DIKTAT LIMIT FUNGSI

MATAKULIAH KAPITA SELEKTA

Sumber: https://pujangga37.blogspot.com/2016/04/limit-fungsi-aljabar-matematika.html

Dr. Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang mana atas berkat dan rahmatnya penyusun dapat menyelesaikan diktat Limit untuk mata kuliah Kapita Selekta dengan bobot 4 SKS, sebagai bahan rujukan tambahan mahasiswa termasuk mengungkapkan ide-ide kreatif yang mungkin muncul melalui diktat ini. Penyusun sangat sadar bahwa diktat limit ini masih banyak sekali kekurangan. Oleh karena itu penyusun sangat terbuka sekali bagi berbagai kritikan dan saran demi perbaikan di masa yang akan datang.

Akhirnya penyusun mohon maaf atas segala kekurangan dan mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam penyusunan diktat limit ini.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Jember, Maret 2017

Erfan Yudianto

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. LIMIT FUNGSI

A. Limit Fungsi Aljabar

1. Pengertian Limit Fungsi di Suatu Titik Melalui Perhitungan Nilai-nilai di Sekitar Titik Tersebut

Diketahui fungsi $f : R \rightarrow R$ yang ditentukan oleh $f(x) = 2x - 1$. Jika variabel x diganti dengan 3, maka $f(3) = 2.3 - 1 = 5$. Berapakah nilai yang akan didekati $f(x)$ jika variabel x mendekati 3? Untuk menjawab persoalan ini diperlukan Tabel sebagai berikut.

Tabel 1. Pengertian Limit f(x) = 2x – 1 didekati dari 3

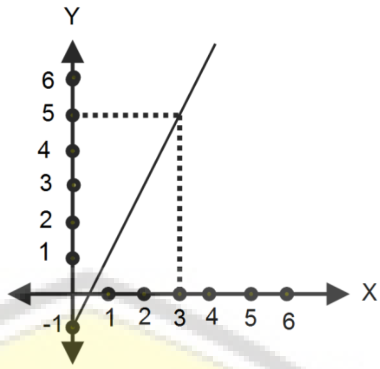
x	1,5	1,75	2,5	2,75	2,85	2,95	2,97	2,98	2,99	…
f(x)	2	2.5	4	4,5	4,7	4,9	4,94	5,96	4,98	…

Dari tabel dapat dilihat jika *x*mendekati dari pihak kurang dari 3, maka nilai *f(x)* mendekati 5. Apakah nilai *f(x)* akan mendekati 5 jika *x* lebihbesar dari 3? Untuk menjawabnya kita lihat Tabel berikut ini.

Tabel 2. Pengertian Limit f(x) = 2x – 1 didekati dari 5

x	…	3,01	3,10	3,25	3,50	3,75	4,25	…
f(x)	…	5,02	5,20	5,50	6,00	6,50	7,50	…

Dari tabel dapat dilihat bahwa jika *x* mendekati 3 dari pihak lebih besar dari 3 maka nilai *f(x)* mendekati 5, sehingga dikatakan bahwa fungsi $f(x) = 2x - 1$, maka nilai dari $\lim_{x \to 3} 2x - 1 = 5$. Grafiknya sebagai berikut.



Gambar 1. Grafik fungsi $f(x) = 2x - 1$

Dari uraian diatas, secara intuitif limit dapat didefinisikan sebagai berikut.

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a (tetapi $x \neq a$) maka $f(x)$ mendekati nilai L.

Menentukan limit dengan cara diatas ternyata lambat dan tidak efisien. Misalkan untuk menyelesaikan $\lim_{x \to a} f(x)$, maka dapat dilakukan dengan cara yang lebih cepat dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

a. Jika $f(a) = C$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = C$

b. Jika $f(a) = \frac{C}{0}$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{C}{0} = \infty$

c. Jika $f(a) = \frac{0}{C}$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{C} = 0$

d. Jika $f(a) = \frac{0}{0}$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x)$ disederhanakan dahulu hingga menjadi bentuk (a), (b), (c).

(Maryanto, 2008)

2. Menentukan Limit Fungsi Aljabar Bila Variabelnya Mendekati Nilai Tertentu

Menentukan limit dengan cara diatas tidaklah efisien. Untuk mengatasinya, kita dapat menentukan nilai limit suatu fungsi dengan beberapa cara, yaitu:

a. Subtitusi

Cara ini digunakan ketika fungsi berbentuk polinom atau dalam bentuk $\lim_{x\to a} f(x)$ dan jika disubtitusi langsung tidak dalam bentuk $\frac{0}{0}$ (bentuk tentu).

Contoh:

1. Tentukan nilai $\lim_{x\to 3}\left(x^2-7\right)$!

   Penyelesaian :

   Nilai limit dari fungsi *f(x)* = $x^2 - 7$ dapat kita ketahui secara langsung, yaitu dengan cara mensubtitusikan *x =3* ke *f(x)*

   $\lim_{x\to 3}\left(x^2-7\right) = 3^2 - 7 = 9 - 7 = 2$

   Artinya jika*x* dekat 3 maka $x^2 - 7$ dekat pada $3^2 - 7 = 9 - 7 = 2$

2. Tentukan nilai $\lim_{x\to 1}\left(x^2+2x-2\right)$!

   Penyelesaian :

   Nilai limit dari fungsi *f(x)* = $x^2 + 2x - 2$ dapat kita ketahui secara langsung, yaitu dengan cara mensubtitusikan *x =2* ke *f(x)*

   $\lim_{x\to 3} x^2 + 2x - 2 = 2^2 + 2.2 - 2 = 6$

   Artinya jika *x* dekat 2 maka $x^2 + x - 2$ dekat pada $2^2 + 2.2 - 2 = 6$

b. Pemfaktoran

Jika dengan cara subtitusi langsung pada $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu), lakukan pemaktoran terlebih dahulu terhadap f(x) da g(x). Kemudian, sederhanakan ke bentuk paling sederhana.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

$P(a) \neq 0,$

$Q(a) \neq 0.$

(Sudrajat W. D., 2008)

Contoh:

1. Tentukan nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$!

   Penyelesaian:

   Jika x = 3 kita subtitusikan maka f (3) = $\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$.

   Kita telah mengetahui bahwa semua bilangan yang dibagi dengan 0 tidak terdefinisi. Ini berarti untuk menentukan nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, kita harus mencari fungsi yang baru sehingga tidak terjadi pembagian dengan nol. Untuk menentukan fungsi yang baru itu, kita tinggal menfaktorkan fungsi *f (x)* sehingga menjadi:

   $$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3).\left(\frac{x-3}{x-3}\right) = 1$$

   Jadi, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

   $= \lim_{x \to 3} (x+3)$

   $= 3 + 3 = 6$

2. Hitung $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1}$

   Penyelesaian:

   $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x^2 + 2x - 1)}$$

   $$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)}{(2x^2 + 2x - 1)} = \frac{1+1}{2+2-1} = \frac{2}{3}$$

c. Merasionalkan Penyebut

Cara yang ke-tiga ini digunakan apabila penyebutnya berbentuk akar yang perlu dirasionalkan, sehingga tidak terjadi pembagian angka 0 dengan 0.

Contoh:

1. Tentukan nilai $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-2}}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-2)(\sqrt{x-2})}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x-3)\sqrt{x-2}$$

$$= (2-3).\sqrt{2-2}$$

$$= -1 \, . \, 0$$

$$= 0$$

2. Tentukan $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

d. Merasionalkan Pembilang

Contoh:

1. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x-4}}{x-1}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x-4}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x-4}}{x-1}\times\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-4}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3x-2}\right)^2-\left(\sqrt{5x-4}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2x+2}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-4}}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{3.1-2}+\sqrt{5.1-4}}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{-2}{1+1}=-1$$

2. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{x}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)-2}{x(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{0-2} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

3. Pengertian Limit Fungsi di Tak Berhingga

Diketahui $f(x) = \frac{2}{x}$. Jika dibuat tabel untuk x bilangan sebagai berikut.

Tabel 3. Pengertian Limit Fungsi di Tak Berhingga (1)

X	1	2	3	4	…	10	…	100	…	200	…
f(x)	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{1}{5}$	…	$\frac{1}{50}$	…	$\frac{1}{1.000}$	…

Apabila nilai x makin besar, ternyata nilai f(x) makin kecil. Apabila x besar sekali atau x mendekati tak berhingga, ditulis $x \to \infty$, maka nilai $\frac{2}{x}$ akan mendekati nol, dikatakan limit dari $\frac{2}{x}$ untuk x mendekati tak berhingga adalah nol dan ditulis: $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0$

Sekarang perhatikan contoh berikut ini: Hitunglah $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1}$

Untuk menjawab limit tersebut, dapat dicoba dengan Tabel berikut ini.

Tabel 4. Pengertian Limit Fungsi di Tak Berhingga (2)

x	1	2	3	…	10	…	100	…	1.000	…
$\frac{2x}{x+1}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	…	$\frac{20}{11}$	…	$\frac{200}{101}$	…	$\frac{2000}{1001}$	…

Apabila x menjadi semakin besar, maka nilai $\frac{2x}{x+1}$ akan mendekati 2. Dikatakan bahwa $L = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$.

Limit fungsi yang berbentuk $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat diselesaikan dengan cara membagi bagian pembilang f(x) dan bagian penyebut g(x) dengan x^n, n adalah pangkat tertinggi dari $f(x)$ atau g(x) untuk setiap n bilangan positif dan a bilangan real, maka:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0}$$

Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ adalah sebagai berikut.

1. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih besar daripada derajat penyebut g(x), maka nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
2. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ sama dengan derajat penyebut g(x), maka nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ = real
3. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih kecil daripada derajat penyebut g(x), maka nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ = 0. (Maryanto, 2008)

4. Menentukan Limit Fungsi Aljabar Bila Variabelnya Mendekati Tak Berhingga

Bentuk limit fungsi aljabar yang variabelnya mendekati tak berhingga,diantaranya:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ dan } \lim_{x\to\infty} \left[f(x) \pm g(x) \right]$$

Untuk menentukan nilai limit dari bentuk-bentuk tersebut, dapat dilakukan cara-cara sebagai berikut:

a. Membagi dengan pangkat tertinggi

Cara ini digunakan untuk mencari nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Caranya dengan membagi *f(x)* dan *g(x)* dengan pangkat yang tertinggi dari n yang terdapat pada *f(x)* atau *g (x)*.

Contoh:

1. Tentukan nilai limit dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x+1}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+3}{2x+1}$ perhatikan pangkat tertinggi dari x pada *f(x)* = 4*x* + 1 dan *g(x)* = 2*x* + 1. Ternyata pangkat tertinggi dari x adalah satu.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{4+\frac{3}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{4+0}{2+0}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

2. Tentukan nilai limit dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+1}{x^2-2x}$

Penyelesaian:

Perhatikan fungsi $h(x) = \dfrac{4x+1}{x^2-2x}$!

Fungsi tersebut memiliki x dengan pangkat tertinggi 2, yaitu x^2 yang terdapat pada $x^2 - 2x$. Jadi, untuk menentukan nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+1}{x^2-2x}$ maka fungsi $4x + 1$ dan $x^2 - 2x$ harus dibagi dengan x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\frac{4}{\infty}+\frac{1}{(\infty)^2}}{1-\frac{2}{(\infty)}}$$

$$= \frac{0+0}{1-0}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

b. Mengalikan dengan faktor lawan

Cara ini digunakan untuk menyelesaikan $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) \pm g(x)\right]$ untuk $f(x), g(x)$ adalah bilangan irasional. Jika kita dimitai menyelesaikan

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$ maka kita harus mengalikan $\left[f(x)+g(x)\right]$dengan $\frac{\left[f(x)-g(x)\right]}{\left[f(x)-g(x)\right]}$ sehingga bentuknya menjadi:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right].\ \frac{\left[f(x)-g(x)\right]}{\left[f(x)-g(x)\right]}=\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left[f(x)^2-g(x)^2\right]}{\left[f(x)-g(x)\right]}$$ ataupun sebaliknya (Sudrajat A. , 2000)

Contoh:

1. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\ \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+2x\right)-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\ \frac{2-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$=1$$

2. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}=\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}\ .\ \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x+3)-(x+4)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}}$$

$$= \frac{0}{1+1} = 0$$

B. Teorema Limit

Misalkan *n* bilangan bulat positif, *k* sebuah konstanta dan *f*, *g* adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di *a* maka:

1. $\lim_{x \to a} k = k$
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} k\, f(x) = \text{k} \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$
6. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, dimana $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$
8. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ dimana
9. $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$ untuk *n* bilangan genap
10. $\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$ untuk *n* bilangan ganjil (Sudrajat,200).

Contoh:

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 4} \left(2x^2 - x\right)$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 4} \left(2x^2 - x\right) = \lim_{x \to 4} 2x^2 - \lim_{x \to 4} x \quad \text{(teorema 4)}$$

$$= 2 \lim_{x \to 4} x^2 - \lim_{x \to 4} x \quad \text{(teorema 3)}$$

$$= 2 \left[\lim_{x \to 4} x\right]^2 - \lim_{x \to 4} x \text{(teorema 7)}$$

$$= 2. (4)^2 - 4 \text{ (teorema 2)}$$

$$= 2. 16 - 4 = 28$$

2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 + 9}{x}}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 + 9}{x}} = \frac{\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \to 3} x} \quad \text{(teorema 6)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to 3} (x^2 + 9)}}{\lim_{x \to 3} x} \quad \text{(teorema8 dan 3)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 9}}{\lim_{x \to 3} x} \quad \text{(teorema4)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\lim\limits_{x\to3} x)^2 + \lim\limits_{x\to3} 9}}{\lim\limits_{x\to3} x} \qquad \textit{(teorema7)}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2+9}}{3} \qquad \textit{(teorema dan 2)}$$

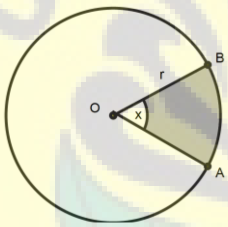
$$= \frac{\sqrt{18}}{3}$$

$$= \frac{3}{3}\sqrt{2}$$

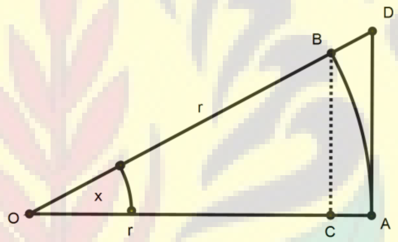
$$= \sqrt{2}$$

C. Limit Fungsi Trigonometri

1. Menghitung Limit Fugsi Trigonommetri



Gambar 2. Lingkaran



Gambar 3. Juring AOB

Perhatikan gambar diatas. Dari gambar diatas diketahui panjang jari-jari lingkaran = r, besar sudut AOB adalah *x* radian, BC dan AD tegak lurus OA untuk $0 < x < \frac{1}{2}\pi$

$$\frac{BC}{OB} = \sin x \Rightarrow BC = OB \sin x$$

$$BC = r \sin x$$

$$\frac{AD}{OA} = \tan x \Rightarrow AD = OA \tan x$$

$$AD = r \tan x$$

$$\mathcal{L}_{\Delta OBC} < \mathcal{L}_{juring\,OAB} < \mathcal{L}_{OAD}$$

$$\frac{1}{2}.OC.BC < \frac{x}{2\pi} L_{Lingkaran} < \frac{1}{2}.OA.AD$$

$$\frac{1}{2}.OC.BC < \frac{x}{2\pi}\pi r^2 < \frac{1}{2}.OA.AD$$

$$\frac{1}{2}.OC.BC < \frac{1}{2}xr^2 < \frac{1}{2}.OA.AD$$

$$\left(\frac{1}{2}.OC.r\sin x < \frac{1}{2}xr^2 < \frac{1}{2}.OA.r\tan x\right) : \frac{1}{2}r^2$$

$$\frac{\frac{1}{2}.OC.r\sin x}{\frac{1}{2}r^2} < \frac{\frac{1}{2}xr^2}{\frac{1}{2}r^2} < \frac{\frac{1}{2}.OA.r\tan x}{\frac{1}{2}r^2}$$

$$\frac{OC}{r}\sin x < x < \frac{OA}{r}\tan x$$

$$\cos x \sin x < x < \frac{r}{r}\tan x$$

$$(\cos x \sin x < x < \tan x) : \sin x$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$\cos 0 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos 0}$$

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{1}$$

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < 1$$

Maka

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \qquad atau \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Sehingga untuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin ax} = 1$$

Berdasarkan

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ maka berlaku $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$

Misalkan $y = ax$ sehingga

$$\lim_{ax\to 0}\frac{ax}{\sin ax}=\lim_{ax\to a.0}\frac{ax}{\sin ax}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

Maka

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}\times\frac{ax}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin ax}\times\frac{ax}{bx}=1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

Dari persamaan: $(\cos x\sin x<x<\tan x):\tan x$

$$\frac{\cos x\sin x}{\tan x}<\frac{x}{\tan x}<\frac{\tan x}{\tan x}$$

$$\frac{\cos x\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}<\frac{x}{\tan x}<1$$

$$\frac{\cos x\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}<\frac{x}{\tan x}<1$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}.\cos x\sin x<\frac{x}{\tan x}<1$$

$$\cos^2 x<\frac{x}{\tan x}<1$$

$$\lim_{x\to 0}\cos^2 x<\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}<1$$

$$1<\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}<1$$

Maka

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1 \quad atau \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

(Maryanto, 2008)

Sehingga untuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan ax}=1$$

Berdasarkan

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$ maka berlaku $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=1$

Misalkan $y = ax$ sehingga

$$\lim_{ax \to 0} \frac{ax}{\tan ax} = \lim_{ax \to a.0} \frac{ax}{\tan ax} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Maka

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} \times \frac{ax}{ax} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan ax} \times \frac{ax}{bx} = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

2. Rumus limit fungsi trigonometri

a. Limit fungsi sinus

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$
6. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

b. Limit fungsi tangen

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan ax} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

Contoh:

1. Tentukan nilai limit dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} . \frac{3x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} . \lim_{x \to 0} \frac{3x}{2x}$$

$$= 1 . \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Tentukan nilai limit dari $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin 5\theta}{\tan 3\theta}$

Penyelesaian:

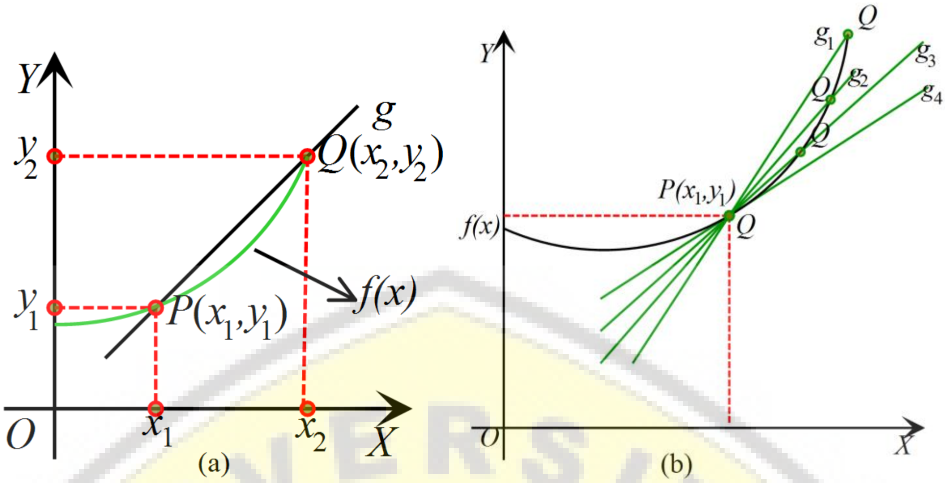
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{\tan 3\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{5\theta} 5\theta \frac{3\theta}{\tan 3\theta} \frac{1}{3\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{5\theta} . \lim_{\theta \to 0} \frac{3\theta}{\tan 3\theta} . \lim_{\theta \to 0} \frac{5\theta}{3\theta}$$

$$= \lim_{5\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{5\theta} . \lim_{3\theta \to 0} \frac{3\theta}{\tan 3\theta} . \lim_{\theta \to 0} \frac{5\theta}{3\theta} = 1.1.\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

D. Limit Fungsi yang Mengarah ke Konsep Turunan

Limit merupakan konsep utama yang mendasari kalkulus diferensial(turunan) maupun integral (invers turunan). Perhatikan gambar berikut:



Gambar 4. Limit Fungsi yang Mengarah pada Turunan

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ dan $P(x_2, y_2)$ digambarkan pada **Gambar 4** (a). Garis *g* berpotongan dengan fungsi $f(x)$ di titik P dan Q. Jika gradient garis *g* adalah *m*, dapat dituliskan dengan:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pada **Gambar 4** (a) tampak bahwa $y_2 = f(x_2)$ dan $y_1 = f(x_1)$. Oleh karena itu, $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Jika $\Delta x = x_2 - x_1$ dan $\Delta y = y_2 - y_1$, persamaan gradient menjadi: $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Sekarang perhatikan **Gambar 4** (b). Jika *P* sebagai titik tetap dan garis *g* digeser terus-menerus ke bawah, garis tersebut mendekatai datar. Akibatnya $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$. Jika hal ini dilakukan terus-menerus *P* akan berimpit dengan *Q*. Hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk limit, yaitu:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Bentuk limit semacam ini akan dikembangkan kea rah konsep turunan. Secara umum, gradient menyinggung kurva $f(x)$ dapat ditentukan dengan limit berikut:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx biasanya juga dituliskan dengan *h*

II. TURUNAN FUNGSI

A. Turunan dan Tinjauan Geometrinya

Turunan berhubungan dengan tingkat perubahan suatu fungsi karena variabel bebasnya berubah. Perubahan ini sangat kecil sehingga dikatakan perubahannya mendekati nol.

1. Pengertian Turunan

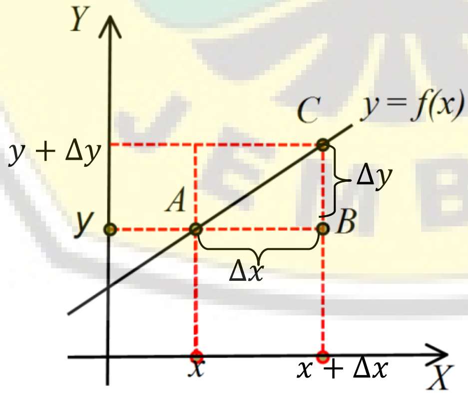
Misalkan diketahui fungsi $y = f(x)$. Jika variabel x bertambah sebesar Δx maka variabel y mengalami perubahan sebesar Δy. Hal ini dapat dituliskan:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Leftrightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Leftrightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Jadi, Δy timbul karena adanya perubahan sebesar Δx pada x. Jika kedua ruas dibagi Δx, diperoleh: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ini dinamakan hasil bagi perbedaan atau *difference quotient* yang mencerminkan tingkat perubahan rata-rata variabel y terhadap variabel x.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 5. Pengertian Turunan

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Untuk perubahan x sangat kecil, ditulis: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

Jadi, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. $\frac{dy}{dx}$ disebut turunan dari fungsi f di titik x. Jika Δx biasanya ditulis dengan huruf h maka rumus turunan tersebut dapat ditulis $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ada atau mempunyai nilai, maka fungsi $y = f(x)$ dikatakan *deferensiabel* atau mempunyai turunan di titik x. Turunan fungsi $y = f(x)$ dinotasikan dengan $f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{df}{dx}$. Jadi, turunan suatu fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Contoh Soal:

1. Dengan menggunakan definisi $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, tentukan turunan pertama fungsi $f(x) = x^2 + 2$

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned}
   \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
   &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2 + 2)}{h} \\
   &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2}{h} \\
   &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
   &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
   &= \lim_{h \to 0} (2x+h) \\
   &= 2x
   \end{aligned}$$

2. Tentukan turunan pertama fungsi $f(x) = \frac{x^2}{5}$

   Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)^2}{5}-\frac{x^2}{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2+2xh+h^2}{5}-\frac{x^2}{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{5h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{5h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{5h}$$

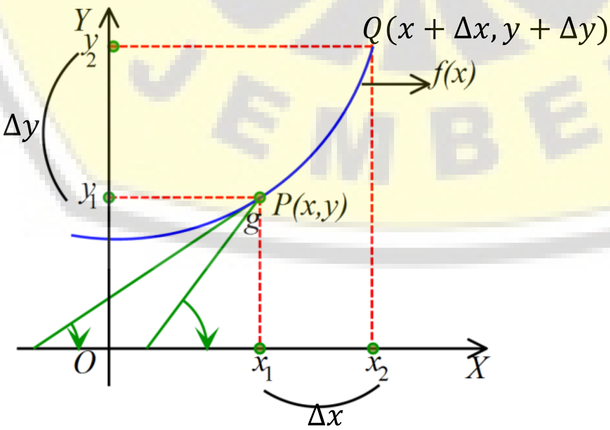
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+h)}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$= \frac{1}{5}\times 2x = \frac{2x}{5}$$

2. Turunan Ditinjau dari Sudut Pandang Geometri

Limit yang mengarah pada konsep turunan dapat digambarkan sebagai kemiringan atau gradient suatu kurva di titik tertentu. Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$, serta titik $P(x, y)$, serta $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 6. Turunan ditinjau dari Geometri

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Pada gambar diatas, sudut α adalah besar sudut yang dibentuk antara garis *g* yang menyinggung fungsi *f* (*x*) di titik *P* dengan sumbu *X*, sedangkan sudut β adalah besar sudut yang dibentuk antara garis penghubung titik *P* dan *Q* dengan sumbu *X*. seperti yang kalian ketahui bahwa nilai tangen merupakan koefisien kemiringan suatu garis. Oleh karena itu, dari gambar tersebut diperoleh $\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Nilai $\tan\alpha$ yaitu gradien persamaan garis singgung *g* terhadap *f* (*x*) di titik *P* dapat ditentukan dengan cara pendekatan berikut ini. misalkan titik *Q* bergerak sepanjang *f* (*x*) mendekati titik *P*. Akibatnya, $\Delta x \to 0$. Dengan demikian, besar sudut β mendekati besar sudut α. Dengan kata lain, $\lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan\alpha$

Besar perubahan *x* yang dinyatakan dengan Δx biasanya juga dinyatakan dengan *h*.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Dengan demikian, $f'(x)$ merupakan gradient garis singgung fungsi $f(x)$ di titik (*x*,*y*). $f'(x)$ juga diartikan sebagai laju perubahan suatu fungsi.

Misalkan diketahui $y = f(x)$. Gradient garis singgung di titik *P*(*a*,*b*) yang terletak pada fungsi $y = f(x)$ adalah:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Contoh Soal:

1. Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 - x$ di $x = 1$!

   Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) - (x^2 - x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h - 1)$$

$$= 2x - 1$$

Dengan demikian, $f'(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$

Jadi, gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 - x$ di $x = 1$ adalah 1

2. Tentukan laju perubahan fungsi $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, di $x = 1$!

Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2}{x+h+1} - \dfrac{2}{x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2(x+1) - 2(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2x + 2 - 2x - 2h - 2}{x^2 + 2x + xh + h + 1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h(x^2 + 2x + xh + h + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{(x^2 + 2x + xh + h + 1)}$$

$$= \frac{-2}{2x+1}$$

Dengan demikian, $f'(1) = \dfrac{-2}{2(1)+1} = \dfrac{-2}{3}$

Jadi, laju perubahan fungsi $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, di $x = 1$ adalah $\dfrac{-2}{3}$

B. Turunan Fungsi Aljabar

Secara umum, fungsi $f(x)=x^n$, dengan n bilangan bulat, turunannya dapat ditentukan dengan $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$. Menurut teorema Binomial, untuk x dan y bilangan real dan n bilangan asli, berlaku:

$$\boxed{(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^n y^n}$$

Dengan teorema tersebut, diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \ldots + C_n^n h^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \ldots + C_n^n h^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \ldots + C_n^n h^n}{h}\\
&= C_1^n x^{n-1}\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Dengan demikian, apabila $f(x)=x^n$ maka telah terbukti $f'(x)=nx^{n-1}$. Dengan cara yan sama, jika $f(x)=ax^n$ maka dapat dibuktikan bahwa turunan $f(x)$ adalah $f'(x)=anx^{n-1}$. Selanjutnya rumus ini berlaku pula untuk n bilangan rasional.

Jika n bilangan rasional, c konstanta, $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi-fungsi diferensiabel dengan turunannya masing-masing $u'(x)$ dan $v'(x)$. Jika $f'(x)$ turunan dari $f(x)$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1. Jika $f(x)=c \to f'(x)=0$
2. Jika $f(x)=x^n \to f'(x)=nx^{n-1}$
3. Jika $f(x)=ax^n \to f'(x)=anx^{n-1}$

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Contoh Soal:

1. Tentukan turunan dari $f(x) = 4x^3$!

   Penyelesaian:

   $f'(x) = 4 \times 3x^{3-1}$

   $f'(x) = 12x^2$

   Jadi turunan dari $f(x) = 4x^3$ adalah $12x^2$

2. Tentukan turunan dari $f(x) = \dfrac{2x^2}{3\sqrt{x}}$!

   Penyelesaian:

   $f(x) = \dfrac{2x^2}{3\sqrt{x}}$

   $f(x) = \dfrac{2x^2}{3x^{1/2}}$

   $f(x) = \dfrac{2x^{1,5}}{3}$

   $f'(x) = \dfrac{2 \times 1{,}5x^{1,5-1}}{3}$

   $f'(x) = \dfrac{3x^{1/2}}{3}$

   $f'(x) = \sqrt{x}$

   Jadi, turunan dari $f(x) = \dfrac{2x^2}{3\sqrt{x}}$ adalah $\sqrt{x}$

C. Turunan Fungsi Trigonometri

Seperti halnya turunan fungsi aljabar, turunan fungsi trigonometri diperoleh dengan mencari $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi trigonometri. Dua buah fungsi yang dijadikan acuan untuk menentukan turunan fungsi trigonometri lainnya adalah fungsi sinus dan cosinus.

1. Turunan Fungsi Sinus

Misalkan diketahui $f(x) = \sin x$. Dengan menggunakan limit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk $f(x) = \sin x$ diperoleh sebagai berikut:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{1}{2}(2x+h)\times\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\times\frac{1}{2}$$

$$=2\cos x\times\frac{1}{2}$$

$$=\cos x$$

Jadi, diperoleh rumus turunan fungsi sinus sebagai berikut:

Jika $f(x)=\sin x$, maka turunannya adalah $f'(x)=\cos x$

2. Turunan Fungsi Cosinus

Misalkan diketahui $f(x)=\cos x$. Dengan menggunakan $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk $f(x)=\cos x$ diperoleh sebagai berikut:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{1}{2}(2x+h)\times\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$=-2\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$=-2\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$=-2\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\times\frac{1}{2}$$

$$= -2\sin x \times \frac{1}{2}$$
$$= -\sin x$$

Jadi, diperoleh rumus turunan fungsi sinus sebagai berikut:

Jika $f(x) = \cos x$, maka turunannya adalah $f'(x) = -\sin x$

Dengan menggunakan rumus $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ akan diperoleh:

1. Jika $f(x) = a\sin x \to f'(x) = a\cos x$
2. Jika $f(x) = a\cos x \to f'(x) = -a\sin x$
3. Jika $f(x) = \tan x \to f'(x) = \sec^2 x$
4. Jika $f(x) = \csc x \to f'(x) = -\csc x \cot x$
5. Jika $f(x) = \sec x \to f'(x) = \sec x \tan x$
6. Jika $f(x) = \cot x \to f'(x) = \csc^2 x$

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Contoh Soal:

1. Tentukan $f'(x)$ jika $f(x) = 4\cos x$!

   Penyelesaian:

   $f(x) = 4\cos x$
   $f'(x) = -4\sin x$

   Jadi $f'(x)$ jika $f(x) = 4\cos x$ adalah $-4\sin x$

2. Tentukan $f'(x)$ jika $f(x) = \frac{4\sin x}{2\cos x}$!

   Penyelesaian:

   $f(x) = \frac{4\sin x}{2\cos x}$
   $f(x) = 2\tan x$
   $f'(x) = 2\sec^2 x$

   Jadi $f'(x)$ jika $f(x) = \frac{4\sin x}{2\cos x}$ adalah $2\sec^2 x$

D. Sifat-sifat Turunan Fungsi

Misalkan n bilangan rasional, c konstanta, $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi-fungsi diferensiabel dengan turunannya masing-masing $u'(x)$ dan $v'(x)$. Jika $f'(x)$ turunan dari $f(x)$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1. Turunan Hasil Kali Konstanta dengan Fungsi

Misalkan $f(x) = c \times u(x)$. Dengan menggunakan $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk $f(x) = c \times u(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c\times u(x+h) - c\times u(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ &= c\times u'(x) \end{aligned}$$

Jadi, jika $f(x) = c\times u(x) \rightarrow f'(x) = c\times u'(x)$

2. Turunan Jumlah dan Selisih Fungsi

Misalkan $f(x) = u(x) + v(x)$. Dengan menggunakan $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk $f(x) = u(x) + v(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) \pm v(x+h) - \left(u(x) \pm v(x)\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) \pm v(x+h) - u(x) \mp v(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x) \pm \left(v(x+h) - v(x)\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \pm \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\ &= u'(x) \pm v'(x) \end{aligned}$$

Jadi, jika $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

3. Turunan Hasil Kali Fungsi

Misalkan $f(x) = u(x) \times v(x)$. Dengan menggunakan $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk $f(x) = u(x) \times v(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \times v(x+h) - [u(x) \times v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \times v(x+h) - [u(x) \times v(x)] + u(x+h)v(x) - u(x+h)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - [u(x) \times v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)] + [u(x+h) - u(x)]v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} u(x+h) \times \lim_{h \to 0} \frac{[v(x+h) - v(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} \times \lim_{h \to 0} v(x) \\
&= u(x)v'(x) + u'(x)v(x)
\end{aligned}
$$

Jadi, jika $f(x) = u(x) \times v(x) \rightarrow f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

4. Turunan Fungsi Pangkat

Jika $f(x) = \{u(x)\}^n \rightarrow f'(x) = n \times \{u(x)\}^{n-1} \times u'(x)$

Untuk pembuktiannya dapat dibuktikan setelah mempelajari aturan rantai

5. Turunan Hasil Bagi Fungsi

Misalkan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Dengan menggunakan $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h) \times v(x) - u(x) \times v(x+h)}{v(x+h) \times v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \times v(x) - u(x) \times v(x+h) + u(x) \times v(x) - u(x) \times v(x)}{h \times v(x+h) \times v(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \times v(x) - u(x) \times v(x) + u(x) \times v(x) - u(x) \times v(x+h)}{h \times v(x+h) \times v(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] \times v(x) - u(x) \times [v(x+h) - v(x)]}{h \times v(x+h) \times v(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{[u(x+h) - u(x)]}{h} \times v(x) - u(x) \times \dfrac{[v(x+h) - v(x)]}{h}}{v(x+h) \times v(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[u(x+h) - u(x)]}{h} \times \lim\limits_{h \to 0} v(x) - \lim\limits_{h \to 0} u(x) \times \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[v(x+h) - v(x)]}{h}}{\lim\limits_{h \to 0} v(x+h) \times v(x)}$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Contoh Soal:

1. Tentukan turunan dari $f(x) = (x^2 - x)(x^3 + 2)$!

   Penyelesaian:

   $f(x) = (x^2 - x)(x^3 + 2)$
   $u(x) = (x^2 - x); v(x) = (x^3 + 2)$
   $u'(x) = 2x - 1; v'(x) = 3x^2$
   $f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$
   $f'(x) = (x^2 - x) \times 3x^2 + (2x - 1)(x^3 + 2)$
   $f'(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^4 - x^3 + 4x - 2$
   $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 4x - 2$

   Jadi turunan dari $f(x) = (x^2 - x)(x^3 + 2)$ adalah $5x^4 - 4x^3 + 4x - 2$

2. Tentukan turunan dari $f(x) = (x^2 - x)^{10}$!

   Penyelesaian:

   $f(x) = (x^2 - x)^{10}$
   $f'(x) = 10(x^2 - x)^9 (2x - 1)$
   $f'(x) = (20x - 10)(x^2 - x)^9$

   Jadi turunan dari $f(x) = (x^2 - x)^{10}$ adalah $f'(x) = (20x - 10)(x^2 - x)^9$

E. Menentukan Turunan dengan Aturan Rantai

Misalkan diketahui fungsi $f(x) = (2x-3)^2$. Tentu dengan soal ini tidak terlalu sulit untuk menentukan turunannya, yaitu dengan menguraikannya terlebih dahulu kemudian menurunkannya. Namun, bagaimana jika kalian dihadapkan pada persoalan $f(x) = (2x-3)^{10}$? Apakah kalian juga akan menguraikannya terlebih dahulu, kemudian menurunkannya? Persoalan seperti ini akan lebih mudah jika dikerjakan dengan menggunakan aturan rantai. Prinsip menentukan turunan dengan menggunakan aturan rantai adalah mengubah fungsi yang akan diturunkan ke dalam fungsi bentuk dasar, seperti x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, dan lain-lain. Selanjutnya, fungsi-fungsi bentuk dasar itu diturunkan seperti halnya aturan yang telah dijelaskan sebelumnya.

Misalkan terdapat fungsi $y = f(u(x))$. Turunan fungsi y dapat ditentukan dengan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$. Rumus ini didapat dari:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta u}{\Delta u}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Dengan cara yang serupa, misalkan terdapat fungsi $y = f(u(v(x)))$, turunan fungsinya dapat ditentukan dengan:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}}$$

Contoh Soal:

1. Tentukan turunan dari $f(x) = (3x-5)^2$!

   Penyelesaian:

   Misalkan $u = (3x-5) \rightarrow f(x) = u^2$

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(x)}{du} = 2u$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2u \times 3 = 6u = 6(3x-5)$$

Jadi turunan dari $f(x) = (3x-5)^2$ adalah $6(3x-5)$

2. Tentukan turunan dari $f(x) = \sin(3x-5)$!

Penyelesaian:

Misalkan $u = (3x-5) \rightarrow f(x) = \sin u$

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(x)}{du} = \cos u$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \cos u \times 3 = 3\cos u = 3\cos(3x-5)$$

Jadi turunan dari $f(x) = \sin(3x-5)$ adalah $3\cos(3x-5)$

F. Turunan Fungsi Eksponen dan Logaritma

1. Turunan Fungsi Eksponen $(y = e^x)$

Turunan suatu fungsi dapat ditentukan dengan menggunakan limit. Berdasarkan pengertian itu, turunan fungsi $y = f(x)$ adalah $y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Oleh karena itu, misalkan $y = e^x$ maka

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \times e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h}$$

$$= e^x \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} \qquad \left(\text{ingat} : \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = 1\right)$$

$$= e^x \times 1 == e^x$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$\boxed{\text{Jika } y = e^x \rightarrow y' = e^x}$$

Dengan menggunakan dalil rantai, misalkan $u(x) = ax + b$ kalian dapat menentukan bahwa turunan dari fungsi $y = e^{ax+b}$ adalah sebagai berikut:

$$y = e^u \rightarrow \frac{dy}{du} = e^u = e^{ax+b}$$

$$u = ax + b \rightarrow \frac{du}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^{ax+b} \times a = ae^{ax+b}$$

$$\boxed{\text{Jika } y = e^{ax+b} \rightarrow y' = ae^{ax+b}}$$

Contoh Soal:

1. Tentukan turunan dari $y = e^{2x-1}$!

   Penyelesaian:

   $y = e^{2x-1}$

   $y' = 2 \times e^{2x-1}$

   $y' = 2e^{2x-1}$

   Jadi turunan dari $y = e^{2x-1}$ adalah $2e^{2x-1}$

2. Tentukan turunan dari $y = e^{\sin x}$!

   Penyelesaian:

   $y = e^{\sin x}$

   $y' = \cos x \times e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$

   Jadi turunan dari $y = e^{\sin x}$ adalah $\cos x e^{\sin x}$

2. Turunan Logaritma Natural $(\ln x)$

Ingat kembali definisi logaritma yaitu jika $y={}^a\log x \rightarrow x = a^y$. Logaritma natural merupakan logaritma dengan basis atau bilangan pokok e. Logaritma natural biasanya dinotasikan $\ln x$ sehingga ${}^e\log x = \ln x$. Oleh karena itu, dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{\ln x = y \leftrightarrow x = e^y}$$

(Y. & Indriyastuti, 2012)

Misalkan $y = \ln x \to x = e^y$. Turunan terhadap variabel y akan diperoleh $\frac{de^y}{dy} = e^y$. Karena $e^y = x \to \frac{dx}{dy} = x$. Oleh karena itu, diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}$.

$$\boxed{\text{Jadi, jika } y = \ln x \to y' = \frac{1}{x}}$$

Secara umum, dapat ditentukan turunan $y = \ln u$ dengan $u = f(x)$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = u'$$

$$\boxed{\text{Jadi, jika } y = \ln u \text{ dengan } u = f(x) \to y' = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}}$$

Contoh Soal:

1. Turunan dari $y = 5\ln x$ adalah. . .

   Penyelesaian:

   $y = 5\ln x$

   $y' = 5 \times \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$

   Jadi Turunan dari $y = 5\ln x$ adalah $\frac{5}{x}$

2. Tentukan turunan dari $y = \ln(7x-5)^2$!

   Penyelesaian:

   $$y = \ln(7x-5)^2$$
   $$y' = \frac{2 \times (7x-5) \times 7}{(7x-5)^2}$$
   $$y' = \frac{14}{7x-5}$$

   Jadi turunan dari $y = \ln(7x-5)^2$ adalah $\frac{14}{7x-5}$

G. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Nilai Stasioner

1. Pengertian Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Nilai Stasioner

Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$ maka cara menentukan interval suatu fungsi naik atau turun:

a. Jika untuk setiap x pada suatu interval, $f'(x) > 0$ maka $f(x)$ fungsi yang naik pada interval tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah positif(condong ke kiri)

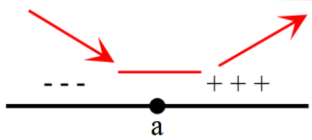
b. Jika untuk setiap x pada suatu interval, $f'(x) < 0$ maka $f(x)$ fungsi yang turun pada interval tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah negatif(condong ke kanan)

c. Jika untuk setiap x pada suatu interval, $f'(x) = 0$ maka $f(x)$ fungsi yang tidak naik dan tidak turun pada interval tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah nol.

2. Jenis-Jenis Nilai Stasioner

Terdapat 3 jenis nilai stasioner suatu fungsi yaitu:

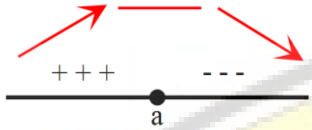
a. Titik balik minimum



Misalkan $x = a$ adalah stasioner

Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x<a$, $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x>a$ menyebabkan $f(x)$ naik maka $(a,f(a))$ adalah **titik balik minimum**

b. Nilai balik maksimum



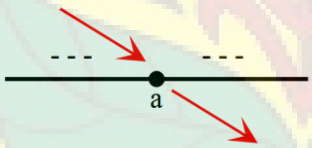
Misalkan $x = a$ adalah stasioner

Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x<a$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x>a$ menyebabkan $f(x)$ turun maka $(a,f(a))$ adalah **titik balik maksimum**

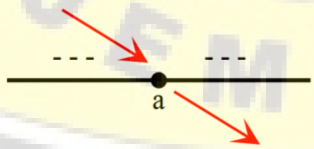
c. Titik belok

Misalkan $x = a$ adalah stasioner

- Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x<a$ menyebabkan $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x>a$ menyebabkan $f(x)$ juga turun maka $(a,f(a))$ adalah **titik belok**



- Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x<a$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x>a$ menyebabkan $f(x)$ juga naik maka $(a,f(a))$ adalah **titik belok**



(Y. & Indriyastuti, 2012)

3. Turunan Kedua dan Penggunaannya

Turunan pertama dari fungsi $y = f(x)$ dinotasikan dengan $y, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$, atau $f'(x)$. Turunan dari turuna pertama dinamakan turuna kedua.

Notasinya dapat ditulis sebagai $y'', \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}$, atau $f''(x)$. Turunan kedua dapat digunakan untuk.

a. Menentukan Jenis-Jenis Nilai Stasioner

Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu dalam interval $b<x<c$ yang memuat $x=a$. Turunan pertama dan turunan kedua fungsi tersebut terdefinisi pada interval tersebut.

1. Jika $f'(a)=0$ dan $f''(a)>0 \rightarrow (a, f(a))$ adalah *titik balik minimum*
2. Jika $f'(a)=0$ dan $f''(a)<0 \rightarrow (a, f(a))$ adalah *titik balik maksimum*
3. Jika bergantian tanda ((+) ke (-) atau sebaliknya) $\rightarrow (a, f(a))$ adalah *titik belok*

(Y. & Indriyastuti, 2012)

b. Uji Turunan Kedua untuk Kecekun

Dengan menggunakan turunan kedua(jika ada), kita dapat menentukan kecekungan kurva. Misalnya fungsi f terdiferensialkan dua kali(mempunyai turunan kedua) pada selang terbuka *I*.

1. Jika $f''(x)>0 \rightarrow$ fungsi f cekung ke atas pada I
2. Jika $f''(x)<0 \rightarrow$ fungsi f cekung ke bawah pada I

(Y. & Indriyastuti, 2012)

c. Uji Turunan Kedua untuk Titik Belok

Misal fungsi f terdiferensialkan pada selang terbuka I yang memuat a dan $f''(a)$ ada. Jika $f''(a)=0$ dan di sekitar $x=a$ terjadi perubahan kecekungan dari fungsi f maka $(a, f(a))$ adalah titik belok dari fungsi f.

4. Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi dalam Interval Tertutup

Nilai maksimum dan minimum fungsi $y=f(x)$ dalam interval tertutup $a \leq x \leq b$ ditentukan sebagai berikut.

a. Tentukan nilai stasioner (maksimum dan minimum) fungsi $f(x)$ dalam interval itu
b. Tentukan nilai $f(a)$ dan $f(b)$
c. Nilai terbesar dari nilai-nilai itu merupakan nilai maksimum, sedangkan nilai terkecil merupakan nilai minimum.
(Y. & Indriyastuti, 2012)

Contoh Soal:

1. Sebuah fungsi ditentukan dengan rumus $y = f(x) = x^2 - 6x + 10$
   a. Tentukan interval x supaya fungsi naik
   b. Tentukan interval x supaya fungsi turun
   c. Carilah nilai stasioner dari fungsi tersebut

   Penyelesaian:

   $f'(x) = 2x - 6$

   a. Fungsi naik saat $f'(x) > 0$

   $f'(x) > 0$
   $2x - 6 > 0$
   $2x > 6$
   $x > 3$

   Jadi fungsi naik pada interval $x > 3$

   b. Fungsi turun saat $f'(x) < 0$

   $f'(x) < 0$
   $2x - 6 < 0$
   $2x < 6$
   $x < 3$

   Jadi fungsi naik pada interval $x < 3$

   c. Titik stasioner saat $f'(x) = 0$

   $f'(x) = 0$
   $2x - 6 = 0$
   $2x = 6$
   $x = 3$

Maka nilai stasioner dari fungsi $y = f(x) = x^2 - 6x + 10$ adalah

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 10 = 9 - 18 + 10 = 1$

2. Tentukan nilai stasioner serta jenisnya dari fungsi berikut:

   a. $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

   b. $f(x) = x^2 + 2x + 4$

Penyelesaian:

a. $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

$f'(x) = -2x + 4$

- Fungsi naik saat $f'(x) > 0$

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \\ &-2x + 4 > 0 \\ &-2x > -4 \\ &x < 2 \end{aligned}$$

- Fungsi turun pada saat $f'(x) < 0$

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 \\ &-2x + 4 < 0 \\ &-2x < -4 \\ &x > 2 \end{aligned}$$

- Titik stasioner saat $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} &f'(x) = 0 \\ &-2x + 4 = 0 \\ &-2x = -4 \\ &x = 2 \end{aligned}$$

$f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 10 = -4 + 8 + 10 = 14$

$\therefore$ nilai stasionernya adalah 14

Saat $x < 2$ fungsi naik, sedangkan saat $x > 2$ fungsi turun maka nilai stasioner dari $f(x) = -x^2 + 4x + 10$ adalah titik balik maksimum

b. $f(x) = x^2 + 2x + 4$

$f'(x) = 2x + 2$

- Fungsi naik saat $f'(x) > 0$

  $$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \\ &2x + 2 > 0 \\ &2x > -2 \\ &x > -1 \end{aligned}$$

- Fungsi turun pada saat $f'(x) < 0$

  $$\begin{aligned} &f'(x) < 0 \\ &2x + 2 < 0 \\ &2x < -2 \\ &x < -1 \end{aligned}$$

- Titik stasioner saat $f'(x) = 0$

  $$\begin{aligned} &f'(x) = 0 \\ &2x + 2 = 0 \\ &2x = -2 \\ &x = -1 \end{aligned}$$

  $$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 1 - 2 + 4 = 3$$

  $\therefore$ nilai stasionernya adalah 3

  Saat $x < -1$ fungsi turun, sedangkan saat $x > -1$ fungsi naik maka nilai stasioner dari $f(x) = x^2 + 2x + 4$ adalah titik balik minimum

H. Menggambar Grafik Fungsi

Dalam menggambar grafik suatu fungsi $f(x)$, langkah-langkah yang perlu kalian perhatikan adalah sebagai berikut.

1. Menentukan titik potong $f(x)$ dengan sumbu-sumbu koordinat (sumbu X dan sumbu Y).
2. Menentukan titik-titik stasioner atau titik ekstrem dan jenisnya
3. Menentukan titik-titik sembarang dalam fungsi untuk memperhalus grafik.

I. Aplikasi Turunan

1. Menentukan Persamaan Garis Singgung Kurva

Turunan pertama suatu fungsi merupakan gradien persamaan garis singgung pada suatu titik tertentu. Apabila suatu gradient persamaan garis singgung $f(x)$ di titik (a,b) diketahui, kita dapat mencari persamaan garis singgungnya. Kalian tahu bahwa persamaan garis di titik (a,b) dan bergradien m adalah $y-b=m(x-a)$. Karena gradient garis singgung $f(x)$ di titik (a,b) adalah $m=f'(x)$, persamaannya dapat dirumuskan dengan:

$$\boxed{y-b=\left(f'(a)\right)(x-a)}$$

2. Perhitungan Kecepatan dan Percepatan

Salah satu aplikasi turunan adalah untuk menyelesaikan kasus-kasus yang berhubungan dengan kecepatan(kelajuan) dan percepatan. Sebagai contoh dalam bidang fisika dibahas tentang suatu gerak lurus berubah beraturan, yang berarti bahwa kecepatan benda selama bergerak tidaklah tetap. Misalkan sebuah benda bergerak dari suatu tempat ke tempat yang lain menempuh jarak s dalam waktu t. kecepatan rata-rata benda itu ditentukan dengan:

$$\boxed{\text{Kecepatan rata-rata} = \frac{\text{perubahan jarak}}{\text{perubahan waktu}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Jika kecepata pada saat t dinotasikan dengan $v(t)$ maka kecepatan dirumuskan dengan: $v(t)=\frac{ds}{dt}$

Dengan kata lain, kecepatan pada waktu t adalah turunan pertama dari fungsi jaraknya. Jika fungsi kecepatan terhadap waktu $v(t)$ kita turunkan lagi, maka akan diperoleh percepatan.

Misalnya percepatan pada saat t dinotasikan dengan $a(t)$, percepatan dirumuskan dengan: $a(t)=\frac{dv}{dt}$

Dengan kata lain, percepatan pada waktu t adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan. Percepatan juga diartikan sebagai turunan kedua dari fungsi jaraknya, yaitu: $a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$

Apabila percepatan bernilai negatif, berarti benda bergerak berlawanan arah dengan arah sebelumnya. Dalam hal ini dikatakan benda mengalami perlambatan.

3. Menentukan Limit Tak Tentu

Limit-limit yang mempunyai bentuk tak tentu juga dapat dikerjakan dengan aturan *L'Hopital*, dibaca Loupital. Dalam pembahasan kali ini, bentuk-bentuk tak tentu yang dimaksud adalah $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$.

Apabila $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki turunan di $x=a$ dan $f(a)=g(a)=0$, sedangkan $f'(a)$ dan $g'(a)$ tidak sama-sama bernilai nol, berlaku:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Aturan inilah yang disebut dengan aturan *L'Hopital*. Apabila setelah kalian gunakan aturan *L'Hopital* dengan menentukan turunan pertama fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ ternyata masih dijumpai bentuk $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$, lanjutkan aturan *L'Hopital* itu dengan menentukan turunan kedua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Apabila untuk turunan kedua masih dijumpai bentuk $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$, lanjutkan aturan *L'Hopital* itu dengan menentukan turunan ketiga fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, demikian seterusnya sehingga tidak lagi dijumpai bentuk $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Menentukan Kasus Maksimum dan Minimum

Turunan juga dapat digunakan untuk mencari titik-titik ekstrem(maksimum atau minimum) dari suatu fungsi. Konsep mencari maksimum dna minimum ini secara umum dapat diterapkan pada kasus-

kasus yang sering dijumpai dalam kehidupan sekitar kita. Untuk dapat menyelesaikannya, ubahlah kasus-kasus tersebut ke dalam model-model matematika. Kemudian selesaikan model itu.

Contoh Soal:

1. Sebuah mobil bergerak menrut rumus $s(t) = t^2 + 5t$. Hitunglah kecepatan mobil setelah:
   a. 3 detik
   b. 8 detik
   c. k detik

   Penyelesaian:

   $$v(t) = \frac{d(s(t))}{dt}$$
   $$v(t) = 2t + 5$$

   a. $v(3) = 2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$
   b. $v(8) = 2(8) + 5 = 16 + 5 = 21$
   c. $v(k) = 2(k) + 5 = 2k + 5$

2. Tentukan persamaan garis singgung fungsi $f(x) = x^2$ di titik (2,4)!

   Penyelesaian:

   Diketahui: $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$

   $\therefore$ gradien garis singgungnya adalah $f'(2) = 2(2) = 4$

   Ditanya: persamaan garis singgung fungsi $f(x) = x^2$ di titik (2,4)

   Jawab: persamaan garis singgungnya adalah:

   $$y - b = m(x - a)$$
   $$y - 4 = 4(x - 2)$$
   $$y - 4 = 4x - 8$$
   $$y = 4x - 4$$

   Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 4x - 4$

III. Latihan Soal

1. Buktikan bahwa jika $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} f(x) = M$, maka $L = M$!

Penyelesaian:

Diketahui $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} f(x) = M$

✓ $\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$

Ambil sebarang $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \le |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.........(1)

✓ $\lim_{x\to c} f(x) = M \Leftrightarrow \forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon_2$

Ambil sebarang $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \le |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$.........(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$0 - 0 \le |(f(x) - M) - (f(x) - L)| < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \le |f(x) - M - f(x) + L| < 0$

$\Leftrightarrow 0 \le |-M + L| < 0$

$\Leftrightarrow 0 \le |L - M| < 0$

$\Rightarrow$ haruslah $L - M = 0$

$\Leftrightarrow L = M$

$\therefore$ terbukti bahwa jika $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} f(x) = M$, maka $L = M$

2. Tentukan limit dari: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x}, untuk\, x > 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{-x}, untuk\, x < 0 \end{cases}$$

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}-1=-1$

Karena limit kiri $\neq$ limit kanan, maka $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ tidak ada

3. Jika $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ dan $g(x)=\dfrac{2}{x}$, tentukan: $f^4(x)+g^4(x)$

Penyelesaian:

i. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{0\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3-\left(-1\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x^2-1}\cdot 2x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^6}$$

$$f'''(x)=\frac{3x\sqrt{x^2-1}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^6}$$

$$f'''(x)=\frac{3x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5}$$

$$f^4(x)=\frac{3\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5-3x\cdot\frac{5}{2}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3\cdot 2x}{\left(\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5\right)^2}$$

$$f^4(x)=\frac{3\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5-15x^2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{10}}$$

$$f^4(x)=\frac{3\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3\left(\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-5x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{10}}$$

$$f^4(x)=\frac{3\left(\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-5x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^7}$$

ii. $g(x)=\frac{2}{x}$

$$g'(x)=\frac{0\cdot x-2\cdot 1}{x^2}=\frac{-2}{x^2}$$

$$g''(x)=\frac{0\cdot x^2-(-2\cdot 2x)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{4x}{x^4}=\frac{4}{x^3}$$

$$g'''(x)=\frac{0\cdot x^3-\left(4\cdot 3x^2\right)}{\left(x^3\right)^2}=\frac{-12x^2}{x^6}=\frac{-12}{x^4}$$

$$g^4(x)=\frac{0\cdot x^4-\left(-12\cdot 4x^3\right)}{\left(x^4\right)^2}=\frac{48x^3}{x^8}=\frac{48}{x^5}$$

$$f^4(x)+g^4(x)=\frac{3\left(\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-5x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^7}+\frac{48}{x^5}$$

$$\therefore f^4(x)+g^4(x)=\frac{3x^5\left(\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-5x^2\right)+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^7}{x^5\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)^7}$$

4. Tentukan limit dari: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\frac{1}{2}x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}:\frac{1}{\frac{1}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}:\frac{1}{\frac{1}{2}}\\
&= 2+2\\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2}=4$$

DAFTAR RUJUKAN

Maryanto, N. S. (2008). *Matematika Untuk SMA dan MA Kelas XI Program IPA.* Jakarta: Depdiknas.

Sudrajat, A. (2000). *Prestasi Matematika 2.* Bandung: Ganeca Axact.

Sudrajat, W. D. (2008). *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika.* Jakarta: Depdiknas.

Y., R. A., & Indriyastuti. (2012). *Perpektif Matematika untuk Kelas XI SMA dan MA Program IPA 2.* Solo: PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.