# PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF RODA, GRAF GUNUNG API DAN GRAF HASIL OPERASI KORONA

## SKRIPSI

Oleh

**Sinta Adelina**
**NIM 141810101044**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2018**

# PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF RODA, GRAF GUNUNG API DAN GRAF HASIL OPERASI KORONA

## SKRIPSI

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Sinta Adelina**
**NIM 141810101044**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2018**

# PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Subhanahu Wa Ta'ala yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad Shallallahu'alaihi Wassalam, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dengan teriring rasa terimakasihku yang terdalam kepada:

1. Ibuku Suminten, Ayahku Mulyono dan Segenap Keluarga tercinta yang selalu mencurahkan kasih sayangnya dan mendo'akan dengan tulus tanpa kenal lelah;
2. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., Bu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. yang dengan sabar tulus dan ikhlas membimbing sehingga skripsi ini terselesaikan;
3. Sahabat-sahabat terbaikku keluarga besar angkatan matematika 2014 (EXTREME) yang selalu memberikan dukungan serta semangat;
4. Teman-teman seperjuangan graf yang selalu memberikan semangat dan berjuang bersama;
5. Keluarga Kos Bu Chris yang selalu memberikan semangat serta dukungan tiada tara;
6. Alamamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

# MOTTO

"Dan hendaklah ada di antara kamu segolongan umat yang menyeru kepada kebajikan, menyuruh kepada yang ma'ruf dan mencegah dari yang mungkar; merekalah orang-orang yag beruntung"
(Q.S Ali-Imran:104)[1]

1

[1]Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Quran dan Terjemahannya*. Bandung: CV. Penerbit Diponegoro.

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Sinta Adelina

NIM : 141810101044

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”Pewarnaan Lokal Titik Total *Antimagic* Pada Graf Roda, Graf Gunung Api Dan Graf Hasil Operasi Korona” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang Menyatakan

Sinta Adelina

NIM 141810101044

**SKRIPSI**

# Pewarnaan Lokal Titik Total *Antimagic* Pada Graf Roda, Graf Gunung Api Dan Graf Hasil Operasi Korona

Oleh

Sinta Adelina
NIM 141810101044

Pembimbing :

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing Anggota : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul ”Pewarnaan Lokal Titik Total *Antimagic* Pada Graf Roda, Graf Gunung Api Dan Graf Hasil Operasi Korona” telah diuji dan disahkan pada:
hari, tanggal :
tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji:

| | |
|---|---|
| Ketua, | Anggota I, |
| Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. | Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. |
| NIP. 196808021993031004 | NIP. 198408012008012006 |
| Anggota II, | Anggota III, |
| Dr. Kristina Wijaya, S.Si., M.Si | Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. |
| NIP. 19748132000032004 | NIP. 198610142014041001 |

Mengesahkan
Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 196102041987111001

## RINGKASAN

**Pewarnaan Lokal Titik Total *Antimagic* Pada Graf Roda, Graf Gunung Api Dan Graf Hasil Operasi Korona**; Sinta Adelina, 141810101044: 55 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada suatu graf $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$ yang memiliki fungsi bijektif $f : (V \cup E) \rightarrow 1, 2, ..., m + n$ dan untuk setiap dua titik yang bertetangga $u$ dan $v, w_t(u) \neq w_t(v)$, dimana $w_t(u) = f(u) + \Sigma_{e \in E(u)} f(e)$ dan $E(u)$ adalah kumpulan sisi-sisi yang terhubung pada titik $u$. Dengan demikian setiap pelabelan total lokal *antimagic* merupakan pewarnaan titik di $G$ dimana titik $u$ diberi warna $w_t(u)$. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* $\chi_{lavt}(G)$ adalah minimum warna dari seluruh warna yang didapatkan pada pelabelan total lokal *antimagic* graf $G$.

Adapun perkembangan dari pewarnaan titik dan pelabelan sisi yaitu pelabelan *antimagic* oleh Hartsfield dan Ringel (1994). Baca dkk (2003) mengembangkan penelitian Hartsfield dan Ringel menjadi pelabelan total titik *antimagic* pada graf. Arumugan dkk (2017) telah melakukan penelitian terbaru tentang pewarnaan lokal titik *antimagic* pada graf. Pada artikel tersebut dibahas tentang pelabelan serta pewarnaan graf dan meneliti mengenai bilangan kromatik dari pewarnaan titik lokal *antimagic* pada graf. Graf-graf yang diteliti antara lain graf pohon $T$, graf lintasan $P_n$, graf lingkaran $C_n$, graf *friendship* $F_n$, graf lengkap $K_{m,n}$, graf lengkap bipartite $K_{2,n}$, graf tangga $L_n$ dan graf roda $W_n$.

Pada penelitian ini telah diteliti pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf roda, graf gunung api dan graf hasil operasi korona yaitu $W_n \bigodot W_4, V_n \bigodot K_4$ dan $W_n \bigodot K_4$. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf roda $W_n$ untuk bilangan bulat positif $n \geq 3$ adalah 3 untuk $n$ genap dan 4 untuk $n$ ganjil. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf gunung api $V_n$ adalah 3. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf operasi korona $W_n \bigodot W_4$ untuk $n \geq 3$ adalah 6 untuk $n$ genap dan 7 untuk $n$ ganjil. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf operasi korona $V_n \bigodot K_4$ adalah 7. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada

graf operasi korona $W_n \odot K_4$ untuk bilangan bulat positif $n \geq 3$ adalah 7 untuk $n$ genap dan 8 untuk $n$ ganjil.

## PRAKATA

Puji syukur kepada Allah Subhanu Wa Ta'ala atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pewarnaan Lokal Titik Total *Antimagic* Pada Graf Roda, Graf Gunung Api Dan Graf Hasil Operasi Korona". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada Kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Dr. Kristina Wijaya, S.Si., M.Si, selaku Dosen Penguji I dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si., selaku Dosen Penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam;
5. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah Subhanallahu Wa Ta'ala dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

Halaman

# DAFTAR GAMBAR

Halaman

# DAFTAR TABEL

Halaman

# BAB 1. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang mempresentasikan suatu permasalahan ke dalam suatu himpunan titik yang disimbolkan dengan $V(G)$ atau $V$ dan himpunan sisi yang disimbolkan $E(G)$ atau $E$ untuk selanjutnya dicari penyelesaiannya. Leonard Euler pada tahun 1736 untuk pertama kalinya menggunakan teori graf untuk memecahkan masalah mengenai jembatan yang terletak di Konisberg. Teori graf mulai saat itu dikembangkan dalam berbagai permasalahan dan menghasilkan kajian-kajian misalnya pewarnaan, pelabelan, *dominating set*, *rainbow connection*, dan lain lain. Pelabelan graf adalah pemetaan elemen graf ke dalam suatu bilangan dengan suatu aturan tertentu. Pelabelan graf berdasarkan domainnya dibagi menjadi pelabelan sisi, pelabelan titik, pelabelan total da pelabelan wilayah. Pewarnaan titik adalah pemberian warna ke titik-titik suatu graf dengan titik yang bertetangga memiliki warna berbeda. Selain pewarnaan titik terdapat pula pewarnaan sisi dan wilayah. Banyak warna minimun yang digunakan dalam pewarnaan graf disebut bilangan kromatik.

Adapun perkembangan dari pewarnaan titik dan pelabelan sisi yaitu pelabelan *antimagic* oleh Hartsfield dan Ringel (1994). Baca dkk (2003) mengembangkan penelitian Hartsfield dan Ringel menjadi pelabelan total titik *antimagic* pada graf. Arumugan dkk (2017) telah melakukan penelitian terbaru tentang pewarnaan lokal titik *antimagic* pada graf. Pada artikel tersebut dibahas tentang pelabelan serta pewarnaan graf dan meneliti mengenai bilangan kromatik dari pewarnaan titik lokal *antimagic* pada graf. Graf-graf yang diteliti antara lain graf pohon $T$, graf lintasan $P_n$, graf lingkaran $C_n$, graf *friendship* $F_n$, graf lengkap $K_{m,n}$, graf lengkap bipartite $K_{2,n}$, graf tangga $L_n$ dan graf roda $W_n$.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Arumugan dkk (2017) memunculkan suatu ide untuk mengembangkannya menjadi penelitian pewarnaan lokal titik total *antimagic*. Operasi graf merupakan suatu bentuk cara mendapatkan graf baru dengan mengoperasikan satu atau lebih graf. Pada penelitian ini akan dicari nilai bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf roda, graf gunung api dan graf hasil operasi korona yaitu $W_n \bigodot W_4, V_n \bigodot K_4$ dan $W_n \bigodot K_4$.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf roda, graf gunung api dan graf hasil operasi korona yaitu $W_n \bigodot W_4.V_n \bigodot K_4$ dan $W_n \bigodot K_4$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf roda, graf gunung api dan graf hasil operasi korona yaitu $W_n \bigodot W_4, V_n \bigodot K_4$ dan $W_n \bigodot K_4$.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini sebagai berikut.

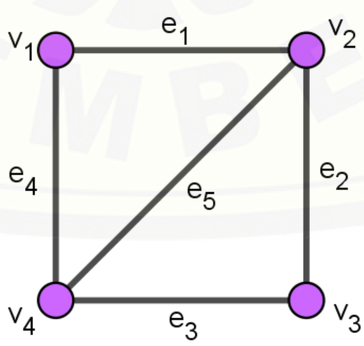
1. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf khususnya dalam ruang lingkup pelabelan dan pewarnaan yaitu mengetahui algoritma pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf.
2. Memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada operasi graf lain.
3. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi graf lainnya.

# BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Teori graf adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Sebuah graf $G$ adalah pasangan himpunan $(V, E)$ dimana $V$ adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*) dan $E$ adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik $(v_1, v_2)$ dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edge*). Seringkali dituliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf $G$ dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf $G$ (Hartsfield dan Ringel, 1994).

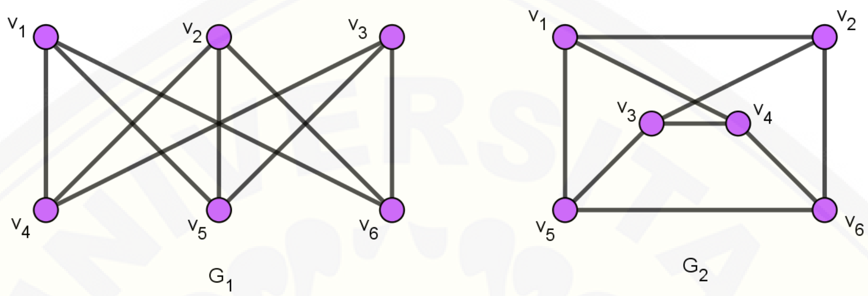
Misalkan $u$ dan $v$ adalah titik-titik di graf $G$ dan $uv$ atau $vu$ merupakan sisi di $G$. $u$ dan $v$ merupakan titik yang saling bertetangga. Sisi $uv$ dikatakan terhubung pada titik $u$ dan titik $v$. Banyaknya titik pada $G$ disebut orde $G$ dan banyaknya sisi di G disebut size $G$. Pada Gambar 2.1 didapatkan orde $G = 4$ dan size $G = 5$. Derajat dari titik $v$ adalah banyaknya titik di $G$ yang bertetangga dengan $v$. Derajat titik dinotasikan dengan $deg(v)$. Titik dengan derajat 0 disebut titik terisolasi dan titik dengan derajat 1 disebut titik akhir. Derajat titik terbesar pada suatu graf $G$ disebut derajat maksimum yang dituiskan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari G dituliskan dengan $\delta(G)$ (Chartrand dan Zhang, 2009).




Gambar 2.1 Graf $G$

Dua graf $G_1$ dan $G_2$ dengan $p$ titik dikatakan isomorfis jika setiap titik graf

$G_1$ dan $G_2$ dapat dilabeli angka $1$ sampai $p$. Titik dengan label $u$ dan $v$ bertetangga di $G_1$ maka $u$ dan $v$ juga bertetangga di $G_2$ dan sebaliknya. Jika dua graf saling isomorfis maka keduanya harus memiliki barisan derajat titik yang sama (Hartsfield dan Ringel, 1994).



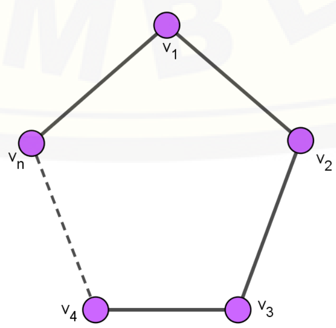

Gambar 2.2 Graf $G_1$ dan $G_2$ merupakan graf yang isomorfosis

## 2.2 Jenis-jenis Graf

Jenis-jenis graf sangat beragam. Berikut beberapa diantaranya.

1. Graf Siklus (*Cycle Graph*)

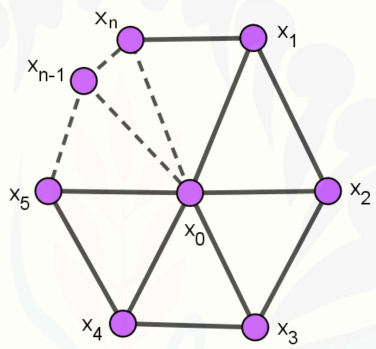
   Graf siklus dapat dinotasikan dengan $C_n$ untuk sebuah bilangan bulat $n \geq 3$. Graf siklus merupakan graf dengan orde $n$ dan size $n$ yang memiliki titik-titik $v_1, v_2, ..., v_n$ dan sisi-sisinya adalah $(v_1 v_n)$ dan $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, ..., n-1$ (Chartrand et al., 1996). Graf siklus diilustrasikan pada Gambar 2.3.




Gambar 2.3 Graf Siklus $C_n$

2. Graf Roda (*Wheel Graph*)

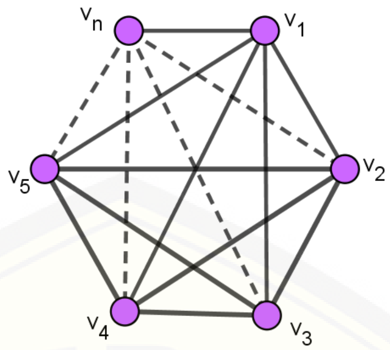
   Graf roda $W_n$ merupakan graf yang diperoleh dengan menghubungkan semua titik dari graf siklus dengan orde $n$ ke sebuah titik baru yang disebut titik pusat. Misalkan $V(W_n) = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ dimana $x_0$ adalah titik pusat dan $x_1, ..., x_n$ adalah titik-titik dari graf siklus (Simanjuntak dan Wijaya, 2013). Graf roda $W_n$ untuk bilangan bulat positif $n \geq 3$ memiliki himpunan titik $V(W_n) = \{x_i; 0 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(W_n) = \{x_0x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1x_n\}$, kardinalitas titik $|V(W_n| = n+1$ dan kardinalitas sisi $|E(W_n)| = 2n$. Graf $W_n$ dapat diilustrasikan pada Gambar 2.4.




Gambar 2.4 Graf Roda $W_n$

3. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

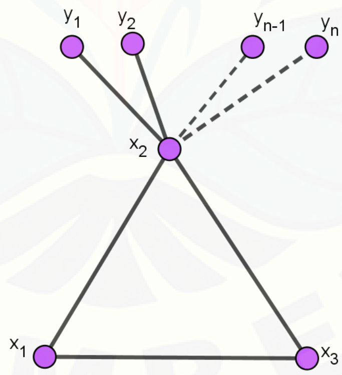
   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap pasang titiknya terhubung oleh sebuah sisi. Graf lengkap dengan $n$ buah titik dinotasikan dengan $K_n$ (Gross dan Yellen, 2003). Graf lengkap diilustrasikan pada Gambar 2.5.




Gambar 2.5 Graf Lengkap $K_n$

4. Graf Gunung Api (*Volcano Graph*)

   Graf gunung api dinotasikan dengan $V_n$ yang memiliki himpunan titik $V(V_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(V_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\} \cup \{x_2y_j; 1 \leq j \leq n\}$ ( Dafik, 2013). Graf Gunung Api diilustrasikan pada Gambar 2.6.



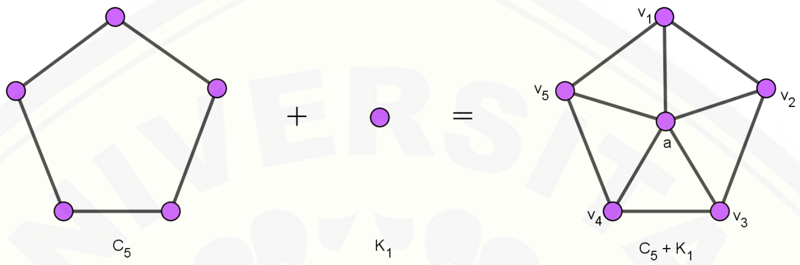

Gambar 2.6 Graf Gunung Api $V_n$

## 2.3 Operasi Graf

Operasi graf adalah suatu cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan pengoperasian antara satu graf atau lebih. Operasi graf bermacam-macam jenisnya beberapa diantaranya sebagai berikut.

1. Join

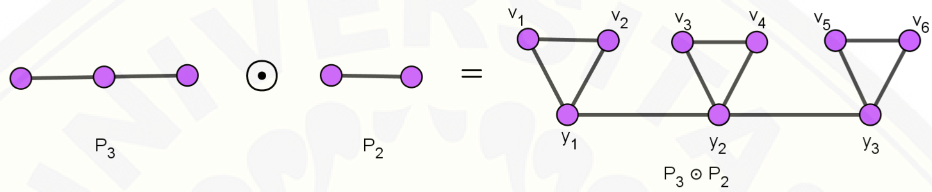
   Misalkan terdapat dua graf $G_1$ dan $G_2$, operasi graf join dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Contoh dari operasi join yaitu graf roda $W_n$ yang merupakan join dari $C_n$ dan $K_1$ (Harrary, 1994).




Gambar 2.7 Contoh $C_5 + K_1$

2. Korona

Korona dinotasikan $G \bigodot H$ dari graf $G$ (graf terhubung) dan $H$ (tidak harus terhubung) didefinisikan sebagai graf yang dibentuk dengan mengambil $n$ salinan dari graf $H$ dan menghubungkan titik ke- $i$ dari $G$ dengan titik-titik pada $H_i$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $n = |V(G)|$. Gambar 2.8 merupakan contoh dari operasi korona yaitu $P_3 \bigodot P_2$ (Figueroa, 2002).



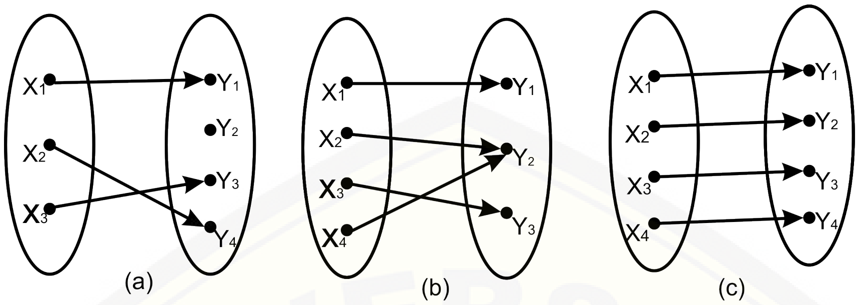

Gambar 2.8 Contoh $P_3 \bigodot P_2$

## 2.4 Fungsi

Fungsi $f$ dari himpunan $A$ ke himpunan $B$, ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota $B$. Himpunan $A$ yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam $f$, disebut domain $f$ dan dapat dinyatakan sebagai $D_f$. Himpunan $B$ yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam $f$, disebut *range* $f$ dan dinyatakan sebagai $R_f$ . Jika $(a, b)$ anggota dari $f$, maka $b = f(a)$ untuk $(a, b)$ anggota dari $f$. Fungsi dapat digolongkan menjadi 3 berdasarkan sifatnya sebagai berikut :

1. Fungsi satu-satu (injektif) adalah sebuah pemetaan pada setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, $\forall a_1$ dan $a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
2. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*.

3. Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

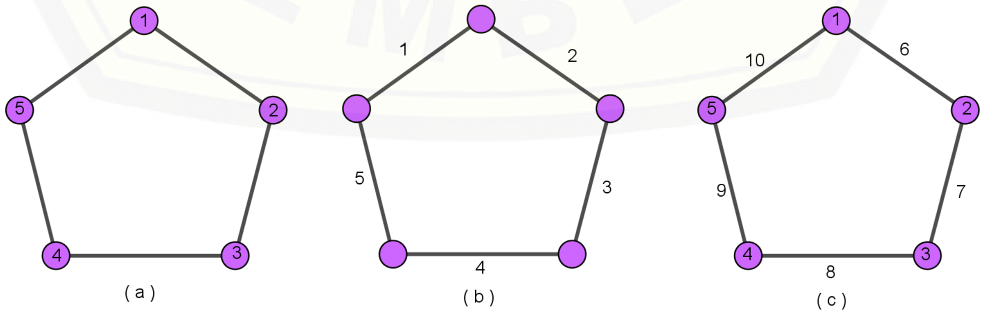



Gambar 2.9 Contoh (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

**Teorema 2.1.** *Misalkan domain dan kodomain dari suatu fungsi f adalah himpunan berhingga yang memiliki kardinalitas sama. Maka fungsi f injektif jika dan hanya jika fungsi f surjektif (Lucas, 1990).*

## 2.5 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur titik dan sisi ke dalam suatu bilangan dengan aturan tertentu. Pelabelan titik (*vertex labelling*) adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, jika domainnya berupa himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labelling*) dan jika domainnya gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labelling*) (Wallis, 2001).




Gambar 2.10 Contoh (a) pelabelan titik, (b) pelabelan sisi dan (c) pelabelan total

Jika terdapat pelabelan titik pada graf $G$, jumlah label dua titik yang terhubung pada suatu sisi disebut bobot sisi. Semua jumlah label dua titik tersebut mempunyai bobot sisi sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib (*edge magic vertex labelling*). Jika semua jumlah label dua titik mempunyai bobot sisi yang berbeda disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling*). Jika terdapat pelabelan total pada graf $G$, jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut bobot sisi. Jika semua bobot sisi bernilai sama pada setiap sisi maka disebut pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labelling*) sedangkan jika semua bobot sisi pada setiap sisi semuanya berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan $a$ suku pertama dan $d$ sebagai nilai bedanya maka disebut pelabelan total sisi anti ajaib (*edge* $(a, d)$*antimagic total labelling*) (Dafik dkk, 2008).

## 2.6 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf dibagi menjadi dua macam yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan sisi.

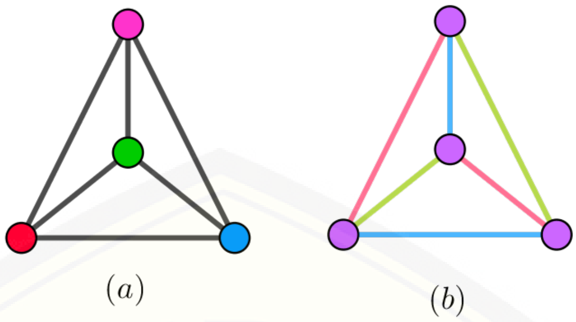
1. Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

   Pewarnaan titik dari graf $G$ adalah pemberian warna-warna ke titik-titik dari $G$ sedemikian hingga dua titik yang bertetangga memiliki warna yang tidak sama.

2. Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

   Dua sisi pada suatu graf dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung pada titik yang sama. Pewarnaan sisi untuk graf $G$ adalah pemberian warna untuk mewarnai semua sisi di $G$ sehingga setiap pasang sisi yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung mempunyai warna yang berbeda. Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf $G$, dinyatakan dengan $\chi(G)$. $\chi(G) = n$ berarti graf $G$ dapat diwarnai dengan $n$ warna dan $G$ tidak dapat diwarnai dengan $n - 1$ warna (Hartsfield dan Ringel, 1994).



Gambar 2.11 Contoh (a) pewarnaan titik dan (b) pewarnaan sisi

## 2.7 Pewarnaan Lokal Titik Total *Antimagic*

Hartsfields dan Ringel (1994) memperkenalkan konsep tentang pelabelan *antimagic* dari sebuah graf. Baca dkk (2003) telah mengembangkan konsep pelabelan *antimagic* menjadi *vertex antimagic total labeling* yang didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.1.** *Suatu pemetaan bijektif* $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, ..., v+e\}$ *disebut pelabelan total titik antimagic dari* $G = G(V, E)$ *jika bobot dari titik* $w_t(x), x \in V$ *berbeda (Baca dkk, 2003).*

Berdasarkan Definisi 2.1 pelabelan yang dilakukan yaitu melabeli semua titik dan sisi dengan angka 1 sampai dengan $|V|+|E|$ dan menghitung bobot titik dengan cara menjumlahkan label titik dan label sisi yang terhubung (*incident*) pada titik tersebut dan memiliki nilai yang berbeda. Arumugam dkk (2017) telah meneliti tentang *local antimagic vertex coloring* dan menemukan bilangan kromatik dari beberapa graf.

**Definisi 2.2.** *Graf* $G = (V, E)$ *adalah sebuah graf terhubung dengan* $|V| = n$ *dan* $|E| = m$ . *Suatu pemetaan bijektif* $f : E \rightarrow \{1, 2, .., m\}$ *disebut pelabelan lokal antimagic jika untuk setiap dua titik yang bertetangga* $u$ *dan* $v$*,* $w(u) \neq w(v)$ *dimana* $w(u) = \Sigma_{e \in E(u)} f(e)$ *dan* $E(u)$ *adalah kumpulan sisi-sisi yang terhubung* *pada titik $u$. Dengan demikian Setiap pelabelan lokal antimagic merupakan pewarnaan titik di $G$ dimana titik $v$ diberi warna $w(v)$.*

**Definisi 2.3.** *Bilangan kromatik lokal antimagic $\chi_{la}(G)$ didefinisikan sebagai warna minimum yang diambil dari semua warna graf $G$ yang diperoleh dari pelabelan lokal antimagic dari $G$ (Arumugam dkk, 2017).*

Berdasarkan pengertian diatas pewarnaan lokal titik total *antimagic* dapat didefinisikan sebagai suatu graf $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$ yang memiliki fungsi bijektif $f : (V \cup E) \rightarrow 1, 2, ..., m + n$ dan untuk setiap dua titik yang bertetangga $u$ dan $v, w_t(u) \neq w_t(v)$, dimana $w_t(u) = f(u) + \Sigma_{e \in E(u)} f(e)$ dan $E(u)$ adalah kumpulan sisi-sisi yang terhubung pada titik $u$. Dengan demikian setiap pelabelan total lokal *antimagic* merupakan pewarnaan titik di $G$ dimana titik $u$ diberi warna $w_t(u)$. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* $\chi_{lavt}(G)$ adalah minimum warna dari seluruh warna yang didapatkan pada pelabelan total lokal *antimagic* graf $G$.

## 2.8 Hasil Pewarnaan Titik Local Antimagic

Arumugam dkk (2017) telah mendapatkan beberapa hasil penelitian pewarnaan titik lokal *antimagic*. Adapun hasil pewarnaan titik lokal *antimagic* sebagai berikut

Tabel 2.1 Hasil Pewarnaan Titik Lokal *Antimagic* Terdahulu

| Graf | Hasil | Keterangan |
|---|---|---|
| Graf Pohon $(T_n)$;<br>dengan $l$ daun | $\chi_{la}(T) \geq l+1$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf Lintasan $(P_n)$ | $\chi_{la}(P_n) = 3$ | Arumugam dkk 2017 |
| Graf *Cycle* $(C_n)$ | $\chi_{la}(C_n) = 3$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf *Frindship* $(F_n)$ | $\chi_{la}(F_n) = 3$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf $F_n - e$ | $\chi_{la}(F_n - e) = 3$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf $(K_{m,n})$;<br>$m, n \geq 2$ | $\chi_{la}(K_{m,n}) = 2$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf *Complete Bipartite* $(K_{2,n})$;<br>$n$ genap dan $n \geq 4$ | $\chi_{la}(K_{2,n}) = 2$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf *Complete Bipartite* $(K_{2,n})$;<br>$n$ ganjil dan $n = 2$ | $\chi_{la}(K_{2,n}) = 3$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf Tangga $(L_n)$;<br>$n \geq 2$ | $\chi_{la}(L_n) = n+1$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf Roda $(W_n), n+1$;<br>$n \equiv 1, 3 \ mod\,(4)$ | $\chi_{la}(W_n) = 4$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf Roda $(W_n), n+1$;<br>$n \equiv 2 \ mod\,(4)$ | $\chi_{la}(W_n) = 3$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf Roda $(W_n), n+1$;<br>$n \equiv 0 \ mod\,(4)$ | $3 \leq \chi_{la}(W_n) \leq 5$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf $(G_n)$;<br>$n \leq 4$ dan $H = G + K_2, \ n$ genap | $\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$<br>$\leq \chi_{la}(G) + 1$ | Arumugam dkk, 2017 |
| Graf $(G_n)$;<br>$n \leq 4$ dan $H = G + K_2, \ n$ lainnya | $\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$<br>$\leq \chi_{la}(G) + 2$ | Arumugam dkk, 2017 |

# BAB 3. METODE PENELITIAN

## 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut

3.1.1. Metode Deduktif Aksiomatik

Metode Deduktif Aksiomatik digunakan dengan menetapkan pengertian dasar pewarnaan lokal titik total *antimagic*, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai lokal titik total *antimagic*. Teorema tersebut selanjutnya diturunkan untuk memperoleh pewarnaan label titik dan label sisi pada graf yang diteliti.

3.1.2. Metode Pedeteksian Pola

Metode pendeteksian pola digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi apabila graf yang diteliti diperumumkan, sehingga akan didapat perumusan pelabelan lokal titik total *antimagic*.

## 3.2 Jenis dan Data Penelitian

Jenis penelitian ini termasuk pada penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif adalah jenis peneitian yang bertujuan untuk menemukan hal baru yang ingin diketahui oleh peneliti, kemudian hasilnya dapat digunakan sebagai dasar penelitin selanjutnya. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah graf $W_n, V_n, W_n \bigodot W_4, V_n \bigodot K_4, W_n \bigodot K_4$

## 3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian ini digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis mengenai penelitian yang akan dilalkukan. Rancangan penelitian yang dimaksud adalah sebagai berikut.

a. Menentukan graf yang akan diteliti.

   Peneliti akan melakukan penelitian pada masing-masing graf yang telah menjadi data penelitian.

b. Menentukan pelabelan titik dan sisi pada graf.

   Setiap titik dan sisi dipetakan kedalam bilangan bulat positif. Setiap pelabelan sisi dan titik tidak boleh berulang, sehingga terdapat pemetaan titik dan sisi kedalam bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai $|V(G)| + |E(G)|$.

c. Menghitung bobot total pada setiap titik.
   Bobot setiap titik dihitung dengan menjumlahkan label titik dan label sisi yang terhubung pada titik tersebut.

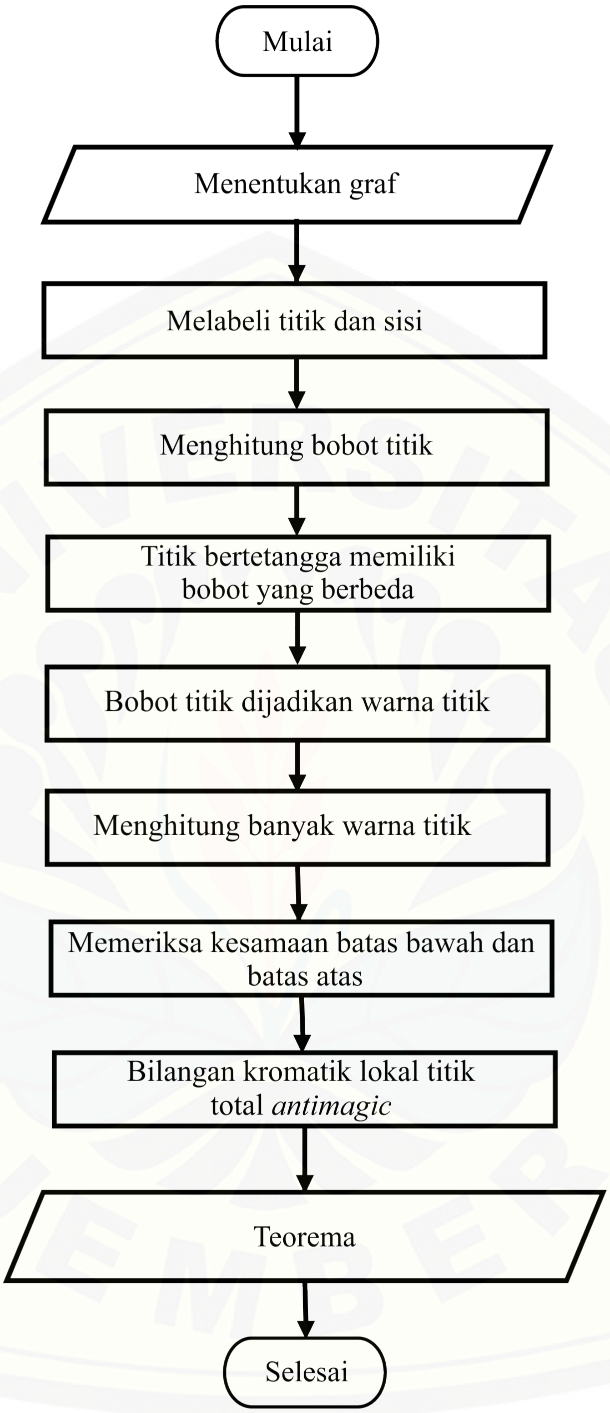
d. Memeriksa bobot titik.
   Bobot setiap titik telah didapatkan. Setiap titik yang bertetangga harus memiliki bobot yang berbeda.

e. Bobot setiap titik dianggap menjadi warna setiap titik. Misalkan $n$ adalah banyak warna pada graf tersebut.

f. Mencari minimun warna titik sebagai batas bawah pewarnaan lokal titik total *antimagic* misalkan $a$.

g. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic*.
   Memeriksa banyak warna bobot titik yaitu $n$. Jika $a = n$ maka $n$ adalah bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* yaitu $\chi_{lvat}(G) = n$. Jika $a \neq n$ maka $n$ adalah batas atas dari pewarnaan lokal titik total *antimagic* yaitu $\chi_{lvat}(G) \leq n$.

h. Memperoleh teorema.
   Teorema diperoleh berdasarkan poin g yaitu mendapatkan $\chi_{lvat}(G) = n$ atau $\chi_{lvat}(G) \leq n$ yang selanjutkan dilakukan pembuktian terhadap teorema yang didapat.
   Langkah-langkah diatas dapat dilihat pada gambar 3.1.




Gambar 3.1 Bagan Rancangan Penelitian

# BAB 5. PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf roda dan graf gunung api adalah $\chi_{lavt}(W_n) = 3$ untuk $n$ genap dan $4$ untuk $n$ ganjil, $\chi_{lavt}(V_n) = 3$. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf hasil operasi korona $W_n \bigodot W_4, V_n \bigodot K_4$ dan $W_n \bigodot K_4$ adalah $\chi_{lavt}(W_n \bigodot W_4) \leq 6$ untuk $n$ genap dan 7 untuk $n$ ganjil, $\chi_{lavt}(V_n \bigodot K_4) \leq 7$ dan $\chi_{lavt}(W_n \bigodot K_4) \leq 7$ untuk $n$ genap dan $8$ untuk $n$ ganjil.

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian mengenai pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada hasil operasi korona, maka peneliti memberi saran untuk mengembangkan graf dasar yang digunakan misal graf prisma, graf antiprisma dan lainnya atau menggunakan operasi graf lain misal join, *comb product* dan *cartesian*.

## DAFTAR PUSTAKA

Arumugam S, K. Premalatha, M. Baca dan A. Semanicova-Fenovcikova. 2017. *Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. Graphs and Combinnatorics* 33: 275-285.

Baca M, Bertault F, MacDougall J, Miller M, Simanjuntak R, and Slamin. 2003. *Vertex-Antimagic Total Labelings of Graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory* 23:6783.

Chantrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph Third Edition*. California. Chapman and Hall.

Chartrand, G and P. Zhang. 2009. *Chromatic Graph Theory*. New York: CRC Press.

Dafik. 2013. *Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Graph*. Jember: CSS.

Dafik, M. Mirka, J. Ryan, and M. Baca. 2008. *Antimagic labeling of union of stars. The Australasian Journal of Combinatorics* 42:35-44.

Figueroa-Conteno, R.M.,Ichisima, R.,Muntaner-Batle, F.A. 2002. *Magical Coronation of Graphs*. Australasian Journal of Combinatorics* 26, 199-208.

Gross, J. L and J. Yellen. 2003. *Handbook of Graph Theory*. New York: CRC Press.

Harrary, F. 1994. *Graph Theory*. Addison: Wesley.

Hartsfield, N and Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory*. Australia: Academic Press.

Lucas, John. 1990. *Introduction to Abstract Mathematics*. Oshkosh: Uuuuuiversity of Wisconsin.

Simanjuntak, R., dan K. Wijaya. 2013. *On Distance Antimagic Graphs*.

*Combinatial Mathematics Research Group*:7.

Wallis, W. D. 2001. *Magic graphs*. Boston: Birkhauser:80:2.