ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA

TESIS

Oleh

Risan Nur Santi
NIM 161820101002

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Risan Nur Santi
NIM 161820101002

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Ayahanda Husaini dan Ibunda Sam’anah yang tersayang;
2. Suamiku tercinta Ahmad Fathurosi;
3. guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
4. Almamater Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Tugas kita bukanlah untuk berhasil. Tugas kita adalah untuk mencoba, karena didalam mencoba itulah kita dapat menemukan dan membangun kesempatan untuk berhasil.*)"

(Mario Teguh)

"Learn from yasterday, live for today, and hope for tomorroy.*)"

(Albert Einsten)

*) bilikata.com

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Risan Nur Santi

NIM : 161820101002

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Hasil Operasi Korona adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang menyatakan,

Risan Nur Santi

NIM. 161820101002

TESIS

ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA

Oleh

Risan Nur Santi
NIM 161820101002

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama	: Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D
Dosen Pembimbing Anggota	: Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si.

PENGESAHAN

Tesis berjudul ”Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Hasil Operasi Korona” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
NIP. 196704201992011001	NIP. 196808021993031004
Anggota I,	Anggota II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si	Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si
NIP. 197704302005011001	NIP. 196906061998031001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Hasil Operasi Korona; Risan Nur Santi, 161820101002; 2018: 68 halaman; Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan cabang ilmu dari matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Teori ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss yang bernama Leonhard Euler, melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Konigsberg. Meskipun umurnya relatif muda, teori graf telah berkembang sangat pesat, baik dalam pengembangan teori maupun aplikasi di berbagai bidang. Banyak yang dapat dipelajari dari graf, salah satunya adalah konsep himpunan dominasi lokasi.

Himpunan dominasi lokasi merupakan perluasan teori *dominating set*. *Dominating set* adalah konsep penentuan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik tersebut bisa mengcover titik yang *adjacent*. *Dominating number* merupakan kardinalitas minimum dari *dominating set* yang disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi (*locating dominating set*) jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$, $N(u) \cap D \neq \emptyset$, dan $N(v) \cap D \neq \emptyset$, dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* atau bilangan dominasi lokasi yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian eksploratif dan terapan. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Penelitian terapan *(applied research)* merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan

untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk mencari bilangan dominasi lokasi. Graf yang digunakan adalah graf hasil operasi korona, sehingga pada penelitian ini dihasilkan 2 lemma, 5 teorema, dan 25 akibat sebagai berikut:

1. **Lemma 4.1.1** Diberikan G dan H adalah graf sederhana. Bilangan dominasi lokasi dari $G \odot H$ adalah $\gamma_L(G \odot H) \geq |V(G)| \cdot \gamma_L(H)$.
2. **Teorema 4.1.1** Untuk n ϵ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari $G \odot C_n$ adalah $\gamma_L(G \odot C_n) = |V(G)| \cdot \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.
3. **Akibat 4.1.1** Untuk n, m ϵ bilangan asli, $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $P_n \odot C_m$ adalah $\gamma_L(P_n \odot C_m) = n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.
4. **Akibat 4.1.2** Untuk n, m ϵ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $C_n \odot C_m$ adalah $\gamma_L(C_n \odot C_m) = n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.
5. **Akibat 4.1.3** Untuk n, m ϵ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $S_n \odot C_m$ adalah $\gamma_L(S_n \odot C_m) = (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.
6. **Akibat 4.1.4** Untuk n, m ϵ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $W_n \odot C_m$ adalah $\gamma_L(W_n \odot C_m) = (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.
7. **Akibat 4.1.5** Untuk n, m ϵ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $F_n \odot C_m$ adalah $\gamma_L(F_n \odot C_m) = (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.
8. **Teorema 4.1.2** Untuk n ϵ bilangan asli, $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari $G \odot P_n$ adalah $\gamma_L(G \odot P_n) = |V(G)| \cdot \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.
9. **Akibat 4.1.6** Untuk n, m ϵ bilangan asli, $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $P_n \odot P_m$ adalah $\gamma_L(P_n \odot P_m) = n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

10. **Akibat 4.1.7** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $C_n \odot P_m$ adalah $\gamma_L(C_n \odot P_m) = n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

11. **Akibat 4.1.8** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $S_n \odot P_m$ adalah $\gamma_L(S_n \odot P_m) = (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

12. **Akibat 4.1.9** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $W_n \odot P_m$ adalah $\gamma_L(W_n \odot P_m) = (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

13. **Akibat 4.1.10** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $F_n \odot C_m$ adalah $\gamma_L(F_n \odot C_m) = (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

14. **Lemma 4.1.1** Diberikan G dan H adalah graf sederhana. Bilangan dominasi lokasi dari $G \odot H$ adalah $\gamma_L(G \odot H) \leq \gamma(G) + |V(G)| \cdot \gamma_L(H)$.

15. **Teorema 4.1.3** Untuk $n \epsilon$ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari $G \odot S_n$ adalah $\gamma_L(G \odot S_n) = \gamma(G) + |V(G)| \cdot \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

16. **Akibat 4.1.11** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $P_n \odot S_m$ adalah $\gamma_L(P_n \odot S_m) = \gamma(G) + nm$.

17. **Akibat 4.1.12**Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $C_n \odot S_m$ adalah $\gamma_L(C_n \odot S_m) = \gamma(G) + nm$.

18. **Akibat 4.1.13** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $S_n \odot S_m$ adalah $\gamma_L(S_n \odot S_m) = \gamma(G) + (n+1)m$.

19. **Akibat 4.1.14** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $W_n \odot S_m$ adalah $\gamma_L(W_n \odot S_m) = \gamma(G) + (n+1)m$.

20. **Akibat 4.1.15** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $F_n \odot S_m$ adalah $\gamma_L(F_n \odot S_m) = \gamma(G) + (n+1)m$.

21. **Teorema 4.1.4** Untuk $n \ \epsilon$ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari $G \odot W_n$ adalah $\gamma_L(G \odot W_n) = \gamma(G) + |V(G)| \cdot \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

22. **Akibat 4.1.16** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $P_n \odot W_m$ adalah $\gamma_L(P_n \odot W_m) = \gamma(G) + n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

23. **Akibat 4.1.17** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $C_n \odot W_m$ adalah $\gamma_L(C_n \odot W_m) = \gamma(G) + n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

24. **Akibat 4.1.18** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $S_n \odot W_m$ adalah $\gamma_L(S_n \odot W_m) = (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

25. **Akibat 4.1.19** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $W_n \odot W_m$ adalah $\gamma_L(W_n \odot W_m) = \gamma(G) + (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

26. **Akibat 4.1.10** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $F_n \odot W_m$ adalah $\gamma_L(F_n \odot W_m) = \gamma(G) + (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

27. **Teorema 4.1.5** Untuk $n \ \epsilon$ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari $G \odot F_n$ adalah $\gamma_L(G \odot F_n) = \gamma(G) + |V(G)| \cdot \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

28. **Akibat 4.1.20** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $P_n \odot F_m$ adalah $\gamma_L(P_n \odot F_m) = \gamma(G) + n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

29. **Akibat 4.1.7** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $C_n \odot F_m$ adalah $\gamma_L(C_n \odot F_m) = \gamma(G) + n \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

30. **Akibat 4.1.8** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $S_n \odot F_m$ adalah $\gamma_L(S_n \odot F_m) = \gamma(G) + (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

31. **Akibat 4.1.9** Untuk $n, m \ \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $W_n \odot F_m$ adalah $\gamma_L(W_n \odot F_m) = \gamma(G) + (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

32. **Akibat 4.1.10** Untuk $n, m \epsilon$ bilangan asli, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf $F_n \odot F_m$ adalah $\gamma_L(F_n \odot F_m) = \gamma(G) + (n+1) \cdot \lceil \frac{2m}{5} \rceil$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul ”Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Hasil Operasi Korona”. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata dua (S2) pada Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si., selaku Ketua Program Studi Magister Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I, dan Dr. M. Fatekurohman, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian selama penulisan tesis ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. keluargaku tersayang yang selalu memberikan motivasi dan dukungan;
6. sahabat-sahabat terbaikku: Elsa Yuli Kurniawati, S.Pd. dan Mokhamad Saiful Hasan, S.Si. yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
7. teman-teman pejuang graf yang selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
8. saudara-saudaraku Magister Matematika Angkatan 2016;
9. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan cabang ilmu dari matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Teori ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss yang bernama Leonhard Euler, melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Konigsberg. Meskipun umurnya relatif muda, teori graf telah berkembang sangat pesat, baik dalam pengembangan teori maupun aplikasi di berbagai bidang. Banyak yang dapat dipelajari dari graf, salah satunya adalah konsep himpunan dominasi lokasi.

Menurut Foucaud (2016), teori himpunan dominasi lokasi mulai diterapkan pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. Himpunan dominasi lokasi merupakan perluasan teori *dominating set*. *Dominating set* adalah konsep penentuan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik tersebut bisa mengcover titik yang *adjacent*. *Dominating number* merupakan kardinalitas minimum dari *dominating set* yang disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi (*locating dominating set*) jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$, $N(u) \cap D \neq \emptyset$, dan $N(v) \cap D \neq \emptyset$, dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* atau bilangan dominasi lokasi yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Penelitian sebelumnya tentang himpunan dominasi lokasi telah banyak dilakukan. Chen (2011) juga melakukan penelitian yang berjudul ”*Identifying codes and locating dominating sets on paths and cycles*”. Penelitian terbaru oleh Canoy

(2014) mencari *locating dominating set* pada *crown dan composition graph*, kemudian Argiroffo (2015) yang berjudul ”*A polyhedral approach to locating dominating sets in graph*” serta oleh Foucaud (2016) yang berjudul *”Locating dominating set in twin free graph”*. Selanjutnya, Reyka Bella (2016) juga melakukan dengan judul ”Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya” dan Hanuf Maya Ningrum (2016) melakukan penelitian dengan judul ”Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Khusus dan Operasi Amalgamasinya”.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka peneliti tertarik untuk menganalisa teori himpunan dominasi lokasi pada graf hasil operasi korona. Pada penelitian kali ini jenis graf yang digunakan yaitu graf konektif dan tidak berarah. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi graf, kemudian menentukan titik-titik yang memenuhi syarat himpunan dominasi lokasi.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumuskan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. berapa nilai eksak dari bilangan dominasi lokasi dari graf khusus korona graf khusus?
b. berapa nilai eksak dari bilangan dominasi lokasi dari graf khusus korona sebarang graf?
c. berapa nilai eksak dari bilangan dominasi lokasi dari sebarang graf korona graf khusus?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. menentukan nilai eksak dari bilangan dominasi lokasi dari graf khusus korona graf khusus?
b. menentukan nilai eksak dari bilangan dominasi lokasi dari graf khusus korona sebarang graf?
c. menentukan nilai eksak dari bilangan dominasi lokasi dari sebarang graf korona graf khusus?

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menambah wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai himpunan dominasi lokasi;
b. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti himpunan dominasi lokasi pada jenis graf lainnya;
c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah himpunan dominasi lokasi.

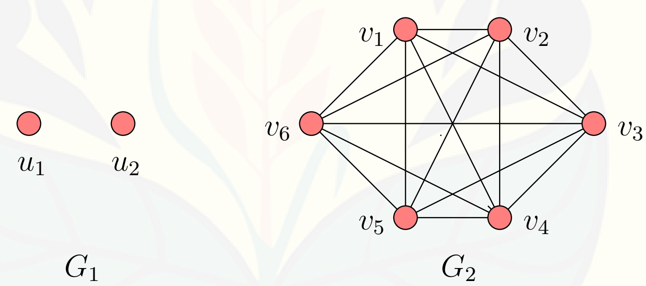
1.5 Kebaruan Penelitian

a. pada penelitian sebelumnya hanya digunakan pada graf-graf khusus, sedangkan pada penelitian ini menggunakan operasi graf yaitu operasi korona;
b. graf khusu yang digunakan pada penelitian ini yaitu graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang, graf roda, dan graf kipas.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah sebuah himpunan berhingga tak kosong yang elemen-elemennya dinamakan titik (*vertex*), sedangkan $E(G)$ adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) berbentuk garis lurus atau lengkung yang menghubungkan dua buah titik pada G. Slamin (2009) menyebutkan bahwa sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Menurut Munir (2009) sebuah graf yang tidak mempunyai sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut graf *trivial*. Irwanto dan Dafik (2014) mengungkapkan bahwa sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus terdapat minimal satu buah titik. Contoh graf dengan 2 titik dan 6 titik dapat dilihat pada Gambar 2.1.



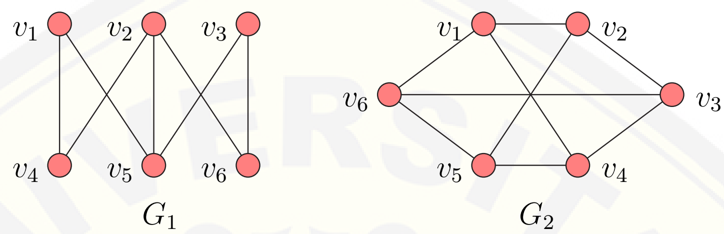
Gambar 2.1 Graf G_1 dan G_2

Suatu graf dengan p buah titik dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$. Iswadi (2011) menyatakan bahwa banyaknya titik dari sebuah graf G disebut *order* dari G yang dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi dari sebuah graf G disebut *size* dari G yang dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$. Pada gambar 2.1, G_1 adalah graf dengan $|V(G_1)| = 2$ dan $|E(G_1)| = 0$, sedangkan G_2 adalah graf dengan $|V(G_2)| = 6$ dan $|E(G_2)| = 15$. G_1 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_1) = \{u_1, u_2\}$ dan $E(G_1) = \emptyset$. G_2 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$. Sebuah sisi dinamakan *loop* jika sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama. Dalam sebuah graf, sebuah sisi dinamakan sisi ganda (*parallel*) apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik.

Dua buah titik pada suatu graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Misalkan v_1 dan v_2 titik pada graf G, titik v_1 dikatakan *adjacent* dengan titik v_2 jika ada sisi e_1 yang menghubungkan titik v_1 dan titik v_2, yaitu $e_1 = v_1v_2$. Sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), sebuah titik v_1 dikatakan *incident* dengan sebuah sisi e_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1, demikian juga e_1 dikatakan *incident* dengan v_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1. Sebagai contoh, pada graf G_2 Gambar 2.1, v_1 *adjacent* dengan v_2, v_3, v_4 dan v_5 dan v_6. Pada graf G_2 Gambar 2.1, v_1 dan v_2 *incident* dengan v_1v_2.

Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dinamakan derajat (*degree*). Derajat dinotasikan dengan d_i (*index* i menunjukkan titik ke-i pada graf). Sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), yang artinya titik tersebut tidak bertetangga dengan titik lain. Jika ada suatu graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan graf regular. Derajat terkecil dari suatu graf G adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\delta\ (G)$. Derajat terbesar dari suatu graf G adalah banyaknya maksimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\Delta\ (G)$. Sebagai contoh, graf G_2 pada Gambar 2.1 memiliki $\delta\ (G) = 5$.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$, dengan kata lain G_1 adalah subgraf dari G jika setiap titik pada G_1 merupakan titik pada G dan setiap sisi pada G_1 merupakan sisi pada G. Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang isomorfis. Dua buah graf dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik pada kedua graf tersebut dan antara himpunan sisi pada kedua graf tersebut (Munir, 2009). Contoh dua graf yang isomorfis dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Dua Graf yang Isomorfis

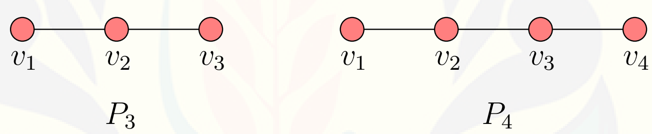
Berdasarkan orientasi arahnya, graf dibagi menjadi graf berarah tak graf tak berarah. Graf berarah (*direct graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah, sedangkan graf tak berarah (*undirect graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Berdasarkan ada tidaknya *loop*, graf dibagi menjadi graf sederhana dan graf tak sederhana. Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung *loop*, sedangkan graf tak sederhana (*unsimple graph*) adalah graf yang mengandung *loop*. Berdasarkan jumlah titiknya, graf dibagi menjadi graf berhingga dan graf tak berhingga. Graf berhingga (*limited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya berhingga, sedangkan graf tak berhingga (*unlimited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga. Berdasarkan titik yang terhubung, graf dibagi menjadi graf terhubung dan graf tak terhubung. Graf dikatakan terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G terdapat lintasan dari v_i ke v_j, sedangkan dikatakan tak terhubung (*disconnected graph*) jika ada minimal dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G, sehingga tidak terdapat lintasan dari v_i ke v_j.

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang memiliki karakteristik bentuk khusus. Graf ini memiliki keunikan yaitu tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai *order* n tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan *well-known special graph*, sedangkan graf khusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan *well-defined special graph*. Berikut ini beberapa contoh graf khusus, diantaranya :

a. Graf Lintasan (*Path*) P_n

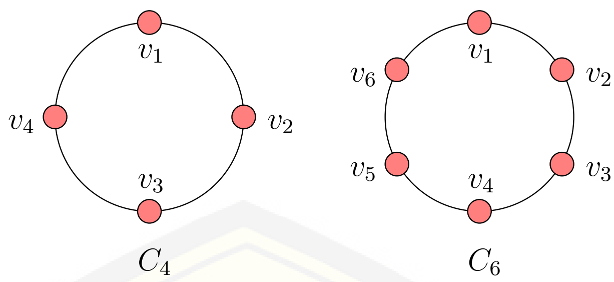
Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n buah titik dilambangkan dengan P_n dimana $n \geq 2$. Himpunan titik dan sisi pada graf lintasan adalah $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ sehingga kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n-1$. Contoh graf lintasan P_n dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf Lintasan P_n

b. Graf Lingkaran (*Cycle*) C_n

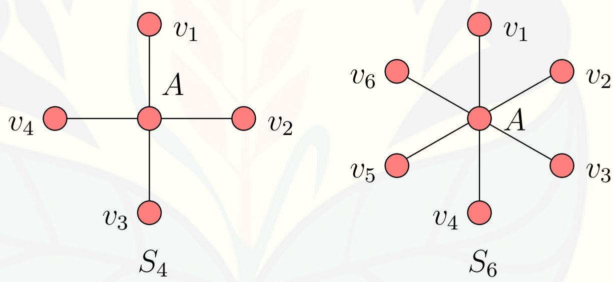
Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n dimana $n \geq 3$, yaitu graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua dengan lintasan tertutup. Himpunan titik pada graf lingkaran adalah $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$ sehingga kardinalitas titik $|V(C_n)| = n$ dan kardinalitas sisinya $|E(C_n)| = n$. Contoh graf lingkaran C_n dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf lingkaran C_n

c. Graf Bintang (*Star Graph*) S_n

Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Himpunan titik pada graf bintang adalah $V(S_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(S_n) = \{x_i x_{n+1}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga kardinalitas titik $|V(S_n)| = n+1$ dan kardinalitas sisinya $|E(S_n)| = n$. Sebagai contoh yaitu graf pada gambar 2.5.

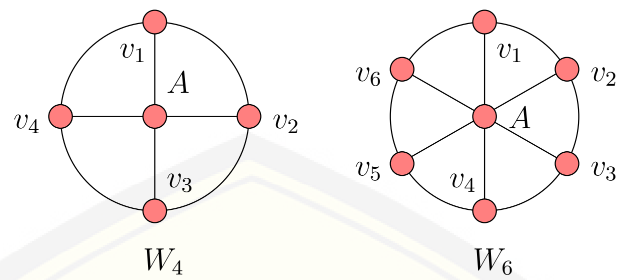


Gambar 2.5 Graf Bintang S_n

d. Graf Roda (*Wheel Graph*) W_n

Graf Roda dinotasikan dengan W_n yaitu sebuah graf yang memuat *cycle* ber-*order* n dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di *cycle* tersebut. Himpunan titik pada graf roda adalah $V(W_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_i x_{n+1}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga kardinalitas titik $|V(W_n)| = n+1$ dan kardinalitas sisinya $|E(W_n)| = 2n$.

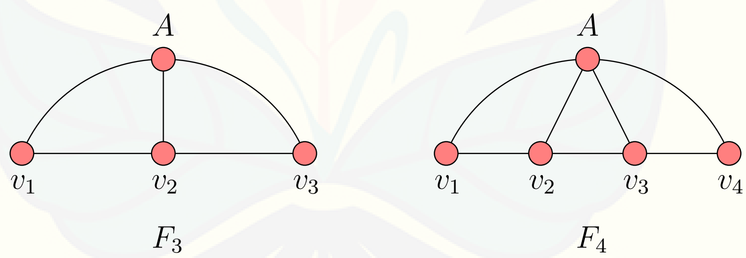
Gambar 2.6 adalah contoh graf roda W_n.



Gambar 2.6 Graf Roda W_n

e. Graf Kipas (*Fan Graph*) F_n

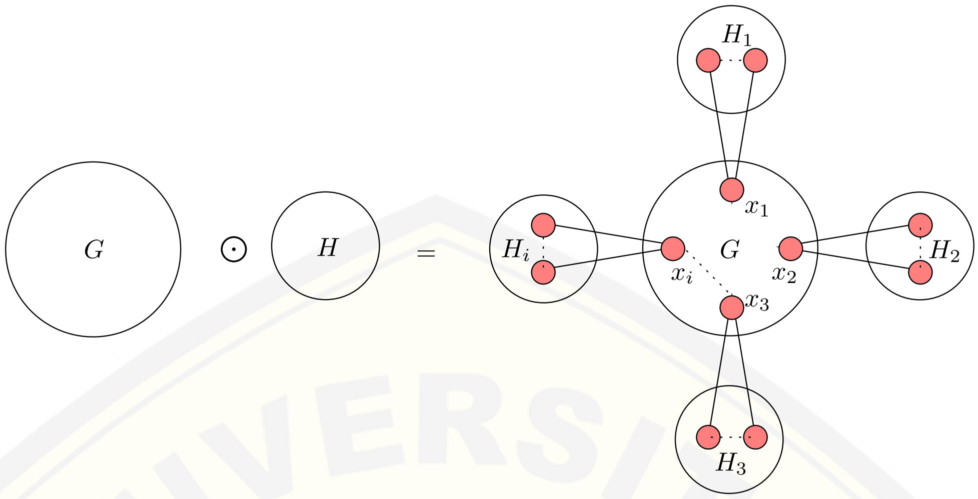
Graf kipas dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 3$, yaitu graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n pada suatu titik yang disebut titik pusat. Himpunan titik pada graf kipas adalah $V(F_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{n+1}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga kardinalitas titiknya $|V(F_n)| = n+1$ dan kardinalitas sisinya $|E(F_n)| = 2n-1$. Gambar 2.7 adalah contoh graf kipas F_n.



Gambar 2.7 Graf Kipas F_n

2.3 Operasi Korona (*Corona Product*)

Operasi korona dari kombinasi dua buah graf G dan graf H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|G|$ duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, |G|$ kemudian menghubungkan setiap simpul ke-i dari G ke setiap simpul di H_i (Harary, Frucht, 1970). Operasi korona dari kombinasi dua buah graf dinotasikan dengan $G \odot H$, seperti pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf Hasil Operasi Korona $G \odot H$

Definisi 2.3.1. *Diberikan graf G yaitu sebarang graf dengan $|V(G)| = p_1$ dan $|E(G)| = q_1$ serta graf H yaitu sebarang graf dengan $|V(H)| = p_2$ dan $|E(H)| = q_2$. Kardinalitas titik dan sisi pada $G \odot H$ adalah $|V(G \odot H)| = p_1(p_2 + 1)$ dan $|E(G \odot H)| = p_1(p_2 + q_2) + q_1$.*

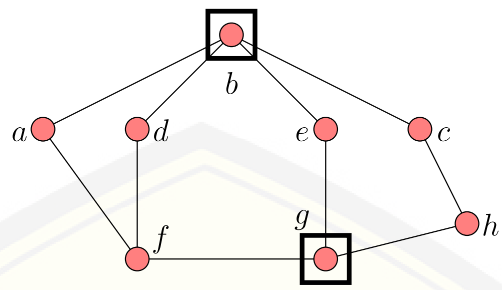
2.4 Himpunan Dominasi Lokasi

Menurut Haynes dan Henning dalam Agustin dan Dafik (2014), himpunan D dari titik graf sederhana G dinamakan himpunan dominasi (*dominating set*) jika setiap titik $u \in V(G) - D$ *adjacent* ke beberapa titik $v \in D$.

Himpunan dominasi merupakan konsep penentuan titik pada graf dengan ketentuan titik tersebut dapat menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan seminimal mungkin. Kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi disebut bilangan dominasi (*domination number*) yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Himpunan dominasi D dengan $|D| = \gamma(G)$ dinamakan himpunan dominasi minimum. Batas atas dari bilangan dominasi adalah banyaknya titik di graf. Ketika paling sedikit satu titik yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di graf, maka $1 \leq \gamma(G) \leq n$ untuk setiap graf ber-*order* n. Nilai dari bilangan dominasi selalu $\gamma(G) \leq |V(G)|$.

Berikut adalah contoh himpunan dominasi pada graf G dapat dilihat pada Gambar

2.9. Titik yang ditandai merupakan titik dominator himpunan dominasi dari graf G.



Gambar 2.9 Himpunan Dominasi pada Graf G (Foucaud, 2015)

Himpunan dominasi lokasi atau biasa disebut *locating dominating set* merupakan himpunan dominasi dengan tambahan syarat. Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan memiliki himpunan dominasi lokasi jika himpunan titik dominator D memenuhi syarat setiap titik yang berbeda diluar D yaitu $V - D$ memiliki irisan yang berbeda dengan D. Misal V himpunan titik dan E himpunan sisi dari graf G sehingga $\{u, v \in V \backslash D\}$ maka berlaku :

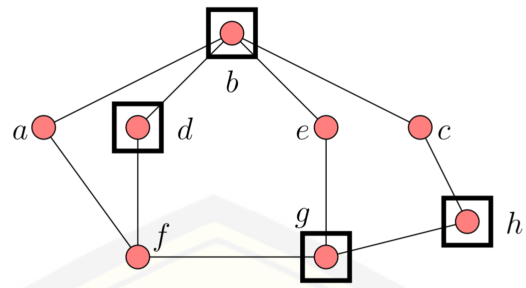
1. $N(u) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(v) \cap D \neq \emptyset$.
2. $u \neq v$ maka $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ (Honkala, 2002).

Menurut Foucaud (2016) konsep himpunan dominasi lokasi pertama kali dikenalkan dan dipelajari oleh Slater pada tahun 1987. Bilangan dominasi lokasi merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. Berikut teorema terkait himpunan dominasi lokasi.

Teorema 2.4.1. *Untuk sebarang graf G, maka $\gamma_L(G) \geq \lfloor \frac{p}{1+\delta(G)} \rfloor$.*

Berikut contoh untuk himpunan dominasi lokasi dapat dilihat pada gambar 2.11 dimana titik yang ditandai merupakan titik dominator himpunan dominasi lokasinya. Pada contoh gambar 2.11 diperoleh himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan diperoleh titik dominator $D = \{b, d, g, h\}$, $V - D = \{a, c, e, f\}$ sehingga menurut syarat himpunan dominasi lokasi diperoleh :

$$N(a) \cap D = \{b\}, N(c) \cap D = \{b, h\}, N(e) \cap D = \{d, g\}, N(f) \cap D = \{g\}.$$



Gambar 2.10 Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf G (Foucaud, 2015)

Berdasarkan hasil diatas maka kedua syarat himpunan dominasi lokasi terpenuhi sehingga bilangan lokasi dominasi $\gamma_L(G) = 4$.

Proposisi 2.4.1. *Untuk n ϵ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf lingkaran C_n adalah $\gamma_L(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$*

Proposisi 2.4.2. *Untuk n ϵ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf lintasan P_n adalah $\gamma_L(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$*

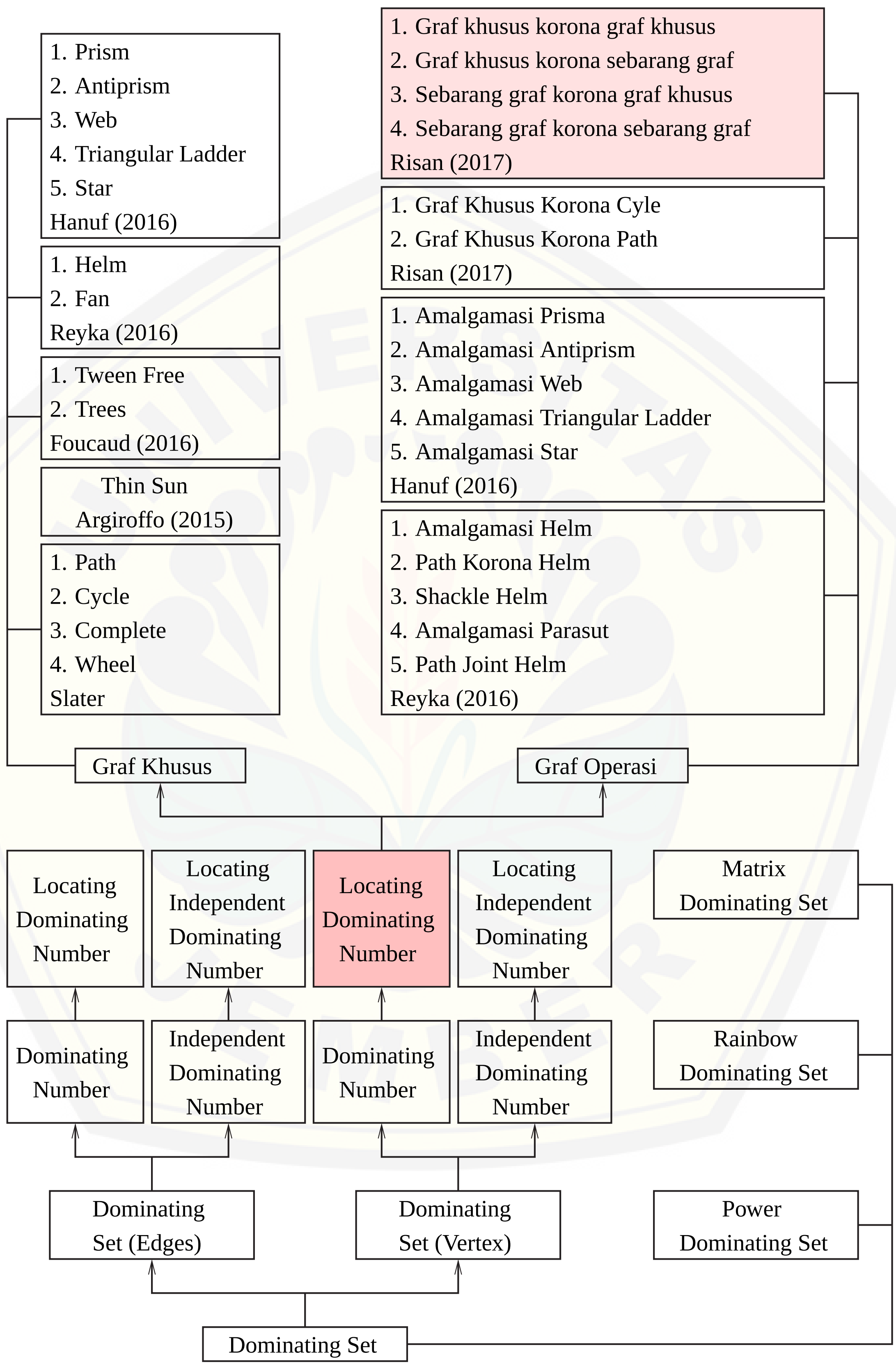
Proposisi 2.4.3. *Untuk n ϵ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf bintang S_n adalah $\gamma_L(S_n) = n$*

Proposisi 2.4.4. *Untuk n ϵ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf roda W_n adalah $\gamma_L(W_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$*

Proposisi 2.4.5. *Untuk n ϵ bilangan asli dan $n \geq 4$, bilangan dominasi lokasi dari graf kipas F_n adalah $\gamma_L(F_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$*

2.5 Kerangka Konsep Penelitian Himpunan Dominasi Lokasi

Pada bagian ini disajikan kerangka konsep penelitian serta hasl-hasil penelitian sebelumnya tentang himpunan dominasi lokasi.



Gambar 2.11 Kerangka konsep Himpunan Dominasi Lokasi

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam 2 jenis, yaitu penelitian eksploratif dan penelitian terapan. Penelitian eksploratif yaitu penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya, sedangkan penelitian terapan (*applied research*) yaitu penelitian yang hati-hati, sistematik, dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

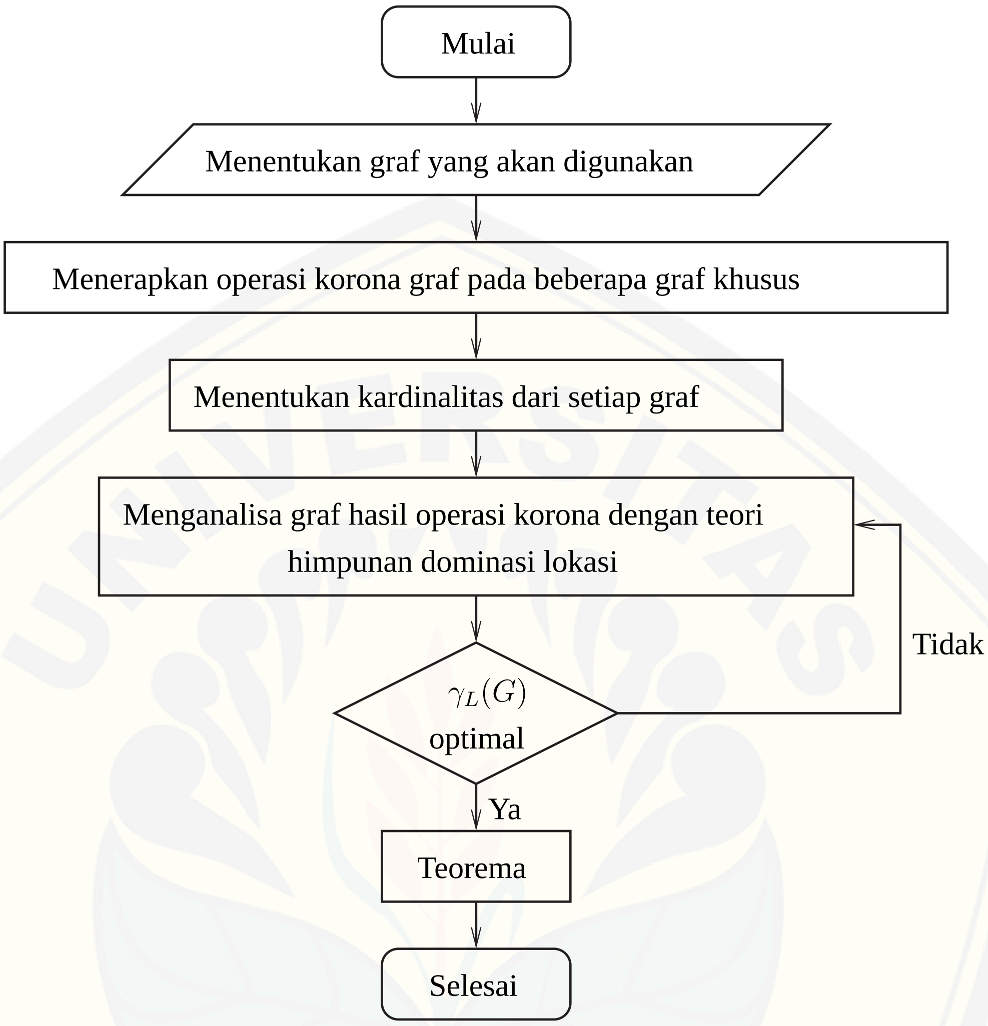
3.2 Data Penelitian

Data dalam penelitian ini data yang digunakan adalah data sekunder berupa graf hasil operasi korona (*corona product*).

3.3 Rancangan Penelitian

Dalam menyelesaikan permasalahan, penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda untuk mendapatkan nilai dimensi metrik sedemikian hingga didapatkan nilai kardinalitas minimum dengan koodinat titik yang berbeda, sedangkan metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk meme-cahkan suatu masalah.

Rancangan penelitian untuk himpunan dominasi lokasi (*locating dominating set*) pada graf hasil operasi korona digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

Uraian dari rancangan penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. menentukan objek penelitian berupa graf-graf hasil operasi korona;
b. menentukan banyak titik dan banyak sisi pada hasil graf operasi korona;
c. menentukan titik dominator pada graf hasil operasi korona;
d. menentukan himpunan dominasi lokasi pada graf hasil operasi korona;
e. menganalisa graf hasil operasi korona dengan teori himpunan dominasi lokasi;
e. menganalisa keoptimalan dari nilai himpunan dominasi lokasi.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa didapatkan hasil yaitu :

1. Batas bawah himpunan dominasi lokasi dari $G \odot H$ adalah $\gamma_L(G \odot H) \geq |V(G)| \cdot \gamma_L(H)$.
2. Batas atas himpunan dominasi lokasi dari $G \odot H$ adalah $\gamma_L(G \odot H) \leq \gamma(G) + |V(G)| \cdot \gamma_L(H)$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai himpunan dominasi lokasi pada graf hasil operasi korona, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan himpunan dominasi lokasi pada graf hasil operasi lainnya dan aplikasinya terhadap permasalahan di lingkungan sekitar.

DAFTAR PUSTAKA

Alfarisi, R., Fatahillah, A., Dafik. 2014. *The Analysis of Dominating set on Special Graphs*. Proceedings of the National Seminar on Mathematics and Mathematics Education. Journal: UAD Yogyakarta. vol(1).

Darmaji dkk. 2014. *Dominating Set Two Led on Jahangir Graph and Prism Graph*. Paper. Surabaya: ITS

Gary Chartrand and Ping Zhang. 2008. *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall.

Goddard, W dan Henning, M.A. 2006. *Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results*. South African National Research Foundation and The University Of Johannesburg.

Harary, F. 1969. *Graph Teory*.Wesley Publishing Company,Inc.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston San Diego New York London: Academic Press.

Hayness, T. W dan Henning, M.A. 2002. Total Domination Good Vertices in Graphs. *Australasian Journal Of Combinatorics* 26 (2002), pp. 305-315.

Haynes, T.W. 1998. *Fundamental of Domination in Graphs*. New York: Marcel Dekker, INC.

Henning, M.A, dkk. 2008. *On Matching and Total Domination in Graphs*. Discrete Mathematics 308 (2008) 2313-2318.

Henning, M. A and Yeo, A. 2012. *Girth and Total Dominating in Graphs*. Graphs Combin. 28 (2012) 199-214.

Howard, J.M. 2004. *Locating and Total Dominating Sets in Trees*. Thesis.Unpublished.

Iswadi, H. 2011. *Lower Up of Matrix Locating Dominating Number on Crown Product Graphs*. Proceedings of the National Seminar on Mathematics and Mathematics Education, 1(1).

Muharromah, A., Agustin, I.H. dan Dafik. 2014. *Special Graphs and It's Dominating Number*. Proceedings of the National Seminar on Mathematics and Mathematics

Education. Journal: UAD Yogyakarta. vol(1).

Munir, R. 2009. *Discrete Mathematics*. Informatics Bandung.

Murugesan, N., et al. 2004. *The Domination and Independence of Some Cubic Bipartite Graphs*. Int. J. Contemp. Math. Sciences. 6 13 (2009),611-618.

Ruan, L, dkk. 2004. *A greedy Approximation for Minimum Connected Dominating Set*. Theoretical Computer Science 329 (2004) 325 - 330.

Saputro, Hendri D. 2015. *Dominating Set on the Operation Graphs dan It's Application*. S: Mathematics Departement University of Jember.

Slamin. 2009. *Network Design: Graf Theory Approach*. Jember: Universitas Jember.

Snyder, K. 2011. *C-Dominating Sets for Families of Graphs*. University of MaryWashington.

Tarr, Jennifer M. 2010. *Domination in Graphs. Graduate Theses and Dissertations*.

Wardani, D. A. R., Agustin, I. H., Dafik. 2014. *Domination Number on Special Graphs*. Proceedings of the National Seminar on Mathematics and Mathematics Education. Journal: UAD Yogyakarta. vol(1).

Yannakakis, M. and Gavril, F. 1980. *Edge Dominating Sets in Graphs*. SIAMJournal on Applied Mathematics, Vol 338, No.3 (Jun 1980), pp.364-372.