi bukan anggota persekutuan dari A dan B.
12. Hukum De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
13. Himpunan kuasa dari himpunan A adalah keluarga himpunan yang beranggotakan semua subset dari suatu himpunan A disebut himpunan kuasa A ditulis “2^{A}

2.6. Soal dan Pembahasan

1. Yang merupakan himpunan adalah …
   A. Kumpulan anak pandai
   B. Kumpulan cewek cantik
   C. Kumpulan anak yang tingginya 170 cm
   D. Kumpulan anak guru

   Penyelesaian
   yang termasuk himpunan adalah (C) karena jelas yaitu tingginya 170 cm

2. Himpunan bagian dari $\{1,7\}$ adalah ..
   A. $\{1\},\{7\},\{1,7\}$
   B. $\{1,7\}$
   C. $\{1\},\{7\}$
   D. $\{\},\{1\},\{7\},\{1,7\}$

   Penyelesaian
   himpunan bagian dari $\{1,7\}$ adalah D (jelas)

3. Himpunan bagian dari $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ adalah ….
   A. 32
   B. 64
   C. 128
   D. 512

   Penyelesaian
   himpunan bagian dari $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ adalah $2^7 = 128$.

2.7. Latihan Soal

1. Benar atau salahkah pernyataan berikut ini, jika diketahui A = { Φ, 1, {2,3}}.
   a. Φ ϵ A; b. I ϵ A; c. {2,3} ϵ A; d. n(A) = 2; e. {2} ϵ A

2. Nyatakan dengan kata-kata tentang arti pernyataan berikut ini:
   a. Z = {*z*| *z* adalah mahasiswa FKIP}
   b. W = { *w* | *w* adalah rumah bercat putih}
   c. Kuda ∈{*k* | *k* binatang berkuku genap}
   d. {{4}} ⊂ {{4}, 8}

3. Nyatakan himpunan berikut ini dengan kata-kata, kemudian nyatakan dengan mendaftar anggotanya.
   a. A = {*x* | *x* adalah huruf-huruf dalam kata “sahabat”}
   b. B = {*x* | *x* – 1 = 3}
   c. C = {*x* | *x* = 9}
   d. D = {*x* |(*x* – 1) = 0}

4. Ditentukan P = {jajaran genjang}, Q = {belah ketupat}, R = {bujur sangkar}, dan T = {persegi panjang} pada bidang datar.
   a. Tentukan himpunan-himpunan mana yang menjadi subset-subset dari himpunan-himpunan lain.
   b. Tentukan diagram Venn untuk himpunan P, Q, R, dan T.

5. P = {*a*, *b*, *c*, *d*}, Q = {*c*, *d*, *e*, *f*}, R = {*b*, *e*, *f*}, S = {sepuluh abjad latin yang pertama}.
   Tentukan:
   a. $P - R^1$
   b. $P^1 - R^1$
   c. $P - Q^1$
   d. $P - (Q \cap R)$
   e. $P - (Q \cup R)^1$
   f. $(P \cup R) - Q^1$
   g. $P + Q$
   h. $P^1 + R^1$
   i. $P + (Q \cup R)^1$
   j. $P^1 + (Q \cap R)^1$
   k. $(P \cap Q) + R$
   l. $P + (Q \cup R)$

6. Suatu badan survey disewa oleh suatu perusahaan untuk mengetahui bagaimana penduduk di suatu daerah pergi ke tempat mereka bekerja. Badan survey ini mewawancarai 800 orang penduduk dan menyampaikan laporan sebagai berikut:
   250 orang pergi ke tempat bekerja dengan naik mobil, 580 orang dengan naik bis kota, 400 orang naik sepeda. Sebanyak 200 orang dengan kombinasi naik mobil dan bis kota, 350 orang dengan naik bis kota dan sepeda, 100 orang dengan naik mobil dan sepeda, sedangkan 80 orang menggunakan kombinasi ketiga macam alat transportasi itu untuk pergi ke tempat bekerja. Ternyata perusahaan itu menolak laporan itu karena laporan itu tidak tepat (benar). Mengapa?

BAB 3
RELASI DAN FUNGSI

3.1. Deskripsi Mata Kuliah

Membahas masalah relasi refleksif, simetri, transitif, dan ekivalen, pengertian fungsi, menyatakan fungsi dengan mendaftar, diagram anak panah, pasangan berurutan, rumus dan grafik.

3.2. Capaian Pembelajaran

Meningkatkan wawasan untuk mampu berpikir secara deduktif dalam memahami konsep-konsep dasar matematika, khususnya yang banyak digunakan yaitu relasi dan fungsi.

3.3. Kompetensi Dasar

Setelah mengikuti pembelajaran diharapkan mahasiswa deapat:

1. menjelaskan pengertian relasi refleksif, simetris, transitif, ekivalen;
2. menjelaskan pengertian fungsi;
3. menyatakan fungsi dengan mendaftar, diagram anak panah, pasangan berurutan, rumus, dan grafik;
4. menjelaskan minimal 4 macam fungsi.

3.4. Uraian Materi

3.4.1. Relasi

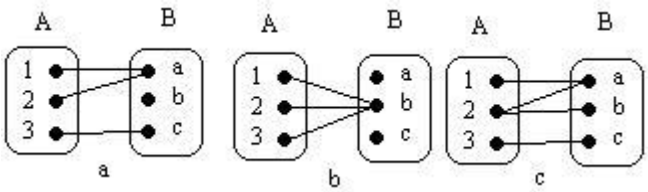
Pengertian Relasi

Relasi adalah suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan ke himpunan yang lain. Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu pernyataan bahwa x anggota A berelasi dengan y anggota B yang dinotasikan dengan xRy. Dalam relasi terdapat istilah-istilah: domain atau daerah asal, kodomain atau daerah kawan, dan range atau daerah hasil.

Contoh 53

R adalah suatu relasi dari A = {1,2,3} ke B = {a,b,c} seperti pada diagram anak panah berikut.

Tentukan: domain, kodomain, dan range!



Penyelesaian:

a. Domain = A = {1,2,3}; Kodomain = B = {a,b,c}, dan Range = {a,c}.

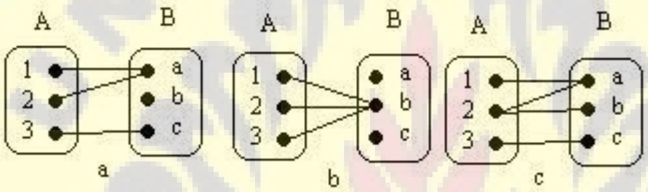
b. Domain = A = {1,2,3}; Kodomain = B = {a,b,c}, dan Range = {b}.

c. Domain = A = {1,2,3}; Kodomain = B = {a,b,c}, dan Range = {a,b,c}.

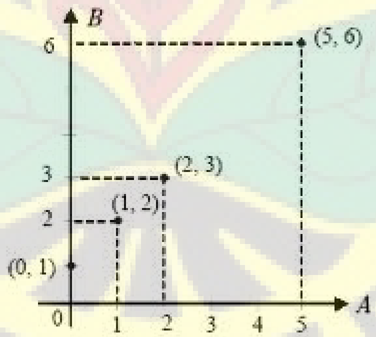
Cara Menyatakan Relasi

Suatu relasi dapat dinyatakan dengan beberapa cara, antara lain :

1. Diagram Panah



2. Diagram Cartesius



3. Himpunan Pasangan Terurut: R ={(-1,1),(1.1),(2,4)}

Contoh 54

Diketahui himpunan A = {3,4,5} dan B ={2,4}. Bila relasi dari A ke B adalah lebih dari, nyatakan relasi tersebut dengan:

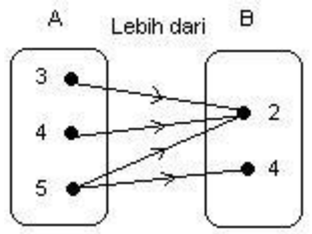
a. Diagram panah

b. Himpunan pasangan berurutan

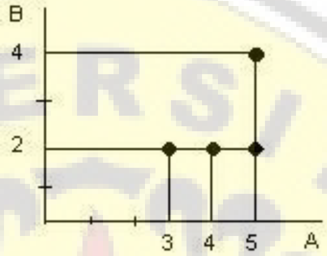
c. Diagram kartesius

Penyelesaian

a. Diagram panah



b. Himpunan pasangan berurutan: {(3,2),(4,2),(5,2),(5,4)}
c. Diagram kartesius



Contoh 55

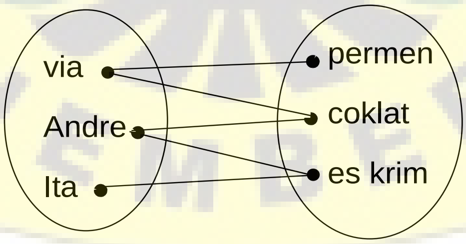
Via : aku senang permen dan coklat
Andre : aku senang coklat dan es krim
Ita : aku suka es krim

Dari contoh di atas dapat dibuat dua himpunan, yaitu:

- Himpunan A adalah himpunan nama orang yaitu A = { Via, Andre, Ita }
- Himpunan B adalah himpunan makanan kesukaan yaitu B = {es krim, coklat, permen}.

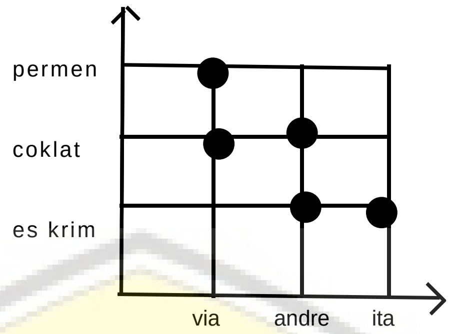
Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah "makanan kesukaan" dan dapat dinyatakan dengan cara:

a. Diagram panah



b. Himpunan pasangan berurutan
{(Via, permen), (Via,coklat), (Andre,coklat), (Andre,es krim), (Ita, es krim)}

c. Diagram Cartesius



3.4.2. Macam-Macam Relasi

1. Relasi Refleksi

Suatu relasi R pada himpunan A adalah dikatakan refleksi jika dan hanya jika $(a,a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Contoh 56

- Relasi kesebangunan segitiga-segitiga di suatu bidang rata.
- Relasi "≤" pada himpunan bilangan bulat.

Contoh 57

A = {a,b,c,d,e}
R_1 = {(a,a),(b,c),(c,c),(d,d),(d,e)}
R_2 = {(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)}
R_3 = {(b,d),(c,a)}
Diantara relasi di atas yang mana yang menunjukkan relasi refleksi?

Penyelesaian

R_2 disebut refleksi karena (a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e) anggota dari relasi tersebut.

2. Relasi Simetris

Suatu relasi R pada himpunan A adalah simetris jika dan hanya jika $(a,b) \in R$ untuk setiap $(a,b) \in A$.

Contoh 58

- Relasi kesebangunan segitiga-segitiga di suatu bidang rata.
- Relasi kesejajaran garis-garis di suatu bidang rata.
- Relasi "=" pada himpunan bilangan riil.

Contoh 59

A = {3,4,5,6 }
R_1 = {(3,4),(4,3),(6,5),(5,6)}
R_2 = {(3,4),(4,3),(6,5),(4,6)(5,6)}

R_3 = {(3,3),(4,4)}
Diantara relasi di atas, mana yang menunjukkan relasi simetri?
Penyelesaian
R_1 karena anggota R_1 berisi (3,4) dan (4,3): (6,5) dan (5,6) yaitu untuk setiap $(a,b) \in R$

3. Relasi Transitif

Suatu relasi R pada himpunan A adalah Transitif jika dan hanya jika setiap $(a,b) \in R$ dan setiap $(b,c) \in R$ maka $(a,b) \in R$ untuk setiap $a,b,c \in A$.

Contoh 60

- Relasi kesebangunan segitiga-segitiga pada suatu bidang rata.
- Relasi "≤" pada himpunan bilangan bulat.

Contoh 61

A = {3,4,5,6 }
R_1 = {(3,4),(4,3),(3,3),(6,5),(5,6),(6,6)}
R_2 = {(3,4),(4,3),(3,3),(6,5),(4,6)(5,6)}
R_3 = {(3,4),(4,3),(5,6),(6,5)}
Diantara relasi diatas yang mana yang menunjukkan relasi simetri?
Penyelesaian
R_1 karena anggota R_1 yaitu (3,4) dan (4,3) unsur $(3,3) \in R$, begitu pula dengan (6,5),(5,6) unsur $(6,6) \in R$ sehingga disebut relasi transitif. Sedangkan pada R_2 dan R_3 ada salah satu anggota R_2 dan R_3 yang tidak memenuhi (a,b)$\in R$ dan setiap (b,c) $\in R$ maka (a,b)$\in R$ untuk setiap $a,b,c \in A$, sehingga bukan disebut relasi transitif.

4. Relasi Ekuivalen

Suatu relasi R pada himpunan A adalah ekivalen jika dan hanya jika relasi itu refleksi, simetri dan transitif.

Contoh 62

- Relasi kesebangunan segitiga-segitiga pada suatu bidang rata.
- Relasi "=" pada himpunan bilangan bulat.

Contoh 63

Tentukan apakah relasi R = (1,1), (1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)} pada A = {1,2,3} merupakan relasi ekivalen?

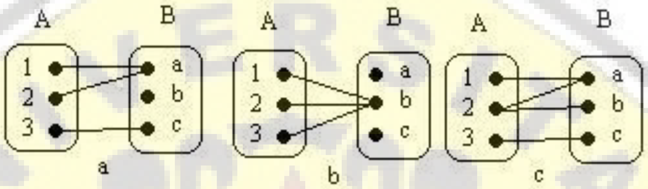
Penyelesaian
Relasi R ini adalah Refleksif sebab (1,1), (2,2), (3,3) adalah anggota dari R. Relasi ini juga simetris sebab (1,2) dan (2,1); (1,3) dan (3,1); (2,3) dan (3,2) anggota dari R. Relasi ini juga transitif sebab untuk (1,2) dan (2,1) ada (1,1) $\in R$, untuk (1,3) dan (3,2) ada (1,2)$\in R$, untuk (2,3) dan (3,1) ada (2,1)$\in R$ yaitu untuk setiap (a,b) dan (b,c)$\in R$, (a,c)$\in R$. Jadi relasi ini adalah relasi ekuivalen.

3.4.3. Fungsi

1. Pengertian fungsi

Suatu fungsi adalah himpunan pasangan terurut yang bersifat tak ada dua pasangan yang mempunyai unsur pertama yang sama. Himpunan unsur pertama disebut domain dan himpunan unsur kedua disebut himpunan bayangan. Himpunan yang memuat himpunan bayangan disebut kodomain.

Contoh 64



Manakah diantara relasi-relasi di atas yang merupakan fungsi?
Jelaskan alasanmu!

Penyelesaian

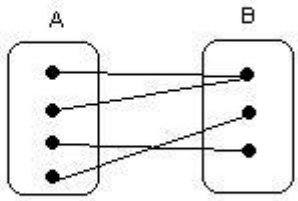
- Gambar a dan b merupakan fungsi karena setiap anggota himpunan A memiliki pasangan tepat satu di B
- Gambar c bukan fungsi karena ada anggota himpunan A memiliki 2 pasangan (tidak tepat satu) di B.

2. Cara Menyatakan Fungsi

Suatu fungsi dapat dinyatakan dengan beberapa cara, antara lain:

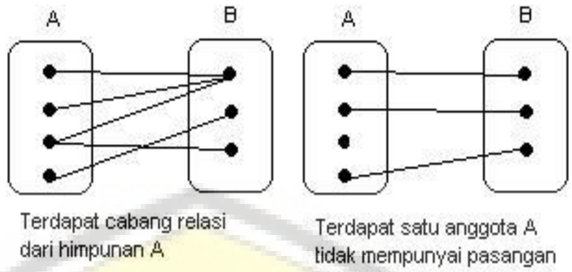
a. **Dengan diagram panah:** semua anggota A mempunyai pasangan, dan tidak ada cabang relasi dari himpunan A.

Contoh 65
pemetaan/fungsi



Contoh 66

Contoh bukan pemetaan/fungsi



b. **Dengan himpunan pasangan berurutan:** terdapat dua unsur himpunan A yg ditulis lebih dari satu kali.

Contoh 67

pemetaan/fungsi

{(a,1),(b,1),(c,2),(d,3)}

Contoh 68

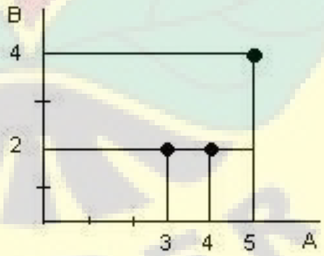
bukan pemetaan/fungsi

{(a,1),(b,2),(b,3),(c,3)}

c. **Dengan diagram kartesius**: tidak ada dua titik segaris vertikal.

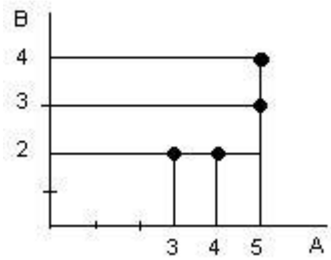
Contoh 69

pemetaan/fungsi



Contoh 70

bukan pemetaan/fungsi:



d. Dengan menggunakan rumus

Contoh 71

Suatu anggota himpunan P dipasangkan dengan anggota himpunan B

1. Tiga kurangnya dari 4 , ditulis $1 \rightarrow 4$
2. Tiga kurangnya dari 5, ditulis $2 \rightarrow 5$
3. Tiga kurangnya dari 6, ditulis $3 \rightarrow 6$
4. Tiga kurangnya dari 7, ditulis $4 \rightarrow 7$

Jika relasi di atas adalah f, maka :

$f : 1 \rightarrow 1 + 3$

$f : 2 \rightarrow 2 + 3$

$f : 3 \rightarrow 3 + 3$

$f : 4 \rightarrow 4 + 3$

Dalam bentuk notasi, fungsi menjadi : $f : x \rightarrow x + 3$

Dan rumus fungsinya adalah $f(x) = x + 3$

Contoh 72

Fungsi f memetakan setiap x anggota daerah asal ke $2x + 1$ dari daerah kawan.

a. Tulislah notasi fungsi f

b. Tulislah rumus f

c. Tentukan nilai f(2)

Penyelesaian

a. Notasi fungsi f adalah $f : x \rightarrow 2x + 1$

b. Rumus fungsi f adalah $f(x) = 2x + 1$

c. Rumus fungsi $f(x) = 2x + 1$; $f(2) = (2 x 2) + 1 = 4 + 1 = 5$

3.4.4. Macam-Macam Fungsi

a. Fungsi Konstan (Fungsi Tetap)

Fungsi konstan yaitu suatu fungsi yang memasangkan setiap anggota dari daerah asal ke satu anggota pada daerah kawan. Fungsi konstan disimbolkan $f : x \rightarrow c$ atau $f(x) = c$ (c konstanta)

Contoh 73

$f(x) = 3$ dengan daerah asal : {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}

Tentukan gambar grafiknya!

Penyelesaian

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	3	3	3	3	3	3

b. Fungsi Linear

Fungsi linear adalah suatu fungsi yang peubah bebasnya paling tinggi berpangkat satu.

Contoh 74

$f:(x) \to ax+b$ dengan a $\neq$ 0, misal $f(x)=3x+4$

c. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat yaitu suatu fungsi yang pangkat tertinggi variabelnya adalah dua.

Contoh 75

Fungsi $f(x)=ax^2+bx+c$; a $\neq$ 0

$f(x)=x^2+2x-3$

Titik potong dengan sumbu koordinat:

- Untuk $x=0 \to f(x)=(0)^2+2(0)-3$; $y=0+0-3=-3 \to$ (0, -3)
- Untuk $y=0 \to 0=x^2+2x-3; 0=(x+3)(x-1)$;
  $x+3=0 \to x=-3$ atau $x-1=0 \to x=1$; $\to$ (3,0), (1,0)
- Nilai maksimum/minimum
  b = 2, a = 1, c = -3
  $\to \frac{-D}{4a} = \frac{-b^2-4ac}{4a} = \frac{-\{2^2-4.1.(-3)\}}{4.1} = \frac{-16}{4}$ = -4
- Koordinat titik puncak
  $\to$ (- $\frac{b}{2a}$, $\frac{-D}{4a}$) = (-$\frac{2}{2.1}$, $\frac{-(-2)}{4.1}$) = (-1, $^1/_2$)
  (Sketsa grafik sebagai latihan pembaca)

d. Fungsi Tangga

Fungsi tangga disebut juga fungsi nilai bulat terbesar, yaitu suatu fungsi f yang memasangkan anggota bentuk interval pada daerah asal ke beberapa anggota yang tetap pada daerah kawan.

Contoh 76

$$f(x) = \begin{cases} 0, jika\ 0 \leq x < 1 \\ 2, jika\ 1 \leq x < 2 \\ 4, jika\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

e. Fungsi Identitas

F : A → B dengan f (x) = x $\forall x \in A$ disebut fungsi identitas, karena setiap elemen dari daerah asal dipetakan kepada dirinya sendiri. Fungsi identitas biasanya dilambangkan dengan huruf "I".

f. Fungsi modulus

Fungsi modulus adalah fungsi yang memasangkan setiap bilangan real dengan nilai mutlaknya.

$$|x| = \begin{cases} x\,, jika\ x \geq 0 \\ -x, jika\ x < 0 \end{cases}$$

g. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f disebut genap apabila f(-x) = f(x) dan fungsi f disebut fungsi ganjil apabila f(-x) = - f(x)

Contoh 77

Buktikan:

- F(x) = $(x + 1)^4$ merupakan fungsi genap
- F(x) = sin (x) merupakan fungsi ganjil

Penyelesaian

Fungsi Genap

$f(x) = (x+1)^4$

$f(-x) = (-(x+1))^4 \rightarrow (-1)^4(x+1)^4 \rightarrow 1(x+1)^4 \rightarrow (x+1)^4 = f(x)$

Karena $f(-x) = f(x)$ maka fungsi $(x+1)^4$ merupakan fungsi genap

Fungsi Ganjil

$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 \rightarrow (-1)^3(x)^3 \rightarrow (-1)(x)^3 \rightarrow -x^3 = -f(x)$

Karena $f(-x) = -f(x)$ maka fungsi x^3 merupakan fungsi ganjil

3.5. Rangkuman

1. Relasi adalah suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan ke himpunan yang lain. Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu pernyataan bahwa x anggota A berelasi dengan y anggota B yang dinotasikan dengan xRy. Dalam relasi terdapat istilah-istilah: domain atau daerah asal, kodomain atau daerah kawan, dan range atau daerah hasil.
2. Suatu fungsi adalah himpunan pasangan terurut yang bersifat tak ada dua pasangan yang mempunyai unsur pertama yang sama. Himpunan unsur pertama disebut domain dan himpunan unsur kedua disebut himpunan bayangan. Himpunan yang memuat himpunan bayangan disebut kodomain.
3. Relasi dan fungsi dapat dinyatakan dengan cara: diagram anak panah, diagram Cartesius, pasangan berurutan, rumus.
4. Macam relasi: refleksif, simetris, transitif, ekivalen.

5. Macam fungsi: konstan, linier, kuadrat, tangga, identitas, modulus, genap dan ganjil, susjektif.

3.6. Soal dan Pembahasan

1. Berikut ini yang termasuk fungsi ganjil adalah ..
   A. $1,3,5,7$
   B. $2x^2$
   C. $\cos x$
   D. $10x^5 - x$
   Penyelesaian
   $f(x) = 10x^5 - x$
   $f(-x) = 10(-x)^5 - (-x) \to 10(-1)^5(x)^5 - (-1)(x) \to -10x^5 + x \to -(10x^5 - x) = -f(x)$
   jadi D adalah fungsi ganjil

2. Jika $f(x) = x^3 - 5$, maka nilai dari $f(-3x) = ...$
   A. $27x$
   B. $27x - 5$
   C. $-27x - 5$
   D. $-27x + 5$
   Penyelesaian
   $f(x) = x^3 - 5$
   $f(-3x) = (-3x)^3 - 5 \to -27x^3 - 5$
   Jadi jawabannya adalah C

3. Perbedaan antara relasi dan fungsi yang tepat dari pernyataan berikut adalah
   A. Fungsi bagian dari relasi
   B. Relasi bagian dari fungsi
   C. Domain harus memiliki tepat satu pasangan di kodomain
   D. Range tidak boleh sama dengan kodomain
   Penyelesaian
   Fungsi dan relasi pembahasan yang slaing terkait. Fungsi pasti relasi dan relasi belum tentu fungsi. Jadi fungsi adalah bagian dari relasi. Jawaban A.

3.7. Latihan Soal

1. Jika R_1 terjadi pada himpunan bilangan real R dan $R_1(x, y): x$ lebih kecil dari y. Apakah R_1 merupakan suatu relasi?
2. Jika $P = \{2, 3, 4, 5\}$ dan $Q = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, serta $R(x, y)$ didefinisikan sebagai "x adalah faktor dari y", $x \in P, y \in Q$. Nyatakan relasi tersebut dengan diagram panah, diagram kartesius, dan pasangan terurut.
3. Diketahui $D = \{3, 4,\}$ dan relasi-relasi berikut ini ditentukan pada D:
   a) $R_1 = \{(3,3), (4,5)\}$
   b) $R_2 = \{(3,3), (4,5), (5,5)\}$
   c) $R_3 = \{(3,3), (3,5), (4,4), (5,4)\}$
   d) $R_4 = \{(3,3), (3,5), (4,4), (5,4), (5,5)\}$
   Tentukan jenis relasi tersebut!
4. Suatu fungsi dari A ke B dinyatakan dengan $f(x) = x^2 + 1$ dengan $A = (-2, -1, 0, 1, 2)$ dan $B = (1, 2, 3, 4, 5)$. Nyatakan fungsi tersebut dengan:
   a) himpunan pasang berurut
   b) diagram panah,dan
   c) diagram kartesius!
5. Gambarlah diagram panah dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Termasuk kedalam macam fungsi apakah fungsi tersebut? Jelaskan alasanmu!
6. Apakah nama dari fungsi berikut ini ?
   a. $f(x) = x$ dengan $x \in R$
   b. $f(x) = (2 - x)^3$
   c. $f(x) = x^2 + x - 4$
7. Suatu fungsi $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ dengan daerah asal $-1 < x < 3;\ x \in R$. Tentukan daerah hasilnya?

8. Diketahui fungsi tangga:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, untuk\, x > 3 \\ x - 1, untuk - 2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3, untuk\, x < -2 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $f(-3), f(-2), f(1), f(3), f(5)$!

Daftar Pustaka

Broto, A.S, dkk., 2010. *Matematika Progam Ipa Kelas XI*. Solo: CV. Sindunata

Cholik M. A., Sugijono. *Matematika untuk SMP kelas VII*. Jakarta: Erlangga, 2002

Hudoyo, Herman dan Sutawidjaja, Akbar. 1997. *Matematika*. Jakarta: Dikti Depdikbud

Murniati, Suwarsini, dkk., 2009. *Matematika SMA kelas XI*. Jakarta: Yudhistira

Wirodikromo, Sartono. 2006. *Matematika untuk Kelas X*. Jakarta: Erlangga.