HUBUNGAN *LOCATING DOMINATING SET* PADA GRAF HASIL OPERASI *JOINT* DAN GRAF DASARNYA

SKRIPSI

Oleh

Shinta Aditya Rachman
NIM 141810101019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

HUBUNGAN *LOCATING DOMINATING SET* PADA GRAF HASIL OPERASI *JOINT* DAN GRAF DASARNYA

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Shinta Aditya Rachman
NIM 141810101019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Saiful Ridwan dan Ibunda Kusmiyati tercinta, serta Adik-adikku Dimas Nur Rachman dan Citra Ayu Nurrachman yang telah memberikan cinta kasih sayang, doa serta motivasinya tanpa henti;
2. Kedua Nenekku Sariya (Almh) dan Sumina (Almh), serta Kedua kakekku Iyas (Alm) dan Sa'rani (Alm), dan segenap Keluarga Besarku yang tak henti mendukung dan mendoakanku;
3. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. yang dengan sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripdi ini dapat terselesaikan;
4. Guru-guru TK Dharma Wanita, SDN 7 Besuki, SMPN 1 Besuki, SMAN 1 Besuki serta dosen-dosen jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah membimbingku dari awal hingga sekarang;
5. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

MOTO

”Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar.”[1]

”Sementara kita menunda, kehidupan terus berlangsung.”
(Seneca)[2]

”Saat ini, sama seperti saat-saat yang lain, merupakan waktu yang berharga, jika kita tahu apa yang harus kita lakukan dengan waktu yang ada.”
(Ralph Waldo Emerson)[3]

---

[1] Q.S Al-Baqarah :153
[2] https://maxylosoh.wordpress.com/
[3] www.urbanoir.net

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Shinta Aditya Rachman

NIM : 141810101019

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul ”Hubungan *Locating Dominating Set* pada Graf Hasil Operasi *Joint* dan Graf Dasarnya” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2018

Yang menyatakan,

Shinta Aditya Rachman

NIM 141810101019

SKRIPSI

HUBUNGAN *LOCATING DOMINATING SET* PADA GRAF HASIL OPERASI *JOINT* DAN GRAF DASARNYA

Oleh

Shinta Aditya Rachman
NIM 141810101019

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Hubungan *Locating Dominating Set* pada Graf Hasil Operasi *Joint* dan Graf Dasarnya” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.	Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 198408012008012006	NIP. 197704302005011001
Anggota II,	Anggota III,
Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.	Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP. 198610142014041001	NIP. 196610121993031001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Hubungan *Locating Dominating Set* pada Graf Hasil Operasi *Joint* dan Graf Dasarnya; Shinta Aditya Rachman, 141810101019; 2018; 46 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Sejarah *dominating set* dimulai sejak tahun 1850 di Eropa dalam permainan catur. Untuk menyelesaikan masalah pada papan catur 8×8 diperlukan minimal berapa *Queen* agar semua posisi dapat diserang langsung oleh *Queen*. Menurut Haynes dkk (1998), himpunan titik $D \subseteq V$ dari graf sederhana G dikatakan *dominating set* jika setiap titik dari $u \in V(G)$ memenuhi salah satu kondisi berikut, u merupakan elemen D atau u bertetangga (*adjacent*) ke beberapa titik $v \in D$. *Dominating set* dipelajari secara matematis sejak tahun 1960 dan meningkat secara pesat pada tahun 1970-an. Kemudian setelah itu, berkembang teori-teori yang merupakan pengembangan dari teori *dominating set*, diantaranya teori *independent dominating set*, *total dominating set*, dan kemudian pada tahun 1987 diperkenalkan teori *locating dominating set* oleh Slater. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$, dan $N(u) \cap D \neq \emptyset$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$, dengan $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Sedangkan *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari *locating dominating set*.

Penelitian ini membahas lebih lanjut mengenai *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dan hubungannya dengan graf dasarnya. Graf-graf sederhana yang digunakan antara lain graf bintang (S_n), graf buku segitiga (Bt_n), graf prisma $(P_{n,2})$ dan graf helm (H_n). Pada penelitian ini dihasilkan hasil sebagai berikut: $\gamma_L(H_n + H_m) \leq n + m - 1$ untuk $n, m \geq 4$; $\gamma_L(H_n + Bt_m) \leq n + m$ untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$; $\gamma_L(H_n + S_m) \leq n + m - 1$ untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$; $\gamma_L(H_n + P_{m,2}) \leq n + m - 2$ untuk $n, m \geq 4$; $\gamma_L(Bt_n + Bt_m) \leq n + m + 1$ untuk $n, m \geq 2$; $\gamma_L(Bt_n + S_m) \leq n + m$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$; $\gamma_L(Bt_n + P_{m,2}) \leq n + m - 1$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 4$; $\gamma_L(S_n + S_m) \leq n + m - 1$ untuk $n, m \geq 3$; $\gamma_L(S_n + P_{m,2}) \leq n + m - 2$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 4$; $\gamma_L(P_{n,2} + P_{m,2}) \leq n + m - 2$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 4$.

Berdasarkan hasil tersebut dan juga berdasarkan penelitian terdahulu mengenai *locating dominating set* pada graf sedehana

oleh peneliti-peneliti sebelumnya, selanjutnya didapatkan hubungan *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dan graf dasarnya, sebagai berikut: $\gamma_L(H_n + H_m) \leq \gamma_L(H_n) + \gamma_L(H_m) - 1$, untuk $n, m \geq 4$; $\gamma_L(H_n + Bt_m) \leq \gamma_L(H_n) + \gamma_L(Bt_m)$, untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$; $\gamma_L(H_n + S_m) \leq \gamma_L(H_n) + \gamma_L(S_m) - 1$, untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$; $\gamma_L(H_n + P_{m,2}) \leq \gamma_L(H_n) + \gamma_L(P_{m,2}) - 2$, untuk $n, m \geq 4$; $\gamma_L(Bt_n + Bt_m) \leq \gamma_L(Bt_n) + \gamma_L(Bt_m) + 1$, untuk $n, m \geq 2$; $\gamma_L(Bt_n + S_m) \leq \gamma_L(Bt_n) + \gamma_L(S_m)$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$; $\gamma_L(Bt_n + P_{m,2}) \leq \gamma_L(Bt_n) + \gamma_L(P_{m,2}) - 1$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 4$; $\gamma_L(S_n + S_m) \leq \gamma_L(S_n) + \gamma_L(S_m) - 1$, untuk $n, m \geq 3$; $\gamma_L(S_n + P_{m,2}) \leq \gamma_L(S_n) + \gamma_L(P_{m,2}) - 2$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 4$; $\gamma_L(P_{n,2} + P_{m,2}) \leq \gamma_L(P_{n,2}) + \gamma_L(P_{m,2}) - 2$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 4$.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul ”Hubungan *Locating Dominating Set* pada Graf Hasil Operasi *Joint* dan Graf Dasarnya”. Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama;
4. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing anggota sekaligus dosen penasihat akademik;
5. Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. dan Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
6. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. keluarga dan sahabat yang selalu mendampingi dan memberi semangat (Mery, Chand, Titin, Linda, Lisma, Nita dan Riza)
8. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian tugas ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Juli 2018
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejarah *dominating set* dimulai sejak tahun 1850 di Eropa dalam permainan catur, dimana untuk menyelesaikan masalah pada papan catur 8×8 diperlukan minimal berapa *Queen* agar semua posisi dapat diserang langsung oleh *Queen*. *Dominating set* merupakan himpunan titik pada suatu graf dengan ketentuan titik-titik tersebut mendominasi titik lain yang ada di sekitarnya. *Dominating set* dipelajari secara matematis sejak tahun 1960 dan meningkat secara pesat pada tahun 1970-an. Kemudian setelah itu, berkembang teori-teori yang merupakan pengembangan dari teori *dominating set*, diantaranya teori *independent dominating set*, *total dominating set*, dan kemudian pada tahun 1987 diperkenalkan teori *locating dominating set*. Teori *locating dominating set* pertama kali dipelajari dan diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1987. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$, dan $N(u) \cap D \neq \emptyset$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$, dengan $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u.

Penelitian sebelumnya mengenai *locating dominating set* telah banyak dilakukan. Slater (1988) melakukan penelitian terkait *locating dominating number* pada graf *cycle* dan *path*, melalui penelitian tersebut diketahui bahwa nilai kardinalitas minimum *locating dominating set* graf *cycle* dan *path* masing-masing adalah $\lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Kemudian Canoy dkk (2014) melakukan penelitian mengenai *locating dominating set* pada graf hasil operasi korona, melalui penelitian ini diketahui bahwa nilai batas bawah kardinalitas minimum *locating dominating set* dari graf G korona H (G dan H adalah graf terhubung non-trivial) yaitu banyaknya titik pada graf G dikalikan dengan kardinalitas minimum *locating dominating set* graf H. Selanjutnya Desvandai (2016) menentukan *locating dominating set* pada graf helm dan menemukan bahwa nilai kardinalitas minimum dari *locating dominating set* pada graf helm (H_n) adalah n, kemudian Ningrum (2016) menentukan *locating dominating set* pada beberapa graf sederhana dan menemukan hasil bahwa nilai kardinalitas minimum dari *locating dominating set* pada graf prisma ($P_{n,2}$) dan graf bintang (S_n) adalah masing-masing sama dengan n. Rofikah (2016) juga melakukan penelitian mengenai *locating dominating set* pada graf buku segitiga dan menemukan hasil bahwa nilai kardinalitas minimum *locating dominating set* pada graf buku segitiga Bt_n adalah n, dengan $n \geq 2$.

Berdasarkan penelitian-penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, maka peneliti tertarik untuk mengkaji dan menganalisis adanya keterkaitan antara *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dan graf dasarnya. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan himpunan titik dan sisi serta kardinalitas titik dan sisi graf hasil operasi *joint* tersebut, kemudian menentukan titik-titik yang memenuhi syarat *locating dominating set*. Dan selanjutnya menganalisis hubungan antara *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dan graf dasarnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini antara lain:

a. berapa nilai batas atas *locating dominating number* pada graf hasil operasi *joint*?
b. bagaimana hubungan *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dan graf dasarnya?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini perlu dibatasi yaitu graf sederhana yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf bintang (S_n), graf buku segitiga (Bt_n), graf prisma $(P_{n,2})$ dan graf helm (H_n).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, maka tujuan dari penelitian ini antara lain:

a. menentukan batas atas *locating dominating number* pada graf hasil operasi *joint*.
b. menganalisis hubungan keterkaitan antara *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dan graf dasarnya.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini antara lain:

a. menambah wawasan baru mengenai teori *locating dominating set*.
b. memberi kontribusi terhadap perkembangan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup permasalahan *locating dominating set*.
c. memberi motivasi pada peneliti lain untuk melakukan penelitian mengenai *locating dominating set* pada graf jenis lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) yang dinyatakan dalam notasi $G = (V, E)$ dengan V merupakan himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex/node*), dan E merupakan himpunan (boleh kosong) dari elemen yang disebut sisi (*edges*) yang menghubungkan pasangan tidak terurut dua titik (v_1, v_2) dimana $v_1, v_2 \in V$. Himpunan titik G disebut $V(G)$ dan himpunan sisi dari G disebut $E(G)$ (Munir, 2009). Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat dikatakan bahwa sebuah graf G paling tidak terdiri dari himpunan titik tanpa sisi (Slamin, 2009). Titik pada suatu graf dilabeli dengan huruf atau dengan bilangan asli atau menggabungkan keduanya seperti $v_1, v_2, ..., v_n$, sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dan v dapat ditulis sebagai uv atau dapat juga dilabeli dengan huruf atau dengan bilangan asli atau menggabungkan keduanya seperti $e_1, e_2, ..., e_n$.

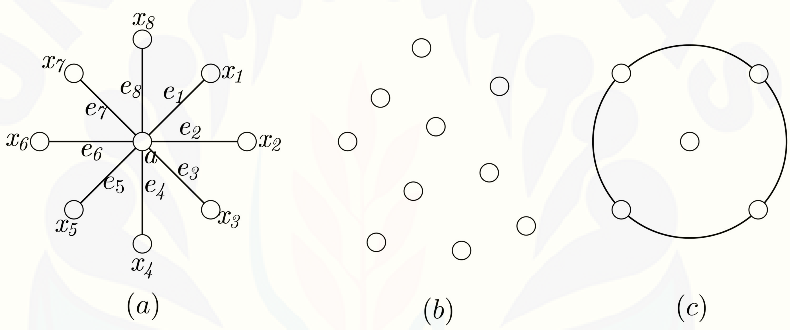
Sebuah graf G yang hanya memiliki himpunan titik (tanpa sisi) dinamakan graf kosong (*nullgraph*). Graf kosong dinotasikan dengan N_n dengan n adalah banyaknya titik pada graf. Sedangkan graf yang hanya terdiri dari satu titik disebut graf trivial, dan graf yang memiliki paling sedikit dua titik disebut graf non-trivial.

Dua buah titik pada graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila kedua titik tersebut dihubungkan oleh sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika uv adalah sebuah sisi pada graf G (Chartrand dan Oellermann, 1993). Sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Jadi, misalkan $e = (v_i, v_j)$ merupakan sebuah sisi pada graf G, dengan v_i dan v_j adalah titik ujung dari e, maka titik v_i dikatakan *adjacent* terhadap titik v_j, dan v_i dan v_j *incident* dengan e.

Derajat (*degree*) sebuah titik v pada sebuah graf G atau yang ditulis dengan $deg(v)$ menyatakan banyaknya sisi yang *incident* (terhubung) pada suatu titik atau dapat juga diartikan sebagai banyaknya sisi yang memuat v sebagai titik ujung (Lipschutz dan Lipson, 2002). Derajat terkecil dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik di antara titik-titik yang lain. Derajat terbesar dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik di antara titik-titik yang lain. Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat atau *degree* yang sama maka graf G disebut graf reguler (Harary, 1969). Namun jika tidak, maka graf tersebut dikatakan non-reguler.

Jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i dan v_j, maka graf tersebut disebut graf terhubung (*connected graph*). Jika tidak, maka graf tersebut disebut graf tak terhubung (*disconnect graph*). Jadi, dua titik pada sebuah graf dikatakan terhubung jika kedua titik tersebut dihubungkan oleh sebuah sisi. Namun, apabila titik tersebut tidak dihubungkan oleh sisi manapun atau dengan kata lain derajat titik tersebut sama dengan nol, maka titik tersebut dinamakan titik terasing atau titik terisolasi (*isolated vertex*) (Chartrand dan Oellermann, 1993). Dengan kata lain, titik terisolasi merupakan titik yang sama sekali tidak bertetangga dengan titik lain.

Contoh graf dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.1 Contoh graf (a) sederhana (graf bintang S_8), (b) kosong, (c) dengan titik terasing

Banyaknya titik pada graf G disebut *order* dan dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut *size* dan dinotasikan dengan $|E(G)|$. Graf G yang memiliki *order* atau $|V(G)| = p$ dan *size* atau $|E(G)| = q$ dapat ditulis dengan $G(p,q)$ (Chartrand dan Oellermann, 1993). Graf pada gambar 2.1 (a) merupakan contoh graf dengan himpunan titik $V(G) = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, $|V(G)| = 9$, dan $|E(G)| = 8$, .

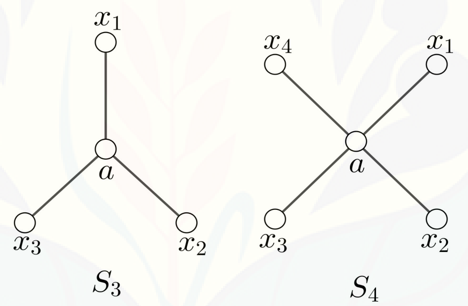
Sebuah sisi pada graf yang menghubungkan sebuah titik v dengan dirinya sendiri disebut *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan sisi ganda (*multiple edge*). Jalan (*walk*) pada graf G merupakan barisan titik dan sisi terhingga $v_0, e_1, v_1, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$, barisan diawali dan diakhiri dengan titik serta bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi, dimana setiap sisi dalam barisan *incident* dengan titik sebelumnya dan sesudahnya pada barisan tersebut (Harary, 1969). Misal pada barisan $v_0, e_1, v_1, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$, sisi e_1 *incident* dengan v_0 dan v_1, sisi e_2 *incident* dengan v_1 dan v_2, dan seterusnya. Jalan dikatakan tertutup apabila titik awal sama dengan titik akhir. Jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda disebut siklus. Panjang (*length*) dari sebuah jalan adalah banyaknya sisi yang dilintasi pada jalan tersebut.

2.2 Beberapa Graf Sederhana dan Operasi Graf *Joint*

Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki arah serta tidak terdapat sisi ganda atau *loop*. Berikut beberapa contoh graf sederhana.

a. Graf Bintang (*Star Graph*)

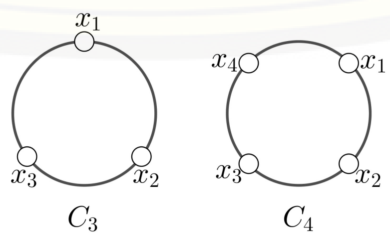
Graf bintang merupakan graf pohon yang terdiri dari n titik yang berderajat satu dan satu titik pusat yang berderajat n. Graf bintang dinotasikan dengan S_n. Graf bintang S_n terdiri dari $n+1$ titik dan n sisi, dengan $n > 2$ (Slamin, 2009). Berikut adalah contoh graf bintang.



Gambar 2.2 Contoh Graf Bintang S_n

b. Graf *Cycle*

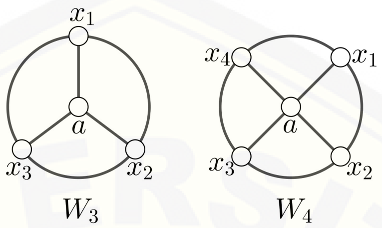
Graf *cycle* yang dinotasikan dengan C_n adalah graf sederhana dengan *order* n dan *size* n yang memiliki titik-titik yaitu $x_1, x_2, ..., x_n$ dan sisi-sisinya yaitu $(x_1 v_n)$ dan $(x_i x_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, ..., n-1$ (Chartrand dkk., 2016). Berikut adalah contoh graf *cycle*.



Gambar 2.3 Contoh Graf *Cycle* C_n

c. Graf Roda (*Wheel Graph*)

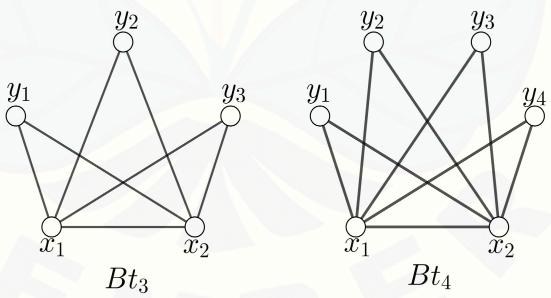
Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan menghubungkan semua titik dari graf *cycle* C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat (Harary, 1969). Graf roda dinotasikan dengan W_n, dengan $n \geq 3$. Graf roda memiliki $n+1$ titik dan $2n$ sisi. Berikut adalah contoh graf roda.



Gambar 2.4 Contoh Graf Roda W_n

d. Graf Buku Segitiga (*Triangular Book Graph*)

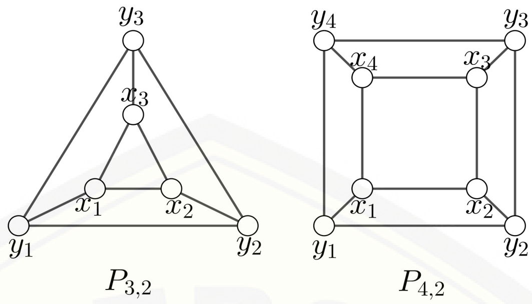
Graf buku segitiga atau *triangular book graph* merupakan suatu graf yang terdiri dari n buah segitiga ($n \geq 2$) dimana setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dapat pula dikatakan bahwa setiap segitiga memiliki dua titik yang digunakan bersama. Graf buku segitiga dinotasikan dengan Bt_n. Graf buku segitiga terdiri dari $n+2$ titik dan $2n+1$ sisi. Contoh graf prisma ditunjukkan oleh Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Contoh Graf Buku Segitiga Bt_n

e. Graf Prisma (*Prism Graph*)

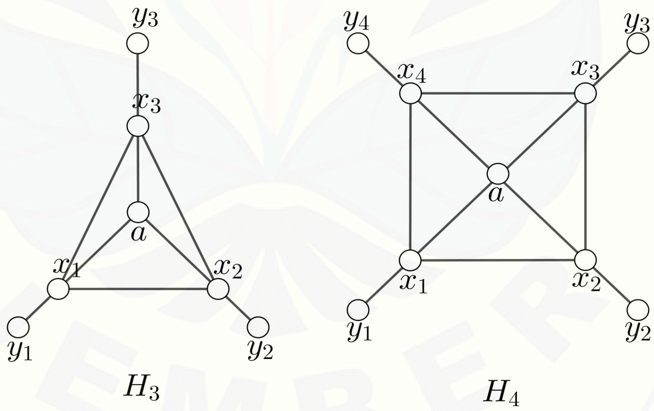
Graf prisma atau *prism graph* adalah graf yang terdiri dari sebuah siklus luar dengan n titik $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ dan sebuah siklus dalam dengan n titik $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ dan antara siklus luar dan siklus dalam dihubungkan dengan n sisi $x_i y_i, i = 1, 2, 3, ..., n$. Graf prisma dinotasikan dengan $P_{m,n}$. Graf prisma terdiri dari mn titik dan $(2n-1)$ sisi. Contoh graf prisma ditunjukkan oleh Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Contoh Graf Prisma $P_{m,n}$

f. Graf Helm (*Helm Graph*)

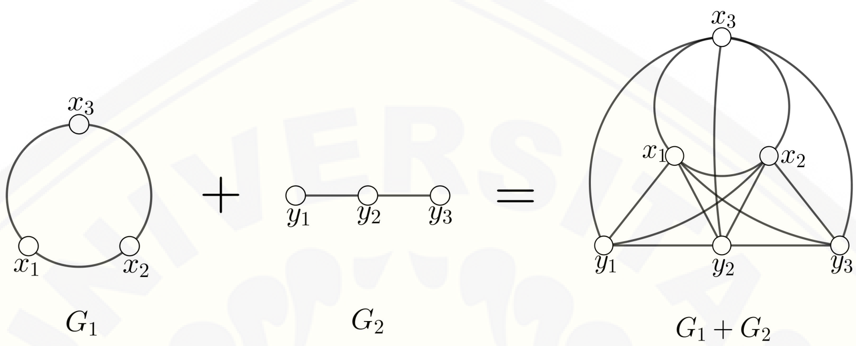
Graf helm (dinotasikan dengan H_n) merupakan graf sederhana dengan himpunan titik $V(H_n) = \{a, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(H_n) = \{ax_i, x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1x_n\}$. Graf helm terdiri dari $2n + 1$ titik dan $3n$ sisi. Contoh graf helm (H_n) ditunjukkan oleh Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Contoh Graf Helm H_n

Operasi graf merupakan suatu cara untuk memperoleh graf baru dengan cara menerapkan beberapa ketentuan pada dua buah graf atau lebih. Di dalam teori graf dikenal berbagai operasi. Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi *joint*.

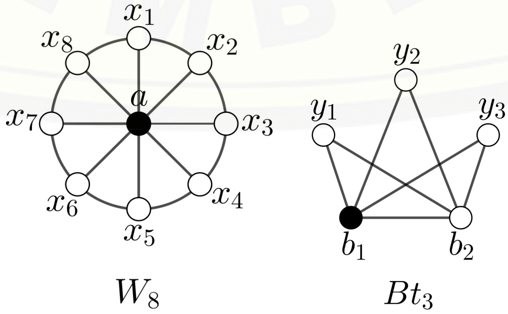
Graf *joint* dari graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = (G_1 + G_2)$ adalah sebuah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Harary, 1969). Graf *joint* dihasilkan dengan cara menghubungkan setiap titik di G_1 dengan setiap titik di G_2. Kardinalitas titik dari graf *joint* $G_1 + G_2$ adalah $|V(G_1 + G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$, sedangkan kardinalitas sisinya adalah $|E(G_1{+}G_2)| = |E(G_1)|{+}|E(G_2)|{+}(|V(G_1)|.|V(G_2)|)$, dengan ketentuan dimana dua graf yang sama akan dianggap berbeda. Contoh operasi joint dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Contoh Operasi Graf *Joint*

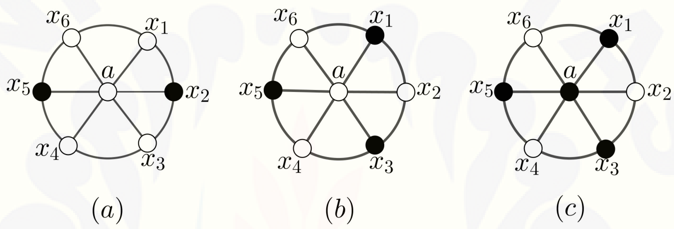
2.3 *Dominating Set* dan *Locating Dominating Set*.

Menurut Haynes dkk (1998), himpunan titik $D \subseteq V$ dari graf sederhana G dikatakan *dominating set* jika setiap titik dari $u \in V(G)$ memenuhi salah satu kondisi berikut, u merupakan elemen D atau u bertetangga (*adjacent*) ke beberapa titik $v \in D$. Sedangkan *domination number* merupakan kardinalitas minimum dari *dominating set* yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Batas atas dari *domination number* adalah banyaknya titik pada graf. Gambar 2.9 merupakan contoh *dominating set* pada graf roda W_8 dan graf buku segitiga Bt_3 dimana titik yang berwarna hitam merupakan titik dominatornya.



Gambar 2.9 *Dominating Set* pada Graf Roda W_8 dan Graf Buku Segitiga Bt_3

Suatu himpunan titik dominasi D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$, dan $N(u) \cap D \neq \emptyset$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$, dengan $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Secara sederhana, dapat dikatakan bahwa *locating dominating set* merupakan *dominating set* dengan tambahan syarat. Sedangkan *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari *locating dominating set* (Slater, 2002). Gambar 2.10 menunjukkan salah satu contoh *locating dominating set*, dengan titik yang diwarnai hitam merupakan *locating dominating set*nya.



Gambar 2.10 Contoh Penentuan *Locating Dominating Set* pada graf roda W_6 yang (a) tidak tepat (b) tepat (c) tepat

Gambar 2.10(a), (b) dan (c) merupakan contoh penentuan *locating dominating set* pada graf roda W_6. Gambar 2.10(a) merupakan contoh penentuan *locating dominating set* yang tidak tepat. Dari Gambar 2.10 (a) diperoleh himpunan titik $V(G) = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ dan himpunan titik dominator $D = \{x_2, x_5\}$, dan $V(G) - D = \{a, x_1, x_3, x_5, x_6\}$, selanjutnya diselidiki menurut syarat *locating dominating set*, diperoleh:

$N(a) \cap D = \{x_2, x_5\}$;
$N(x_1) \cap D = \{x_2\}$;
$N(x_3) \cap D = \{x_2\}$;
$N(x_4) \cap D = \{x_5\}$;
$N(x_6) \cap D = \{x_5\}$.

Berdasarkan hasil tersebut, diketahui bahwa syarat *locating dominating set* tidak terpenuhi karena $N(x_1) \cap D = N(x_3) \cap D$ dan $N(x_4) \cap D = N(x_6) \cap D$. Dengan cara yang sama, dapat diketahui bahwa kombinasi dua titik lainnya juga tidak memungkinkan untuk memenuhi syarat *locating dominating set* sehingga $|D| = 2$ tidak memenuhi syarat *locating dominating set*.

Selanjutnya, Gambar 2.10(b) menunjukkan contoh penentuan *locating dominating set* yang benar dan memenuhi syarat. Dari Gambar 2.10(b) diperoleh himpunan titik $V(G) = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ dan dipilih himpunan titik dominator $D = \{x_1, x_3, x_5\}$, dan $V(G) - D = \{a, x_2, x_4, x_6\}$, selanjutnya diselidiki menurut syarat *locating dominating set*, diperoleh:

$N(a) \cap D = \{x_1, x_3, x_5\}$;
$N(x_2) \cap D = \{x_1, x_3\}$;
$N(x_4) \cap D = \{x_3, x_5\}$;
$N(x_6) \cap D = \{x_1, x_5\}$.

Berdasarkan hasil diatas, diketahui bahwa syarat *locating dominating set* terpenuhi karena $N(a) \cap D \neq N(x_2) \cap D \neq n(x_4) \cap D \neq N(x_6) \cap D$, serta $N(a) \neq \emptyset$, $N(x_2) \neq \emptyset$, $N(x_4) \neq \emptyset$, dan $N(x_6) \neq \emptyset$, sehingga $|D| = 3$ dimana $D = \{x_1, x_3, x_5\}$ memenuhi syarat *locating dominating set*.

Selanjutnya, Gambar 2.10(c) juga menunjukkan contoh penentuan *locating dominating set* yang benar dan memenuhi syarat. Dari Gambar 2.10(c) diperoleh himpunan titik $V(G) = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ dan dipilih himpunan titik dominator $D = \{a, x_1, x_3, x_5\}$, dan $V(G) - D = \{x_2, x_4, x_6\}$, selanjutnya diselidiki menurut syarat *locating dominating set*, diperoleh:

$N(x_2) \cap D = \{a, x_1, x_3\}$;
$N(x_4) \cap D = \{a, x_3, x_5\}$;
$N(x_6) \cap D = \{a, x_1, x_5\}$.

Berdasarkan hasil diatas, diketahui bahwa syarat *locating dominating set* terpenuhi karena $N(x_2) \cap D \neq n(x_4) \cap D \neq N(x_6) \cap D$, serta $N(x_2) \neq \emptyset$, $N(x_4) \neq \emptyset$, dan $N(x_6) \neq \emptyset$ sehingga $|D| = 4$ dimana $D = \{a, x_1, x_3, x_5\}$ juga memenuhi syarat *locating dominating set*.

Kedua kemungkinan contoh penentuan *locating dominating set* pada Gambar 2.10(a) dan (b) keduanya memenuhi syarat *locating dominating set*. Akan tetapi, menurut Slater (2002), *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari *locating dominating set*. Berdasarkan penjelasan sebelumnya, $|D| = 2$ tidak memenuhi syarat *locating dominating set*, sehingga nilai $\gamma_L(G)$ pada graf W_6 adalah $\gamma_L(W_6) = 3$.

Beberapa hasil penelitian *locating dominating set* terdahulu dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2.1 *Locating Domination Number* pada Beberapa Graf Sederhana

Graf	$\gamma_L(G)$	Keterangan
P_n	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$	Slater, 1988
C_n	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$	Slater, 1988
K_n	$n-1, n>1$	Slater
$W_{1,4}$	2	Slater
$W_{1,5}, W_{1,6}$	3	Slater
$W_{1,n-1}$	$\lceil \frac{2n-2}{5} \rceil$	Slater
$G_1 \odot G_2$	$\|G_1\|.\gamma_L(G_2)$	Canoy dkk, 2014
Graf Trees	$\gamma_L(G) < \frac{n}{2}$	Foucaud dkk, 2015
Graf Helm H_n	$n, n \geq 3$	Desvandai, 2016
Graf Parasut PC_n	$\lceil \frac{4n}{5} \rceil, n \geq 4$	Desvandai, 2016
Graf Buku Segitiga Bt_n	$n, n \geq 2$	Rofikah, 2016
Graf Prisma $P_{n,2}$	$n, n \geq 3$	Ningrum, 2016
Graf Antiprisma A_n	$n-1, n \geq 3$	Ningrum, 2016
Graf Web Wb_n	$\frac{3n-1}{2}, n \geq 3$	Ningrum, 2016
Graf Tringular Ladder TL_n	$n, n \geq 3$	Ningrum, 2016
Graf Bintang S_n	$n, n \geq 3$	Ningrum, 2016

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini digolongkan ke dalam penelitian eksploratif dengan tujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti serta hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya di masa depan.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf-graf yang digunakan antara lain graf bintang (S_n), graf buku segitiga (Bt_n), graf prisma $(P_{n,2})$ dan graf helm (H_n). Operasi graf yang digunakan adalah operasi *joint*.

3.3 Rancangan Penelitian

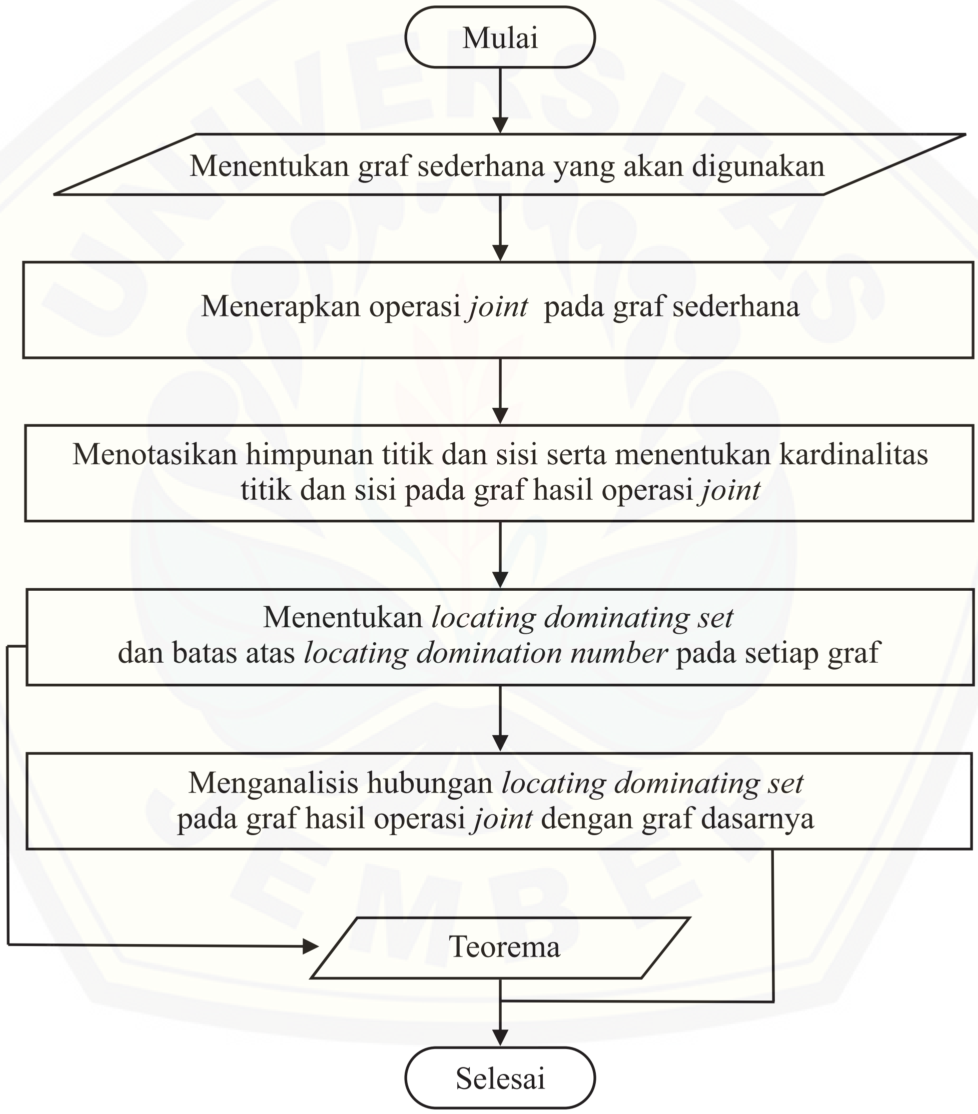
Rancangan penelitian dalam penelitian ini digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan graf sederhana yang akan digunakan.
   Pada tahap ini, penulis menentukan graf-graf sederhana yang akan digunakan sebagai obyek penelitian dalam penelitian ini.
b. menerapkan operasi *joint* pada graf-graf sederhana yang telah ditentukan. Setelah menentukan graf sederhana yang akan digunakan, selanjutnya penulis menerapkan operasi *joint* pada graf-graf sederhana tersebut.
c. menotasikan himpunan titik dan sisi serta menentukan kardinalitas titik dan sisi pada masing-masing graf hasil operasi *joint*.
   Penulis menotasikan himpunan titik dan sisi serta menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf-graf hasil operasi *joint* yang telah ditetapkan pada tahap sebelumnya.
d. menentukan *locating dominating set* serta batas atas *locating domination number* pada masing-masing graf hasil operasi *joint* yang digunakan.
   Pada tahap ini penulis menentukan *locating dominating set* pada masing-masing graf hasil operasi *joint* yang digunakan sebagai obyek penelitian dalam penelitian ini. Kemudian berdasarkan *locating dominating set* yang telah ditentukan, selanjutnya penulis dapat menentukan nilai batas atas *locating domination number* dari masing-masing graf hasil operasi *joint* tersebut.

e. Menganalisis hubungan antara *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dengan graf dasarnya.

f. merumuskan teorema dan akibat mengenai *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* serta hubungan keterkaitannya dengan *locating dominating set* graf dasarnya.

Adapun skema dari rancangan penelitian ini adalah sebagai berikut.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. Nilai batas atas *locating domination number* graf hasil operasi *joint* dari graf G_n dan graf H_m pada penelitian ini dapat dinyatakan secara umum dalam $\gamma_L(G_n + H_m) \leq n + m + a$, untuk $a \in$ bilangan bulat.

b. Hubungan *locating dominating set* graf hasil operasi *joint* dari graf G_n dan graf H_m dengan graf dasarnya dalam penelitian ini dapat dinyatakan secara umum dalam $\gamma_L(G_n + H_m) \leq \gamma_L(G_n) + \gamma_L(H_m) + a$, untuk $a \in$ bilangan bulat.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian, penulis memberikan saran kepada pembaca atau peneliti lain untuk mengembangkan penelitian lebih lanjut mengenai *locating dominating set* pada graf hasil operasi *joint* dengan menemukan batas bawah *locating domination number*nya.

DAFTAR PUSTAKA

Canoy, Sergio R. dan Malacas, Gina A. 2014. Locating-Dominating Sets in Graphs. *Applied Mathematical Sciences*, 8(88): 4381-4388.

Chartrand, Gary dan Oellermann, Ortrud R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Chartrand, G., L. Lesniak dan P. Zhang. 2016. *Graphs and Digraphs, 6th Ed*. California: Chapman & Hall.

Desvandai, R. B. 2016. *Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya*. Skripsi. Jember: Universitas Jember.

Gallian, J. A. 2016. Dynamic Survey of Graph Labelling. *The Electronic Journal of Combinatorics*.

Gross, J. T. dan Yellen, J. 2006. *Graph Theory and Its Applications, 2nd Ed*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. New London: Wesley.

Haynes, W. T, Hedetniemi, S., dan Slater, P. 1998. *Fundamentals of Domination in Graphs*. New York: Marcle Dekker, Inc.

Lipschutz, Seymour dan Lipson, Marc. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta: Salemba Teknika.

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Ningrum, Hanuf Maya. 2016. *Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Khusus dan Operasi Amalgamasinya*. Skripsi. Jember: Universitas Jember.

Rofikah, Imro'atun. 2016. *Analisis Locating Dominating Set pada Graf Khusus dan Hasil Operasi Comb Sisi*. Skripsi. Jember: Universitas Universitas Jember.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Slater, P. J. 1988. Dominating and reference sets in a graph. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 22:445-455.

Slater, P. J. 2002. Fault-Tolerant Locating Dominating Sets. *Discrete Mathematics*, 249:179-189.