



**SOLUSI EFEK TEROBOSAN PENGHALANG GANDA DENGAN  
PERSAMAAN SCHRÖDINGER DUA DIMENSI**

**SKRIPSI**

Oleh:

Ahmad Fauzan Amrullah

NIM. 130210102083

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER  
2017**



**SOLUSI EFEK TEROBOSAN PENGHALANG GANDA DENGAN  
PERSAMAAN SCHRÖDINGER DUA DIMENSI**

**SKRIPSI**

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh:

Ahmad Fauzan Amrullah

NIM. 130210102083

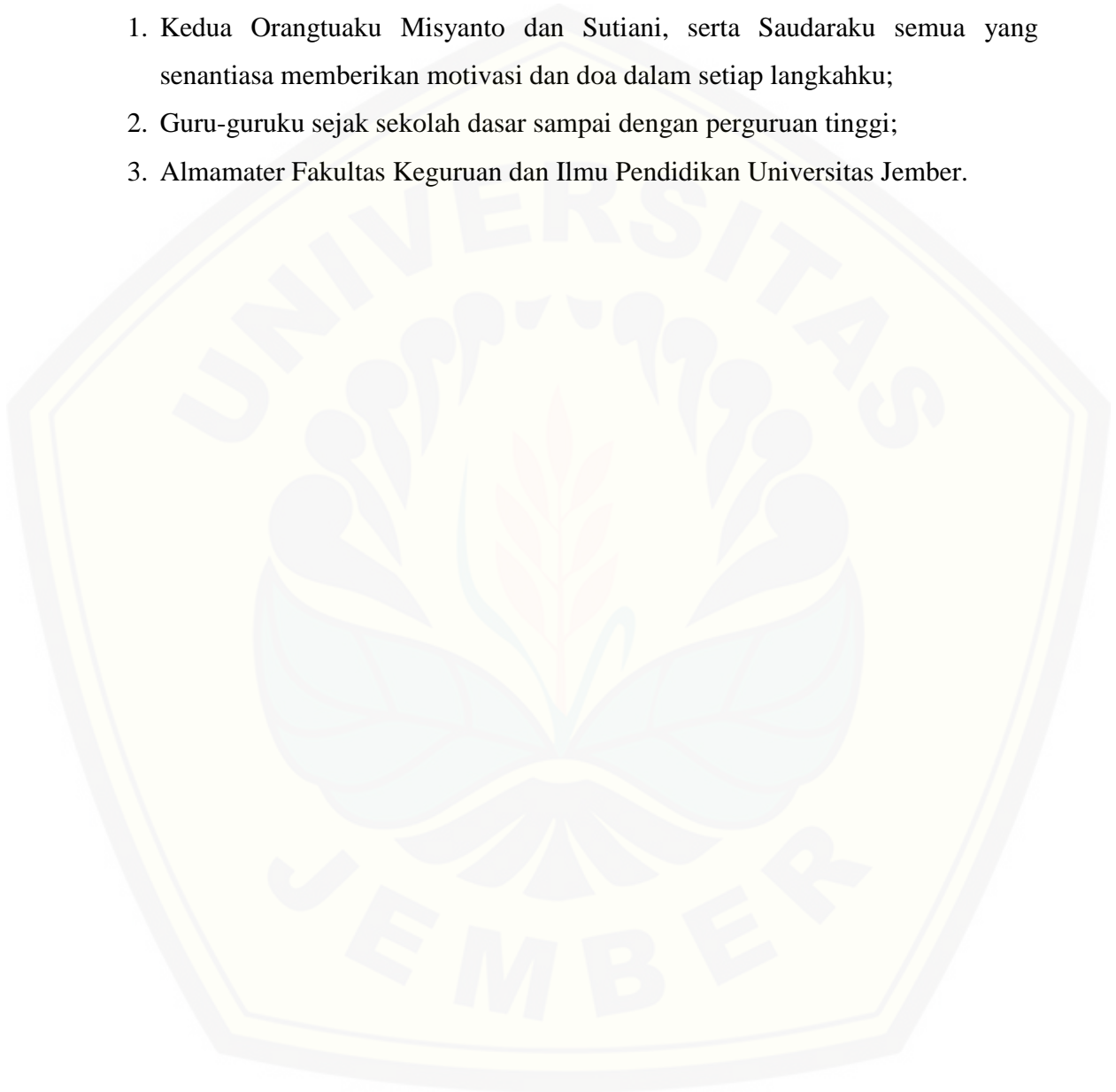
**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2017**

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua Orangtuaku Misyanto dan Sutiani, serta Saudaraku semua yang senantiasa memberikan motivasi dan doa dalam setiap langkahku;
2. Guru-guruku sejak sekolah dasar sampai dengan perguruan tinggi;
3. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.



### MOTO

Harapan mesti disertai amal. Jika tidak, ia hanyalah angan-angan; Harapan yang sesungguhnya ialah harapan yang memotivasi seseorang untuk bersungguh-sungguh dalam bekerja dan beramal. Biasanya, orang yang berharap sesuatu, dia akan mencarinya. Orang yang takut terhadap sesuatu, dia akan menghindarinya (Asy-Syarqawi, 2013:114 )



---

Syekh Abdullah asy-Syarqawi. 2013. *AL-HIKAM Ibnu Atha'illah al-iskandari*. Jakarta: Tuross Pustaka.

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ahmad Fauzan Amrullah

NIM : 130210102083

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul “Solusi Efek Terobosan Penghalang Ganda dengan Persamaan Schrödinger Dua Dimensi” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 15 Desember 2017

Yang menyatakan,

Ahmad Fauzan Amrullah

NIM 130210102083

**SKRIPSI**

**SOLUSI EFEK TEROBOSAN PENGHALANG GANDA DENGAN  
PERSAMAAN SCHRÖDINGER DUA DIMENSI**

Oleh:

Ahmad Fauzan Amrullah

NIM. 130210102083

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Sri Handono Budi Prastowo, M.Si

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul “Solusi Efek Terobosan Penghalang Ganda dengan Persamaan Schrödinger Dua Dimensi” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal : Jumat, 15 Desember 2017

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.

Drs. Sri Handono Budi Prastowo, M.Si.

NIP 19680710 199302 1 001

NIP 19580318 198503 1 004

Anggota I,

Anggota II,

Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si.

Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si.

NIP 19620401 198702 1 001

NIP 19641230 199302 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP 19680802 199303 1 004

## RINGKASAN

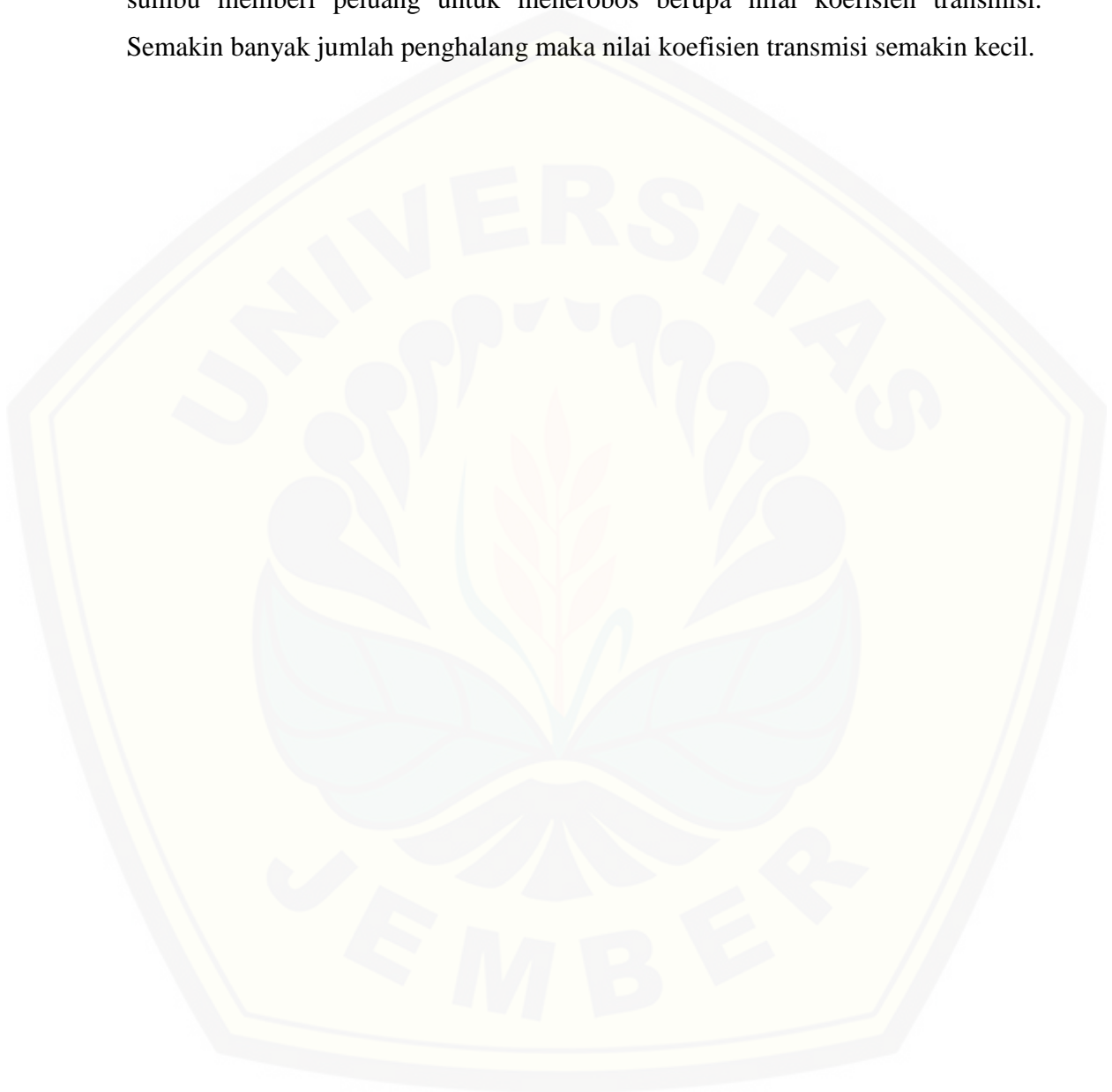
**Solusi Efek Terobosan Penghalang Ganda dengan Persamaan Schrödinger Dua Dimensi**; Ahmad Fauzan Amrullah, 130210102083; 2017: 40 halaman; Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Efek terobosan adalah salah satu aplikasi persamaan Schrödinger dengan nilai potensial yang konstan. Dioda merupakan aplikasi dari efek terobosan, prinsip dasar operasi pada efek terobosan dioda bergantung pada model efek terobosan penghalang ganda, pengoperasian sebagian besar penghantar bergantung pada lapisan semikonduktor yang sangat tipis yang terbentuk pada sambungan P/N seperti AlGaAs/GaAs. Sambungan GaAs-AlGaAs-GaAs-AlGaAs-GaAs adalah urutan bahan dioda, keberadaan persimpangan bahan berbeda adalah alasan terjadinya penghalang pada struktur tersebut, dan lebar penghalang sesuai dengan ketebalan AlGaAs. Penelitian ini menggunakan persamaan Schrödinger dua dimensi karena pada hakikatnya gelombang memiliki sifat refraksi, sehingga elektron juga mempunyai sifat refraksi. Akibatnya, sudut bias sangat berpengaruh terhadap arah gerak elektron dan akhirnya berpengaruh pada peluang elektron bertransmisi. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui koefisien transmisi pada penghalang tunggal dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrödinger dua dimensi, dan untuk mengetahui koefisien transmisi penghalang ganda dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrödinger dua dimensi. Dengan cara yang (1) mengubah lebar penghalang, (2) mengubah sudut datang elektron, dan (3) mengubah energi awal elektron.

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa (a) Koefisien transmisi pada penghalang tunggal dengan persamaan Schrödinger dua dimensi bergantung pada energi awal elektron, sudut datang elektron dan lebar penghalang, elektron memiliki dua peluang untuk menerobos yaitu pada sumbu x dan sumbu y, pada masing-masing sumbu memberi peluang untuk menerobos berupa nilai koefisien transmisi; (b) Koefisien transmisi total penghalang ganda



dengan persamaan schrödinger dua dimensi bergantung pada energi awal elektron, sudut datang elektron, lebar penghalang pertama dan kedua, elektron memiliki dua peluang untuk menerobos yaitu pada sumbu x dan sumbu y, pada masing-masing sumbu memberi peluang untuk menerobos berupa nilai koefisien transmisi. Semakin banyak jumlah penghalang maka nilai koefisien transmisi semakin kecil.



## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Solusi Efek Terobosan Penghalang Ganda dengan Persamaan Schrödinger Dua Dimensi”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Dafik, M.Sc. Ph.D., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes., selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Fisika dan Dosen Pembimbing Utama, Drs. Sri Handono Budi Prastowo, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota;
4. Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si., selaku Dosen Penguji Utama, serta Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si., selaku Dosen Penguji Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Rif'ati Dina Handayani, S. Pd., M. Si., dan Dr. Supeno, S. Pd., M. Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
6. Bapak Misyanto dan Ibu Sutiani Sekeluarga yang telah memberikan motivasi dan doa demi terselesaikannya skripsi ini;

Penulis menerima segala kritik dan saran yang bersifat membangun dari semua pihak demi kesempurnaan penulisan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2017

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	ii
HALAMAN MOTO .....	iii
HALAMAN PERNYATAAN .....	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN .....	v
HALAMAN PENGESAHAN .....	vi
RINGKASAN .....	vii
PRAKATA .....	ix
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR TABEL .....	xii
DAFTAR GAMBAR .....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN .....	xvii
<b>BAB 1. PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	4
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>5</b>
2.1 Dualisme Gelombang-Partikel .....	5
2.2 Persamaan Schrödinger .....	9
2.3 Efek Terobosan .....	10
2.4 Refraksi (Pembiasan) .....	14
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN .....</b>	<b>18</b>
3.1 Jenis, Waktu dan Tempat Penelitian .....	18
3.2 Definisi Operasional Variabel .....	18
3.3 Langkah Penelitian .....	19
3.4 Pengembangan Teori .....	21
3.5 Data Simulasi .....	22

<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	25
<b>4.1 Hasil</b> .....	25
4.1.1 Koefisien Transmisi pada Penghalang Tunggal .....	25
4.1.2 Koefisien Transmisi pada Penghalang Ganda .....	32
<b>4.2 Pembahasan</b> .....	36
4.1.1 Koefisien Transmisi pada Penghalang Tunggal .....	36
4.1.2 Koefisien Transmisi pada Penghalang Ganda .....	37
<b>BAB 5. PENUTUP</b> .....	39
<b>5.1 Kesimpulan</b> .....	39
<b>5.2 Saran</b> .....	39
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	41
<b>LAMPIRAN</b> .....	42

DAFTAR TABEL

	Halaman
3.1 Data koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan schrodinger satu dimensi dan dua dimensi dengan energi awal $E = 1,22 \times 10^{-1}(eV)$ , dan besar potensial $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ .....	22
3.2 Data koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan schrodinger satu dimensi dan dua dimensi dengan besar potensial $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ , lebar penghalang $L_1 = 4 \times 10^{-9}(m)$ . .....	23
3.3 Data koefisien transmisi penghalang ganda dengan $E = 1,22 \times 10^{-1}(eV)$ , $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ , dan $L_1 = 4 \times 10^{-9}(m)$ .....	23
4.1 Koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan Schrodinger dua dimensi.....	25
4.2 Perbandingan persamaan koefisien transmisi dua dimensi ( $T_{2D}$ ) dan satu dimensi ( $T_{1D}$ ).....	25
4.3 Data koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan Schrodinger satu dimensi dan dua dimensi dengan $E = 1,22 \times 10^{-1}(eV)$ , $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ , dan $\theta = 0^0$ . .....	26
4.4 Data koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan Schrodinger dua dimensi dengan $E = 1,22 \times 10^{-1}(eV)$ , dan $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ . .....	28
4.5 Perbandingan persamaan koefisien transmisi dua dimensi ( $T_{2D}$ ) dan satu dimensi ( $T_{1D}$ ). .....	30
4.6 Data koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan Schrodinger satu dimensi dan dua dimensi dengan besar potensial $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ , lebar penghalang $L = 4 \times 10^{-9}(m)$ dan sudut datang $\theta = 0^0$ .....	30
4.7 Koefisien transmisi pada penghalang ganda.....	32

- 4.8 Data koefisien transmisi penghalang ganda dengan menggunakan persamaan Schrodinger dua dimensi,  $E = 1,22 \times 10^{-1}(eV)$ ,  $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ , dan  $L_1 = 4 \times 10^{-9}(m)$ ..... 33



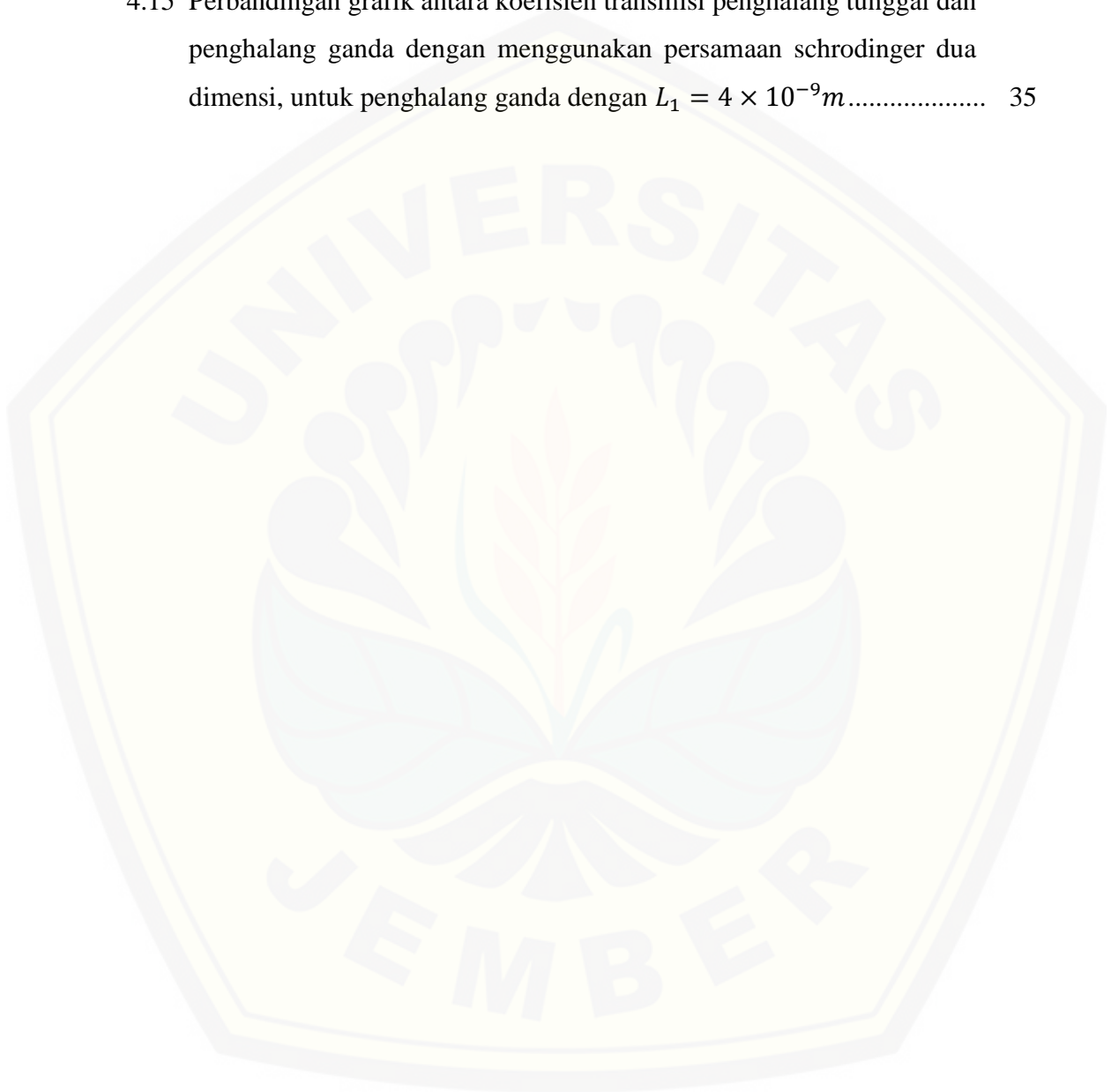
DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Bukti percobaan sifat gelombang partikel .....	9
2.2 Plot potensial $V(x)$ yang berbentuk tanggul kotak, lebar tanggul $a$ dan tinggi tanggul $V_0$ .....	10
2.3 Plot komponen real fungsi eigen bagi partikel di bawah pengaruh potensial tanggul kotak, energi total partikel kurang dari tinggi tanggul ( $E < V_0$ ) .....	11
2.4 Komponen real fungsi eigen partikel di bawah pengaruh potensial penghalang .....	13
2.5 Representasi cahaya, sudut datang ( $\theta_1$ ), pemantulan ( $\theta_1'$ ) dan refraksi ( $\theta_2$ ) .....	14
2.6 Refraksi sebuah gelombang bidang pada antarmuka gelombang udara-kaca, seperti yang digambarkan dengan prinsip Huygens .....	16
3.1 Bagan-bagan langkah penelitian .....	19
3.2 Efek terobosan penghalang ganda sistem 2 dimensi .....	21
3.3 Grafik tabel 3.1 .....	24
3.4 Grafik tabel 3.2 .....	24
3.5 Grafik tabel 3.3 .....	24
4.1 Grafik antara koefisien transmisi dan lebar penghalang tunggal untuk $L = 4 \times 10^{-9}m$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi. ....	26
4.2 Grafik antara koefisien transmisi dan lebar penghalang tunggal untuk $L = 8 \times 10^{-9}m$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi .....	27
4.3 Grafik antara koefisien transmisi dan lebar penghalang tunggal untuk $L = 1,2 \times 10^{-8}m$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi .....	27

4.4	Grafik antara koefisien transmisi dan lebar penghalang tunggal untuk $L = 1,6 \times 10^{-8}m$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi.....	27
4.5	Grafik antara koefisien transmisi dan lebar penghalang tunggal menggunakan persamaan Schrodinger dua dimensi, dengan sudut datang $0^0$ (hijau), $10^0$ (merah), $15^0$ (kuning), $20^0$ (hitam), $25^0$ (biru), dan $30^0$ (ungu) terhadap garis normal. ....	29
4.6	Grafik antara koefisien transmisi dan energi awal pada penghalang tunggal untuk $E = 1,22 \times 10^{-1}eV$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi.....	31
4.7	Grafik antara koefisien transmisi dan energi awal pada penghalang tunggal untuk $E = 1,32 \times 10^{-1}eV$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi.....	31
4.8	Grafik antara koefisien transmisi dan energi awal pada penghalang tunggal untuk $E = 1,42 \times 10^{-1}eV$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi.....	31
4.9	Grafik antara koefisien transmisi dan energi awal pada penghalang tunggal untuk $E = 1,52 \times 10^{-1}eV$ , dengan menggunakan persamaan Schrodinger (a) satu dimensi dan (b) dua dimensi.....	32
4.10	Grafik antara koefisien transmisi penghalang ganda dan lebar penghalang kedua dengan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi dengan $L_1 = 4 \times 10^{-9}m$ dan $L_2 = 0 m$ . ....	33
4.11	Grafik antara koefisien transmisi penghalang ganda dan lebar penghalang kedua dengan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi dengan $L_1 = 4 \times 10^{-9}m$ dan $L_2 = 4 \times 10^{-9}m$ .....	34
4.12	Grafik antara koefisien transmisi penghalang ganda dan lebar penghalang kedua dengan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi dengan $L_1 = 4 \times 10^{-9}m$ dan $L_2 = 8 \times 10^{-9}m$ .....	34
4.13	Grafik antara koefisien transmisi penghalang ganda dan lebar penghalang kedua dengan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi dengan $L_1 = 4 \times 10^{-9}m$ dan $L_2 = 1,2 \times 10^{-8}m$ .....	34

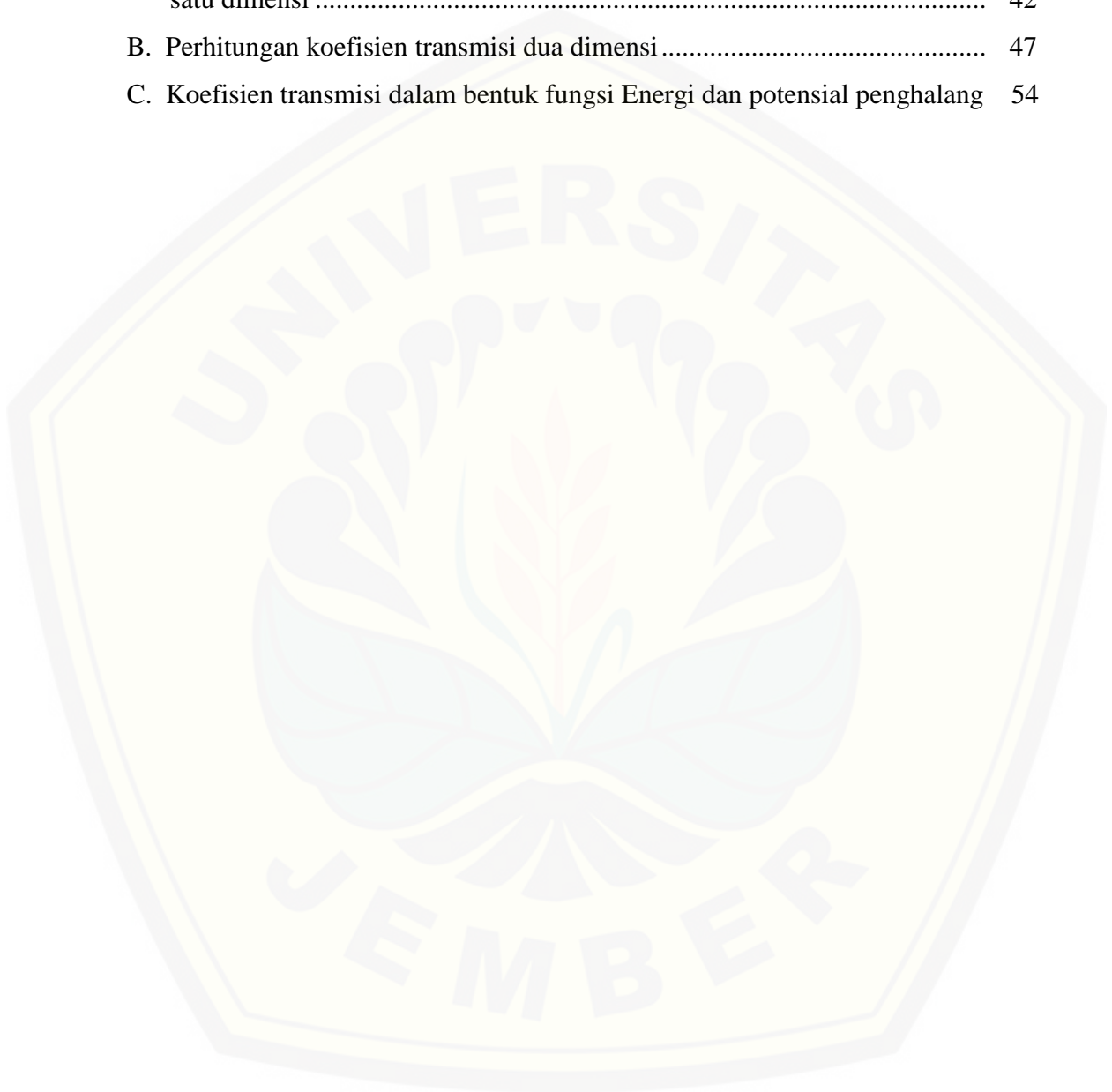


- 4.14 Grafik antara koefisien transmisi penghalang ganda dan lebar penghalang kedua dengan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi dengan  $L_1 = 4 \times 10^{-9}m$  dan  $L_2 = 1,6 \times 10^{-8}m$  ..... 35
- 4.15 Perbandingan grafik antara koefisien transmisi penghalang tunggal dan penghalang ganda dengan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi, untuk penghalang ganda dengan  $L_1 = 4 \times 10^{-9}m$ ..... 35



**DAFTAR LAMPIRAN**

	Halaman
A. Perhitungan koefisien transmisi dan refleksi dengan persamaan Schrödinger satu dimensi .....	42
B. Perhitungan koefisien transmisi dua dimensi .....	47
C. Koefisien transmisi dalam bentuk fungsi Energi dan potensial penghalang	54



## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Mekanika kuantum adalah cabang ilmu fisika yang dapat menjawab persoalan yang menyangkut inti atom, atom, molekul, dan materi dalam zat padat daripada mekanika klasik. Ilmu ini memberikan kerangka matematika untuk berbagai cabang fisika dan kimia. Mekanika kuantum dikembangkan melalui pendekatan-pendekatan oleh Erwin Schrödinger, Warner Heisenberg dan lain-lain pada tahun 1925-1926 di tempat yang terpisah. Menurut Beiser (1986:141), mekanika kuantum menghasilkan kuantitas yang teramati seperti peluang (kemungkinan) dalam mengamati dan memastikan dalam masalah atomik, misalnya jari-jari orbit elektron dalam keadaan dasar atom hidrogen selalu tepat sama dengan  $5,3 \times 10^{-11}m$ , mekanika kuantum dalam percobaannya menghasilkan harga yang hampir sama, tetapi sebagian besar memberikan peluang terbesar sama dengan  $5,3 \times 10^{-11}m$ .

Persamaan Schrödinger merupakan pondasi dalam sistem mekanika kuantum. Salah satu aplikasi persamaan Schrödinger untuk potensial konstan adalah efek terobosan. Partikel alpha merupakan salah satu jenis partikel radioaktif yang tersusun dari 2 proton dan 2 neutron, proses peluruhan alpha adalah contoh sukses dari aplikasi efek terobosan dalam mekanika kuantum. Efek terobosan mengizinkan partikel yang energinya lebih kecil melewati potensial penghalang dengan peluang transmisi.

Dioda juga termasuk aplikasi dari efek terobosan, prinsip dasar operasi pada efek terobosan dioda bergantung pada model efek terobosan penghalang ganda, pengoperasian sebagian besar penghantar bergantung pada lapisan semikonduktor yang sangat tipis yang terbentuk pada sambungan P/N seperti AlGaAs/GaAs. Pada lapisan ini, elektron mengalir sepanjang heterojunction (sambungan yang dibentuk antara dua material semikonduktor dengan *bandgap* berbeda yang mempunyai ketipisan kurang lebih  $100 \text{ \AA}$ ). Sambungan GaAs-AlGaAs-GaAs-AlGaAs-GaAs adalah urutan bahan dioda, keberadaan persimpangan bahan berbeda adalah alasan

terjadinya penghalang pada struktur tersebut, dan lebar penghalang sesuai dengan ketebalan AlGaAs. Kedua penghalang ini cukup tipis sehingga elektron bisa menerobos. Mungkin tampak bahwa karakteristik arus-tegangan dua penghalang secara seri tidak lebih menarik daripada penghalang tunggal. Hukum Ohm menyarankan dengan dua kali tegangan untuk mendapatkan arus yang sama. Itulah yang akan terjadi jika wilayah antara kedua penghalang itu adalah beberapa mikron, tetapi jika panjang penghalang hanya beberapa nanometer (merupakan fraksi dari panjang gelombang de broglie), karakteristik arus-tegangan secara kualitatif berbeda dari penghalang tunggal, yang menggarisbawahi sekali lagi adalah kegagalan hukum ohm pada skala mesoscopic (Datta, 1999:247-248).

Kajian mengenai efek terobosan untuk tingkatan mahasiswa strata I hanya terbatas pada kasus efek terobosan satu penghalang satu dimensi, sehingga perlu adanya penelitian pengembangan untuk efek terobosan penghalang ganda dua dimensi. Penelitian sebelumnya mengenai efek terobosan penghalang ganda yang telah dilakukan oleh peneliti antara lain: Wijaya dkk. (2014) dari hasil yang diperoleh ternyata dapat mengilustrasikan bahwa ada perbedaan antara mekanika klasik dan mekanika kuantum, bahwa menurut mekanika kuantum partikel teridentifikasi melewati dua buah potensial tersebut, sedangkan menurut mekanika klasik tidak mungkin partikel melewati potensial yang lebih tinggi daripada energinya. Koefisien transmisi pada potensial delta ganda antisimetri; Dutt dan Kar (2010) koefisien transmisi berubah karena ada dua penghalang, perubahan jarak penghalang, dan perubahan ketinggian salah satu penghalang. Adapun keunggulan dari penelitian yang akan dikembangkan dibanding dengan penelitian Wijaya, Dutt dan Kar adalah penelitian ini menggunakan persamaan schrödinger dua dimensi karena pada hakikatnya gelombang memiliki sifat refraksi (pembiasan), sehingga elektron juga mempunyai sifat refraksi (pembiasan). Sekarang, dengan mengasumsi medium sebelum dan sesudah penghalang adalah medium 1 dan penghalang sebagai medium 2, elektron yang datang dari medium kurang rapat ke medium yang lebih rapat menyebabkan elektron akan mendekati garis normal, dan elektron yang datang dari medium rapat ke medium kurang rapat menyebabkan elektron akan menjauhi garis normal, sehingga sudut bias sangat berpengaruh terhadap arah gerak

elektron. Oleh sebab itu, peneliti melakukan penelitian yang berjudul “**Solusi Efek terobosan penghalang ganda dengan persamaan schrödinger dua dimensi**”.

### **1.2 Rumusan Masalah**

Dari latar belakang diatas maka dapat dirumuskan beberapa permasalahan, antara lain:

- a. Bagaimana koefisien transmisi pada penghalang tunggal dengan persamaan schrödinger dua dimensi?
- b. Bagaimana koefisien transmisi pada penghalang ganda dengan persamaan schrödinger dua dimensi?

### **1.3 Batasan Masalah**

Agar penelitian lebih terfokus dan dapat menjawab permasalahan yang ada, maka penulis membatasi masalah sebagai berikut:

- a. Persamaan schrödinger yang digunakan dalam bentuk dua dimensi yaitu sumbu x dan sumbu y.
- b. Besar energi potensial pada kedua penghalang adalah sama, yaitu sebesar 164 meV (Harrison, 2005:93). Energi potensial (daerah pengosongan) pada penghalang pertama muncul ketika GaAs sebagai bahan semikonduktor tipe N disambung dengan AlGaAs sebagai bahan semikonduktor tipe P dan disambung lagi dengan GaAs sebagai bahan semikonduktor tipe N. Energi potensial (daerah pengosongan) pada penghalang kedua muncul ketika GaAs sebagai bahan semikonduktor tipe N disambung dengan AlGaAs sebagai bahan semikonduktor tipe P dan disambung lagi dengan GaAs sebagai bahan semikonduktor tipe N. Asumsi AlGaAs sangat tipis dan urutan bahan sebagai berikut; GaAs-AlGaAs-GaAs-AlGaAs-GaAs.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Mengkaji koefisien transmisi pada penghalang tunggal dengan persamaan schrödinger dua dimensi.
- b. Mengkaji koefisien transmisi pada penghalang ganda dengan persamaan schrödinger dua dimensi.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Bagi peneliti, dapat menerapkan teori yang sudah ada ke dalam permasalahan yang sedikit lebih kompleks.
- b. Bagi pembaca, dapat dijadikan sebagai bahan bantuan ajar kuantum dan referensi rujukan serta dijadikan sebagai bahan pijakan dalam melaksanakan penelitian untuk efek terobosan dengan persamaan schrödinger tiga dimensi.
- c. Bagi siswa SMK, dapat dijadikan sebagai sumber referensi tambahan khususnya pada materi dioda.
- d. Bagi lembaga, dapat memberikan sumbangan penelitian dan bahan referensi.

## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Dualisme Gelombang-Partikel

Gelombang dan partikel merupakan dua aspek dalam fisika yang secara mendasar memiliki sifat yang berbeda. Pandangan mekanika kuantum bahwa cahaya merambat sebagai sederatan paket energi foton (sekumpulan partikel), bertentangan dengan teori gelombang cahaya (mekanika klasik) yang menjelaskan bahwa cahaya bersifat sebagai gelombang dengan cara difraksi dan interferensi. Einstein pada tahun 1905 mengusulkan bahwa cahaya bergerak melalui ruang dalam bentuk foton, menimbulkan rasa takpercaya pada rekan-rekannya. Usulan Einstein dapat diterima 18 tahun kemudian setelah Compton membuktikan dengan percobaannya yaitu efek Compton, bahwa cahaya dapat menghamburkan elektron.

Menurut teori gelombang cahaya (mekanika klasik), energi yang dibawa oleh suatu gelombang tersebar merata di seluruh pola gelombang, seperti riak air menyebar pada permukaan air jika menjatuhkan batu ke permukaan air. Sebaliknya, menurut mekanika kuantum yaitu energi gelombang tidak tersebar merata pada pola gelombang melainkan terpaket-paket yang disebut foton (sekumpulan partikel). Yang mengherankan ialah mekanika kuantum memperlakukan sifat partikel sebagai sifat gelombang, nilai energi foton (sekumpulan partikel) sebanding dengan frekuensi cahaya padahal itu sepenuhnya adalah konsep cahaya sebagai gelombang dalam mekanika klasik.

Teori mekanika kuantum sepenuhnya berhasil menerangkan efek fotolistrik. Teori ini meramalkan secara tepat bahwa energi maksimum fotoelektron harus bergantung pada frekuensi cahaya datang dan tidak bergantung pada intensitas, serta teori ini dapat menerangkan mengapa cahaya yang sangat lemah dapat menghasilkan emisi fotoelektron yang berlawanan dengan teori gelombang (mekanika klasik). Teori gelombang tidak dapat memberi alasan mengapa harus ada frekuensi ambang, jika frekuensi cahaya yang digunakan kurang dari frekuensi ambang maka tidak terdapat fotoelektron yang teramati, tidak peduli sekuat apapun intensitas cahayanya.

Supaya lebih mengerti kaitannya, tinjau gelombang elektromagnetik dengan kecepatan  $c$  yang jatuh pada sebuah layar. Besar intensitas dari gelombang pada layar ialah:

$$I = \epsilon_0 c \bar{E}^2 \text{ (Gambaran gelombang)} \quad (2.1)$$

dengan  $\bar{E}^2$  menyatakan rata-rata kuadrat besaran sesaat dari gelombang medan listrik dalam satu siklus. Dinyatakan dalam model foton dari gelombang elektromagnetik yang sama, energinya ditransport oleh  $N$  foton tiap detik tiap satuan luas. Tiap foton berenergi  $h\nu$ , intensitas pada layar ialah:

$$I = N h \nu \text{ (Gambaran foton)} \quad (2.2)$$

Kedua gambaran tersebut harus memberikan harga  $I$  yang sama, sehingga laju kedatangan foton menjadi

$$N = \frac{\epsilon_0 c}{h \nu} \bar{E}^2 \quad (2.3)$$

Jika  $N$  cukup besar, layar akan mendapatkan distribusi cahaya yang kontinu bersesuaian dengan pola distribusi  $\bar{E}^2$ , dari hal tersebut tidak ada alasan untuk menyalahkan teori gelombang cahaya (mekanika klasik). Jika  $N$  sangat kecil sedemikian kecilnya sehingga satu foton saja pada tiap saat yang sampai pada layar, layar mendapatkan pola yang tak tentu yang menunjukkan bahwa cahaya adalah gejala kuantum, dan kemungkinan menemukan foton pada tempat tertentu bergantung dari harga  $\bar{E}^2$  di tempat itu.

Penalaran seperti diatas berlaku juga untuk eksperimen difraksi celah ganda dengan memakai berkas cahaya yang sedemikian lemah, sehingga hanya satu foton tiap saat yang terdapat dalam peralatan itu. Bagaimanakah pola difraksi timbul bila sebuah foton hanya bisa melewati satu celah? Bagaimanakah sebuah foton dapat berinterferensi dengan dirinya? Kelihatannya terdapat pertentangan antara konsep gelombang yang menyebar dalam ruang dengan konsep foton yang terpaket-paket dalam daerah yang sangat kecil. Dapat disimpulkan pada tiap kejadian yang khusus, cahaya dapat memperlihatkan sifat gelombang atau sifat partikel, tidak pernah terjadi keduanya sekaligus. Cahaya berlaku sebagai gelombang ketika melalui celah-celah, dan cahaya berlaku sebagai partikel ketika tiba dilayar. Jadi,



cahaya memiliki sifat gelombang dan sifat partikel sekaligus tersebut dikenal sebagai dualisme gelombang-partikel (Beiser, 1986:47-48).

Dualisme gelombang-partikel ternyata tidak hanya dimiliki oleh cahaya saja, tetapi juga dimiliki oleh partikel. Sebagaimana dihipotesiskan oleh De Broglie bahwa dalam skala mikroskopis, setiap partikel yang memiliki momentum  $p$  dapat diinterpretasikan dalam bentuk gelombang yang memiliki panjang gelombang  $\lambda$  yang berhubungan dengan momentum  $p$  menurut persamaan 2.4

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.4)$$

dengan  $h$  merupakan konstanta Planck yang nilainya  $6,63 \times 10^{-34}$  Js, dan  $p = mv$  adalah momentum partikel (Krane, 1992:126).

Bukti percobaan tentang sifat gelombang dari partikel, dalam hal ini elektron, dilakukan oleh Davisson dan Germer yang menyelidiki pemantulan berkas elektron dari permukaan kristal nikel. Dari pengamatan percobaan Davisson-Germer didapatkan pola interferensi konstruktif dan destruktif pada posisi sudut tertentu. Adapun skema peralatan yang digunakan oleh Davisson-Germer seperti pada gambar 2.1a. Dalam percobaan ini, seberkas elektron dari suatu kawat pijar panas dipercepat melalui suatu beda potensial  $V$ . Setelah melewati suatu celah kecil, berkas elektron ini menumbuk kristal nikel tunggal. Elektronnya lalu dihamburkan ke segala arah oleh atom kristal, beberapa menumbuk suatu detektor, yang dapat digerakkan ke sebarang sudut  $\phi$  relatif terhadap arah berkas datang, yang mengukur intensitas berkas elektron yang dihamburkan pada sudut itu. Gambar 2.1b adalah hasil percobaan Davisson-Germer, interferensi maksimum menyebabkan intensitas berkas pantul mencapai maksimum pada sudut  $\phi = 50^\circ$  untuk  $V = 54$  V. Jarak antar atom  $a$  berhubungan dengan jarak  $d$  (jarak antara bidang-bidang atom) menurut persamaan:

$$d = a \sin \frac{\phi}{2} \quad (2.5)$$

Dari percobaan diketahui  $a = 0,215$  nm, maka didapatkan  $d = 0,0909$  nm. Berkas yang terpantul dengan intensitas maksimum akan teramati pada sudut  $\phi$  apabila memenuhi syarat *Bragg*:

$$\lambda = 2d \sin \theta \quad (2.6)$$

Dan didapatkan hasil:

$$\lambda = 0,165 \text{ nm.}$$

Berikut membandingkan hasil ini dengan yang diperkirakan oleh teori De Broglie. Sebuah elektron yang dipercepat melalui suatu beda potensial  $54 \text{ V}$  memiliki energi kinetik  $54 \text{ eV}$ , dan momentumnya adalah

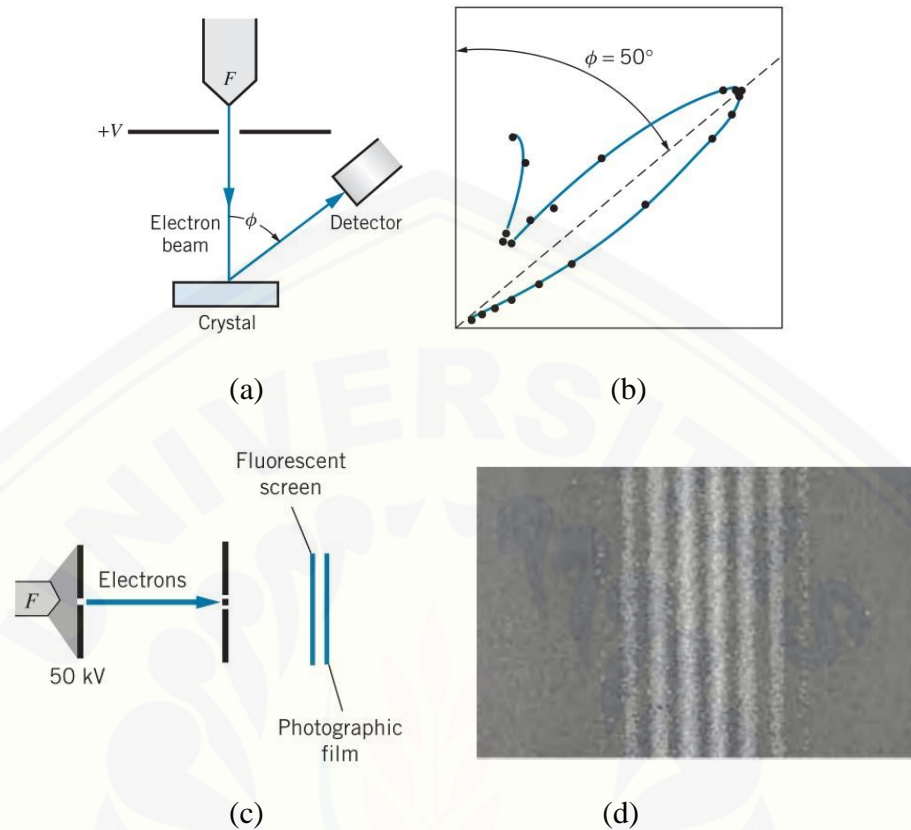
$$p = \sqrt{2mK} = \frac{1}{c}\sqrt{2mc^2K} = \frac{1}{c}(7430 \text{ eV})$$

Panjang gelombang De Broglie adalah  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc}$ . Dengan menggunakan  $hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$ , diperoleh

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{7430 \text{ eV}} = 0,167 \text{ nm}$$

Hasil ini luar biasa sesuai dengan yang didapati dari difraksi maksimum diatas, yang memberikan bukti kuat bagi kebenaran De Broglie (Krane, 2012:105-106).

Percobaan lain dilakukan oleh Clauss Jonsson, adapun skema peralatan yang digunakan seperti pada gambar 2.1c. Dalam percobaan ini, suatu berkas elektron dipercepat melalui suatu tegangan elektrik  $50.000 \text{ V}$  dan kemudian melewatkannya melalui dua celah berjarak  $2,0 \times 10^{-6} \text{ m}$  dan lebar masing-masing celah  $0,5 \times 10^{-6} \text{ m}$ . Elektron yang melewati dua celah tersebut kemudian menumbuk kaca pendar yang ada dibelakangnya. Pola interferensi dua-celah yang dipotret Jonsson diperlihatkan pada gambar 2.1d. Percobaan Clauss Jonsson menghasilkan pola gerap terang pada kaca pendar. Kedua percobaan tersebut menandakan adanya perilaku gelombang dari partikel sebagaimana yang dihipotesiskan oleh De Broglie.



Gambar 2.1 Bukti Percobaan Sifat Gelombang Partikel (a) Skema Percobaan Davisson-Germer; (b) Grafik Intensitas Pantulan terhadap Sudut Detektor; (c) Skema percobaan Clauss Jonsson; (d) Hasil Percobaan Clauss Jonsson  
(Krane, 2012:107-108)

## 2.2 Persamaan Schrödinger

Persamaan gelombang dapat dihasilkan dari persamaan differensial yang dikenal sebagai persamaan Schrödinger dan memenuhi beberapa kriteria berikut (i) mematuhi hukum kekekalan energi; (ii) taat azas hipotesis deBroglie; (iii) persamaan yang dihasilkan harus bernilai tunggal dan linear. Dari ketiga kriteria tersebut dapat dibentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad (2.7)$$

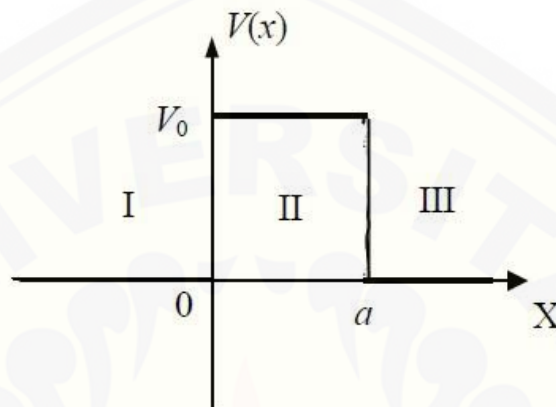
(Krane, 1992:173)

Persamaan 2.7 merupakan persamaan Schrödinger satu dimensi tak bergantung waktu yang dapat dikembangkan menjadi tiga dimensi tak bergantung waktu seperti pada persamaan 2.8

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0 \quad (2.8)$$

(Beiser, 2003:174)

### 2.3 Efek terobosan



Gambar 2.2 Plot potensial  $V(x)$  yang berbentuk tanggul kotak, lebar tanggul  $a$  dan tinggi tanggul  $V_0$

persamaan Schrödinger bebas waktu untuk  $E < V_0$  di daerah I, II, dan III adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}; & x < 0 \\ \psi_2(x) &= B_1 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}; & 0 < x < a \\ \psi_3(x) &= C_1 e^{ikx}; & x > a \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dengan  $k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  dan  $\alpha \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$  (2.10)

Selanjutnya, dengan menerapkan syarat kontinuitas  $\psi(x)$  dan  $\frac{d\psi(x)}{dx}$  di  $x = 0$  diperoleh

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \quad (2.11a)$$

$$ik(A_1 - A_2) = \alpha(B_1 - B_2) \quad (2.11b)$$

Dan di  $x = a$  diperoleh

$$B_1 e^{\alpha a} + B_2 e^{-\alpha a} = C_1 e^{ika} \quad (2.12a)$$

$$\alpha(B_1 e^{\alpha a} - B_2 e^{-\alpha a}) = ikC_1 e^{ika} \quad (2.12b)$$

Dari keempat Persamaan (2.11a) sampai (2.12b) di atas diperoleh hubungan

$$A_1 = C_1 \left( \cosh \alpha a - i \frac{k^2 - \alpha^2}{2k\alpha} \sinh \alpha a \right) e^{ika} \quad (2.13a)$$

$$A_2 = C_1 \left( i \frac{\alpha^2 + k^2}{2k\alpha} \sinh \alpha a \right) e^{ika} \quad (2.13b)$$

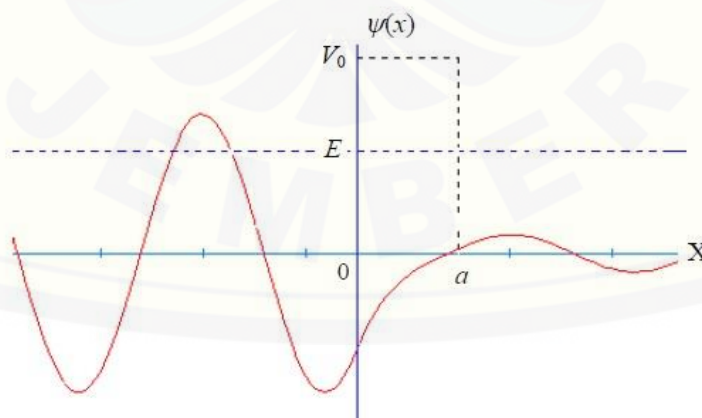
$$B_1 = C_1 \frac{\alpha + ik}{2\alpha} e^{ika} e^{-\alpha a} \quad (2.13c)$$

$$B_2 = C_1 e^{\alpha a} \left( 1 - \frac{\alpha - ik}{2\alpha} \right) e^{ika} \quad (2.13d)$$

Persamaan (2.13) memberikan batasan untuk nilai A sampai C. Pada persamaan itu telah ditunjukkan bahwa semua tetapan telah dinyatakan dalam  $C_1$ . Penyelesaian umum (Persamaan 2.9) menjadi penyelesaian khusus sebagai berikut.

$$\psi(x) = \begin{cases} C_1 \left( \frac{A_1}{C_1} e^{ikx} + \frac{A_2}{C_1} e^{-ikx} \right); & x \leq 0 \\ C_1 \left( \frac{B_1}{C_1} e^{\alpha x} + \frac{B_2}{C_1} e^{-\alpha x} \right); & 0 \leq x \leq a \\ C_1 e^{ikx}; & x \geq a \end{cases} \quad (2.14)$$

Dengan  $A_1/C_1$ ,  $A_2/C_1$ ,  $B_1/C_1$ , dan  $B_2/C_1$  berturut-turut mengikuti Persamaan 2.13a, 2.13b, 2.13c, dan 2.13d. Gambar 2.2 berikut menyajikan plot komponen real fungsi eigen, Persamaan (2.14), tersebut.



Gambar 2.3 Plot komponen real fungsi eigen bagi partikel di bawah pengaruh potensial tanggul kotak, energi total partikel kurang dari tinggi tanggul ( $E < V_0$ )

Berikutnya menghitung besarnya koefisien refleksi dan transmisi partikel. Dari Persamaan (2.13a) dan (2.13b) diperoleh koefisien refleksi sebesar:

$$R = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} = \frac{(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a}{4k^2 \alpha^2 + (k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a} \quad (2.15)$$

dan koefisien transmisi sebesar:

$$T = \frac{|C_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{4k^2 \alpha^2}{4k^2 \alpha^2 + (k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a} \quad (2.16)$$

Persamaan ini menunjukkan adanya peluang bagi partikel untuk sampai di daerah III melalui daerah II, suatu daerah yang secara klasik tidak mungkin dilewati partikel. Gejala suksesnya partikel menembus daerah yang secara klasik terlarang ini disebut efek terobosan atau *tunneling effect*.

Persamaan (2.16) menunjukkan bahwa besarnya koefisien transmisi bergantung secara hiperbolis terhadap lebar penghalang. Untuk memudahkan menafsirkan arti fisik persamaan (2.16) tersebut, perhatikan kasus dimana nilai  $\alpha$  sangat besar. Dalam kasus ini, nilai  $\sinh \alpha a$  akan bernilai sangat besar sehingga sumbangan suku pertama pada penyebut persamaan tersebut dapat diabaikan. Selain itu, pada limit ini nilai  $\sinh \alpha a \equiv \frac{1}{2}(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) \approx \frac{1}{2}e^{\alpha a}$  dan  $k^2 - \alpha^2 \approx \alpha^2$ . Dengan demikian pada kasus ini koefisien transmisinya sebesar:

$$T \approx \frac{16k^2}{\alpha^2} e^{-2\alpha a} = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}} \quad (2.17)$$

Ruas terakhir pada persamaan (2.17) diperoleh dengan mensubstitusi nilai  $k$  dan  $\alpha$  sebagaimana didefinisikan pada persamaan (2.10). Persamaan (2.17) menunjukkan bahwa nilai koefisien transmisi berkurang secara eksponensial terhadap bertambahnya lebar penghalang.

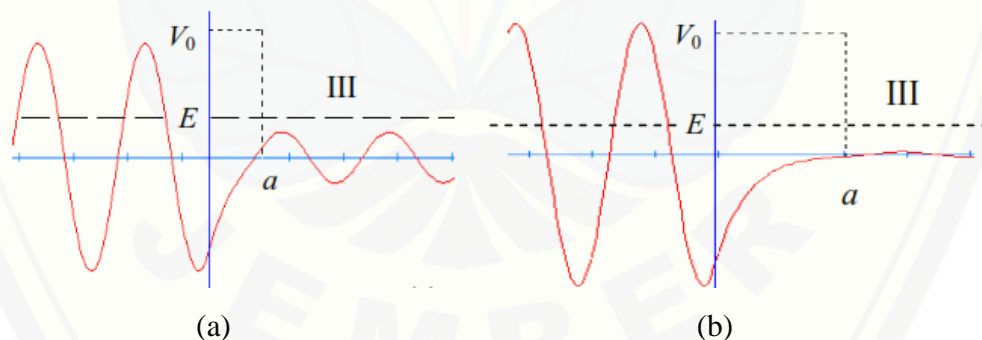
Dalam banyak kasus, nilai  $\alpha$  memang besar. Ingat bahwa  $E$  dan  $V_0$  dalam orde  $eV$  ( $\approx 10^{-19}J$ ),  $m$  dalam orde  $10^{-31}kg$ , dan  $\hbar$  dalam orde  $10^{-34}J.s$ , sehingga nilai  $\alpha$  dalam orde  $10^{18}/m$ . Bagi sistem yang energi dan massanya lebih dari nilai-nilai tadi, nilai  $\alpha$  akan lebih besar lagi. Secara kuantitatif, ketergantungan koefisien transmisi terhadap lebar penghalang dapat dipaparkan sebagai berikut. Fungsi gelombang di daerah II merupakan kombinasi fungsi-fungsi hiperbolis  $e^{\alpha x}$  dan  $e^{-\alpha x}$  sebagaimana dinyatakan pada baris kedua ruas kanan persamaan (2.14).

Dalam persamaan itu, fungsi  $e^{-\alpha x}$  lebih dominan daripada fungsi  $e^{\alpha x}$ . Sebab berdasarkan persamaan (2.13c) dan (2.13d) diperoleh hubungan:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\alpha - ik}{\alpha + ik} e^{2\alpha a} \quad (2.18)$$

yang menunjukkan bahwa amplitudo fungsi  $e^{-\alpha x}$  (yaitu  $B_2$ ) lebih besar daripada amplitudo fungsi  $e^{\alpha x}$  (yaitu  $B_1$ ), karena fungsi  $e^{-\alpha x}$  lebih dominan daripada fungsi  $e^{\alpha x}$  maka perilaku fungsi gelombang di daerah II ditentukan oleh perilaku fungsi  $e^{-\alpha x}$ . Kehadiran fungsi ini hanya efektif di daerah  $x < 1/\alpha$ , sebab untuk  $x > 1/\alpha$  amplitudonya dapat diabaikan.

Jika lebar penghalang  $a$  kurang dari  $1/\alpha$  maka amplitudo gelombang di tepi kanan penghalang masih cukup besar, sehingga fungsi gelombang di daerah III juga memiliki amplitudo yang cukup besar. Hal ini berdampak pada besarnya peluang partikel untuk sampai di daerah III, ditunjukkan oleh gambar 2.4(a). Sebaliknya, jika lebar penghalang  $a$  cukup besar dibandingkan  $1/\alpha$  maka amplitudo gelombang di tepi kanan penghalang menjadi kecil. Akibatnya fungsi gelombang di daerah III juga memiliki amplitudo yang kecil. Hal ini berdampak pada kecilnya peluang partikel untuk sampai di daerah III, ditunjukkan oleh gambar 2.4(b) (Sutopo, 2005:164-168).



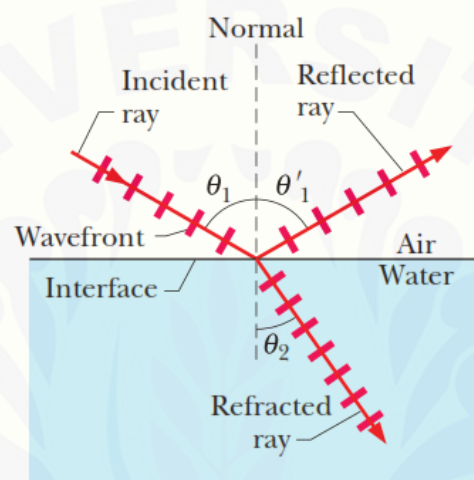
Gambar 2.4. Komponen real fungsi eigen partikel di bawah pengaruh potensial penghalang. Lebar penghalang pada gambar (a) < lebar penghalang pada gambar (b). Perhatikan amplitudo gelombang di daerah III pada (a) dan (b).

## 2.4 Refraksi (Pembiasan)

Hukum Refraksi (Pembiasan) menyatakan bahwa seberkas sinar yang terefraksi terletak di dalam bidang datang dan memiliki sudut bias  $\theta_2$  yang berhubungan dengan sudut datang  $\theta_1$ .

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.19)$$

Simbol  $n_1$  dan  $n_2$  adalah konstanta tak berdimensi yang disebut indeks bias medium 1 dan medium 2 (Halliday, 2011:906).



Gambar 2.5. Representasi cahaya, sudut datang ( $\theta_1$ ), pemantulan ( $\theta_1'$ ) dan refraksi ( $\theta_2$ ).

Fisikawan Belanda Christian Huygens pada tahun 1678 mengembangkan teori gelombang yang meyakinkan untuk cahaya. Prinsip Huygens berbunyi bahwa “semua titik pada suatu muka gelombang merupakan titik sumber dari bulatan gelombang-gelombang kecil sekunder. Setelah waktu  $t$ , posisi baru dari muka gelombang adalah posisi suatu permukaan yang menyinggung gelombang-gelombang kecil sekunder ini.

Dengan menggunakan Prinsip Huygens, dapat menurunkan rumus hukum refraksi dengan tiga tahapan refraksi dari beberapa muka gelombang pada antarmuka datar antara udara (medium 1) dan kaca (medium 2). Pilih muka gelombang mana saja dari berkas sinar datang untuk dipisahkan dengan  $\lambda_1$  (panjang gelombang di medium 1) dengan kecepatan cahaya di udara adalah  $v_1$  dan di kaca adalah  $v_2$ , dengan asumsi  $v_2 < v_1$ .



Sudut  $\theta_1$  pada gambar 2.6(a) adalah sudut antara muka gelombang dan antarmuka memiliki nilai yang sama dengan sudut antara *normal* dengan muka gelombang (yaitu sinar datang) dan normal dengan antarmuka. Jadi,  $\theta_1$  adalah sudut datang. Ketika gelombang bergerak masuk ke dalam kaca, sebuah gelombang kecil Huygens pada titik  $e$  dalam gambar 2.6(b) akan memanjang hingga melintasi titik  $c$  dengan jarak  $\lambda_1$  dari titik  $e$ . Interval waktu yang diperlukan untuk pemanjangan ini adalah jarak dibagi kecepatan gelombang kecil ini, yaitu  $\lambda_1/v_1$ . Interval waktu ini sama dengan pemanjangan dari titik  $h$  hingga melewati titik  $g$ , yaitu  $\lambda_2/v_2$ . Sehingga didapat:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.20)$$

Menunjukkan bahwa panjang gelombang cahaya di dua medium adalah sebanding dengan kecepatan cahaya dalam medium terkait.

Muka gelombang yang terefraksi seharusnya menyinggung busur berjari-jari  $\lambda_2$  yang berpusat pada  $h$ , misalnya pada titik  $g$ . Muka gelombang terefraksi juga seharusnya menyinggung busur berjari-jari  $\lambda_1$  yang berpusat pada  $e$ , misalnya pada titik  $c$ . Maka muka gelombang terefraksi seharusnya terorientasi sebagaimana digambarkan. Perhatikan bahwa  $\theta_2$  adalah sudut refraksi sebenarnya.

Untuk segitiga siku-siku  $hce$  dan  $hcg$  dalam gambar 2. 6(b):

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{hc} \quad (\text{untuk segitiga } hce) \quad (2.21a)$$

$$\text{dan} \quad \sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{hc} \quad (\text{untuk segitiga } hcg) \quad (2.21b)$$

Membagi persamaan 2.21a dengan 2.21b, didapatkan

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.22)$$

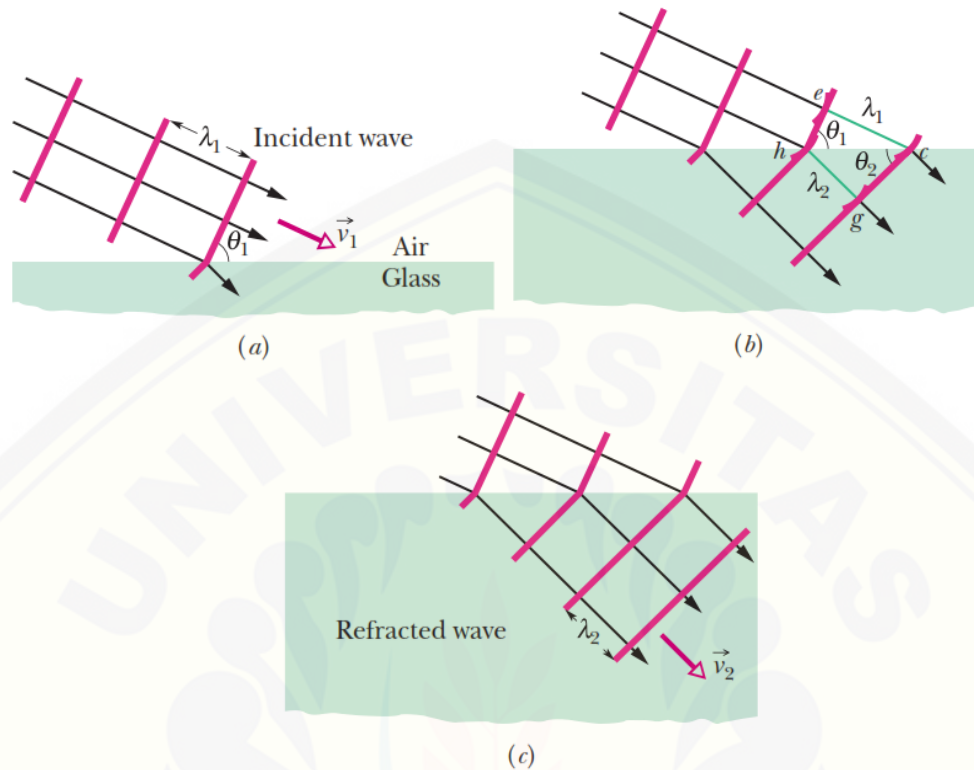
Didefinisikan indeks bias  $n$  untuk setiap medium sebagai rasio kecepatan cahaya di ruang hampa terhadap kecepatan cahaya  $v$  dalam medium tersebut  $n = \frac{c}{v}$ . Secara khusus, untuk dua medium tersebut

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{dan} \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad (2.23)$$

Dengan menggabungkan persamaan 2.22 dengan 2.23, didapatkan

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.25)$$

(Halliday, 2011:959-960).



Gambar 2.6. Refraksi sebuah gelombang bidang pada antarmuka gelombang udara-kaca, seperti yang digambarkan dengan prinsip Huygens. Panjang gelombang dikaca lebih kecil daripada panjang gelombang di udara. Bagian (a) sampai (c) menggambarkan tiga tahapan berurutan dari refraksi.

## 2.5 Hukum Brewster

Untuk sinar yang datang pada sudut Brewster, dari hasil eksperimen didapat bahwa sinar-sinar yang memantul dan berefraksi itu tegak lurus satu sama lain, karena sinar memantul dengan sudut  $\theta_B$  dan sinar berefraksi dengan sudut  $\theta_r$ , seperti terlihat pada gambar 2.7, didapatkan bahwa

$$\theta_B + \theta_r = 90^\circ \quad (2.26)$$

Kedua sudut ini dihubungkan dengan persamaan 2.25, dimana udara adalah medium pertama, maka diperoleh

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_r \quad (2.27)$$

Dengan menggabungkan persamaan 2.26 dan 2.27, diperoleh

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin(90^\circ - \theta_B) = n_2 \cos \theta_B \quad (2.28)$$

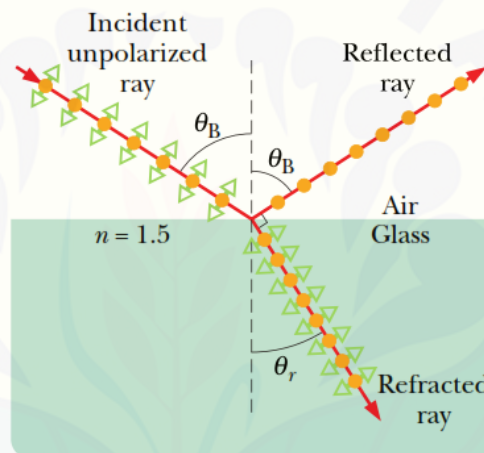
menghasilkan

$$\theta_B = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{Sudut Brewster}) \quad (2.29)$$

Jika sudut datang dan sinar yang memantul bergerak di udara ( $n_1 = 1$ ), dan  $n$  mewakili  $n_2$  sehingga dapat ditulis kembali menjadi

$$\theta_B = \tan^{-1} n \quad (\text{Hukum Brewster}) \quad (2.30)$$

Persamaan ini adalah penyederhanaan dari persamaan 2.29 dan disebut Hukum Brewster (Halliday, 2011:912).



Gambar 2.7. Seberkas sinar yang tidak terpolarisasi di udara masuk ke permukaan kaca pada sudut *Brewster*  $\theta_B$ . Medan-medan listrik sepanjang itu telah dipecah menjadi komponen yang tegak lurus pada bagian depan (bidang datang, pemantulan, dan refraksi) dan komponen sejajar pada bagian dapan. Sinar yang berefraksi terdiri dari komponen asli yang sejajar terhadap bagian depan dan komponen yang lebih lemah tegak lurus terhadap bagian depan; ini yang disebut terpolarisasi sebagian.

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Jenis, Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian non eksperimen. Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di Laboratorium Fisika, Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

### 3.2 Definisi Operasional Variabel

Agar tidak terjadi kesalahan dalam mengartikan istilah-istilah penelitian, maka perlu adanya definisi operasional mengenai variabel penelitian. Adapun variabel-variabel yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Fungsi gelombang untuk  $E < V_0$  pada masing masing daerah

Pada penelitian ini menggunakan dua penghalang sehingga terdapat lima daerah.  $\psi_1(x)$  adalah fungsi gelombang daerah I,  $\psi_2(x)$  adalah fungsi gelombang daerah II,  $\psi_3(x)$  adalah fungsi gelombang daerah III,  $\psi_4(x)$  adalah fungsi gelombang daerah IV, dan  $\psi_5(x)$  adalah fungsi gelombang daerah V.

b. Persamaan schrödinger tak bergantung waktu

Persamaan schrödinger tak bergantung waktu yang digunakan adalah dua dimensi yaitu koordinat (x, y). Elektron bergerak pada sumbu x dan y, sehingga elektron memiliki bilangan gelombang  $k_x$  dan  $k_y$ .

c. Hukum snellius

menyatakan bahwa seberkas sinar yang terefraksi terletak di dalam bidang datang dan memiliki sudut bias  $\theta'$  yang berhubungan dengan sudut datang  $\theta$ . Jika dihubungkan dengan bilangan gelombang, persamaan yang didapat ialah  $k \sin \theta = k' \sin \theta'$ .

d. Program aplikasi yang digunakan adalah aplikasi browser berupa Desmos (graphing), dan tidak ada spesifikasi khusus untuk komputer maupun laptop yang digunakan.

### 3.3 Langkah Penelitian



Gambar 3.1 Bagan-bagan langkah penelitian

a. Persiapan

Tahap ini adalah mempersiapkan bahan-bahan yang dijadikan informasi yaitu buku tentang fisika modern, fisika kuantum, fisika kimia, fisika matematika, fisika zat padat serta jurnal-jurnal yang berkaitan dengan efek terobosan menggunakan penghalang ganda dan persamaan schrödinger dua dimensi.

b. Pengembangan Teori

Pada tahap ini peneliti mengembangkan teori yang sudah ada di buku dan jurnal mengenai efek terobosan. Teori yang dikembangkan adalah koefisien transmisi efek terobosan penghalang ganda dan fungsi gelombang masing-masing daerah dengan pendekatan persamaan schrödinger dua dimensi.

c. Hasil Pengembangan Teori

Dari pengembangan teori diperoleh fungsi gelombang elektron masing-masing daerah yaitu dari  $\psi_1(x)$  sampai  $\psi_5(x)$  yang digunakan untuk menentukan koefisien transmisi penghalang ganda.

d. Pengambilan data

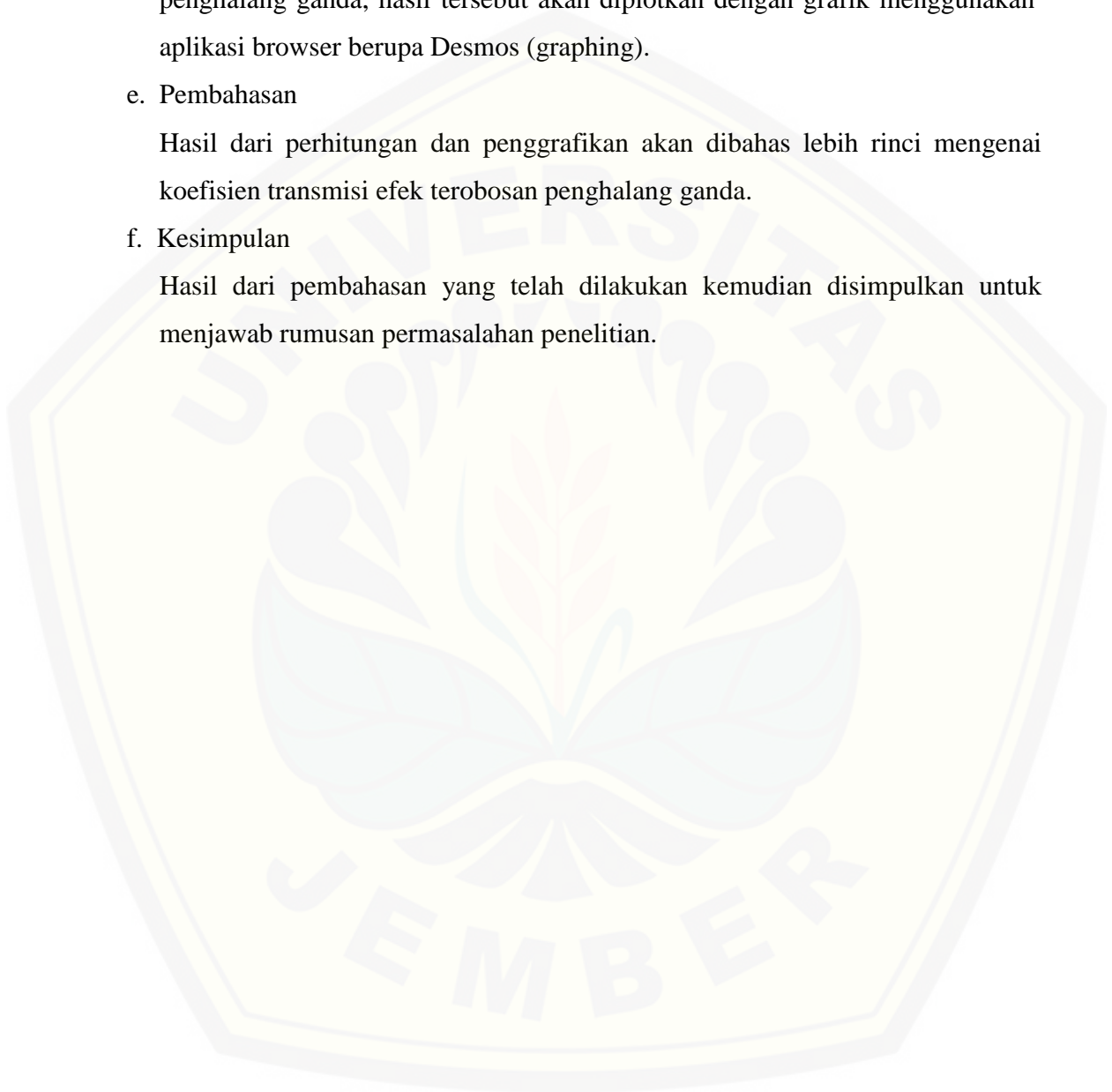
Tahap ini adalah tahap perhitungan, yaitu dari fungsi gelombang masing-masing daerah akan menghasilkan persamaan koefisien transmisi efek terobosan penghalang ganda, hasil tersebut akan diplotkan dengan grafik menggunakan aplikasi browser berupa Desmos (graphing).

e. Pembahasan

Hasil dari perhitungan dan penggrafikan akan dibahas lebih rinci mengenai koefisien transmisi efek terobosan penghalang ganda.

f. Kesimpulan

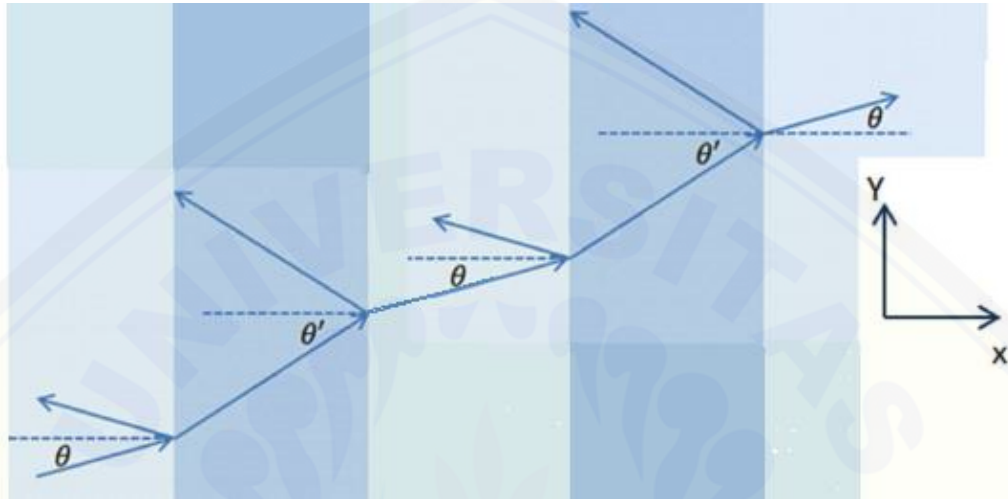
Hasil dari pembahasan yang telah dilakukan kemudian disimpulkan untuk menjawab rumusan permasalahan penelitian.



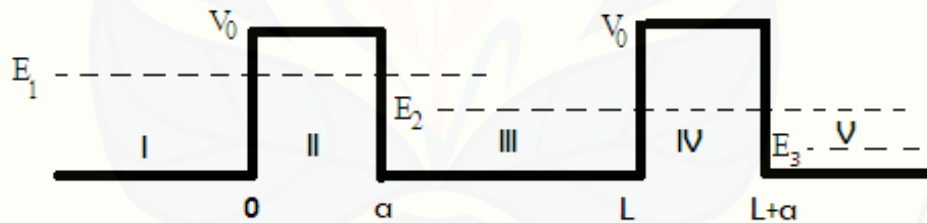
### 3.4 Pengembangan Teori

Teori yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Skema efek terobosan ekektron dalam koordinat (x, y)



(a)



(b)

Gambar 3.2 efek terobosan penghalang ganda sistem 2 dimensi (a) skema sistem 2 dimensi daerah gelap adalah lapisan penghalang dan berkas elektron ditunjukkan oleh anak panah; (b) profil energi penghalang 1 dimensi dan energi awal elektron  $E < V_0$ .

b. Fungsi gelombang untuk  $E < V_0$  pada masing masing daerah

$$\psi_1(x, y) = Ae^{ik_x x + ik_y y} + Be^{-ik_x x + ik_y y},$$

$$\psi_2(x, y) = Ce^{k'_x x + k_y y} + De^{-k'_x x + k_y y},$$

$$\psi_3(x, y) = Ee^{ik_x x + ik_y y} + Fe^{-ik_x x + ik_y y},$$

$$\psi_4(x, y) = Ge^{k'_x x + k_y y} + He^{-k'_x x + k_y y},$$

$$\psi_5(x, y) = Ie^{ik_x x + ik_y y}$$

c. Koefisien transmisi penghalang pertama

$$T_{2D1} = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{8k_x^2 k_x'^2}{(k_x^2 + k_x'^2)^2 \cosh(2k'_x L_1) - (k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4)}$$

d. Koefisien transmisi penghalang kedua

$$T_{2D2} = \frac{|I|^2}{|E|^2} = \frac{8k_x^2 k_x'^2}{(k_x^2 + k_x'^2)^2 \cosh(2k'_x L_2) - (k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4)}$$

e. Koefisien transmisi pada penghalang ganda

$$T_{ganda} = T_{2D1} \cdot T_{2D2}$$

### 3.5 Data Simulasi

Data untuk menentukan koefisien transmisi penghalang tunggal adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Data koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan schrodinger satu dimensi dan dua dimensi dengan energi awal  $E = 1,22 \times 10^{-1}(eV)$ , dan besar potensial  $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ .

$L (m)$	$T_{1D}$	$T_{2D}$

Keterangan  $L$  = lebar penghalang ( $m$ )

$T_{1D}, T_{2D}$  = Besar koefisien transmisi penghalang dengan pendekatan 1D dan 2D.



Tabel 3.2 Data koefisien transmisi pada penghalang tunggal menggunakan persamaan schrodinger satu dimensi dan dua dimensi dengan besar potensial  $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ , lebar penghalang  $L_1 = 4 \times 10^{-9}(m)$ .

$E(eV)$	$T_{1D}$	$T_{2D}$

Keterangan

$E$  = energi awal elektron ( $eV$ )

$T_{1D}$  = Besar koefisien transmisi penghalang tunggal dengan pendekatan 1D

$T_{2D}$  = Besar koefisien transmisi penghalang tunggal dengan pendekatan 2D

Data untuk menentukan koefisien transmisi penghalang ganda adalah sebagai berikut:

Tabel 3.3 Data koefisien transmisi penghalang ganda dengan  $E = 1,22 \times 10^{-1}(eV)$ ,  $V_0 = 1,64 \times 10^{-1}(eV)$ , dan  $L_1 = 4 \times 10^{-9}(m)$ .

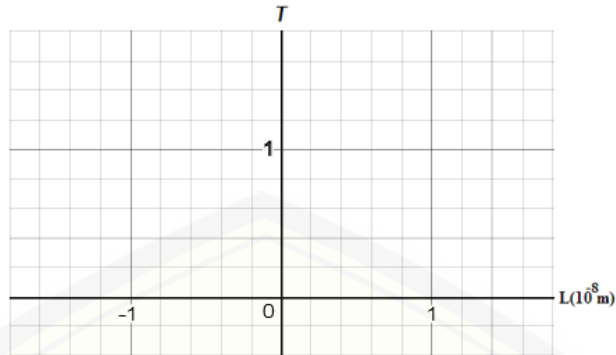
$L_2$	$T_{ganda}$

Keterangan

$L_2$  = lebar penghalang dan kedua ( $m$ )

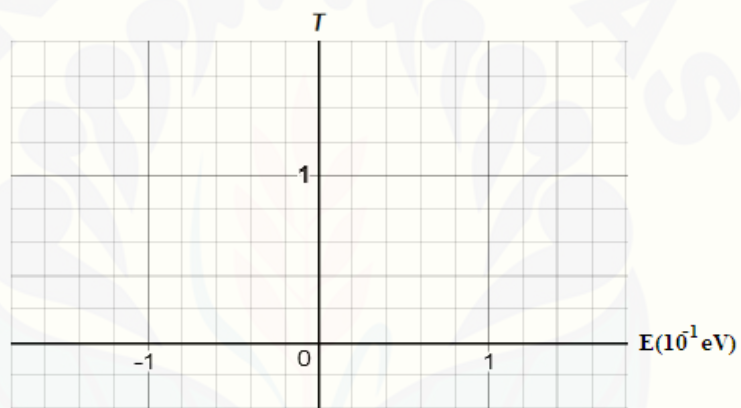
$T_{ganda}$  = Besar koefisien transmisi penghalang ganda

Hasil Plot dari grafik pada tabel 3.1 menggunakan aplikasi browser berupa Desmos (graphing), T adalah koefiein transmisi dan L adalah lebar penghalang.



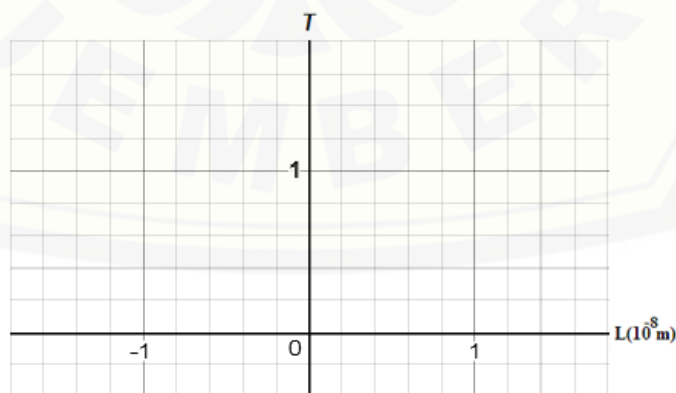
Gambar 3.3 Grafik tabel 3.1

Hasil Plot dari grafik pada tabel 3.2 menggunakan aplikasi browser berupa Desmos (graphing) T adalah koefisien transmisi dan E adalah energi datang elektron.



Gambar 3.4 Grafik tabel 3.2

Hasil Plot dari grafik pada tabel 3.3 menggunakan aplikasi browser berupa Desmos (graphing), T adalah koefisien transmisi dan L adalah lebar penghalang.



Gambar 3.5 Grafik tabel 3.3

## BAB 5. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- a. Koefisien transmisi pada penghalang tunggal dengan persamaan schrödinger dua dimensi bergantung pada lebar penghalang, sudut datang elektron dan energi awal elektron. Semakin lebar suatu penghalang maka banyaknya dobrakan elektron pada dinding penghalang perdetiknya akan menurun mengakibatkan nilai koefisien transmisi semakin kecil. Jika sudut datang elektron semakin besar maka resultan dari  $k_x$  dan  $k_y$  semakin besar, sehingga nilai koefisien transmisinya juga semakin besar. Jika energi awal elektron semakin besar maka semakin besar pula energi kinetiknya, menyebabkan banyaknya dobrakan elektron perdetiknya akan menambah sehingga nilai koefisien transmisinya juga semakin besar. Elektron memiliki dua peluang untuk menerobos yaitu pada sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ , pada masing-masing sumbu memberi peluang untuk menerobos berupa nilai koefisien transmisi.
- b. Koefisien transmisi penghalang ganda dengan persamaan schrödinger dua dimensi bergantung pada energi awal elektron, lebar penghalang pertama dan kedua, elektron memiliki dua peluang untuk menerobos yaitu pada sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ , pada masing-masing sumbu memberi peluang untuk menerobos berupa nilai koefisien transmisi. Semakin banyak jumlah penghalang maka nilai koefisien transmisi semakin kecil.

### 5.2 Saran

Dalam penelitian ini, potensial penghalang pertama dan kedua yang digunakan adalah simetri, serta jarak antara penghalang pertama dan kedua diasumsikan tidak berpengaruh. Saran yang dapat diberikan, dalam penelitian ini

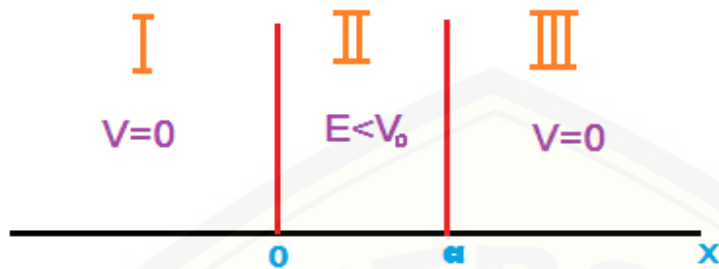
selanjutnya dapat dikembangkan dengan menggunakan potensial penghalang pertama dan kedua yang anti-simetri.



**DAFTAR PUSTAKA**

- Beiser, Arthur. 1986. *Konsep Fisika Modern (Penerjemah The Houw Liong)*. Jakarta: Erlangga.
- Beiser, Arthur. 2003. *Concepts of Modern Physics Sixth Edition*. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Datta, Supriyo. 1999. *Electronic Transport In Mesoscopic System*. Britania Raya: Cambridge University Prees.
- Dutt, A., dan S. Kar. 2010. Smooth double barriers in quantum mechanics. [https://www.researchgate.net/publication/233917816\\_Smooth\\_double\\_barriers\\_in\\_quantum\\_mechanics](https://www.researchgate.net/publication/233917816_Smooth_double_barriers_in_quantum_mechanics). [Diakses pada 24 Juni 2017].
- Halliday dkk. 2011. *Fundamental of Physics 9th Edition*. New York. JohnWiley & Son Inc.
- Harrison, Paul. 2005. *Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures, Second Edition*. New York. JohnWiley & Son Inc.
- Krane, K. S. *Fisika Modern*. Terjemahan oleh Wospakrik H.J. dan Niksolihin S. 1992. Jakarta: UIP
- Krane, K. S. 2012. *Modern Physics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM PRESS.
- Wijaya, A. K., A. Hermanto, M. Toifur. 2014. Analisis Penentuan Koefisien Refleksi dan Transmisi pada Potensial Delta Ganda Antisimetri. *Prosiding Pertemuan Ilmiah XXVIII HFI Jateng & DIY*. 26 April 2014: 48.
- Zettili, Nouredine. 2009. *Quantum Mechanics Concepts and Applications Second Edition*. Jacksonville : John Wiley & Sons, Ltd.

LAMPIRAN A. PERHITUNGAN KOEFISIEN TRANSMISI DAN REFLEKSI  
DENGAN PERSAMAAN SHRÖDINGER SATU DIMENSI



Persamaan Shrödinger bebas waktu untuk  $E < V_0$  di daerah I, II, dan III adalah sebagai berikut:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}; \quad x < 0$$

$$\psi_2(x) = B_1 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}; \quad 0 < x < a$$

$$\psi_3(x) = C_1 e^{ikx}; \quad x > a$$

Dengan  $k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  dan  $\alpha \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

Selanjutnya, dengan menerapkan syarat kontinuitas  $\psi(x)$  dan  $\frac{d\psi(x)}{dx}$  di  $x = 0$  dan di  $x = a$ ,

Saat  $x = 0$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$

$$A_1 e^0 + A_2 e^0 = B_1 e^0 + B_2 e^0$$

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \quad (1)$$

$$\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$$

$$ikA_1 e^0 - ikA_2 e^0 = \alpha B_1 e^0 - \alpha B_2 e^0$$

$$ik(A_1 - A_2) = \alpha(B_1 - B_2) \quad (2)$$

Saat  $x = a$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a)$$

$$B_1 e^{\alpha a} + B_2 e^{-\alpha a} = C_1 e^{ika} \quad (3)$$

$$\psi'_2(a) = \psi'_3(a)$$

$$\alpha B_1 e^{\alpha a} - \alpha B_2 e^{-\alpha a} = ik C_1 e^{ika} \quad (4)$$

Untuk memperoleh  $A_1$ , maka persamaan (1) dikalikan dengan  $ik$  kemudian dieliminasi dengan persamaan (2), diperoleh

$$A_1 = \frac{B_1(ik+\alpha) + B_2(ik-\alpha)}{2ik} \quad (5)$$

Untuk memperoleh  $B_1$ , maka persamaan (3) dikalikan dengan  $\alpha$  kemudian dieliminasi dengan persamaan (4), diperoleh

$$B_1 = \frac{C_1(ik+\alpha)e^{ika}}{2\alpha e^{\alpha a}} \quad (6)$$

Untuk memperoleh  $B_2$ , maka persamaan (3) dikalikan dengan  $\alpha$  kemudian dieliminasi dengan persamaan (4), diperoleh

$$B_2 = \frac{C_1(\alpha-ik)e^{ika}}{2\alpha e^{-\alpha a}} \quad (7)$$

Untuk memperoleh  $\frac{A_1}{C_1}$ , maka substitusi persamaan (6) dan (7) ke dalam persamaan (5):

$$A_1 = \frac{\frac{C_1(ik+\alpha)e^{ika}}{2\alpha e^{\alpha a}}(ik+\alpha) + \frac{C_1(\alpha-ik)e^{ika}}{2\alpha e^{-\alpha a}}(ik-\alpha)}{2ik}$$

$$A_1 = \frac{C_1(ik+\alpha)e^{ika}(ik+\alpha)}{4ik\alpha e^{\alpha a}} + \frac{C_1(\alpha-ik)e^{ika}(ik-\alpha)}{4ik\alpha e^{-\alpha a}}$$

$$A_1 = \frac{C_1(ik+\alpha)^2 e^{ika} e^{-\alpha a} + C_1(\alpha-ik)(ik-\alpha) e^{ika} e^{\alpha a}}{4ik\alpha}$$

$$A_1 = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [(ik+\alpha)^2 e^{-\alpha a} + (\alpha-ik)(ik-\alpha) e^{\alpha a}] C_1$$

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [(ik+\alpha)^2 e^{-\alpha a} + (\alpha-ik)(ik-\alpha) e^{\alpha a}]$$

Dimana  $(ik+\alpha)^2 = -k^2 + 2ik\alpha + \alpha^2 = (\alpha^2 - k^2) + 2ik\alpha$

$$(\alpha-ik)(ik-\alpha) = -\alpha^2 + 2ik\alpha + k^2 = -(\alpha^2 - k^2) + 2ik\alpha$$

Sehingga:

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [(\alpha^2 - k^2) e^{-\alpha a} + 2ik\alpha e^{-\alpha a} - (\alpha^2 - k^2) e^{\alpha a} + 2ik\alpha e^{\alpha a}]$$

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [(\alpha^2 - k^2)(e^{-\alpha a} - e^{\alpha a}) + 2ik\alpha(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a})]$$

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [(k^2 - \alpha^2)(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) + 2ik\alpha(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a})]$$

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{e^{ika}}{4ika} [(k^2 - \alpha^2)2 \sinh(\alpha a) + 2ika \cdot 2 \cosh(\alpha a)]$$

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{e^{ika}}{4ika} [2(k^2 - \alpha^2) \sinh(\alpha a) + 4ika \cosh(\alpha a)] \quad (8)$$

$$\frac{A_1^*}{C_1^*} = \frac{e^{-ika}}{-4ika} [2(k^2 - \alpha^2) \sinh(\alpha a) - 4ika \cosh(\alpha a)]$$

$$\frac{|A_1|^2}{|C_1|^2} = \frac{A_1 A_1^*}{C_1 C_1^*}$$

$$\frac{|A_1|^2}{|C_1|^2} = \frac{1}{16k^2\alpha^2} [4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2\alpha^2 \cosh^2(\alpha a)]$$

Dimana  $\cosh^2(x) = \sinh^2(x) + 1$

Sehingga:

$$\frac{|A_1|^2}{|C_1|^2} = \frac{1}{16k^2\alpha^2} [4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2\alpha^2 \{ \sinh^2(\alpha a) + 1 \}]$$

$$\frac{|A_1|^2}{|C_1|^2} = \frac{1}{16k^2\alpha^2} [4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2\alpha^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2\alpha^2]$$

$$\frac{|A_1|^2}{|C_1|^2} = \frac{16k^2\alpha^2 + \{16k^2\alpha^2 + 4(k^2 - \alpha^2)^2\} \sinh^2(\alpha a)}{16k^2\alpha^2}$$

Didapatkan koefisien transmisi

$$T = \frac{|C_1|^2}{|A_1|^2}$$

$$T = \frac{16k^2\alpha^2}{16k^2\alpha^2 + \{16k^2\alpha^2 + 4(k^2 - \alpha^2)^2\} \sinh^2(\alpha a)}$$

$$T = \frac{4k^2\alpha^2}{4k^2\alpha^2 + \{4k^2\alpha^2 + (k^2 - \alpha^2)^2\} \sinh^2(\alpha a)}$$

dimana

$$4k^2\alpha^2 + (k^2 - \alpha^2)^2 = 4k^2\alpha^2 + k^4 - 2k^2\alpha^2 + \alpha^4 = k^4 + 2k^2\alpha^2 + \alpha^4 = (k^2 + \alpha^2)^2$$

Sehingga besar koefisien transmisi adalah:

$$T = \frac{4k^2\alpha^2}{4k^2\alpha^2 + (k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a)} \quad (9)$$

Untuk memperoleh  $A_2$ , maka persamaan (1) dikalikan dengan  $ik$  kemudian dieliminasi dengan persamaan (2), diperoleh

$$A_2 = \frac{B_1(ik - \alpha) + B_2(ik + \alpha)}{2ik} \quad (10)$$



Untuk memperoleh  $\frac{A_2}{C_1}$ , maka substitusi persamaan (6) dan (7) kedalam persamaan (10):

$$A_2 = \frac{\frac{C_1(ik+\alpha)e^{ika}}{2\alpha e^{\alpha a}}(ik-\alpha) + \frac{C_1(\alpha-ik)e^{ika}}{2\alpha e^{-\alpha a}}(ik+\alpha)}{2ik}$$

$$A_2 = \frac{C_1(ik+\alpha)(ik-\alpha)e^{ika}e^{-\alpha a} + C_1(\alpha-ik)(ik+\alpha)e^{ika}e^{\alpha a}}{4ik\alpha}$$

Dimana  $(ik + \alpha)(ik - \alpha) = -k^2 - \alpha^2 = -(\alpha^2 + k^2)$

$$(\alpha - ik)(ik + \alpha) = \alpha^2 + k^2$$

$$A_2 = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [-(\alpha^2 + k^2)e^{-\alpha a} + (\alpha^2 + k^2)e^{\alpha a}]C_1$$

$$A_2 = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [(\alpha^2 + k^2)(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a})]C_1$$

$$\frac{A_2}{C_1} = \frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [2(\alpha^2 + k^2) \sinh(\alpha a)] \quad (11)$$

$$\frac{A_2^*}{C_1^*} = \frac{e^{-ika}}{-4ik\alpha} [2(\alpha^2 + k^2) \sinh(\alpha a)]$$

Koefisien refleksi didapatkan:

$$R = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} = \frac{A_2 A_2^*}{A_1 A_1^*} = \frac{A_2 A_2^*}{C_1 C_1^*} \cdot \frac{A_1 A_1^*}{C_1 C_1^*}$$

$$R = \frac{\frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [2(\alpha^2 + k^2) \sinh(\alpha a)]}{\frac{e^{ika}}{4ik\alpha} [2(k^2 - \alpha^2) \sinh(\alpha a) + 4ik\alpha \cosh(\alpha a)]} \cdot \frac{\frac{e^{-ika}}{-4ik\alpha} [2(\alpha^2 + k^2) \sinh(\alpha a)]}{\frac{e^{-ika}}{-4ik\alpha} [2(k^2 - \alpha^2) \sinh(\alpha a) - 4ik\alpha \cosh(\alpha a)]}$$

$$R = \frac{4(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2 \alpha^2 \cosh^2(\alpha a)}$$

Dimana  $\cosh^2(x) = \sinh^2(x) + 1$

$$R = \frac{4(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2 \alpha^2 (\sinh^2(\alpha a) + 1)}$$

$$R = \frac{4(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2 \alpha^2 \sinh^2(\alpha a) + 16k^2 \alpha^2}$$

$$R = \frac{(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a) + 4k^2 \alpha^2 \sinh^2(\alpha a) + 4k^2 \alpha^2}$$

$$R = \frac{(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{4k^2 \alpha^2 + [(k^2 - \alpha^2)^2 + 4k^2 \alpha^2] \sinh^2(\alpha a)}$$

$$R = \frac{(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{4k^2 \alpha^2 + [4k^2 \alpha^2 + (k^2 - \alpha^2)^2] \sinh^2(\alpha a)}$$

Dimana

$$4k^2 \alpha^2 + (k^2 - \alpha^2)^2 = 4k^2 \alpha^2 + k^4 - 2k^2 \alpha^2 + \alpha^4 = k^4 + 2k^2 \alpha^2 + \alpha^4 = (k^2 + \alpha^2)^2$$

Sehingga besar koefisien refleksi adalah:

$$R = \frac{(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{4k^2 \alpha^2 + (k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}$$



LAMPIRAN B. PERHITUNGAN KOEFISIEN TRANSMISI DUA DIMENSI

$$\psi_1(x, y) = Ae^{ik_x x + ik_y y} + Be^{-ik_x x + ik_y y},$$

$$\psi_2(x, y) = Ce^{k'_x x + k_y y} + De^{-k'_x x + k_y y},$$

$$\psi_3(x, y) = Ee^{ik_x x + ik_y y} + Fe^{-ik_x x + ik_y y},$$

$$\psi_4(x, y) = Ge^{k'_x x + k_y y} + He^{-k'_x x + k_y y},$$

$$\psi_5(x, y) = Ie^{ik_x x + ik_y y}$$

1. Koefisien Transmisi untuk penghalang pertama

$$\psi(x, y) \begin{cases} \psi_1(x, y) = Ae^{ik_x x + ik_y y} + Be^{-ik_x x + ik_y y}, & x \leq 0 \\ \psi_2(x, y) = Ce^{k'_x x + k_y y} + De^{-k'_x x + k_y y}, & 0 < x < L_1 \\ \psi_3(x, y) = Ee^{ik_x x + ik_y y}, & x \geq L_1 \end{cases}$$

Saat  $x = 0$

$$\psi_1(x = 0) = \psi_2(x = 0)$$

$$Ae^{ik_y y} + Be^{ik_y y} = Ce^{k_y y} + De^{k_y y} \dots(3)$$

$$\psi'_1(x = 0) = \psi'_2(x = 0)$$

$$ik_x Ae^{ik_y y} - ik_x Be^{ik_y y} = k'_x Ce^{k_y y} - k'_x De^{k_y y} \dots(4)$$

Saat  $x = L_1$

$$\psi_2(x = L_1) = \psi_3(x = L_1)$$

$$Ce^{k'_x L_1 + k_y y} + De^{-k'_x L_1 + k_y y} = Ee^{ik_x L_1 + ik_y y} \dots(5)$$

$$\psi'_2(x = L_1) = \psi'_3(x = L_1)$$

$$k'_x Ce^{k'_x L_1 + k_y y} - k'_x De^{-k'_x L_1 + k_y y} = ik_x Ee^{ik_x L_1 + ik_y y} \dots(6)$$

Mengeliminasi  $ik_x Be^{ik_y y}$ , dengan cara mengkalikan persamaan (3) dengan  $ik_x$  dan dijumlah dengan persamaan (4), menghasilkan :

$$ik_x A e^{ik_y y} + ik_x B e^{ik_y y} + ik_x A e^{ik_y y} - ik_x B e^{ik_y y} = ik_x C e^{k_y y} + ik_x D e^{k_y y} + k'_x C e^{k_y y} - k'_x D e^{k_y y}$$

$$2ik_x A e^{ik_y y} = C e^{k_y y} (ik_x + k'_x) + D e^{k_y y} (ik_x - k'_x)$$

$$A = \frac{C e^{k_y y} (ik_x + k'_x) + D e^{k_y y} (ik_x - k'_x)}{2ik_x e^{ik_y y}} \dots (7)$$

Mengeliminasi  $k'_x D e^{-k'_x L_1 + k_y y}$ , dengan cara mengkalikan persamaan (5) dengan  $k'_x$  dan dijumlah dengan persamaan (6), menghasilkan :

$$k'_x C e^{k'_x L_1 + k_y y} + k'_x D e^{-k'_x L_1 + k_y y} + k'_x C e^{k'_x L_1 + k_y y} - k'_x D e^{-k'_x L_1 + k_y y} = k'_x E e^{ik_x L_1 + ik_y y} + ik_x E e^{ik_x L_1 + ik_y y}$$

$$2k'_x C e^{k'_x L_1 + k_y y} = E e^{ik_x L_1 + ik_y y} (k'_x + ik_x)$$

$$C = \frac{E e^{ik_x L_1 + ik_y y} (k'_x + ik_x)}{2k'_x e^{k'_x L_1 + k_y y}} \dots (8)$$

Mengeliminasi  $k'_x C e^{k'_x L_1 + k_y y}$ , dengan cara mengkalikan persamaan (5) dengan  $k'_x$  dan dikurangi dengan persamaan (6), menghasilkan :

$$k'_x C e^{k'_x L_1 + k_y y} + k'_x D e^{-k'_x L_1 + k_y y} - k'_x C e^{k'_x L_1 + k_y y} + k'_x D e^{-k'_x L_1 + k_y y} = k'_x E e^{ik_x L_1 + ik_y y} - ik_x E e^{ik_x L_1 + ik_y y}$$

$$2k'_x D e^{-k'_x L_1 + k_y y} = E e^{ik_x L_1 + ik_y y} (k'_x - ik_x)$$

$$D = \frac{E e^{ik_x L_1 + ik_y y} (k'_x - ik_x)}{2k'_x e^{-k'_x L_1 + k_y y}} \dots (9)$$

Mensubstitusi persamaan (8) dan (9) kedalam persamaan (7)

$$A = \frac{C e^{k_y y} (ik_x + k'_x) + D e^{k_y y} (ik_x - k'_x)}{2ik_x e^{ik_y y}}$$

$$A = \frac{e^{k_y y} (ik_x + k'_x) E e^{ik_x L_1 + ik_y y} (k'_x + ik_x)}{2ik_x e^{ik_y y} 2k'_x e^{k'_x L_1 + k_y y}} + \frac{e^{k_y y} (ik_x - k'_x) E e^{ik_x L_1 + ik_y y} (k'_x - ik_x)}{2ik_x e^{ik_y y} 2k'_x e^{-k'_x L_1 + k_y y}}$$

$$\frac{A}{E} = e^{ik_x L_1} \frac{(ik_x + k'_x)^2}{4ik_x k'_x e^{k'_x L_1}} + e^{ik_x L_1} \frac{(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)}{4ik_x k'_x e^{-k'_x L_1}}$$

$$\frac{A}{E} = \frac{e^{ik_x L_1}}{4ik_x k'_x} \left[ \frac{(ik_x + k'_x)^2}{e^{k'_x L_1}} + \frac{(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)}{e^{-k'_x L_1}} \right]$$

$$\frac{A^*}{E^*} = \frac{e^{ik_x L_1}}{-4ik_x k'_x} \left[ \frac{(-ik_x + k'_x)^2}{e^{k'_x L_1}} + \frac{(-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x)}{e^{-k'_x L_1}} \right]$$

$$\frac{|A|^2}{|E|^2} = \frac{A A^*}{E E^*} = \frac{1}{16k_x^2 k_x'^2} \left[ \frac{(ik_x + k'_x)^2 (-ik_x + k'_x)^2}{e^{2k'_x L_1}} + \frac{(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)(-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x)}{e^{-2k'_x L_1}} + (ik_x + k'_x)^2 (-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x) + (-ik_x + k'_x)^2 (ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x) \right]$$

Karena  $(ik_x + k'_x)^2 (-ik_x + k'_x)^2 = (k_x^2 + k_x'^2)^2$ ,

$(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)(-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x) = (k_x^2 + k_x'^2)^2$ ,

$(ik_x + k'_x)^2 (-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x) = (-k_x^4 + 4ik_x^3 k'_x + 6k_x^2 k_x'^2 - 4ik_x k_x'^3 - k_x'^4)$

dan

$(-ik_x + k'_x)^2 (ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x) = (-k_x^4 - 4ik_x^3 k'_x + 6k_x^2 k_x'^2 + 4ik_x k_x'^3 - k_x'^4)$

$$\frac{|A|^2}{|E|^2} = \frac{1}{16k_x^2 k_x'^2} \left[ \left( k_x^2 + k_x'^2 \right)^2 \left( e^{2k_x' L_1} + e^{-2k_x' L_1} \right) + 2 \left( -k_x^4 + 6k_x^2 k_x'^2 - k_x'^4 \right) \right]$$

$$\frac{|A|^2}{|E|^2} = \frac{1}{16k_x^2 k_x'^2} \left[ 2 \left( k_x^2 + k_x'^2 \right)^2 \cosh(2k_x' L_1) - 2 \left( k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4 \right) \right]$$

Sehingga koefisien transmisi didapatkan

$$T_1 = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{8k_x^2 k_x'^2}{\left( k_x^2 + k_x'^2 \right)^2 \cosh(2k_x' L_1) - \left( k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4 \right)}$$

## 2. Koefisien Transmisi untuk penghalan Kedua

$$\psi(x, y) \begin{cases} \psi_3(x, y) = E e^{ik_x x + ik_y y} + F e^{-ik_x x + ik_y y}, & x \leq L_2 \\ \psi_4(x, y) = G e^{k'_x x + k_y y} + H e^{-k'_x x + k_y y}, & a < x < L_2 \\ \psi_5(x, y) = I e^{ik_x x + ik_y y}, & x \geq L_2 \end{cases}$$

Saat  $x = 0$

$$\psi_3(x = 0) = \psi_4(x = 0)$$

$$E e^{ik_y y} + F e^{ik_y y} = G e^{k_y y} + H e^{k_y y} \dots(3)$$

$$\psi'_3(x = 0) = \psi'_4(x = 0)$$

$$ik_x E e^{ik_y y} - ik_x F e^{ik_y y} = k'_x G e^{k_y y} - k'_x H e^{k_y y} \dots(4)$$

Saat  $x = L_2$

$$\psi_4(x = L_2) = \psi_5(x = L_2)$$

$$G e^{k'_x L_2 + k_y y} + H e^{-k'_x L_2 + k_y y} = I e^{ik_x L_2 + ik_y y} \dots(5)$$

$$\psi'_4(x = L_2) = \psi'_5(x = L_2)$$

$$k'_x G e^{k'_x L_2 + k_y y} - k'_x H e^{-k'_x L_2 + k_y y} = ik_x I e^{ik_x L_2 + ik_y y} \dots(6)$$

Mengeliminasi  $ik_x Fe^{iky}$ , dengan cara mengkalikan persamaan (3) dengan  $ik_x$  dan dijumlah dengan persamaan (4), menghasilkan :

$$ik_x Ee^{iky} + ik_x Fe^{iky} + ik_x Ee^{iky} - ik_x Fe^{iky} = ik_x Ge^{ky} + ik_x He^{ky} + k'_x Ge^{ky} - k'_x He^{ky}$$

$$2ik_x Ee^{iky} = Ge^{ky}(ik_x + k'_x) + He^{ky}(ik_x - k'_x)$$

$$E = \frac{Ge^{ky}(ik_x + k'_x) + He^{ky}(ik_x - k'_x)}{2ik_x e^{iky}} \dots (7)$$

Mengeliminasi  $k'_x He^{-k'_x L_2 + ky}$ , dengan cara mengkalikan persamaan (5) dengan  $k'_x$  dan dijumlah dengan persamaan (6), menghasilkan :

$$k'_x Ge^{k'_x L_1 + ky} + k'_x He^{-k'_x L_1 + ky} + k'_x Ge^{k'_x L_1 + ky} - k'_x He^{-k'_x L_1 + ky} = k'_x Ie^{ik_x L_1 + ky} + ik_x Ie^{ik_x L_1 + ky}$$

$$2k'_x Ge^{k'_x L_1 + ky} = Ie^{ik_x L_1 + ky}(k'_x + ik_x)$$

$$G = \frac{Ie^{ik_x L_2 + ky}(k'_x + ik_x)}{2k'_x e^{k'_x L_2 + ky}} \dots (8)$$

Mengeliminasi  $k'_x Ge^{k'_x L_2 + ky}$ , dengan cara mengkalikan persamaan (5) dengan  $k'_x$  dan dikurangi dengan persamaan (6), menghasilkan :

$$k'_x Ge^{k'_x L_1 + ky} + k'_x He^{-k'_x L_1 + ky} - k'_x Ge^{k'_x L_1 + ky} + k'_x He^{-k'_x L_1 + ky} = k'_x Ie^{ik_x L_1 + ky} - ik_x Ie^{ik_x L_1 + ky}$$

$$2k'_x Ge^{k'_x L_1 + ky} = Ie^{ik_x L_1 + ky}(k'_x - ik_x)$$

$$H = \frac{Ie^{ik_x L_2 + ky}(k'_x - ik_x)}{2k'_x e^{-k'_x L_2 + ky}} \dots (9)$$

Mensubstitusi persamaan (8) dan (9) kedalam persamaan (7)

$$E = \frac{Ge^{ky}(ik_x + k'_x) + He^{ky}(ik_x - k'_x)}{2ik_x e^{iky}}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{e^{k_y y} (ik_x + k'_x) I e^{ik_x L_2 + ik_y y} (k'_x + ik_x)}{2ik_x e^{ik_y y} 2k'_x e^{k'_x L_2 + k_y y}} \\
 &+ \frac{e^{k_y y} (ik_x - k'_x) I e^{ik_x L_2 + ik_y y} (k'_x - ik_x)}{2ik_x e^{ik_y y} 2k'_x e^{-k'_x L_2 + k_y y}} \\
 \frac{E}{I} &= e^{ik_x L_2} \frac{(ik_x + k'_x)^2}{4ik_x k'_x e^{k'_x L_2}} + e^{ik_x L_2} \frac{(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)}{4ik_x k'_x e^{-k'_x L_2}} \\
 \frac{E}{I} &= \frac{e^{ik_x L_2}}{4ik_x k'_x} \left[ \frac{(ik_x + k'_x)^2}{e^{k'_x L_2}} + \frac{(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)}{e^{-k'_x L_2}} \right] \\
 \frac{E^*}{I^*} &= \frac{e^{ik_x L_2}}{-4ik_x k'_x} \left[ \frac{(-ik_x + k'_x)^2}{e^{k'_x L_2}} + \frac{(-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x)}{e^{-k'_x L_2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|E|^2}{|I|^2} = \frac{E E^*}{I I^*} &= \frac{1}{16k_x^2 k_x'^2} \left[ \frac{(ik_x + k'_x)^2 (-ik_x + k'_x)^2}{e^{2k'_x L_2}} \right. \\
 &+ \frac{(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)(-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x)}{e^{-2k'_x L_2}} \\
 &+ (ik_x + k'_x)^2 (-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x) \\
 &\left. + (-ik_x + k'_x)^2 (ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x) \right]
 \end{aligned}$$

Karena  $(ik_x + k'_x)^2 (-ik_x + k'_x)^2 = (k_x^2 + k_x'^2)^2$ ,

$(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)(-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x) = (k_x^2 + k_x'^2)^2$ ,

$(ik_x + k'_x)^2 (-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x) = (-k_x^4 + 4ik_x^3 k'_x + 6k_x^2 k_x'^2 - 4ik_x k_x'^3 - k_x'^4)$

dan

$(-ik_x + k'_x)^2 (ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x) = (-k_x^4 - 4ik_x^3 k'_x + 6k_x^2 k_x'^2 + 4ik_x k_x'^3 - k_x'^4)$



$$\frac{|E|^2}{|I|^2} = \frac{1}{16k_x^2 k_x'^2} \left[ (k_x^2 + k_x'^2)^2 (e^{2k_x' L_2} + e^{-2k_x' L_2}) + 2(-k_x^4 + 6k_x^2 k_x'^2 - k_x'^4) \right]$$

$$\frac{|E|^2}{|I|^2} = \frac{1}{16k_x^2 k_x'^2} \left[ 2(k_x^2 + k_x'^2)^2 \cosh(2k_x' L_2) - 2(k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4) \right]$$

Sehingga koefisien transmisi didapatkan

$$T_2 = \frac{|I|^2}{|E|^2} = \frac{8k_x^2 k_x'^2}{(k_x^2 + k_x'^2)^2 \cosh(2k_x' L_2) - (k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4)}$$

LAMPIRAN C. KOEFISIEN TRANSMISI DALAM BENTUK FUNGSI ENERGI DAN POTENSIAL PENGHALANG

1. Koefisien Transmisi Satu Dimensi

$$T_{1D} = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 + k'^2}{2kk'}\right)^2 \sinh^2(k'L_1)}$$

Dengan  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  dan  $k' = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

$$T_{1D} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}{2\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}}\right)^2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \cdot L_1\right)}$$

$$T_{1D} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2mE + 2m(V_0 - E)}{2\sqrt{2mE}\sqrt{2m(V_0 - E)}}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{L_1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)}$$

$$T_{1D} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4m^2E + 8m^2E(V_0 - E) + 4m^2(V_0 - E)^2}{8m^2E(V_0 - E)}\right) \sinh^2\left(\frac{L_1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)}$$

$$T_{1D} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4m^2E + 8m^2E(V_0 - E) + 4m^2(V_0 - E)^2}{8m^2E(V_0 - E)}\right) \sinh^2\left(\frac{L_1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)}$$

$$T_{1D} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{L_1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)}$$

2. Koefisien Transmisi Dua Dimensi

$$T_{2D} = \frac{8k_x^2 k_x'^2}{(k_x^2 + k_x'^2)^2 \cosh(2k_x' L_1) - (k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4)}$$

Dengan  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ,  $k' = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ ,  $k_x = k \cos \theta$  dan  $k_x' = k' \cos \theta$

$$T_{2D} = \frac{8}{\frac{(k_x^2 + k_x'^2)^2 \cosh(2k_x' L_1) - (k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4)}{k_x^2 k_x'^2}}$$

$$T_{2D} = \frac{8}{\left(k_x^2 + 2k_x^2 k_x'^2 + k_x'^2\right) \cosh(2k_x' L_1) - \left(k_x^4 - 6k_x^2 k_x'^2 + k_x'^4\right)} k_x^2 k_x'^2$$

$$T_{2D} = \frac{8}{\left(\frac{k_x^2}{k_x'^2} + 2 + \frac{k_x'^2}{k_x^2}\right) \cosh(2k_x' L_1) - \left(\frac{k_x^2}{k_x'^2} - 6 + \frac{k_x'^2}{k_x^2}\right)}$$

$$T_{2D} = \frac{8}{\left(\frac{E}{(V_0 - E)} + 2 + \frac{(V_0 - E)}{E}\right) \cosh\left(\frac{2L_1 \cos(\theta)}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right) - \left(\frac{E}{(V_0 - E)} - 6 + \frac{(V_0 - E)}{E}\right)}$$