



**PEWARNAAN LOKAL WILAYAH SUPER *ANTIMAGIC* PADA GRAF
PLANAR**

TESIS

Oleh

Arum Andary Ratri

NIM 161820101009

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2018



**PEWARNAAN LOKAL WILAYAH SUPER *ANTIMAGIC* PADA GRAF
PLANAR**

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Arum Andary Ratri

NIM 161820101009

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2018

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W. Tesis ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua terkasih, Ibunda Siti Khoiriyah dan Ayahanda Ali Maskur, S.H. Terimakasih atas semangat, motivasi, dan tetes air mata dalam doa-doa di setiap sujud panjang kalian;
2. Suamiku tercinta Aman Sentosa, S.T. Terimakasih atas begitu banyaknya cinta. Terimakasih karena tidak pernah bosan menjadi tempatku berkeluh kesah. Terimakasih sudah menjadi suami yang pengertian dan selalu *mensupport* istrinya;
3. Calon malaikat kecilnya bunda yang saat ini masih ada di dalam kandungan. Terimakasih sudah turut berjuang bersama bunda, menjadi anak yang kuat dan tidak pernah rewel;
4. Ibu mertua Sukarti, Kakek Wakidi, Nenek Sukinah, serta adik-adikku tersayang Bintang Pramono Timur dan Cundamanik yang turut memberi semangat dalam setiap langkahku;
5. Keluarga besar *CGANT Research Group* Universitas Jember yang telah menjadi wadah untuk berdiskusi dan belajar;
6. Seluruh guru-guruku mulai taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi. Terimakasih atas segala ilmu yang diberikan;
7. Teman-teman seperjuangan S2 angkatan 2016;

8. Berbagai pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.



MOTTO

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi (pula) kamu menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui"

(QS. Al – Baqarah : 216)*)

"Tuhan menaruhmu di tempatmu yang sekarang, bukan karena kebetulan. Orang yang hebat tidak dihasilkan melalui kemudahan, kesenangan, dan kenyamanan. Mereka dibentuk melalui kesukaran, tantangan dan air mata"

(Dahlan Iskan)**)

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain). Dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap"

(QS. Al – Insyirah : 6 – 8)***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 1998. *Al – Qur'an* dan Terjemahannya. Semarang: PT. Kumudasmoro Grafindo.

***) <https://jagokata.com/>

***) Departemen Agama Republik Indonesia. 2006. *Al – Qur'an* dan Terjemahannya. Jakarta Timur: Maghfirah Pustaka

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Arum Andary Ratri

NIM : 161820101009

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Pewarnaan Lokal Wilayah Super *Antimagic* Pada Graf Planar" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2018

Yang menyatakan,

Arum Andary Ratri

NIM. 161820101009

TESIS

**PEWARNAAN LOKAL WILAYAH SUPER *ANTIMAGIC* PADA GRAF
PLANAR**

Oleh

Arum Andary Ratri
NIM 161820101009

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing Anggota : Dr. Kristiana Wijaya S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Tesis berjudul "Pewarnaan Lokal Wilayah Super *Antimagic* Pada Graf Planar" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Tim Penguji:

Ketua,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 196808021993031004

Anggota II,

Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.

NIP. 196906061998031001

Anggota I,

Dr. Kristiana Wijaya. S.Si., M.Si.

NIP. 197408132000032004

Anggota III,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP. 198408012008012006

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Pewarnaan Lokal Wilayah Super *antimagic* pada Graf Planar; Arum Andary Ratri, 161820101009; 2018: 65 halaman; Jurusan Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Konsep pewarnaan graf puncaknya muncul pada tahun 1976, yaitu sebagai hasil dari pemecahan persoalan 4 warna. Setelahnya muncul konsep pelabelan graf. Pada tahun 2017 Arumugam menggabungkan dua konsep tersebut, yaitu memperkenalkan konsep pewarnaan yang didapatkan dari bobot suatu pelabelan. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan n titik dan m sisi. Fungsi bijektif $f : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$ disebut pelabelan *antimagic* lokal jika untuk setiap dua titik yang bertetangga u dan v di G , $w(u) \neq w(v)$, dengan $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$. Pelabelan *antimagic* lokal menginduksi pewarnaan titik pada graf G dimana titik v diberi warna atau bobot $w(v)$.

Termotivasi oleh penelitian Arumugam, pada tesis ini dikaji tentang pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada graf planar. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan n titik dan m sisi. Fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + m\}$ disebut pelabelan lokal wilayah super *antimagic* jika terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ dan fungsi bijektif $f^* : E(G) \rightarrow \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$ sedemikian sehingga untuk dua wilayah yang saling bertetangga A_1 dan A_2 di G , $w(A_1) \neq w(A_2)$. Pelabelan lokal wilayah super *antimagic* menginduksi pewarnaan wilayah pada graf G dengan wilayah A diberi warna atau bobot $w(A)$. Bilangan kromatik lokal wilayah super *antimagic* dinotasikan dengan $\gamma_{lfat}(G)$, didefinisikan sebagai banyak warna terkecil dari seluruh warna pada G dari hasil proses beberapa pelabelan lokal wilayah super *antimagic* pada G .

Pada penelitian ini diperoleh hubungan antara bilangan kromatik pewarnaan wilayah graf G dengan bilangan kromatik yang didapatkan dari proses pelabelan, yaitu bilangan kromatik lokal wilayah super *antimagic*. Pada graf terhubung, bilangan

kromatik lokal wilayah super *antimagic* $\gamma_{lfat}(G) = 1$ diperoleh jika G merupakan graf yang memiliki satu wilayah berhingga. Selain itu diperoleh juga $\gamma_{lfat}(G) \geq 2$ jika G merupakan graf yang memiliki lebih dari satu wilayah berhingga dan setidaknya terdapat dua wilayah yang saling bertetangga.

Selanjutnya pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* diterapkan pada beberapa graf planar yang telah direpresentasikan dalam bentuk graf bidang, yaitu graf kipas (F_n), graf roda (W_n), graf *ladder* (L_n), graf *triangular ladder* (TL_n), dan graf *three circular ladder* (TCL_n). Pada semua kelas graf yang telah disebutkan, kecuali graf *three circular ladder* dengan jumlah wilayah ganjil diperoleh keberbedaan bobot wilayah dari hasil pelabelannya sama dengan kromatik pewarnaan wilayahnya.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul "Pewarnaan Lokal Wilayah Super *Antimagic* pada Graf Planar". Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata dua (S2) pada Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat :

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Dr. Kristiana Wijaya S. Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
4. Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si. dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji I dan dosen penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan tesis ini ;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

UPT Perpustakaan Universitas Jember

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, April 2018

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
PERSEMBAHAN	ii
MOTTO	iv
PERNYATAAN	v
HALAMAN PEMBIMBING	vi
PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
KATA PENGANTAR	x
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Konsep Dasar Graf	4
2.2 Kelas-kelas Graf	5
2.3 Operasi Graf	7
2.4 Graf Planar	8
2.5 Fungsi	12
2.6 Pewarnaan Graf	13

2.7	Pelabelan Graf	14
2.8	Pelabelan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i>	16
BAB 3. METODE PENELITIAN		20
3.1	Penotasian Titik, Sisi, dan Wilayah.....	20
3.2	Mengklaim Nilai $\gamma_{lfat}(G) = k$	24
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN		27
4.1	Bilangan Kromatik Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i>	27
4.2	Batas Bawah Pewarnaan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i> pada Graf Planar	28
4.3	Pewarnaan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i> pada Graf $(shack(C_p, v, q))$	28
4.4	Pewarnaan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i> pada Graf Kipas (F_n)	31
4.5	Pewarnaan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i> pada Graf Roda (W_n)	33
4.6	Pewarnaan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i> pada Graf <i>Ladder</i> (L_n)	37
4.7	Pewarnaan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i> pada Graf <i>Triangular Ladder</i> (TL_n).....	39
4.8	Pewarnaan Lokal Wilayah Super <i>Antimagic</i> pada Graf <i>Three</i> <i>Circular Ladder</i> (TCL_n)	41
BAB 5. PENUTUP		47
5.1	Kesimpulan	47
5.2	Saran	47
DAFTAR PUSTAKA		48

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 (a) G_1 graf dengan satu titik dan (b) G_2 graf dengan tiga titik dan tiga sisi ...	4
2.2 Graf lintasan dengan $n = 5$	5
2.3 Graf lingkaran dengan 8 titik	6
2.4 Graf lengkap dengan $n = 4$	6
2.5 Graf bintang dengan $n = 3$ dan $n = 8$	7
2.6 Graf ($shack(C_4, v, 4)$)	7
2.7 Graf K_4 yang digambarkan dengan 2 cara	8
2.8 Wilayah dalam dan wilayah luar pada graf planar	9
2.9 Graf kipas F_6	10
2.10 Graf roda W_6	10
2.11 Graf <i>ladder</i> L_5	11
2.12 Graf <i>triangular ladder</i> TL_5	11
2.13 Graf <i>three circular ladder</i> TCL_6	12
2.14 Pewarnaan wilayah pada graf <i>ladder</i> dengan banyak warna 3	13
2.15 Pewarnaan wilayah pada graf <i>ladder</i> dengan banyak warna 2	14
2.16 Pelabelan wilayah <i>magic</i> di graf <i>ladder</i> L_5 dengan bobot wilayah 90	15
2.17 Pelabelan wilayah <i>antimagic</i> graf <i>ladder</i> L_5 dengan bobot wilayah berbeda-beda	16
2.18 Pelabelan <i>antimagic</i> lokal pada graf lintasan dengan warna 4	17
2.19 pelabelan <i>antimagic</i> lokal pada graf lintasan menghasilkan warna 3	17
2.20 Pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i> total pada graf <i>ladder</i> L_3	18
2.21 Kerangka konsep pelabelan	19
3.1 Penotasian titik, sisi dan wilayah pada graf kipas F_6	21
3.2 Penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf Roda W_5	21

3.3	Ilustrasi penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf <i>ladder</i> L_5	22
3.4	Ilustrasi penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf <i>triangular ladder</i> TL_5 .	23
3.5	Penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf <i>Three Circular Ladder</i> TCL_6 ...	23
3.6	Rancangan Penelitian	25
3.7	Algoritma proses pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i>	26
4.1	Ilustrasi penotasian titik, sisi, dan wilayah graf (<i>shack</i> ($C_4, v, 4$)).....	29
4.2	Bobot hasil pelabelan Graf (<i>shack</i> (C_p, v, q))	31
4.3	Bobot hasil pelabelan Graf kipas F_5	33
4.4	Bobot hasil pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i> Graf roda W_5	36
4.5	Bobot hasil pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i> pada graf roda W_6	37
4.6	Bobot hasil pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i> pada graf <i>ladder</i> L_5	39
4.7	Bobot hasil pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i> pada graf <i>triangular ladder</i> TL_5	41
4.8	Bobot hasil pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i> pada graf <i>three circular ladder</i> TCL_5	46
4.9	Bobot hasil pelabelan lokal wilayah super <i>antimagic</i> pada graf <i>three circular ladder</i> TCL_6	46

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika sebagai ilmu dasar telah memberikan peranan yang cukup penting dalam kemajuan teknologi. Matematika terbukti telah banyak menyelesaikan berbagai macam persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Persoalan tersebut diantaranya menyelesaikan masalah jalur transportasi, menganalisis ada tidaknya penyakit dengan bantuan citra dan hitungan komputer, meramalkan kedatangan jumlah wisatawan yang berkunjung dengan data statistik dan masih banyak yang lainnya. Salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek diskrit dan hubungan antara objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan melambangkan titik sebagai objek dan garis atau sisi mewakili hubungan antara objek tersebut.

Beberapa bidang kajian dalam teori graf yang banyak mendapat perhatian adalah tentang pelabelan dan pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada objek tertentu pada graf seperti titik, sisi, maupun wilayah. Pelabelan graf adalah pemberian bilangan ke setiap titik, atau setiap sisi, atau keduanya dengan kondisi tertentu (Hartsfield dan Ringel, 1990). Salah satu bentuk pelabelan graf menurut Wallis (2001) adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan asli yang memenuhi sifat tertentu.

Dalam pelabelan graf terdapat istilah bobot. Jika yang dicari adalah bobot titik, maka nilai dari bobot titik ialah hasil penjumlahan label sisi pada titik tersebut. Bobot wilayah merupakan hasil penjumlahan dari label titik dan label sisi yang terdapat dalam satu wilayah.

Arumugam dkk (2017) memperkenalkan konsep pewarnaan yang diperoleh dari bobot suatu pelabelan. Pelabelan yang digunakan adalah pelabelan lokal *antimagic*.

Yaitu dengan terlebih dahulu melakukan pelabelan sisi dalam suatu graf, kemudian dihasilkan bobot titik dari hasil pelabelan tersebut. Bobot titik hasil pelabelan tersebut yang kemudian dijadikan sebagai warna pada graf. Pelabelan *antimagic* lokal menginduksi pewarnaan titik pada graf G dimana titik v diberi warna $w(v)$. Arumugam juga menentukan bilangan kromatik lokal *antimagic* $\chi_{la}(G)$ yaitu banyak warna terkecil dari semua warna yang diinduksi oleh pelabelan *antimagic* lokal G .

Selanjutnya, muncul beberapa penelitian berkaitan dengan konsep pelabelan dan pewarnaan graf. Jika Arumugam meneliti tentang pewarnaan titik lokal *antimagic* pada graf, Agustin 2017 meneliti pewarnaan sisi lokal *antimagic* pada graf. Kemudian beberapa penelitian lainnya adalah pewarnaan lokal titik total *antimagic* dan pewarnaan lokal sisi total *antimagic*.

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, maka penulis ingin mengembangkan pada pewarnaan lokal wilayah super *antimagic*. Pelabelan lokal wilayah super *antimagic* adalah pelabelan dengan fungsi bijektif dari himpunan titik dan himpunan sisi ke bilangan asli dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi sehingga menghasilkan bobot pada tiap-tiap wilayah, dengan ketentuan pada wilayah yang bertetangga tidak boleh memiliki bobot yang sama, sedemikian sehingga setiap pelabelan lokal wilayah super *antimagic* merupakan pemberian warna $w(A)$ pada wilayah graf G . Pada penelitian ini, penulis mengambil beberapa graf planar yang telah direpresentasikan dalam bentuk graf bidang untuk dicari pewarnaan lokal wilayah super *antimagic*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah pada penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik yang dihasilkan dari pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada beberapa graf planar?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, pada penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

- a. Graf planar yang akan diteliti adalah graf kipas, graf roda, graf *ladder*, graf *triangular ladder*, dan graf *three circular ladder*,
- b. Penelitian pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* dilakukan pada wilayah yang berhingga.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan berapa bilangan kromatik yang dihasilkan dari pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada beberapa graf planar, yaitu graf kipas, graf roda, graf *ladder*, graf *triangular ladder*, dan graf *three circular ladder*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini diantaranya adalah:

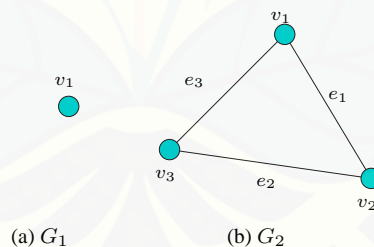
- a. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya pada materi pelabelan graf, yaitu mengetahui pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada graf kipas, graf roda, graf *ladder*, graf *triangular ladder*, dan graf *three circular ladder*,
- b. Agar pembaca maupun peneliti lain yang ingin mengembangkan penelitian ini mengetahui jumlah bilangan kromatik yang dihasilkan dari pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada graf kipas, graf roda, graf *ladder*, graf *triangular ladder*, dan graf *three circular ladder*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut (Munir, 2010). Suatu graf G terdiri atas dua himpunan tak kosong $V(G)$ yang anggotanya terdiri dari titik dan himpunan $E(G)$ yang mungkin kosong terdiri dari sisi, sedemikian hingga setiap anggota e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik dalam $V(G)$, graf G dinotasikan $G = (V, E)$ (Hartsfield dan Ringel, 1990). Misalkan u dan v adalah titik-titik pada suatu graf, maka sisi e yang menghubungkan titik u dan v dinyatakan dengan pasangan $e = uv$. Banyak titik pada graf G disebut order dari G , sedangkan banyak sisi disebut *size* dari G . Graf yang ordernya berhingga disebut graf berhingga.

Graf yang tidak mempunyai sisi disebut dengan graf kosong. Graf kosong yang hanya memiliki satu titik disebut graf trivial (Munir, 2010). Gambar 2.1 (a) adalah gambar graf trivial G_1 dan Gambar 2.1 (b) graf G_2 adalah graf yang terdiri dari tiga titik dan tiga sisi.



Gambar 2.1 (a) G_1 graf dengan satu titik dan (b) G_2 graf dengan tiga titik dan tiga sisi

Dalam suatu graf, titik $u \in V$ disebut bertetangga dengan titik $v \in V$ jika terdapat sisi uv antara u dan v . Notasi $N(u)$ digunakan untuk mewakili himpunan semua tetangga pada titik u . Banyak titik yang bertetangga dengan titik u disebut derajat u , dilambangkan dengan $deg(u)$. Jadi, $deg(u) = |N(u)|$. Sebuah titik dengan derajat 0 disebut titik terisolasi, dan sebuah titik dengan derajat 1 disebut titik tepi (atau daun).

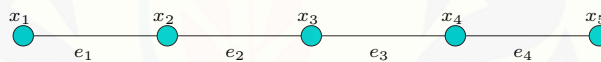
Derajat minimum graf G dinotasikan dengan $\delta = \delta(G) = \min_{u \in V} \text{deg}(u)$ dan derajat maksimum graf G dinotasikan dengan $\Delta = \Delta(G) = \max_{u \in V} \text{deg}(u)$. Jika setiap titik dalam graf memiliki derajat yang sama r , yaitu $\delta = \Delta = r$, maka G disebut graf reguler derajat r atau graf r -reguler (Sugeng, K. A, 2005).

2.2 Kelas-kelas Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa jenis graf, yaitu:

a. Graf Lintasan

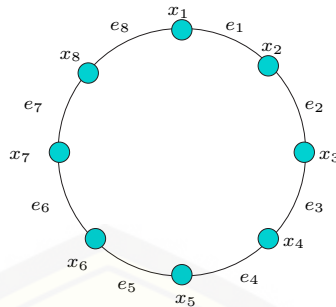
Menurut Diestel (2005) sebuah lintasan (*path*) adalah graf tak kosong $P = (V, E)$ dari bentuk: $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n\}$ dimana x_i semuanya berbeda. Titik x_0 dan x_n adalah titik ujung dari P dan x_1, \dots, x_{n-1} adalah titik dalam P . Graf P_n memiliki n titik dan $n - 1$ sisi. Gambar 2.2 merupakan contoh graf lintasan yang memiliki 5 titik.



Gambar 2.2 Graf lintasan dengan $n = 5$

b. Graf Lingkaran

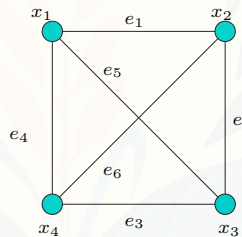
Graf lingkaran adalah graf lintasan yang titik-titik ujungnya dihubungkan oleh satu sisi, sehingga setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n untuk $n \geq 3$. Dengan demikian, graf lingkaran memiliki n titik dan n sisi. Contoh graf lingkaran dengan $n = 8$ ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf lingkaran dengan 8 titik

c. Graf Lengkap

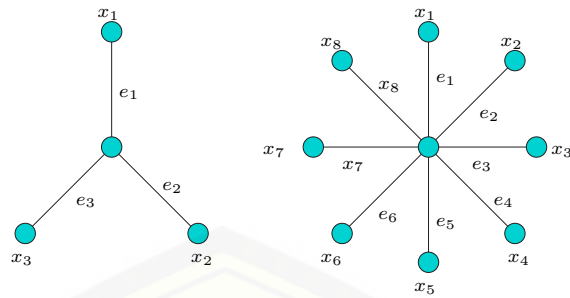
Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n , adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya sedemikian hingga setiap titik mempunyai derajat $n - 1$. Graf K_n memiliki n titik dan $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Gambar 2.4 menunjukkan graf lengkap dengan 4 titik.



Gambar 2.4 Graf lengkap dengan $n = 4$

d. Graf Bintang

Graf bintang dinotasikan dengan S_n adalah graf terhubung sederhana yang memiliki $n + 1$ titik dengan satu titik berderajat n yang dinamakan titik pusat dan n titik berderajat satu yang dinamakan titik daun. Contoh graf bintang ditunjukkan pada Gambar 2.5.



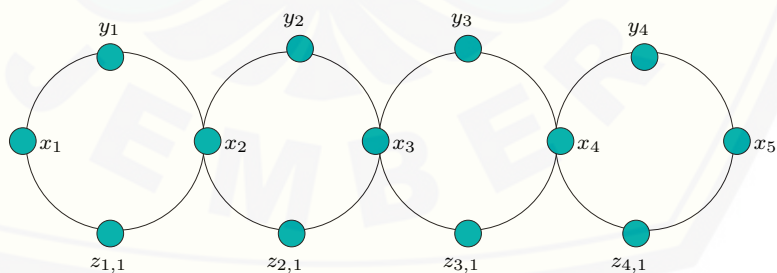
Gambar 2.5 Graf bintang dengan $n = 3$ dan $n = 8$

2.3 Operasi Graf

Operasi pada graf adalah suatu cara untuk membentuk graf baru dari beberapa graf dengan aturan tertentu. Salah satu operasi dalam graf adalah operasi *shackle*. Definisi operasi *shackle* dijabarkan pada Definisi 2.1 berikut.

Definisi 2.1 Shackle dari suatu graf G dinotasikan dengan $shack(G, v, m)$ adalah graf yang dibangun dari graf terhubung non trivial G_1, G_2, \dots, G_m sedemikian hingga G_s dan G_t tidak memiliki titik penghubung untuk setiap $1 \leq s, t \leq k$ dengan $|s - t| \geq 2$, dan untuk setiap $1 \leq i \leq m - 1$, G_i dan G_{i+1} memiliki tepat satu titik yang sama v disebut dengan titik penghubung (*vertex linkage*) dan $m - 1$ titik penghubung semuanya berbeda (Maryati et al, 2010).

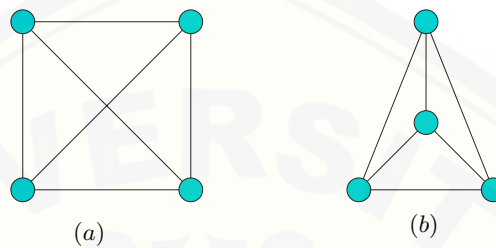
Contoh graf hasil operasi *shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Graf ($shack(C_4, v, 4)$)

2.4 Graf Planar

Menurut Guichard (2017), suatu graf G adalah planar jika dapat direpresentasikan oleh suatu gambar di bidang tanpa terdapat sisi yang bersilangan. Definisi tersebut memerlukan beberapa representasi pada graf agar tidak ada sisi yang bersilangan. Gambar 2.7 berikut menunjukkan dua representasi graf lengkap (K_4).

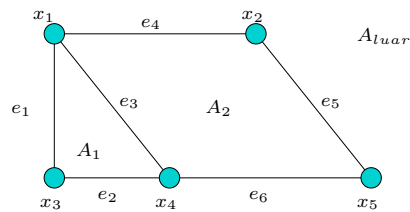


Gambar 2.7 Graf K_4 yang digambarkan dengan 2 cara

Sebagai contoh pada Gambar 2.7, graf K_4 (a) dapat digambar sedemikian sehingga tidak ada sisi yang bersilangan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.7 (b). Hal tersebut menunjukkan bahwa K_4 adalah planar. Sedangkan graf planar yang telah digambarkan di bidang sehingga tidak terdapat sisi yang bersilangan disebut sebagai graf bidang.

Untuk setiap graf planar G , daerah-daerahnya disebut wilayah-wilayah pada G . Pada graf terdapat satu wilayah yang tidak terbatas, wilayah tersebut disebut wilayah luar G . Wilayah-wilayah yang lainnya, disebut wilayah dalam G (Diestel, 2005). Himpunan wilayah-wilayah pada G dinotasikan dengan $A(G)$.

Suatu wilayah dibatasi oleh titik dan sisi dan ketetanggaan antara wilayah satu dengan wilayah yang lainnya dalam suatu graf dibatasi oleh sisi. Pada Gambar 2.8 merupakan contoh graf yang memiliki dua wilayah dalam dan satu wilayah luar. Wilayah dalam pertama (A_1) dibatasi oleh titik x_1, x_3, x_4 dan sisi e_1, e_2, e_3 , wilayah kedua (A_2) dibatasi oleh titik x_1, x_2, x_5, x_4, x_3 dan sisi e_3, e_4, e_5, e_6 , sedangkan wilayah luarnya ialah wilayah di luar titik x_1, x_2, x_5, x_4, x_3 dan sisi e_1, e_4, e_5, e_6, e_2 .



Gambar 2.8 Wilayah dalam dan wilayah luar pada graf planar

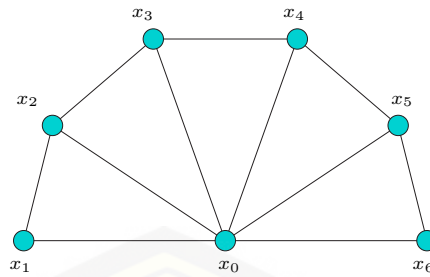
Banyaknya wilayah dalam suatu graf dapat ditentukan dengan rumus Euler, yaitu misalkan G adalah graf planar yang terhubung, digambarkan sehingga tidak terdapat sisi yang bersilangan, dengan n titik dan m sisi, dan graf membagi bidang ke r wilayah, maka:

$$r = m - n + 2 \dots(2.1)$$

Contohnya misalkan pada graf di Gambar 2.8 yang memiliki 6 sisi dan 5 titik, maka jumlah wilayahnya adalah 3 yang merupakan 2 wilayah berhingga, dan 1 wilayah tak berhingga.

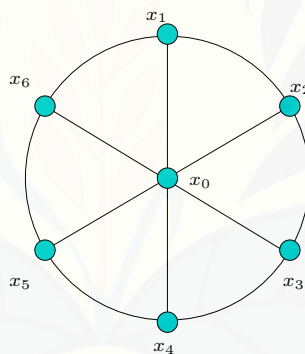
Karena sifat graf planar yang tidak memiliki sisi yang saling bersilangan, maka graf-graf planar merupakan graf yang sesuai untuk penelitian berkaitan tentang wilayah pada suatu graf. Berikut merupakan macam-macam graf planar yang digunakan sebagai objek penelitian, yaitu graf kipas, graf roda, graf *ladder*, graf *triangular ladder* dan graf *three circular ladder*. Graf-graf tersebut direpresentasikan dalam bentuk graf bidang seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.9, Gambar 2.10, Gambar 2.11, Gambar 2.12 dan Gambar 2.13.

Graf kipas (*fan graph*) dinotasikan dengan F_n yaitu graf yang diperoleh dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n dengan suatu titik yang disebut dengan titik pusat. Dengan demikian graf kipas F_n memiliki $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Sebagai contoh, graf kipas F_6 yang telah direpresentasikan dalam bentuk graf bidang ditunjukkan pada Gambar 2.9 berikut:



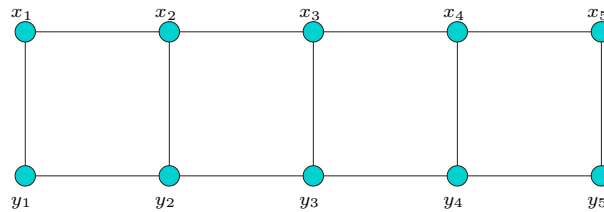
Gambar 2.9 Graf kipas F_6

Menurut Rosen (2007), sebuah graf roda W_n didapatkan dengan cara menambahkan sebuah titik ke sebuah graf lingkaran untuk $n \geq 3$, dan kemudian menghubungkan titik baru tersebut ke masing-masing titik di C_n dengan sisi baru. Graf W_n memiliki $n + 1$ titik dan $2n$ sisi. Gambar 2.10 berikut ini merupakan representasi bentuk graf bidang dari graf roda W_6 .



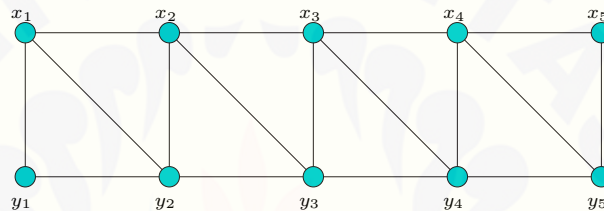
Gambar 2.10 Graf roda W_6

Graf *ladder* (L_n) adalah graf planar yang tidak berarah dengan himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$. Jumlah titik pada graf *ladder* adalah $2n$ dan jumlah sisinya adalah $3n - 2$. Representasi graf bidang dari graf *ladder* L_5 ditunjukkan oleh Gambar 2.11.



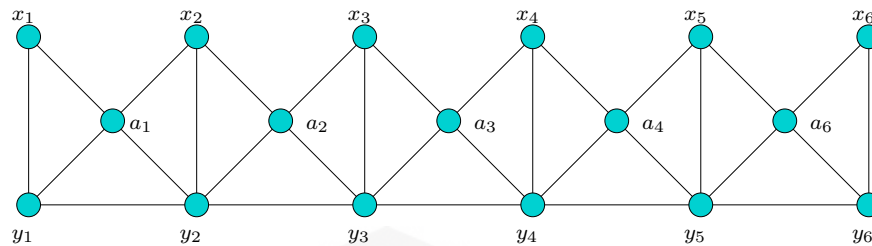
Gambar 2.11 Graf ladder L_5

Graf *triangular ladder* (TL_n) adalah sebuah graf yang diperoleh dari graf *ladder* dengan menambahkan sisi $x_i y_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n - 1$. Graf pada Gambar 2.12 merupakan representasi graf bidang dari graf *triangular ladder* TL_5 .



Gambar 2.12 Graf *triangular ladder* TL_5

Menurut Dafik (2013), graf *three circular ladder* dinotasikan dengan TCL_n adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(TCL_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{a_i; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi $E(TCL_n) = \{a_i x_i, a_i x_{i+1}, a_i y_i, a_i y_{i+1}; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq j \leq n\}$. Graf (TCL_n) memiliki $3n - 1$ titik dan $6n - 5$ sisi. Berikut ini merupakan gambar graf *three circular ladder* dengan $n = 6$ yang telah direpresentasikan dalam bentuk graf bidang, ditunjukkan oleh Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Graf *three circular ladder* TCL_6

2.5 Fungsi

Suatu fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal (domain) dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua yang disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari aturan padanan tersebut disebut daerah hasil fungsi (range). Definisi ini tidak memberikan pembatasan pada himpunan-himpunan daerah asal dan daerah hasil (Purcell dan Varberg, 1987). Daerah asal bisa berupa himpunan orang, nama benda, ataupun yang lainnya. Namun secara umum yang sering dibahas adalah menggunakan himpunan bilangan riil.

Berdasarkan sifatnya fungsi dibagi menjadi tiga yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif. Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari A ke B dengan range fungsi R .

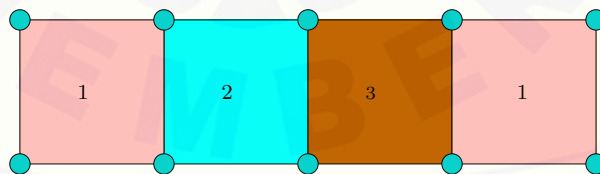
- a. Fungsi f disebut injektif atau satu-satu jika setiap $x_1 \neq x_2$, maka berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- b. Fungsi f disebut surjektif atau pada, jika $|R| = |B|$ dimana R adalah range fungsi.
- c. Jika f adalah keduanya surjektif dan injektif, maka f disebut bijektif (Bartle dan Sherbert, 2000).

2.6 Pewarnaan Graf

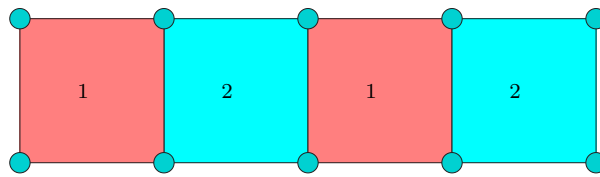
Pewarnaan graf merupakan fungsi dari himpunan objek tertentu pada graf seperti titik, sisi, maupun wilayah ke himpunan bilangan asli. Dalam hal ini, himpunan bilangan asli berperan sebagai warna. Pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada graf G adalah fungsi dari himpunan semua titik graf G ke himpunan bilangan asli dimana setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna atau hasil fungsi yang berbeda. Bilangan kromatik titik dari suatu graf G adalah banyak warna terkecil yang dibutuhkan untuk pewarnaan titik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1990).

Pewarnaan sisi (*edge coloring*) pada graf G adalah fungsi dari himpunan semua sisi graf G ke himpunan bilangan asli dimana setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama memiliki warna atau hasil fungsi yang berbeda. Bilangan kromatik sisi dari suatu graf G adalah banyak warna terkecil yang digunakan untuk mewarnai sisi pada graf G , dinotasikan $\gamma(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1990).

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah fungsi dari himpunan semua wilayah graf G ke himpunan bilangan asli dimana setiap dua wilayah yang bertetangga mempunyai warna atau hasil fungsi yang berbeda. Bilangan kromatik wilayah dari suatu graf G adalah banyak warna terkecil yang dibutuhkan untuk pewarnaan wilayah graf G . Gambar 2.14 dan Gambar 2.15 berikut merupakan contoh pewarnaan wilayah pada graf *ladder* (L_n):



Gambar 2.14 Pewarnaan wilayah pada graf *ladder* dengan banyak warna 3



Gambar 2.15 Pewarnaan wilayah pada graf *ladder* dengan banyak warna 2

Pada Gambar 2.14 dan Gambar 2.15 merupakan contoh pewarnaan wilayah pada graf *ladder* dengan banyak warna berbeda-beda. Pada Gambar 2.14 banyak warna yang dihasilkan adalah 3 warna, pada Gambar 2.15 banyak warna yang didapatkan lebih minimum yakni 2 warna. Perlu ditinjau kembali apakah banyaknya warna terkecil pada pewarnaan graf *ladder* bisa lebih kecil dari 2, maka dicoba pewarnaan dengan 1 warna. Namun jika hanya menggunakan 1 warna tidak memenuhi untuk definisi pewarnaan wilayah, karena wilayah yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Jadi bilangan kromatik wilayah dari graf L_5 adalah $\chi(L_5) = 2$, karena merupakan banyak warna terkecil dan tidak terdapat dua wilayah bertetangga yang memiliki warna yang sama.

2.7 Pelabelan Graf

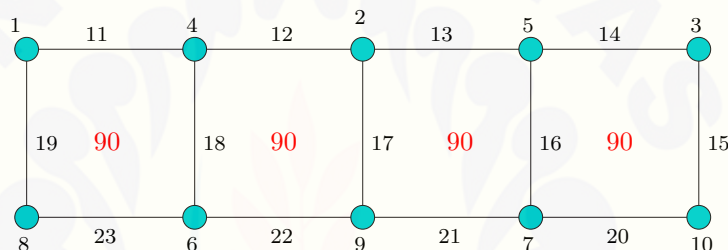
Pelabelan graf adalah fungsi dari himpunan titik atau himpunan sisi biasanya ke bilangan bulat positif dengan kondisi tertentu. Salah satu bentuk pelabelan graf menurut Wallis (2001) adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto yang memetakan himpunan elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif (himpunan bilangan asli) yang memenuhi sifat tertentu.

Pelabelan berdasarkan domainnya dibedakan menjadi tiga, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Suatu pelabelan disebut pelabelan titik jika domainnya adalah himpunan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*) jika domainnya adalah himpunan sisi, dan pelabelan total (*total labeling*) jika domainnya adalah titik dan sisi.

Dalam pelabelan graf terdapat istilah bobot. Bobot wilayah merupakan hasil penjumlahan dari label titik dan label sisi yang terdapat dalam satu wilayah. Rumus untuk mencari bobot wilayah dituliskan dalam persamaan (2.2) berikut:

$$w(A) = \sum_{v \in V(A)} f(v) + \sum_{e \in E(A)} f(e) \dots (2.2)$$

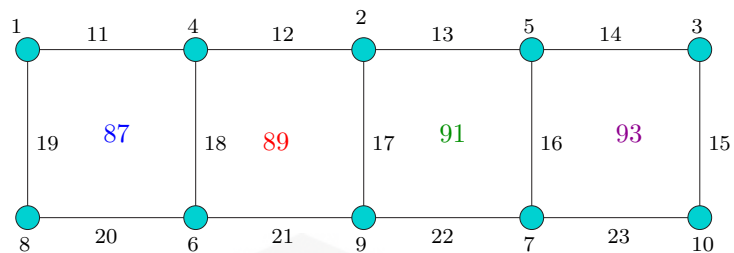
Terdapat beberapa macam pelabelan, diantaranya adalah pelabelan *magic* dan *antimagic*. Misalkan terdapat graf G yang memiliki banyak titik n dan sisi m . Jika titik dan sisi pada G diberi label $1, 2, 3, \dots, m + n$ sehingga jumlah label pada titik dan sisi memberikan hasil bobot yang sama pada wilayah manapun, maka pelabelan tersebut disebut *magic*. Gambar 2.16 berikut merupakan contoh pelabelan *magic* total wilayah.



Gambar 2.16 Pelabelan wilayah *magic* di graf *ladder* L_5 dengan bobot wilayah 90

Pada Gambar 2.16 graf *ladder* L_5 memiliki 10 titik dan 13 sisi. Jika L_5 diberi label $1, 2, \dots, 10 + 13$, sehingga bobot wilayah pada graf L_5 didapatkan nilai 90 pada wilayah manapun. Hasil bobot wilayah yang sama tersebut menunjukkan pelabelan pada Gambar 2.16 adalah pelabelan *magic*.

Berbeda dengan pelabelan *magic*, pelabelan *antimagic* menghasilkan bobot yang berbeda. Misalkan terdapat graf G yang memiliki banyak titik n dan sisi m . Jika titik dan sisi pada G diberi label $1, 2, 3, \dots, m + n$ sehingga jumlah label pada titik dan sisi memberikan hasil bobot yang berbeda pada wilayah manapun atau tidak ada dua wilayah yang mempunyai bobot yang sama, maka pelabelan tersebut disebut *antimagic*. Gambar 2.17 berikut merupakan contoh pelabelan *antimagic* wilayah.



Gambar 2.17 Pelabelan wilayah *antimagic* graf *ladder* L_5 dengan bobot wilayah berbeda-beda

Pada Gambar 2.17 merupakan contoh pelabelan *antimagic* total wilayah, karena pada semua wilayah pada graf L_5 tidak terdapat bobot total wilayah yang sama. Graf *ladder* L_5 yang diberi label $1, 2, \dots, 10 + 13$ menghasilkan bobot total wilayah 87, 89, 91, dan 93.

2.8 Pelabelan Lokal Wilayah Super *Antimagic*

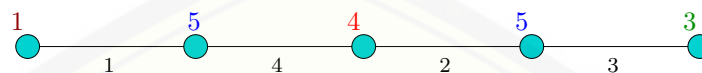
Arumugam (2017) memperkenalkan konsep pewarnaan yang didapatkan dari bobot suatu pelabelan. Pelabelan yang digunakan adalah pelabelan lokal *antimagic*. Terlebih dahulu dilakukan pelabelan dalam suatu graf, kemudian dihasilkan bobot dari hasil pelabelan tersebut. Banyaknya keberbedaan bobot hasil pelabelan tersebut yang kemudian dijadikan sebagai banyaknya warna pada graf. Ia meneliti tentang pewarnaan titik lokal *antimagic* pada graf.

Definisi 2.2 Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan n titik dan m sisi. Fungsi bijektif $f : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$ disebut pelabelan *antimagic* lokal jika untuk setiap dua titik yang bertetangga u dan v , $w(u) \neq w(v)$, dimana $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$. Pelabelan *antimagic* lokal menginduksi pewarnaan titik pada graf G dimana titik v diberi warna atau bobot $w(v)$ (Arumugam, 2017).

Arumugam juga menentukan bilangan kromatik lokal *antimagic* $\chi_{la}(G)$ yang dijelaskan pada Definisi 2.3.

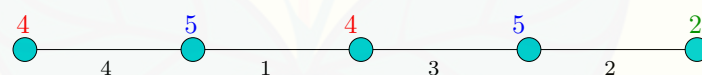
Definisi 2.3 Bilangan kromatik lokal *antimagic* dinotasikan dengan $\chi_{la}(G)$, didefinisikan sebagai banyak warna terkecil dari seluruh warna pada G dari hasil proses beberapa pelabelan lokal *antimagic* pada G (Arumugam, 2017).

Berikut ini merupakan contoh pelabelan *antimagic* lokal pada graf lintasan dengan banyaknya titik 5 ditunjukkan pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18 Pelabelan *antimagic* lokal pada graf lintasan dengan warna 4

Pada Gambar 2.18 didapatkan banyaknya keberbedaan bobot titik hasil pelabelan *antimagic* lokal adalah 4. Perlu ditinjau apakah banyaknya keberbedaan bobot tersebut bisa kurang dari 4, oleh karena itu dilakukan proses pelabelan kembali yang ditunjukkan pada Gambar 2.19. Pada Gambar 2.19 banyaknya keberbedaan bobot titik yang dihasilkan adalah 3. Perlu diuji kembali apakah bisa kurang dari 3 atau tidak. Menurut Arumugam (2017), untuk setiap pohon T dengan l daun, $\chi_{la}(T) \geq l + 1$, maka pada graf lintasan didapatkan bilangan kromatik pelabelan lokal *antimagic* lokal $\chi_{la}(P_5) = 3$.



Gambar 2.19 pelabelan *antimagic* lokal pada graf lintasan menghasilkan warna 3

Selanjutnya, muncul beberapa penelitian berkaitan dengan konsep pelabelan dan pewarnaan graf. Jika Arumugam meneliti tentang pewarnaan titik lokal *antimagic* pada graf, Agustin 2017 meneliti pewarnaan sisi lokal *antimagic* pada graf. Kemudian beberapa penelitian lainnya adalah pewarnaan lokal titik total *antimagic* dan pewarnaan lokal sisi total *antimagic*. Fokus penelitian pada tesis ini adalah pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada graf planar. Definisi pelabelan super, pewarnaan lokal wilayah super *antimagic*, dan bilangan kromatik lokal wilayah super *antimagic*

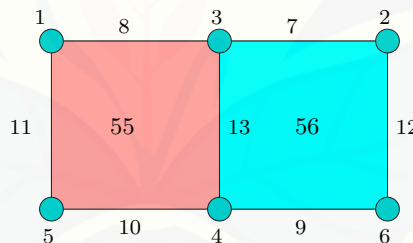
dijelaskan pada Definisi 2.4, Definisi 2.5 dan Definisi 2.6.

Definisi 2.4 Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan n titik dan m sisi. Fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, n + m\}$ disebut pelabelan lokal wilayah super *antimagic* jika terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ dan fungsi bijektif $f^* : E(G) \rightarrow \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$ sedemikian sehingga untuk dua wilayah yang saling bertetangga A_1 dan A_2 di G , $w(A_1) \neq w(A_2)$.

Definisi 2.5 Pelabelan lokal wilayah super *antimagic* menginduksi pewarnaan wilayah pada graf G dimana wilayah A diberi warna atau bobot $w(A)$.

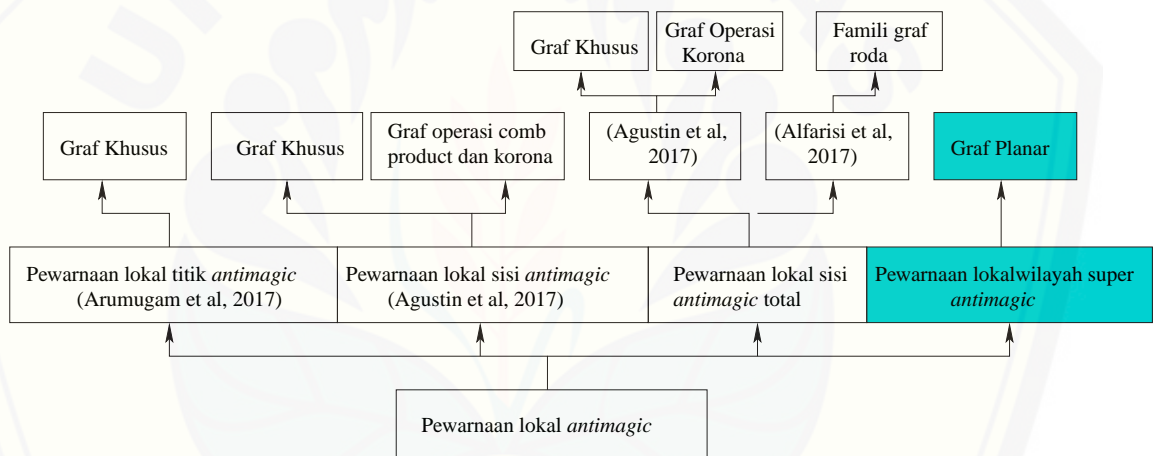
Definisi 2.6 Bilangan kromatik lokal wilayah super *antimagic* dinotasikan dengan $\gamma_{lfat}(G)$, didefinisikan sebagai banyak warna terkecil dari seluruh warna pada G dari hasil proses beberapa pelabelan lokal wilayah super *antimagic* pada G .

Contoh pelabelan lokal wilayah super *antimagic* diilustrasikan dalam Gambar 2.20 berikut.



Gambar 2.20 Pelabelan lokal wilayah super *antimagic* total pada graf ladder L_3

Skema pada Gambar 2.21 berikut merupakan skema penelitian berkaitan tentang pewarnaan lokal *antimagic* yang pernah dilakukan. Penelitian yang sedang diteliti oleh penulis saat ini adalah pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada graf planar yang pada Gambar 2.21 ditandai dengan warna biru.



Gambar 2.21 Kerangka konsep pelabelan

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini dibahas mengenai metode dan langkah-langkah penelitian yang berkaitan dengan pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* pada graf kipas, graf roda, graf *ladder*, graf *triangular ladder*, dan graf *three circular ladder*. Metode yang digunakan adalah dengan menurunkan definisi dan teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pewarnaan lokal wilayah super *antimagic*. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan terlebih dahulu melakukan penotasian titik, sisi dan wilayah pada graf-graf yang diteliti. Kemudian melakukan pembuktian dari teorema yaitu dengan mengklaim nilai $\gamma_{lfat}(G) = k$, dengan cara menunjukkan $\gamma_{lfat}(G) \geq k$ dan $\gamma_{lfat}(G) \leq k$. Untuk menunjukkan $\gamma_{lfat}(G) \leq k$, dilakukan proses pelabelan yaitu dengan menerapkan proses pelabelan super, selanjutnya menghitung bobot lokal wilayah super *antimagic* hasil dari proses pelabelan, memeriksa apakah bobot wilayah memiliki nilai yang sama pada wilayah yang bertetangga, kemudian menghitung keberbedaan warna, setelah itu dihasilkan bilangan kromatik hasil pelabelan lokal wilayah super *antimagic*.

Secara lebih jelas mengenai langkah-langkah penelitian pewarnaan lokal wilayah super *antimagic* dijabarkan pada teknik penelitian berikut:

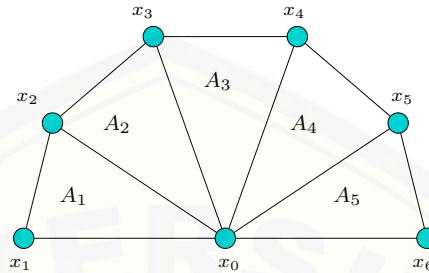
3.1 Penotasian Titik, Sisi, dan Wilayah

Berikut ini merupakan macam-macam graf planar yang digunakan sebagai objek penelitian serta penotasian titik, sisi, dan wilayahnya. Graf-graf yang dilakukan proses penotasian tersebut yaitu sebagai berikut:

A. Graf Kipas

Misalkan diketahui graf kipas (F_n), dengan himpunan titik $V(F_n) = \{x_i, 0 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(F_n) = \{x_0x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}, i \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan wilayah $A(F_n) = \{A_i, 1 \leq i \leq n-1\}$. Misalkan wilayah (A_i)

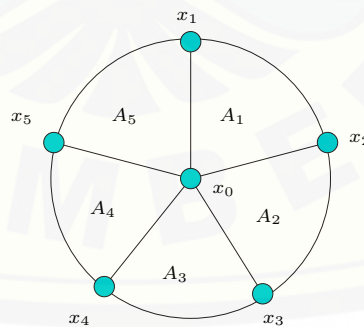
pada graf kipas dibatasi oleh himpunan titik $\{x_i, x_0, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi $\{x_i x_{i+1}, x_0 x_i, x_0 x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Sebagai ilustrasi penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf F_6 dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Penotasian titik, sisi dan wilayah pada graf kipas F_6

B. Graf Roda

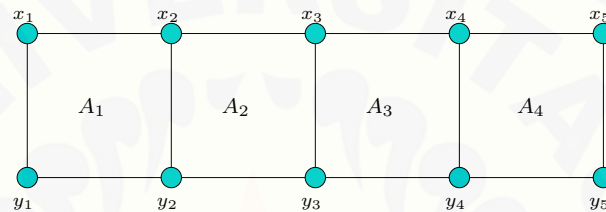
Misalkan diketahui graf roda (W_n), dengan himpunan titik $V(W_n) = \{x_i, 0 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(W_n) = \{x_0 x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i x_n\}$ dan himpunan wilayah $A(W_n) = \{A_i, 1 \leq i \leq n\}$. Misalkan wilayah (A_i) pada graf roda dibatasi oleh himpunan titik $\{x_0, x_i, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan $\{x_0, x_1, x_n\}$ dan himpunan sisi $\{x_i x_{i+1}, x_0 x_i, x_0 x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_1 x_n, x_0 x_1, x_0 x_n\}$. Ilustrasi untuk penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf roda (W_5) ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf Roda W_5

C. Graf *Ladder*

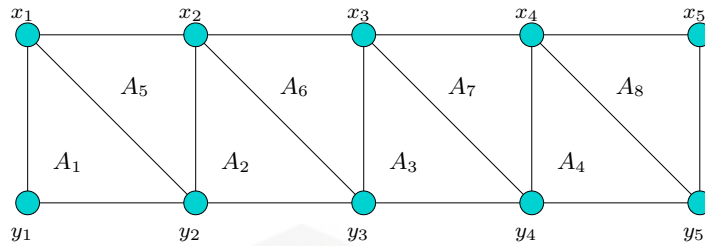
Misalkan himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(L_n) = \{x_i y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan wilayah $A(L_n) = \{A_i, 1 \leq i \leq n-1\}$. Misalkan wilayah (A_i) pada graf *ladder* dibatasi oleh himpunan titik $\{x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan sisi $\{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, x_i y_i, x_{i+1} y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Ilustrasi untuk penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf *ladder* ditunjukkan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Ilustrasi penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf *ladder* L_5

D. Graf *Triangular Ladder*

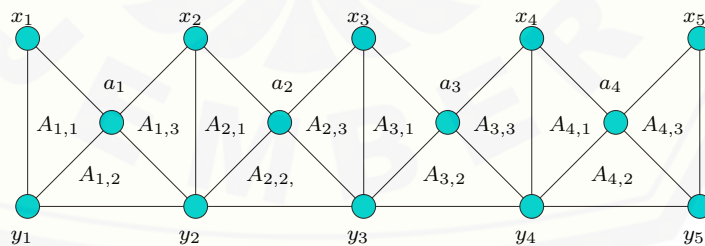
Misalkan diketahui graf *triangular ladder* (TL_n) , himpunan titik $V(TL_n) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(TL_n) = \{x_i y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan wilayah $A(L_n) = \{A_i, 1 \leq i \leq 2n-2\}$. Misalkan wilayah (A_i) pada graf *triangular ladder* dibatasi oleh himpunan titik $\{x_i, y_i, y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan $\{x_{i-n+1}, x_{i-n+2}, y_{i-n+2}; n \leq i \leq 2n-2\}$ serta himpunan sisi $\{x_i y_i, x_i y_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan $\{x_{i-n+1} x_{i-n+2}, x_{i-n+1} y_{i-n+2}, x_{i-n+2} y_{i-n+2}; n \leq i \leq 2n-2\}$. Sebagai contoh ilustrasi untuk penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf *triangular ladder* TL_5 ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Ilustrasi penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf *triangular ladder* TL_5

E. Graf *Three Circular Ladder*

Misalkan diketahui graf *three circular ladder* (TCL_n), dengan himpunan titik $V(TCL_n) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{a_i, 1 \leq i \leq n-1\}$, himpunan sisi $E(TCL_n) = \{a_i x_i, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{a_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{a_i y_i, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{a_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan wilayah $A(TCL_n) = \{A_i, i \leq i \leq 3n-3\}$. Misalkan wilayah (A_i, j) pada graf *three circular ladder* dibatasi oleh himpunan titik $\{a_i, x_i, y_i\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1; j = 1, \{a_i, y_i, y_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1; j = 2$, dan $\{a_i, x_{i+1}, y_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1; j = 3$ serta himpunan sisi $\{a_i x_i, a_i y_i, x_i y_i\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1; j = 1, \{a_i y_i, a_i y_{i+1}, y_i y_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1; j = 2$ dan $\{a_i x_{i+1}, a_i y_{i+1}, x_{i+1} y_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1; j = 3$. Ilustrasi untuk penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf *three circular ladder* TCL_6 ditunjukkan pada Gambar 3.5 berikut:



Gambar 3.5 Penotasian titik, sisi, dan wilayah pada graf *Three Circular Ladder* TCL_6

3.2 Mengklaim Nilai $\gamma_{lfat}(G) = k$

Mengklaim nilai $\gamma_{lfat}(G) = k$, yaitu diambil suatu nilai k yang diasumsikan sebagai bilangan kromatik hasil pelabelan lokal wilayah super *antimagic*.

A. Menunjukkan nilai $\gamma_{lfat}(G) \geq k$

Pada bagian ini terlebih dahulu ditunjukkan nilai $\gamma_{lfat}(G) \geq k$. Jika terpenuhi $\gamma_{lfat}(G) \geq k$, maka telah terbukti batas bawah bilangan kromatik dari suatu graf.

B. Membuktikan nilai $\gamma_{lfat}(G) \leq k$

Pada bagian ini dibuktikan nilai $\gamma_{lfat}(G) \leq k$. Jika nilai $\gamma_{lfat}(G) \leq k$ dapat dibuktikan, maka batas atas bilangan kromatik hasil pelabelan telah terpenuhi. Untuk membuktikan bahwa $\gamma_{lfat}(G) \leq k$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan pelabelan titik dan pelabelan sisi

Pelabelan titik

Pelabelan titik yang diterapkan adalah fungsi bijektif dari himpunan titik ke bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik pada graf yang diteliti. Pemberian label titik disesuaikan dengan karakteristik setiap graf.

Pelabelan sisi

Pelabelan sisi yang diterapkan adalah fungsi bijektif dari himpunan sisi ke bilangan bulat mulai jumlah titik ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi pada graf tersebut. Pemberian label sisi disesuaikan dengan karakteristik setiap graf.

2. Menghitung bobot lokal wilayah super *antimagic*

Pada bagian ini dilakukan penghitungan bobot wilayah. Bobot wilayah didapatkan dengan cara menjumlahkan setiap label titik dan sisi dalam setiap wilayah pada graf. Besarnya bobot wilayah antara wilayah yang saling bertetangga tidak boleh sama.

3. Memeriksa apakah bobot wilayah memiliki nilai yang sama pada wilayah yang bertetangga

Setelah didapatkan bobot wilayah pada masing-masing wilayah pada graf, kemudian dilakukan pemeriksaan. Apakah bobot wilayah pada wilayah yang saling bertetangga memiliki nilai yang sama atau tidak. Jika tidak, maka proses dilanjutkan ke tahapan selanjutnya. Namun jika masih terdapat bobot wilayah yang sama antar wilayah yang saling bertetangga, maka langkah diulangi ke tahap pelabelan.

4. Menghitung keberbedaan warna

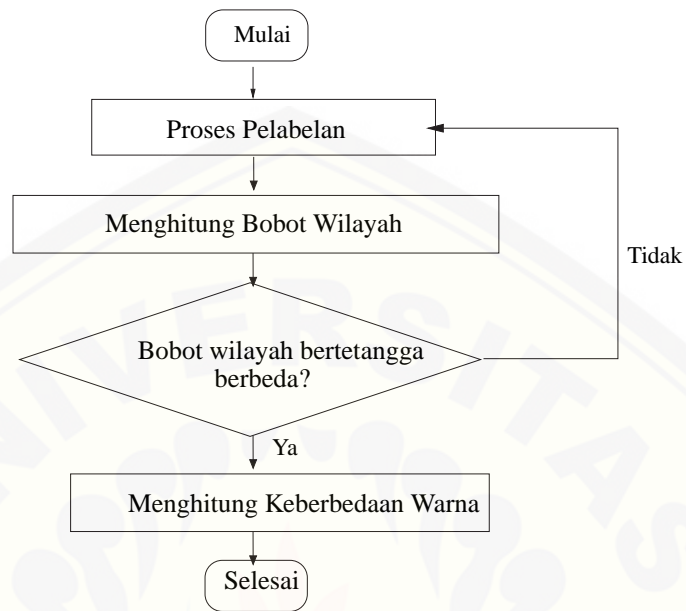
Pada bagian ini, akan dihitung banyaknya keberbedaan warna yang dihasilkan dari proses pelabelan. Banyaknya keberbedaan warna diambil dari keberbedaan bobot lokal wilayah super *antimagic*. Banyaknya keberbedaan warna tersebut kemudian digunakan untuk menunjukkan $\gamma_{lafat}(G) \leq k$.

Berdasarkan tahapan-tahapan dalam teknik penelitian, skema teknik penelitian ditunjukkan pada Gambar 3.6 sebagai berikut:



Gambar 3.6 Rancangan Penelitian

Selanjutnya, untuk membuktikan $\gamma_{lfat}(G) \leq k$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:



Gambar 3.7 Algoritma proses pelabelan lokal wilayah super *antimagic*

DAFTAR PUSTAKA

- Arumugam, S., K. Premalatha, M. Baca, dan A. Semanicova-Fenovcikova. 2017. *Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph*. Graph and Combinatorics. 33 275-285.
- Bartle, R. G., dan D. R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. Third Edition. Amerika: John Willey and Sons
- Dafik. 2013. *Antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Disconnected Graph*. Jember: National Library
- Diestel, R. 2005. *Graph Theory Electronic Edition*. Third Edition. New York. Graduate Texts in Mathematics, 173:6-9.
- Gallian, J. A. 2016. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. USA: The Electronic Journal of Combinatorics.
- Guichard, D. 2017. *An Introduction to Combinatorics and Graph Theory*. USA.
- I. H. Agustin, Dafik, M. Hasan, R. Alfarisi, R. M. Prihandini. 2017. *On The Local Edge Antimagic Coloring of Graphs*. Far East Journal of Mathematical Science (FJMS). Vol 102 Issue 9 (2017) 1925-1941.
- Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. America: Academic Press, Inc.
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M 2010. *On H Super Magic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations Of A Connected Graph Antimagic Total Labellings for Shackles A Connected Graph*. Utilitas. Math Bull, (83): 333-342.
- Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Bandung: Informatika Bandung.
- Rosen, K. H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications*. Seven Edition. New York: Connect Learn Succeed.
- Purcell, E. J., dan D. Verberg. 1987. *Calculus with Analytic Geometry*. 5th Edition: Prentice-Hall, Inc. Terjemahan oleh I. N. Susila dan B. Kartasasmita. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Bandung: Penerbit Erlangga.

Sugeng, K. A. 2005. *Magic and Antimagic Labeling of Graphs*. Australia: University of Ballarat.

