PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI $C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$

SKRIPSI

Oleh

Enik Nur Sa'adah

NIM 141810101036

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2018

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI $C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Enik Nur Sa'adah

NIM 141810101036

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2018

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. keluarga besar saya, Bapak Edy Santoso dan Ibu Anik Wahyu Triani, serta kedua Adikku Andi Syaifudin dan Zaheda Nurul Izzah yang telah mendukung, memberikan doa, kasih sayang, dan kepercayaan yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan disetiap masanya;
3. teman-teman pejuang graf dan para pecinta graf lain yang tergabung dalam CGANT yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga;
4. teman-teman seperjuangan EXTREME (angkatan 2014) yang selalu memberikan dukungan dan motivasi;
5. almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTO

"Dan Tuhan-mu berfirman: "Berdoalah kepada-Ku, niscaya akan Ku-perkenankan bagimu. Sesungguhnya orang-orang yang menyombongkan diri dari menyembah-Ku, akan masuk neraka Jahannam dalam keadaan hina dina.""
(QS. Al-Gafir:60)*)

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."
(QS. Al-Mujadalah:11)*)

---

* Departemen Agama Republik Indonesia. 2014. *Al-Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Enik Nur Sa'adah

NIM : 141810101036

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi $C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$"adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018
Yang menyatakan,

Enik Nur Sa'adah
NIM 141810101036

SKRIPSI

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI
$C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$

Oleh

Enik Nur Sa'adah
NIM 141810101036

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing Anggota	:	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi $C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$"telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si
NIP.19840801 200801 2 006	NIP.19861014 201404 1 001
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si	Kusbudiono, S.Si., M.Si
NIP.19740813 200003 2 004	NIP. 19770430 200501 1 001

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi $C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$; Enik Nur Sa'adah, 141810101036; 2018: 58 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Terdapat berbagai macam topik kajian dalam teori graf, diantaranya adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan elemen-elemen graf ke bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik dan sisi maka pelabelannya disebut dengan pelabelan total. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik maka pelabelannya disebut dengan pelabelan titik, dan jika domain pemetaannya adalah himpunan sisi maka pelabelannya disebut dengan pelabelan sisi.

Pewarnaan graf ada tiga macam, yaitu pewarnaan wilayah, pewarnaan sisi, dan pewarnaan titik. Pewarnaan wilayah pada graf G yaitu memberikan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf G yaitu memberi warna semua sisi graf G, dan setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan titik (*edge coloring*) adalah memberi warna pada semua titik graf G, dan setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Banyak topik yang mengkaji dalam lingkup pewarnaan, salah satunya yaitu pewarnaan lokal sisi *antimagic*. Pewarnaan lokal sisi *antimagic* dapat didefinsikan sebagai berikut, sebuah bijeksi f: $V(g) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., |\text{V(G)}|\}$ disebut pelabelan lokal sisi *antimagic* untuk dua sisi yang betetangga e_1 dan $e_2, w(e_1) \neq w(e_2)$, dimana $e = uv \in G, w(e) = f(u) + f(v)$. Sehingga, setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* merupakan pewarnaan sisi pada graf G jika setiap sisi e ditentukan warna $w(e)$. Banyak warna yang minimum untuk mewarnai pada pelabelan lokal sisi *antimagic* pada graf G disebut dengan bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* yang dapat dinotasikan dengan $\gamma_{lea}(G)$.

Penelitian ini mengenai pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf hasil operasi amalgamasi. Graf tersebut adalah graf amalgamasi graf siklus ($amal(C_3, v, n)$), amalgamasi graf buku segitiga ($amal(Bt_2, v, n)$), amalgamasi graf bipartit komplet

($amal(K_{2,3}, v, n)$), dan amalgamasi graf roda ($amal(W_3, v, n)$). Pada penelitian ini diperoleh bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* dari graf amalgamasi graf siklus ($amal(C_3, v, n)$), amalgamasi graf buku segitiga ($amal(Bt_2, v, n)$), amalgamasi graf bipartit komplet ($amal(K_{2,3}, v, n)$), dan amalgamasi graf roda ($amal(W_3, v, n)$) yaitu sesuai dengan derajat maksimum graf tersebut.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi $C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu bidang dalam ilmu matematika. Bidang ini digunakan untuk membantu memecahkan permasalahan yang sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan tersebut dimodelkan kedalam bahasa matematika, agar lebih mudah dimengerti dan dapat segera dicari solusinya. Pemodelan permasalahan dapat direpresentasikan kedalam bentuk graf. Graf tersebut merupakan gabungan dari sejumlah titik dan sisi, dimana sisi itu menghubungkan titik-titiknya.

Saat ini terdapat berbagai macam topik kajian dalam teori graf, diantaranya adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan elemen-elemen graf ke bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Jenis-jenis pelabelan graf berdasarkan domain pemetaannya yaitu pelabelan total, pelabelan sisi dan pelabelan titik, sedangkan pewarnaan graf terdiri dari 3 jenis yaitu pewarnaan wilayah, pewarnaan sisi dan pewarnaan titik. Pewarnaan graf tidak boleh ada warna sama pada titik, sisi atau wilayah yang berdekatan dan harus seminimal mungkin, yang disebut dengan bilangan kromatik. Banyak topik yang mengkaji dalam lingkup pewarnaan, salah satunya yaitu pewarnaan lokal sisi *antimagic*. Pewarnaan lokal sisi *antimagic* dapat didefinsikan sebagai pelabelan lokal sisi *antimagic* untuk dua sisi yang betetangga e_1 dan e_2, bobot e_1 tidak sama dengan bobot e_2, dimana bobot e didapat dari penjumlahan dari label titik yang bersisihan dengan sisi tersebut. Sehingga, setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* merupakan pewarnaan sisi pada graf G jika setiap sisi e ditentukan warna bobot e.

Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Arumugam *et al*. (2017) yaitu mengenai pewarnaan lokal titik *antimagic* pada graf pohon, graf lintasan, graf siklus, graf persahabatan, graf komplet, graf bipartit komplet, graf tangga, graf roda. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Agustin *et al.* (2017) mengenai pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf $P_n \rhd P_m$, graf $P_n \rhd C_m$, graf $C_n \rhd P_m$, graf $C_n \rhd C_m$, graf $P_n \rhd S_m$, graf $C_n \rhd S_m$, graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf persahabatan, graf bintang, graf tangga, graf roda, graf prisma, graf $C_n \odot mK_1$, dan $G \odot mK_1$.

Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, belum banyak dilakukan mengenai pewarnaan lokal sisi *antimagic*. Pada penelitian ini digunakan beberapa graf seperti graf siklus, graf buku segitiga, graf bipartit komplet, dan graf roda. Peneliti menggunakan operasi amalgamasi titik pada graf-graf tersebut. Berdasarkan uraian di atas belum ada penelitian mengenai pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf hasil operasi amalgamasi graf siklus, graf buku segitiga, graf bipartit komplet, dan graf roda, sehingga penilitian ini mengembangkan teori pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf hasil operasi amalgamasi. Oleh karena itu, dari hasil operasi tersebut akan diperoleh bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu "berapa bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* dari graf amalgamasi graf siklus ($amal(C_3, v, n)$), amalgamasi graf buku segitiga ($amal(Bt_2, v, n)$), amalgamasi graf bipartit komplet ($amal(K_{2,3}, v, n)$), dan amalgamasi graf roda ($amal(W_3, v, n)$)?"

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah "menentukan bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* dari graf amalgamasi graf siklus ($amal(C_3, v, n)$), amalgamasi graf buku segitiga ($amal(Bt_2, v, n)$), amalgamasi graf bipartit komplet ($amal(K_{2,3}, v, n)$), dan amalgamasi graf roda ($amal(W_3, v, n)$)".

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah :

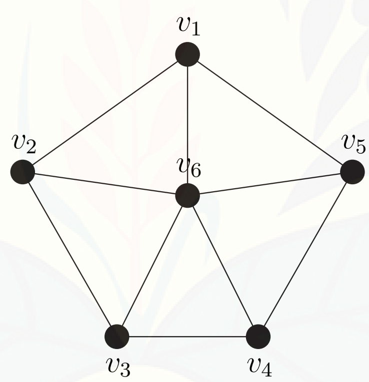
a. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic*.

b. Menambah motivasi pada peneliti lain untuk meneliti tentang penentuan bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* dari graf hasil operasi jenis lain.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

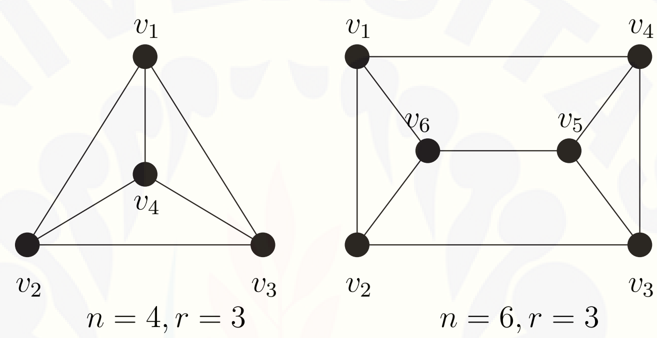
Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $\{v_1, v_2\}$ dari titik-titik $v_1, v_2 \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G (Slamin, 2009). Gambar 2.1 merupakan contoh graf G.



Gambar 2.1 Graf G

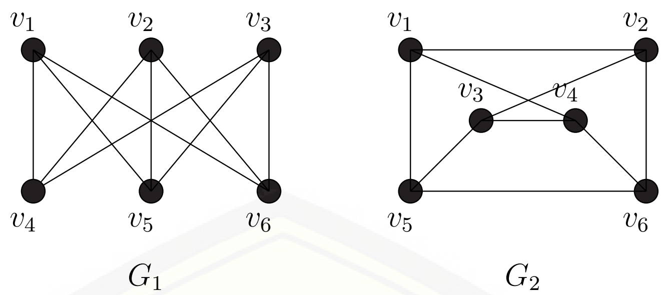
Order suatu graf G yang dinotasikan dengan $n(G)$, adalah banyaknya anggota himpunan titik pada graf G. *Size* pada suatu graf G yang dinotasikan dengan $e(G)$, adalah banyaknya anggota himpunan sisi pada graf G. Gambar 2.1 memiliki $|V(G)| = n(G) = 6$ dan $|E(G)| = e(G) = 10$. Suatu graf mempunyai titik u dan v dikatakan bertetangga *(adjacent)* yaitu ketika terdapat suatu sisi uv yang menghubungkan titik u dan v. Oleh karena itu, sisi uv dapat dikatakan bersisihan *(incident)* terhadap titik u dan

v. Derajat ($degree$) dari suatu titik v pada graf G yang dinotasikan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$, merupakan banyaknya sisi yang *incident* pada v. Derajat maksimum pada graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$, sedangkan derajat minimumnya dinotasikan dengan $\delta(G)$. Graf G pada gambar 2.1 memiliki $d(v_1) = 3, d(v_2) = 3, d(v_3) = 3, d(v_4) = 3, d(v_5) = 3$ dan $d(v_6) = 5$, sehingga memiliki $\Delta(G)$ =5 dan $\delta(G)$ =3. Jika $\delta(G) = \Delta(G) = k$, maka semua titik memiliki derajat yang sama dan graf G disebut graf teratur berderajat *k (k-regular graph)* (West, 2001). Gambar 2.2 merupakan contoh graf teratur berderajat 3.



Gambar 2.2 Graf Teratur Berderajat 3

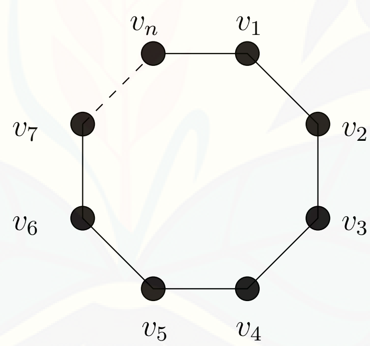
Dua graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah isomorfis jika terdapat fungsi bijektif f dari V_1 ke V_2 yang memiliki sifat a dan b bertetangga di G_1 jika dan hanya jika $f(a)$ dan $f(b)$ bertetangga di G_2, untuk setiap a dan b di V_1 (Rosen, 2012). Graf yang isomorfis dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf G_1 dan G_2 merupakan Graf yang Isomorfis

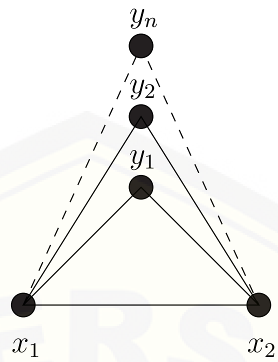
2.2 Jenis-jenis Graf dan Operasi Graf

Graf siklus *(cycle graph)* dapat dinotasikan dengan (C_n), untuk sebuah bilangan bulat $n \geq 3$. Graf siklus merupakan graf dengan *order* n dan *size* n yang memiliki titik-titik yaitu $v_1, v_2, ..., v_n$, dan sisi-sisinya adalah (v_1, v_n) dan (v_i, v_{i+1}) untuk i=1,2,...,n-1 (Chartrand, 2016). Gambar 2.4 adalah contoh graf siklus.



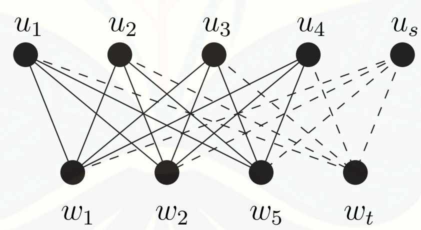
Gambar 2.4 Graf C_n

Graf buku segitiga (*triangular book graph*) adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan Bt_n dengan himpunan titik $V(Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2y_j; 1 \leq j \leq n\}$, sehingga $|V(Bt_n)| = n + 2$ dan $|E(Bt_n)| = 2n + 1$ dengan $n \geq 2$ (Dafik *et al.*, 2013). Gambar 2.5 merupakan contoh graf buku segitiga.



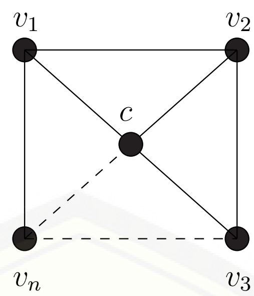
Gambar 2.5 Graf Bt_n

Sebuah graf G disebut graf bipartit komplet jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan U dan W, sehingga uw merupakan sisi pada graf G jika dan hanya jika $u \in U$ dan $w \in W$. Jika $\mid U \mid = s$ dan $\mid W \mid = t$, maka graf bipartit komplet memiliki *order*= $s + t$ dan *size*= st. Graf bipartit komplet dinotasikan dengan $K_{s,t}$ (atau $K_{t,s}$) (Chartrand, 2016). Gambar 2.6 adalah contoh graf bipartit komplet.



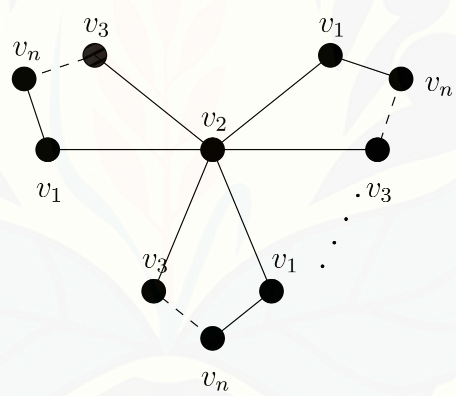
Gambar 2.6 Graf $K_{s,t}$

Graf roda *(wheels graph)* dapat dinotasikan dengan W_n, untuk $n \geq 3$, yaitu sebuah graf yang diperoleh dengan menambahkan sebuah titik pada graf lingkaran (C_n), untuk $n \geq 3$, dan menghubungkan titik baru tersebut pada setiap n titik pada C_n dengan sisi baru (Rosen, 2012). Gambar 2.7 adalah contoh graf roda.



Gambar 2.7 Graf W_n

Graf kincir angin belanda *(dutch windmill graph)* dapat dinotasikan dengan $D_n^{(m)}$. Graf ini dapat diperoleh dengan mengambil m salinan dari graf siklus C_n dengan sebuah titik yang sama. Graf $D_n^{(m)}$ memiliki $(n-1)m+1$ titik dan mn sisi (Kanna, 2016). Gambar 2.8 merupakan contoh graf $D_3^{(3)}$ dan graf $D_3^{(3)}$



Gambar 2.8 Graf $D_n^{(m)}$

Definisi 2.2.1. *Misal $G_i, i = 1, 2, ..., n$, merupakan graf berhingga yang memuat sebuah graf H sebagai subgraf, dan graf H dapat disebut sebagai konektor. Amalgamasi H dari graf $G_1, G_2, ..., G_n$ yang dinotasikan dengan amal(G_i, H) merupakan sebuah graf yang diperoleh dengan menggabungkan semua G_i berdasarkan konektornya. Jika semua graf G_i isomorfis, maka amalgamasi H dari graf G_i dapat dinotasikan amal(G, H, n). Lebih lanjut, jika $H = K_1$ maka operasi ini* *disebut dengan amalgamasi titik, dan jika $H = K_2$ maka operasi ini disebut dengan amalgamasi sisi*(Ashraf, 2017).

2.3 Fungsi

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Himpunan A disebut sebagai domain dari f dan himpunan B diartikan sebagai kodomain dari f. Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan dari a, dan a disebut prabayangan dari b. $Range$ (R_f) atau $f(A)$ merupakan himpunan semua bayangan dari elemen A (Bartle dan Sherbert, 2000). Berikut beberapa definisi dan teorema yang berkenaan dengan fungsi.

Definisi 2.3.1 Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah injektif jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$.

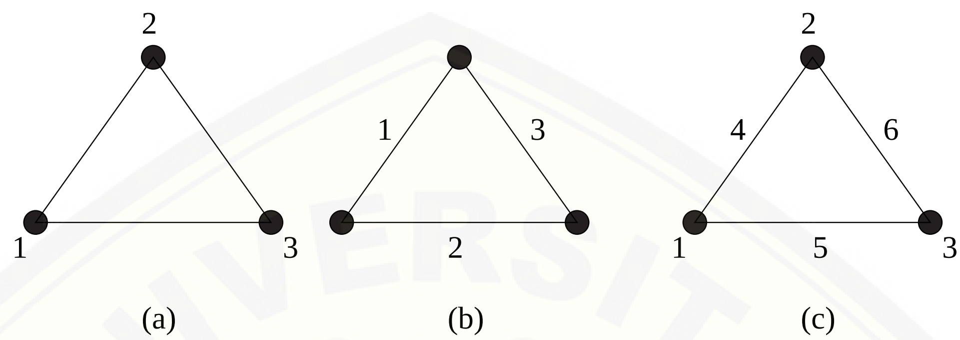
Definisi 2.3.2 Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah surjektif jika dan hanya jika $f(A) = B$, yang berarti range dari f adalah kodomain dari f.

Definisi 2.3.3 Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah bijektif, jika dan hanya jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif (Oberste-Vorth, 2012).

Teorema 2.3.1 *Misalkan domain dan kodomain dari suatu fungsi f adalah himpunan berhingga yang memiliki kardinalitas yang sama. Maka fungsi f injektif jika dan hanya jika fungsi f surjektif (Richmond, 2004).*

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan elemen-elemen graf ke bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik dan sisi maka pelabelannya disebut dengan pelabelan total. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik maka pelabelannya disebut dengan pelabelan titik, dan jika domain pemetaannya adalah himpunan sisi maka pelabelannya disebut dengan pelabelan sisi. Penjumlahan dari label sisi yang bersisihan (*incident*) pada suatu titik disebut bobot titik. Penjumlahan dua label titik yang melekat pada suatu sisi merupakan bobot sisi (Wallis, 2013). Gambar 2.9 merupakan contoh pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.



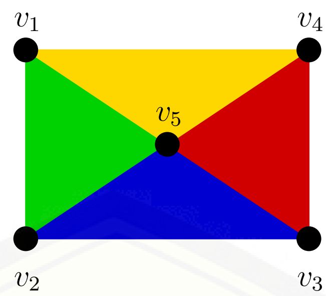
Gambar 2.9 (a)Pelabelan Titik, (b) Pelabelan Sisi, (c) Pelabelan Total

2.5 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf ada tiga macam, yaitu pewarnaan wilayah, pewarnaan sisi, dan pewarnaan titik (Munir, 2012).

2.5.1 Pewarnaan Wilayah

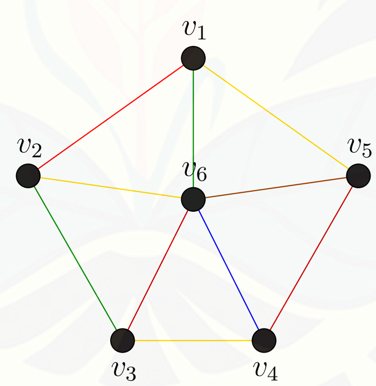
Pewarnaan wilayah pada graf G yaitu memberikan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan wilayah graf G disebut dengan bilangan kromatik wilayah (Gross dan Yellen, 2006). Gambar 2.10 merupaan contoh pewarnaan wilayah.



Gambar 2.10 Pewarnaan Wilayah

2.5.2 Pewarnaan Sisi

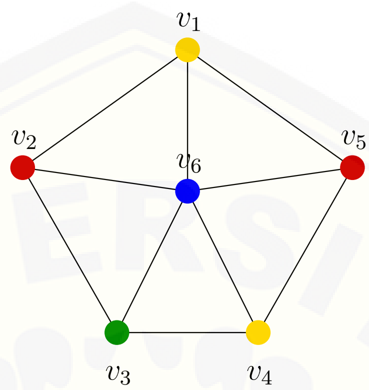
Pewarnaan sisi pada graf G yaitu memberi warna semua sisi graf G, dan setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik sisi dari suatu graf G adalah jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan sisi graf G (Hartsfield dan Ringel, 1994). Gambar 2.11 merupakan contoh pewarnaan sisi.



Gambar 2.11 Pewarnaan Sisi

2.5.3 Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik (*edge coloring*) adalah memberi warna pada semua titik graf G, dan setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Bilangan kromatik titik dari suatu graf G adalah jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan titik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1994). Gambar 2.12 merupaan contoh pewarnaan titik.

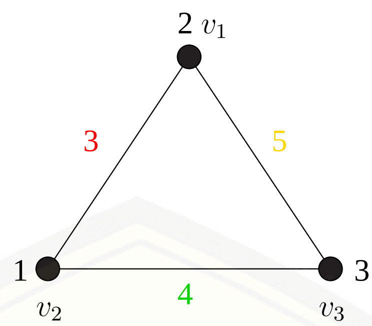


Gambar 2.12 Pewarnaan Titik

2.6 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic*

Pewarnaan lokal sisi *antimagic* dapat didefinsikan sebagai berikut, sebuah bijeksi f: $V(g) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., |\text{V(G)}|\}$ disebut pelabelan lokal sisi *antimagic* untuk dua sisi yang betetangga e_1 dan $e_2, w(e_1) \neq w(e_2)$, dimana $e = uv \in G, w(e) = f(u) + f(v)$. Sehingga, setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* merupakan pewarnaan sisi pada graf G jika setiap sisi e ditentukan warna $w(e)$. Banyak warna yang minimum untuk mewarnai pada pelabelan lokal sisi *antimagic* pada graf G disebut dengan bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* yang dapat dinotasikan dengan $\gamma_{lea}(G)$. Gambar 2.13 merupakan contoh pewarnaan lokal sisi *antimagic*

Teorema 2.6.1 *Jika* $\Delta(G)$ *adalah derajat maksimum dari graf* G*, maka akan diperoleh* $\gamma_{lea}(G) \geq \Delta(G)$ *(Agustin, et al, 2017).*



Gambar 2.13 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic*

2.7 Hasil-Hasil Pewarnaan Lokal *Antimagic*

Pada pelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan lokal *antimagic* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian terdahulu dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Hasil Pewarnaan Lokal *Antimagic* Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik Lokal *Antimagic*	Keterangan
Graf Pohon (T_n) dengan l daun $n \geq 2$	$\chi_{la}(L_n) = l + 1$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Lintasan (P_n) $n \geq 3$	$\chi_{la}(P_n) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Lingkaran (C_n) $n \geq 3$	$\chi_{la}(C_n) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Persahabatan (F_n) $n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf ($F_n - \{e\}$) $n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n - \{e\}) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Komplit (K_m, n) $m, n \geq 2$	$\chi_{la}(K_m, n) = 2$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Bipartit Komplit (K_2, n) $n \geq 4$	$\chi_{la}(K_m, n) = 2$ jika n genap $\chi_{la}(K_m, n) = 3$ jika n ganjil	Arumugam *et al*, 2017
Graf Tangga (L_n) $n \geq 2$	$\chi_{la}(L_n) = n + 1$	Arumugam *et al*, 2017

Graf	Bilangan Kromatik Lokal *Antimagic*	Keterangan
Graf Roda (W_n) $m, n \geq 4$	$\chi_{la}(W_n) = 4$ jika $n \equiv 1, 3(mod4)$ $\chi_{la}(W_n) = 3$ jika $n \equiv 2(mod4)$	Arumugam *et al*, 2017
Graf (G_n) $n \geq 4$dan$H + G + K_2$ n genap	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$ $\leq \chi_{la}(G) + 1$	Arumugam *et al*, 2017
Graf (G_n) $n \geq 4$dan$H + G + K_2$ n lainnya	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$ $\leq \chi_{la}(G) + 2$	Arumugam *et al*, 2017
Graf $P_n \triangleright P_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright P_m) = 4$	Agustin *et al*, 2017
Graf $P_n \triangleright C_m$ $n \geq 3$ m bilangan bulat positif	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright C_m) = 5$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \triangleright P_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright P_m) = 5$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \triangleright C_m$ $n \geq 3$ m bilangan bulat positif	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright C_m) = 6$	Agustin *et al*, 2017
Graf $P_n \triangleright S_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright S_m) = 2 + m$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \triangleright S_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright S_m) = 3 + m$	Agustin *et al*, 2017
Graf G	$\gamma_{lae}(G) \geq \Delta(G)$	Agustin *et al*, 2017
Graf Lintasan (P_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n) = 2$	Agustin *et al*, 2017
Graf Lingkaran (C_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n) = 3$	Agustin *et al*, 2017
Graf Persahabatan (F_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(F_n) = 2n + 1$	Agustin *et al*, 2017
Graf Tangga (L_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(L_n) = 3$	Agustin *et al*, 2017
Graf Bintang (S_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(S_n) = n$	Agustin *et al*, 2017
Graf Roda (W_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(W_n) = n + 2$	Agustin *et al*, 2017
Graf Lengkap (K_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} - 1$	Agustin *et al*, 2017
Graf Prisma (Pr_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(Pr_n) = 5$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \bigodot mK_1$	$\gamma_{lea}(C_n \bigodot mK_1) = m + 3$	Agustin *et al*, 2017

Graf	Bilangan Kromatik Lokal *Antimagic*	Keterangan
$n \geq 3, m \geq 1$		
Graf $G \bigodot mK_1$ $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(G \bigodot mK_1) = \gamma_{lae}(G) + m$	Agustin *et al*, 2017

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola *(pattern recognition)*. Metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Sedangkan metode pendeteksian pola yaitu metode penelitian yang menentukan pola pewarnaan lokal sisi *antimagic* sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Data Peneitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunkaan graf amalgamasi graf siklus ($amal(C_3, v, m)$), amalgamasi graf buku segitiga ($amal(Bt_2, v, m)$), amalgamasi graf kipas ($amal(F_3, v, m)$), amalgamasi graf bipartit komplet ($amal(K_{2,3}, v, m)$), dan amalgamasi graf roda ($amal(W_3, v, m)$).

3.3 Rancangan Peneitian

Adapun rancangan penelitian yang dilakukan terkait penelitian tentang pewarnaan lokal sisi antimagic pada beberapa graf hasil operasi amalgamasi pada graf khusus adalah sebagai berikut :

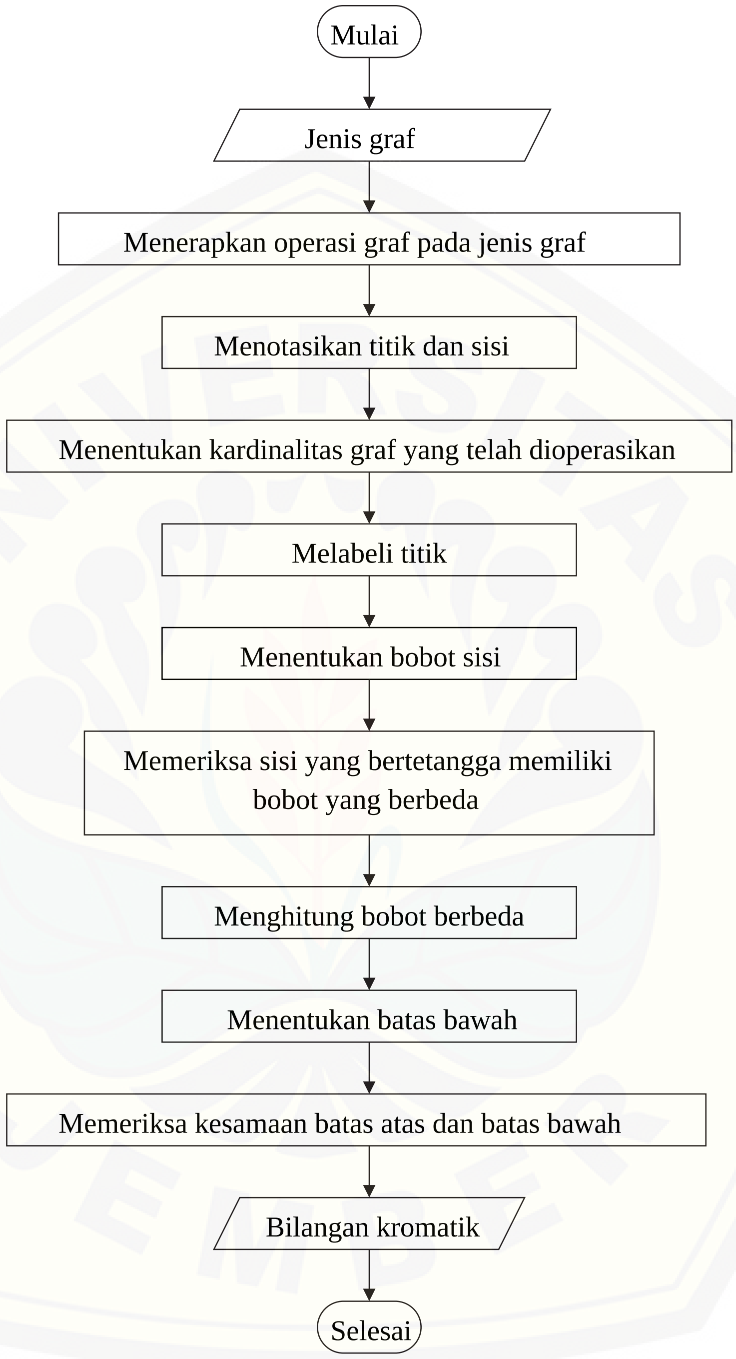
a. Menentukan jenis graf sebagai objek penelitian.

b. Menerapkan operasi graf pada jenis graf yang telah ditentukan.

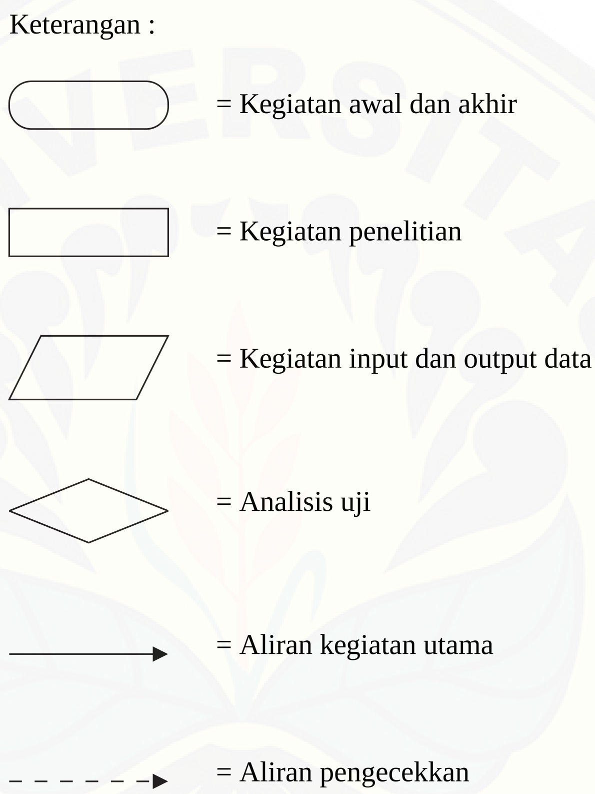
c. Menotasikan titik dan sisi pada jenis graf yang telah dioperasikan.

d. Menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada jenis graf yang telah dioperasikan.
e. Menentukan pelabelan titik pada graf tersebut.
f. Menentukan bobot sisi pada graf tersebut dengan menjumlahkan 2 label titik yang bertetangga.
g. Memeriksa setiap sisi yang bertetangga memiliki bobot sisi yang berbeda.
h. Menghitung banyaknya bobot berbeda.
i. Menentukan batas bawah.
j. Memeriksa kesamaan batas atas dan batas bawah.
k. Memperoleh bilangan kromatik.

Adapun skema dari rancangan penelitian ini dan keterangannya dapat dilihat pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2.



Gambar 3.1 Skema Rancangan Penelitian



Gambar 3.2 Keterangan Skema Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* dari graf amalgamasi graf siklus ($amal(C_3, v, n)$), amalgamasi graf buku segitiga ($amal(Bt_2, v, n)$), amalgamasi graf bipartit komplet ($amal(K_{2,3}, v, n)$), dan amalgamasi graf roda ($amal(W_3, v, n)$) adalah sesuai dengan derajat maksimum graf tersebut.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan sisi lokal *antimagic* pada graf hasil operasi amalgamasi graf $C_3, Bt_2, K_{2,3}, W_3$ maka peneliti memeberi saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada beberapa jenis graf dengan operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H., M. Hasan, Dafik, R. Alfarisi dan A. I. Kristiana. 2017. Local Edge Antimagic Coloring of Comb Product of Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Impressed.

Agustin, I. H., M. Hasan, Dafik, R. Alfarisi dan R. M. Prihandini. 2017. Local Edge Antimagic Coloring of Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Impressed.

Arumugam S, K. Premalatha, M. Baca dan A. Semanicova-Fenovcikova. 2017. Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph, *Graphs and Combinnatorics*, 33: 275-285.

Ashraf, Faraha, M. Baca, A. Semanicova-Fenovcikova, dan A. Shabbir. 2017. On H-irregularity Strengths of G-amalgamation of Graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 325-334.

Bartle, R. G dan D. R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis, Third Edition*. USA:Hamilton Printing Company.

Chartrand, G, L. Lesniak, dan P. Zhang. 2016. *Graphs and Digraphs, Sixth Edition*. California:Chapman & Hall.

Dafik, Slamin, F. R. Eka, dan L. Sya'diyah. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. *Proceeding of International Conference on Mathematics and Its Aplications (IICMA)*. 1-8.

Gross, J. L dan J. Yellen. 2006. *Graph Theory and Its Applications, Second Edition*. California:Chapman & Hall.

Kanna, M. R. Rajesh, P. Kumar dan R. Jagadeesh. 2016. Computation of Topological Indices of Dutch Windmill Graph, *Open Journal of Discrete Mathematics*, 74-81

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit, Edisi 3*. Bandung: Informatika.

Oberste-Vorth, R. W., Mouzakitis, A., dan Lawrence, B.A. 2012. *Bridge to Abstract Mathematics*. USA:MAA.

Richmond, B dan T. Richmond. 2004. *A Discrete Transition to Advanced Mathematics*. USA:American Mathematical Society.

Rosen, Kenneth H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Application, Seventh Edition*. New York:VAGA.

Slamin, M. Baca, Y. Lin, M. Miller, R. Simanjuntak. 2002. Edge-magic Total Labelings of Wheels, Fans and Friendship Graphs , *Bulletin of The ICA*, 35: 89-98

Slamin. 2009. *Desain Jaringan:Pendekatan Teori Graf.* Jember:Universitas Jember.

Wallis, W. D dan A. M. Marr. 2013. *Magic Graphs, Second Edition*. Boston:Birkhauser.

West, D. B. 2001. *Introduction to Graph Theory, Second Edition*. Urbana:University of Illinois.