



**KAJIAN ATURAN *NON-RANDOM CHAOS GAME* PADA SEGITIGA**

**SKRIPSI**

Oleh

**Frisca Yunaning  
NIM. 141810101042**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2018**



**KAJIAN ATURAN *NON-RANDOM CHAOS GAME* PADA SEGITIGA**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar sarjana sains

Oleh

**Frisca Yunaning**  
**NIM. 141810101042**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2018**

## PERSEMBAHAN

Dengan segala kerendahan hati dan puji syukur yang tak terhingga pada Allah SWT, skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Mesikem dan Ayahanda Tumiranto tercinta, yang telah membesarkan, mendidik, mendoakan, memotivasi dengan penuh kasih sayang dan pengorbanan selama ini;
2. Kakak Ali Wahadin, Kakak Irana Yainu Pita, Kakak Andik Hermawan, Adik Anggin Verdika Aldovit, serta keponakan-keponakan tercinta yang telah memberikan semangat, doa dan dukungan kepada penulis;
3. Orang terkasihku mas Suswanto yang senantiasa mendampingi dengan doa, menemani dalam suka duka, memberi dukungan dan semangat tanpa henti;
4. Guru-guru SDN Sidorejo 02 Doko, SMPN 06 Blitar, SMAN 1 Garum dan dosen-dosen FMIPA Matematika Universitas Jember yang telah memberikan ilmu dan membimbing penuh dengan kesabaran;
5. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

**MOTTO**

Sesungguhnya dalam kesulitan ada kemudahan. Bila engkau telah selesai dari  
suatu pekerjaan maka kerjakan urusan yang lainnya dengan tekun  
(Terjemahan Q.S Ash-Sarh: 6-7)<sup>1</sup>

Kesuksesanmu tidak bisa dibandingkan dengan orang lain, melainkan  
dibandingkan dengan dirimu sebelumnya  
(Jaya Setiyabudi)<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART

<sup>2</sup> Jaya Setiyabudi. 2008. *The power of Kepepet*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Frisca Yunaning

NIM : 141810101042

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul: "Kajian Aturan *Non-Random Chaos Game* pada Segitiga" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Februari 2018

Yang menyatakan,

Frisca Yunaning

NIM 141810101042

**SKRIPSI**

**KAJIAN ATURAN *NON-RANDOM CHAOS GAME* PADA  
SEGITIGA**

Oleh

**Frisca Yunaning  
NIM 141810101042**

Pembimbing;

Dosen Pembimbing Utama : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.  
Dosen Pembimbing Anggota : Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul “Kajian Aturan *Non-Random Chaos Game* pada Segitiga” telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas  
Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.

NIP. 196908281998021001

NIP. 197006061998031003

Penguji I,

Penguji II,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

NIP. 196610121993031001

NIP. 198610142014041001

Mengesahkan  
Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

## RINGKASAN

**Kajian Aturan *Non-Random Chaos Game* pada Segitiga;** Frisca Yunaning; 141810101042; 2018; 60 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

*Chaos Game* merupakan bentuk permainan menggambar titik dalam suatu bidang dengan aturan tertentu yang diulang-ulang secara iteratif. Salah satu metode untuk membangkitkan fraktal adalah *Chaos Game*. Banyak penelitian yang mengembangkan metode *Chaos Game* dengan memodifikasi aturannya. Pada penelitian ini dikaji pengembangan aturan *Chaos Game* yang disebut aturan *non-random Chaos Game* dimana aturan tersebut akan diterapkan pada segitiga.

Simulasi program aturan *non-random Chaos Game* ini dilakukan enam percobaan dengan memvariasikan segitiga, urutan pemilihan titik sudut dan letak titik awal yang berbeda-beda. Urutan pemilihan titik sudut yang digunakan berdasarkan kombinasi dari tiga titik sudut segitiga yaitu  $T_0$ ,  $T_1$  dan  $T_2$ . Setiap percobaan menunjukkan distribusi pengelompokan titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* pada titik sudut  $T_0$ ,  $T_1$  dan  $T_2$  memiliki frekuensi yang sama karena pemilihan titik sudut dilakukan secara urut sehingga pada seluruh percobaan menghasilkan peluang terpilihnya titik sudut yang cenderung sama yaitu 33,33%. Setiap percobaan menghasilkan visualisasi *non-random Chaos Game* dengan titik-titik yang tidak dapat menyebar pada seluruh daerah titik sudut. Titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* hanya berkelompok di koordinat tertentu pada masing-masing pemilihan titik sudut yang sama. Dengan demikian, objek bentukan *non-random Chaos Game* tidak dapat dikatakan sebagai fraktal karena objek tersebut tidak membentuk suatu bentuk tertentu dan tidak memiliki salah satu sifat penting fraktal yaitu *self similarity*.

Pemilihan titik sudut dipilih secara urut secara terus menerus mengakibatkan tidak ada perulangan pemilihan titik sudut dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya. Akibatnya, letak titik-titik bentukan *non-random Chaos Game*

tidak berbeda signifikan sehingga pergerakan titik-titik tersebut hanya berputar secara terus menerus pada lingkup tertentu. Perbedaan urutan pemilihan titik sudut hanya akan merubah arah putaran pergerakan titik-titik bentukan *non-random Chaos Game*.

Objek yang dihasilkan aturan *non-random Chaos Game* tidak membentuk suatu fraktal, namun objek tersebut memiliki karakteristik dimana kumpulan titik bentukan *aturan non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen ke koordinat tertentu. Hal tersebut telah dibuktikan menggunakan perhitungan numerik yang berdasarkan enam percobaan pada simulasi program dimana nilai jaraknya semakin kecil dari iterasi rendah ke iterasi tinggi, maka titik-titik tersebut terletak semakin dekat antar titik satu dengan titik lainnya pada pemilihan titik sudut yang sama. Artinya, pada iterasi tinggi titik-titik yang dihasilkan akan menuju pada satu titik tertentu. Serta dengan perhitungan analitik yang memanfaatkan segitiga sembarang dan didapatkan tiga rumus umum jarak antar dua titik pada kumpulan titik pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$  sehingga didapatkan limit dari ketiga rumus tersebut adalah sama dengan nol. Apabila dibentuk suatu segitiga baru dimana titik pembentuknya adalah titik terakhir dari kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* di masing-masing pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$  maka didapatkan fakta bahwa segitiga tersebut tidak sebangun dengan segitiga awal untuk memulai aturan *non-random Chaos Game*. Fakta tersebut dibuktikan dengan simulasi program dan perhitungan analitik.

## PRAKATA

Puji syukur penulis kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Kajian Aturan *Non-Random Chaos Game* pada Segitiga”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari perhatian, bimbingan, motivasi dan petunjuk dari beberapa pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang dengan penuh kesabaran membimbing, mengarahkan, memberi saran dan petunjuk dalam penyusunan skripsi ini;
2. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. dan Bapak Ikhsanul Halikin., S.Pd., M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyusunan skripsi ini;
3. seluruh dosen dan staf karyawan Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
4. Ibu Mesikem dan Bapak Tumiranto, Kakak Ali Wahadin, Kakak Irana Yainu Pita, Kakak Andik Hermawan, Adik Anggin Verdika Aldovit, serta keponakan-keponakan tercinta yang telah memberikan semangat, doa dan dukungan kepada penulis;
5. Orang terkasihku mas Suswanto yang senantiasa mendampingi dengan doa, memberi dukungan dan semangat tanpa henti;
6. teman-teman satu bidang skripsi fraktal Niya, Riris, dan Isyana yang selalu memberi dukungan dalam bentuk apapun;

7. teman-teman Mas Annash, Mas Zulfi, Haris, Iqbal, Ema dan Novi yang senantiasa memotivasi penulis agar terselesainya skripsi ini;
8. teman-teman rumpik Dinar, Lia, Puni, Elsha, Ulfi, Sinta, Anindita, dan rekan kerjaku rohmah serta seluruh keluarga kos 105 yang senantiasa memberikan canda tawa dan menjadi keluarga kedua penulis;
9. teman-teman seangkatan “EXTREME” yang banyak membantu selama studi, serta teman-teman KKN UMD 89 yang memberikan semangat tiada henti;
10. serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan sehingga diharapkan adanya saran dan kritik untuk perbaikan selanjutnya. Semoga skripsi ini bermanfaat dan bisa dikembangkan lagi agar lebih sempurna.

Jember, Februari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xiv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvi
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	3
<b>1.3 Tujuan Penelitian</b> .....	3
<b>1.4 Manfaat Penelitian</b> .....	4
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	5
<b>2.1 Fraktal</b> .....	5
<b>2.2 Barisan Konvergen</b> .....	6
<b>2.3 Konsep Geometri</b> .....	7
2.3.1 Koordinat Titik pada Segmen Garis.....	7
2.3.2 Kesebangunan Segitiga.....	8
<b>2.4 Chaos Game</b> .....	9
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	16

3.1	<i>Aturan Non-Random Chaos Game</i> .....	16
3.2	Simulasi Program.....	17
3.3	Hipotesis Awal .....	18
<b>BAB 4.</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	19
4.1	<i>Aturan Non-Random Chaos Game</i> .....	19
4.2	Simulasi Program.....	22
4.2.1	Fasilitas yang Tersedia pada GUI.....	22
4.2.2	Data Awal yang Harus Ditentukan User.....	23
4.2.3	Tahapan <i>Non-Random Chaos Game</i> .....	24
4.3	Perhitungan Numerik Aturan <i>Non-Random Chaos Game</i> pada Segitiga .....	29
4.4	Perhitungan Analitik Aturan <i>Non-Random Chaos Game</i> pada Segitiga .....	36
<b>BAB 5.</b>	<b>PENUTUP</b> .....	52
5.1	Kesimpulan .....	52
5.2	Saran .....	52
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	53
	<b>LAMPIRAN</b> .....	55

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Hasil perhitungan jarak pada percobaan ke-1 .....	31
Tabel 4.2 Rancangan percobaan ke-1 sampai ke-6.....	32
Tabel 4.3 Koordinat segitiga awal .....	34
Tabel 4.4 Koordinat titik sudut segitiga hasil <i>non-random</i> <i>Chaos Game</i> .....	35
Tabel 4.5 Koordinat titik tengah bentukan <i>non-random Chaos Game</i> ...	39

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Kurva Von Koch .....	5
Gambar 2.2 Fraktal Mandelbrot Set.....	6
Gambar 2.3 Kesebangunan Titik $R$ diantara titik $P$ dan $Q$ .....	7
Gambar 2.4 Kesebangunan dua segitiga sebarang.....	7
Gambar 2.5 Segitiga awal yang memiliki titik sudut $ABC$ .....	10
Gambar 2.6 <i>Chaos Game</i> setelah iterasi ke-30 dalam membangkitkan Segitiga Sierpinski .....	10
Gambar 2.7 <i>Chaos Game</i> setelah iterasi ke-100 dalam membangkitkan Segitiga Sierpinski.....	10
Gambar 2.8 <i>Chaos Game</i> setelah iterasi ke-400 dalam membangkitkan Segitiga Sierpinski .....	11
Gambar 2.9 <i>Chaos Game</i> setelah iterasi ke-30.000 dalam membangkitkan Segitiga Sierpinski.....	11
Gambar 2.10 Segitiga Sierpinski dengan jarak $1/3$ dari titik sudut pada tingkat 3.....	12
Gambar 2.11 Segitiga Sierpinski dengan perputaran 90 derajat .....	13
Gambar 2.12 Segitiga Sierpinski dengan perputaran 180 derajat .....	13
Gambar 2.13 Segitiga Sierpinski dengan perputaran 20 derajat .....	14
Gambar 2.14 Sierpinski Hexagon .....	14
Gambar 3.1 Skema Penelitian .....	16
Gambar 3.2 Aturan <i>non-random Chaos Game</i> pada iteasi ke-2000 .....	18
Gambar 4.1 Segitiga sebarang dengan titik sudut $T_0T_1T_2$ .....	20
Gambar 4.2 Titik Awal <i>non-random Chaos Game</i> di dalam segitiga .....	20
Gambar 4.3 Pemilihan titik sudut ke-1 .....	20

Gambar 4.4	<i>Non-random Chaos Game</i> iterasi ke-1 .....	21
Gambar 4.5	Urutan pemilihan titik sudut ke-2 dengan titik awal $A_1$ .....	21
Gambar 4.6	<i>Non-random Chaos Game</i> iterasi ke-2.....	22
Gambar 4.7	Tampilan program GUI.....	23
Gambar 4.8	Iterasi ke-33 percobaan ke-1 .....	25
Gambar 4.9	Ilustrasi pergerakan titik bentukan <i>non-random Chaos Game</i> .....	28
Gambar 4.10	Penyajian Segmen Garis.....	29
Gambar 4.11	Titik sudut percobaan ke-1 .....	30
Gambar 4.12	Iterasi ke-3 (a) dan Iterasi ke-6 (b) percobaan ke-1 .....	30
Gambar 4.13	Iterasi ke-9 (c) dan Iterasi ke-33 (d) percobaan ke-1 .....	31
Gambar 4.14	Aturan <i>non-random Chaos Game</i> pada segitiga siku-siku .....	33
Gambar 4.15	Segitiga siku-siku yang diketahui panjang sisi-sisinya .....	34
Gambar 4.16	Segitiga hasil <i>non-random Chaos Game</i> yang diketahui panjang sisi-sisinya.....	35
Gambar 4.17	Segitiga sebarang dengan titik sudut $T_0 T_1 T_2$ .....	36
Gambar 4.18	Aturan <i>non-random Chaos Game</i> pada iterasi ke-1 .....	37
Gambar 4.19	Aturan <i>non-random Chaos Game</i> pada iterasi ke-2.....	38
Gambar 4.20	Aturan <i>non-random Chaos Game</i> pada iterasi ke-3.....	38
Gambar 4.21	Aturan <i>non-random Chaos Game</i> pada iterasi ke-12.....	39
Gambar 4.22	Segitiga sebarang yang telah diketahui panjang Panjang sisi-sisinya .....	49
Gambar 4.23	Kesebangunan dua segitiga sebarang .....	51

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
A. Data Titik Koordinat dan Gambar Simulasi Program Percobaan ke-2 sampai ke-6 .....	55
B. Lampiran Script Pembangkitan Titik Tengah <i>Non-Random Chaos Game</i> .....	58
C. Lampiran Script Peluang Terpilihnya Titik Sudut.....	59
D. Lampiran Script Pembentuk Segitiga, Pemilihan Titik Awal Acak dan Pemilihan Urutan Titik Sudut .....	59

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Era globalisasi ini menjadikan ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang sangat pesat. Wujud perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi adalah dengan ditemukannya komputer yang memberikan peranan penting dalam berbagai aspek kehidupan. Adanya komputer memudahkan manusia untuk mempelajari berbagai bidang ilmu pengetahuan. Geometri fraktal merupakan salah satu ilmu pengetahuan di bidang matematika yang berkembang cukup pesat dengan adanya komputer. Geometri fraktal ini kemudian lebih dikenal dengan istilah fraktal.

Fraktal dapat membantu menjelaskan banyak situasi yang sulit dideskripsikan menggunakan geometri klasik. Fraktal sudah cukup banyak diaplikasikan dalam sains, teknologi, dan seni karya komputer. Keindahan fraktal menjadikan objek tersebut banyak digunakan dalam *graphical computer* untuk menciptakan bentuk-bentuk yang alami bahkan menakjubkan. Keberadaan fraktal menunjukkan bahwa matematika bukanlah subjek yang kering dan datar, tetapi merupakan subjek yang indah dan dapat menghasilkan karya-karya yang memiliki citra seni dan nilai intelektual yang tinggi. Fraktal merupakan bahasa baru, fraktal dapat menggambarkan awan sama persisnya seperti seorang arsitek yang dapat menggambarkan rumah (Barnsley, 1993).

Apabila visualisasi komputer diaplikasikan pada fraktal, dapat disajikan argumen-argumen visual yang ampuh untuk menunjukkan bahwa geometri fraktal menghubungkan banyak bidang matematika dan sains, jauh lebih besar dan luas dari yang diperkirakan sebelumnya. Bidang-bidang yang terhubung oleh fraktal terutama adalah dinamika non linier, teori *chaos*, dan kompleksitas. Salah satu contoh adalah menggambar metode Newton sebagai fraktal yang ternyata menunjukkan bahwa batas antara penyelesaian yang berbeda adalah fraktal dan penyelesaiannya sendiri adalah atraktor aneh. Fraktal juga telah digunakan untuk

kompresi data dan memodel sistem geologis dan organis yang kompleks, seperti pertumbuhan pohon dan perkembangan lembah sungai. Berbagai bidang lain yang memanfaatkan fraktal adalah bidang seismologi, kosmologi, kompresi data dan sinyal, pembuatan musik jenis baru, klarifikasi *slide* histopatologi di ilmu kedokteran, serta pembuatan berbagai bentuk karya seni baru.

Beberapa teknik atau metode untuk membangkitkan objek fraktal diantaranya adalah *L-system*, IFS (*Iterated function system*), *Iterated Complex Polynomial* dan *Strange Attractor*. Fraktal IFS dapat dibangun dengan dua metode yaitu *Supercopier* dan *Chaos Game*. *Chaos Game* merupakan bentuk permainan menggambar titik dalam suatu bidang dengan aturan tertentu yang diulang-ulang secara iteratif. Pertama gambar tiga titik sebagai pembentuk segitiga, kemudian ambil titik sebarang atau acak sebagai titik awal. Selanjutnya tandai titik yang jaraknya setengah dari salah satu titik sudut segitiga yang dipilih secara acak. Lakukan pengulangan langkah di atas sejumlah iterasi yang diinginkan. Pada jumlah iterasi yang kecil titik-titik tersebut terkesan *chaos* (kacau), namun semakin banyak iterasi maka akan semakin jelas pola titik tersebut menyerupai segitiga Sierpinski.

Menurut Purnomo (2014) segitiga Sierpinski adalah fraktal linier yang mempunyai keserupaan diri identik sampai iterasi tak hingga. Segitiga Sierpinski merupakan segitiga yang terdiri dari segitiga-segitiga lain yang berbentuk sama dan berulang dengan skala tertentu. Apabila bagian dari segitiga tersebut diperbesar, maka akan tampak keseluruhan dari segitiga Sierpinski.

Sunbye (1997) membangun segitiga Sierpinski dengan perangkat spiner untuk mendapatkan angka acak dan segitiga yang telah diberi tanda pada titik sudutnya. Titik awal yang digunakan terletak pada segitiga. Zohuri (2015) mengatakan bahwa bila titik awal pada *Chaos Game* terletak pada segitiga Sierpinski, maka titik yang ditandai berikutnya juga berada pada segitiga Sierpinski. Namun, Purnomo *et al* (2016) mengatakan bahwa pembangkitan titik tengah dari titik awal sebarang yaitu pada, di dalam, ataupun di luar segitiga dapat membangun segitiga Sierpinski. Karena titik sudut dipilih secara acak, maka pada iterasi tertentu titik tengah yang dibangkitkan akan berada pada bagian dalam

segitiga dan tidak akan keluar dari segitiga. Purnomo (2016) juga memaparkan bahwa pembentukan pola segitiga Sierpinski pada *Chaos Game* dapat dikaji dengan konsep transformasi affine, khususnya konsep dilatasi dengan faktor setengah dan pusat dilatasi di salah satu titik sudut segitiga sama sisinya.

Devaney (2003) membangun hexagon Sierpinski dengan jumlah titik sudut sebanyak enam dengan aturan produksi yang berbeda yaitu mengubah jarak antara titik acak dan titik sudut yang dipilih menjadi faktor tiga. Hal ini berarti bahwa memindahkan titik sehingga jarak yang dihasilkan dari titik acak dan titik sudut yang dipilih adalah sepertiga jarak awal. Dalam kaitannya dengan *Chaos Game*, penelitian ini akan membahas kajian pada aturan *non-random Chaos Game* di mana pemilihan titik sudutnya dilakukan secara urut secara terus menerus (tidak acak) dan titik-titik sudut pembentuknya adalah segitiga.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, maka rumusan masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah

- a. Apakah kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen di titik koordinat tertentu?
- b. Bagaimana perhitungan numerik dan analitik aturan *non-random Chaos Game* terhadap kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah

- a. Mengetahui kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen di titik koordinat tertentu.
- b. Mengetahui perhitungan numerik dan analitik aturan *non-random Chaos Game* terhadap kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama.
- c. Membuat program untuk memvisualisasi aturan *non-random Chaos Game* pada segitiga.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah memberikan informasi tentang *Chaos Game* yang dikembangkan dengan memodifikasi aturannya, dimana pemilihan titik sudut aturan tersebut dipilih secara urut secara terus menerus (tidak acak) yang akan diterapkan pada segitiga serta mengetahui analisis dari aturan *non-random Chaos Game* sehingga dapat bermanfaat pada penelitian-penelitian berkaitan selanjutnya.

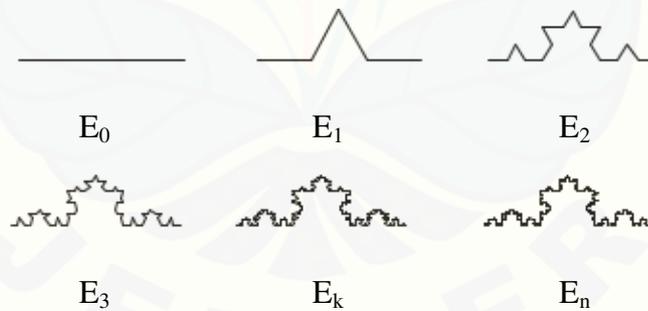


## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Fraktal

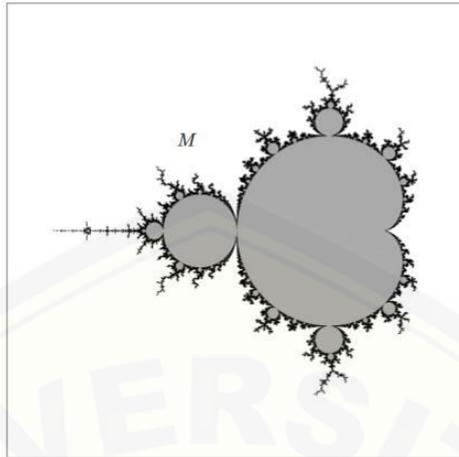
Mandelbrot (1997) mengatakan bahwa Fraktal berasal dari bahasa latin yaitu *fractus* yang artinya tidak teratur atau terfragmentasi dan kata kerja *frangere* yang berarti kepingan-kepingan atau fragmen-fragmen yang tidak beraturan. Akan tetapi di dalam ketidak teraturan tersebut, fraktal mempunyai keteraturan bentuk “kesamaan diri” (*self-similarity*) yaitu suatu bentuk yang mengulang bentuk keseluruhan dalam skala yang berbeda. Sifat *self-similarity* fraktal mempunyai tiga jenis klasifikasi yaitu *exact self-similarity*, *approximate self-similarity*, dan *statistical self-similarity*.

- a. *Exact Self-Similarity* adalah bentuk fraktal yang tampak persis dalam berbagai skala. Fraktal ini terjadi pada fraktal yang terdefinisi dengan iterasi yaitu *Iterated Function System (IFS)*, misalnya kurva *Koch* seperti Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Kurva Von Koch  
(Sumber: Sulistiyantoko, 2008)

- b. *Approximate Self-Similarity* merupakan kebalikan dari *Exact Self Similarity*. Bentuk fraktal *Approximate Self-Similarity* tidak memiliki bentuk yang sama persis dalam berbagai skala. Contoh dari fraktal jenis ini adalah *Mandelbrot set* seperti Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Fraktal Mandelbrot set  
(Sumber: Devaney, 2002)

c. *Statistical Self-Similarity* merupakan bentuk fraktal yang paling dasar karena tidak tervisualisasi dengan jelas tetapi memiliki ukuran statistik yang dipertahankan pada ukuran dan rasio yang berbeda. Ukuran statistik yang dimaksud adalah ukuran fraktal tersebut dapat ditunjukkan dengan grafik statistik. Contoh fraktal jenis ini adalah *Brownian motion* (Bourke, 2002).

Fraktal dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu himpunan-himpunan fraktal (*fractal sets*) dan fraktal alami (*natural fractal*). Contoh himpunan fraktal adalah *Koch snowflake*, *Cantor dust*, *Sierpinski triangle*, *Julia set* dan *Mandelbrot set*. Sedangkan untuk fraktal alami, Mandelbrot mencontohkan bentuk pegunungan, awan-awan, cabang pohon, garis pantai, salju, model fluktuasi mata uang dalam pasar finansial, dan lainnya (Mandelbrot, 1977).

## 2.2 Barisan Konvergen

**Definisi 2.1.** Barisan bilangan real adalah suatu fungsi bernilai real (atau suatu barisan di  $R$ ) atau suatu fungsi pada himpunan  $N$  dengan daerah hasil yang termuat di  $R$ .

Bartle (1992) menyatakan bahwa suatu barisan di  $R$  memasangkan masing-masing bilangan asli  $n = 1, 2, 3, \dots$  secara tunggal dengan bilangan real. Bilangan real yang diperoleh tersebut disebut elemen, nilai atau suku dari barisan

tersebut. Penulisan elemen dari  $R$  yang berpasangan dengan  $n \in N$  menggunakan suatu simbol seperti  $x_n$ ,  $a_n$  atau  $z_n$ . Jadi bila  $X: N \mapsto R$  suatu barisan, maka nilai  $X$  di  $n$  dapat dituliskan dengan  $X_n$ . Contoh barisan adalah bila  $a \in R$ , maka barisan  $A = (a^n: n \in N)$  adalah barisan  $(a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$ . Khususnya bila  $a = \frac{1}{2}$ , maka diperoleh barisan  $(\frac{1}{2^n}: n \in N)$ .

**Definisi 2.2.** Misalkan  $X = (x_n)$  barisan bilangan real. Bilangan real  $x$  dikatakan limit dari  $(x_n)$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $N$  yang bergantung pada  $\varepsilon$  sehingga berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N$$

Bila  $x$  merupakan suatu limit dari barisan tersebut, dapat dikatakan bahwa  $X = (x_n)$  konvergen ke  $x$  atau mempunyai limit  $x$ . Jika suatu barisan mempunyai limit maka barisan tersebut **konvergen**. Sebaliknya jika tidak mempunyai limit maka barisan tersebut **divergen**. Bila suatu barisan  $x = (x_n)$  mempunyai limit  $x$  di  $R$ , dapat digunakan notasi  $\lim x_n = x$  atau  $\lim(x_n) = x$ . Notasi lain untuk hal ini adalah  $x_n \rightarrow x$  untuk menyatakan bahwa  $x_n$  “mendekati”  $x$  bila  $n \rightarrow \infty$ .

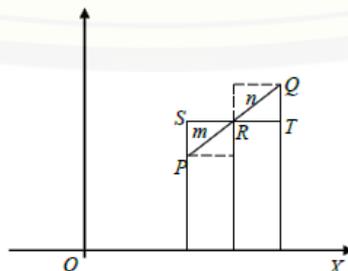
**Teorema 2.1** Misalkan  $X = (x_n)$  barisan bilangan real, maka  $\lim_{x \rightarrow a} k(x_n) = k \lim_{x \rightarrow a}(x_n)$ .

**Teorema 2.2** Jika  $0 < b < 1$ , maka  $\lim(b^n) = 0$

## 2.3 Konsep Geometri

### 2.3.1 Koordinat Titik pada Segmen Garis

Misalkan segmen garis  $\overline{PQ}$  didefinisikan oleh titik  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_2, y_2)$ , maka dapat dicari koordinat  $R(x, y) \in \overline{PQ}$  atas perbandingan  $m : n$  terhadap titik ujung-ujung  $P$  dan  $Q$ .



Gambar 2.3 Titik  $R$  diantara titik  $P$  dan  $Q$ 

(Sumber: Kusno, 2010)

Pada Gambar 2.3,  $\Delta SRP \sim \Delta RQT$  sehingga berlaku

$$\frac{m}{n} = \frac{SP}{QT} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \text{ atau } y = \frac{my_2+ny_1}{m+n} \quad (1.1)$$

Dengan cara yang sama untuk  $x$ , maka didapatkan hubungan

$$\frac{m}{n} = \frac{x-x_1}{x_2-x} \text{ atau } x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n} \quad (1.2)$$

Jika  $R$  merupakan titik tengah dari  $\overline{PQ}$ , yaitu  $m : n = 1 : 1$ , maka koordinat titik  $R$  dapat dinyatakan sebagai

$$R \left( \frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2} \right) \quad (1.3)$$

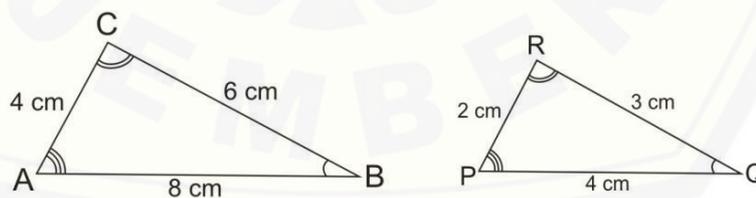
Secara umum, jika perbandingan  $m : n$  bernilai sebarang real  $k \neq -1$ , maka posisi  $R$  dapat terletak mungkin diantara  $\overline{PQ}$  atau diperpanjangnya dan koordinat  $R$  berbentuk

$$R \left( \frac{kx_2+x_1}{1+k}, \frac{ky_2+y_1}{1+k} \right) \quad (1.4)$$

Oleh karenanya terdapat beberapa kemungkinan untuk nilai  $k$  yaitu:

- Jika  $k > 0$ , maka  $R$  diantara  $\overline{PQ}$ ;
- Jika  $-1 < k < 0$ , maka  $R$  pada perpanjangan  $\overline{QP}$ ;
- Jika  $k = -1$ , maka menunjukkan titik di tak terhingga;
- Jika  $k < -1$ , maka  $R$  pada perpanjangan  $\overline{PQ}$  (Kusno, 2010)

### 2.3.2 Kesebangunan Segitiga



Gambar 2.4 Kesebangunan dua segitiga sebarang

Gambar 2.4 merupakan dua sebarang segitiga yang telah diketahui panjang sisi-sisinya. Dua segitiga dikatakan sebangun jika ada korespondensi satu-satu antar titik-titik sudut kedua segitiga tersebut sedemikian hingga berlaku:

- Sudut-sudut yang bersesuaian (berkorespondensi) sama besar.

$$\angle CAB = \angle RQP, \angle ACB = \angle PRQ, \angle CAB = \angle RPQ$$

2. Semua perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian (berkorespondensi) sama besar.

$$\frac{|AC|}{|PR|} = \frac{|CB|}{|RQ|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$$

#### 2.4 Chaos Game

Pada geometri fraktal, *Chaos Game* merupakan salah satu metode untuk membangkitkan segitiga Sierpinski. Kaitan *Chaos Game* dengan fraktal secara fisika dan matematika, teori *chaos* menjelaskan tentang perilaku dari sistem dinamis non linier tertentu yang pergerakannya sangat bergantung pada kondisi awal. Sebagai hasil dari ketergantungan pada kondisi awal tersebut adalah bahwa kondisi awal menyebabkan gangguan yang pada akhirnya akan terlihat sebagai suatu yang acak. Jadi pergerakan yang akan datang sangat bergantung sepenuhnya pada kondisi awal mereka (Sulistiyantoko, 2008).

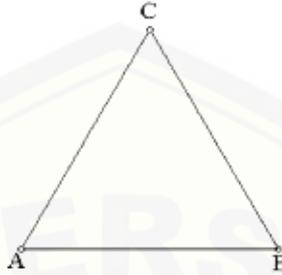
Tahapan metode ini dimulai dengan penentuan koordinat titik awalnya secara acak dan titik sudut secara acak. Kemudian ambil titik baru yang berjarak setengah dari titik awal ke titik sudut. Selanjutnya titik baru bentukan *Chaos Game* berperan sebagai titik awal, sehingga didapatkan titik-titik lain bentukan *Chaos Game* sesuai iterasi yang ditentukan. Seluruh tahapan *Chaos Game* secara berurutan dari iterasi rendah sampai ke iterasi tinggi dipaparkan pada Gambar 2.5, Gambar 2.6, Gambar 2.7, Gambar 2.8 dan Gambar 2.9.

Purnomo *et al* (2016) mengklasifikasikan koordinat titik awal acak menjadi tiga, yaitu:

- a) pada segitiga Sierpinski
- b) di dalam segitiga Sierpinski
- c) di luar segitiga Sierpinski

Jika titik acuan awal terletak di luar segitiga sama sisi, maka pada iterasi selanjutnya akan dibangkitkan titik-titik tengah yang mendekati ke salah satu dari tiga titik sudut segitiga sama sisinya. Karena titik sudut dipilih secara acak, maka pada iterasi tertentu titik tengah yang dibangkitkan akan berada pada bagian dalam segitiga sama sisi. Pada saat titik tengah tersebut berada di bagian dalam

segitiga sama sisi, maka titik tengah berikutnya yang dibangkitkan akan selalu berada di dalam segitiga sama sisi dan kumpulan titik tengahnya akan membentuk pola segitiga Sierpinski.



Gambar 2.5 Segitiga awal yang memiliki titik sudut ABC

(Sumber: Zohuri, 2015)



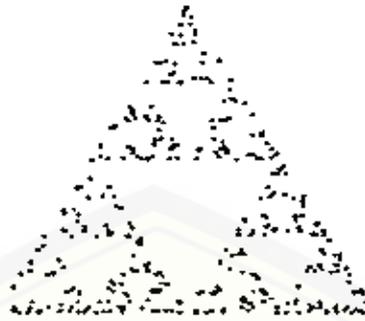
Gambar 2.6 *Chaos Game* setelah iterasi ke-30 dalam membangkitkan segitiga Sierpinski

(Sumber: Zohuri, 2015)



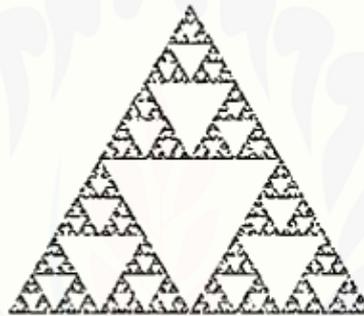
Gambar 2.7 *Chaos Game* setelah iterasi ke-100 dalam membangkitkan segitiga Sierpinski

(Sumber: Zohuri, 2015)



Gambar 2.8 *Chaos Game* setelah iterasi ke-400 dalam membangkitkan segitiga Sierpinski

(Sumber: Zohuri, 2015)



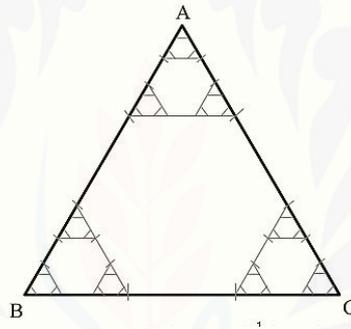
Gambar 2.9 *Chaos Game* setelah iterasi ke-30.000 dalam membangkitkan segitiga Sierpinski

(Sumber: Zohuri, 2015)

Menurut Purnomo (2016) Pembentukan pola segitiga Sierpinski pada masalah *Chaos Game* dapat dijelaskan dengan transformasi affine. Transformasi affine yang digunakan adalah konsep dilatasi dengan faktor setengah dan pusat dilatasi di salah satu titik sudut segitiga sama sisinya. Dengan konsep dilatasi seperti ini, maka setiap titik yang terletak pada segmen garis dalam segitiga Sierpinski akan didilatasi setengahnya dengan pusat dilatasi di titik sudut manapun. Setiap pengambilan titik awal sebarang  $T_0(x_0, y_0)$  yang terletak pada segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski, maka akan membangkitkan titik tengah yang juga terletak pada segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski. Dengan kata lain, kumpulan titik-titik tengah tersebut akan membentuk pola seperti pada segmen garis pada segitiga Sierpinski. Dalam hal ini titik awal

sebagai acuan menentukan titik-titik tengah tidak harus berada di bagian dalam segitiga sama sisi, namun juga dimungkinkan berada di luarnya. Karena titik sudut dipilih secara acak, titik-titik tengah yang berada di luar segitiga sama sisi dalam iterasi tertentu akan berada di dalam segitiga sama sisinya.

Segitiga Sierpinski merupakan segitiga yang dibangun dengan jarak setengah dari titik sudut, sehingga membentuk segitiga baru pada bagian tengahnya. Apabila jaraknya diubah menjadi  $1/3$  dari titik sudut, maka terbentuk suatu poligon segienam di bagian tengahnya seperti Gambar 2.10. Karena tidak menghasilkan segitiga Sierpinski, maka jarak *Chaos Game* haruslah setengah dari titik sudut agar dapat membangun segitiga Sierpinski (Armana, 2016).



Gambar 2.10 Segitiga Sierpinski dengan jarak  $1/3$  dari titik sudut pada iterasi tingkat 3

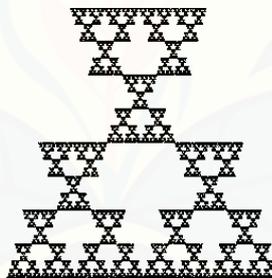
(Sumber: Armana, 2016)

Devaney (2003) memodifikasi segitiga Sierpinski dengan memanfaatkan transformasi geometri yaitu rotasi. Dimulai dengan titik pada sebuah segitiga seperti dalam kasus ini adalah segitiga Sierpinski. Untuk 2 titik bawah pindahkan titik ke setengah jarak dimana titik itu disebut. Untuk titik paling atas, pindahkan titik separuh jarak ke titik tersebut, kemudian putar titik 90 derajat searah jarum jam dengan pusat perputaran titik puncak tersebut. Hasil aturan produksi di atas adalah seperti Gambar 2.11.



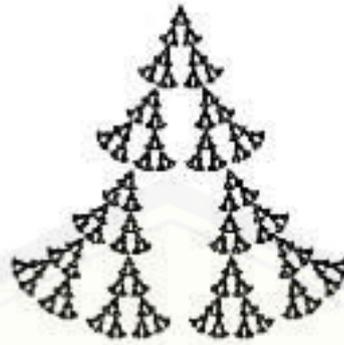
Gambar 2.11 Sierpinski dengan perputaran 90 derajat  
(Sumber: Devaney, 2003)

Gambar 2.11 menunjukkan ada tiga bentuk dasar yang *self-similarity*, masing-masing merupakan setengah ukuran asli, tapi bagian atasnya diputar 90 derajat searah jarum jam. Apabila rotasi pada bagian atasnya diubah menjadi 180 derajat, maka akan menghasilkan fraktal seperti pada Gambar 2.12.



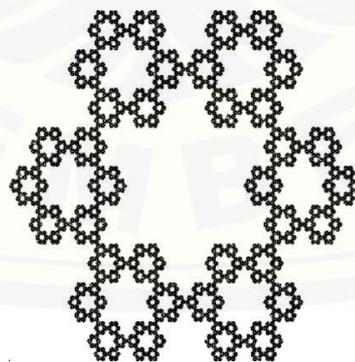
Gambar 2.12 Sierpinski dengan perputaran 180 derajat  
(Sumber: Devaney, 2003)

Pada Gambar 2.12 terlihat bahwa bagian atas yang *self-similarity* berputar sebesar 180 derajat. Devaney (2003) juga merubah sudut perputaran pada bagian titik kiri bawah menjadi 20 derajat searah jarum jam, memutar 20 derajat titik kanan bawah berlawanan jarum jam, namun tidak memutar titik bagian atas maka dihasilkan fraktal seperti Gambar 2.13.



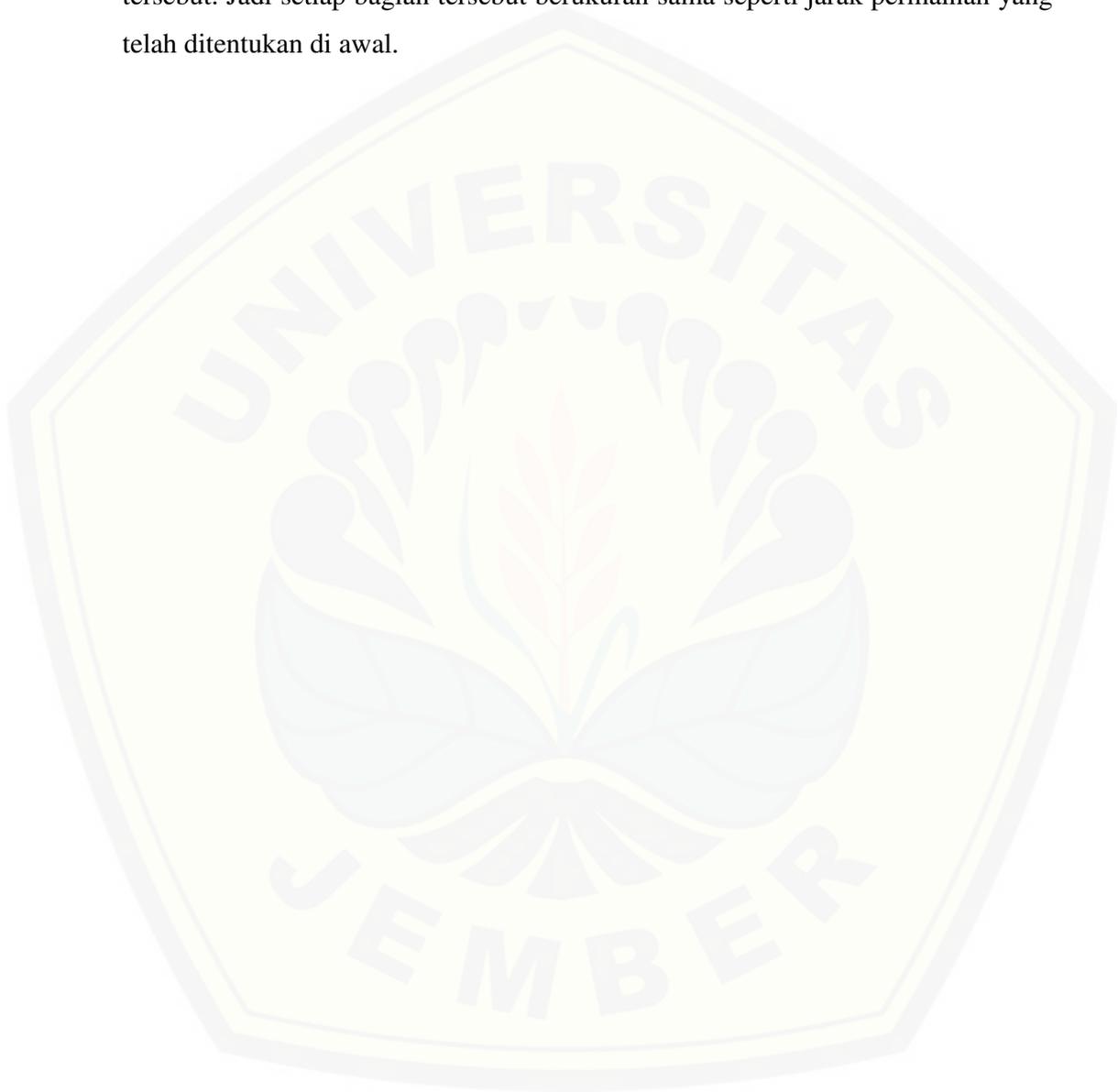
Gambar 2.13 Sierpinski dengan perputaran 20 derajat  
(Sumber: Devaney, 2003)

*Chaos Game* merupakan suatu permainan titik yang masih dapat dikembangkan aturan produksinya, misal bagaimana jika mengubah jumlah titik sudutnya atau mengubah jarak antara titik awal dengan titik sudut yang ditentukan, dan masih banyak yang lainnya. Devaney (2003) memodifikasi aturan produksi *Chaos Game* dan menghasilkan Sierpinski hexagon. Pertama ditentukan enam titik awal sehingga membentuk sebuah hexagon, kemudian lakukan langkah-langkah *Chaos Game* pada segitiga Sierpinski, namun yang berbeda adalah jarak antara titik sudut dengan titik awal yaitu sepertiga jarak aslinya. Dengan kata lain, kita mengompres rasio dari game ini menjadi tiga.



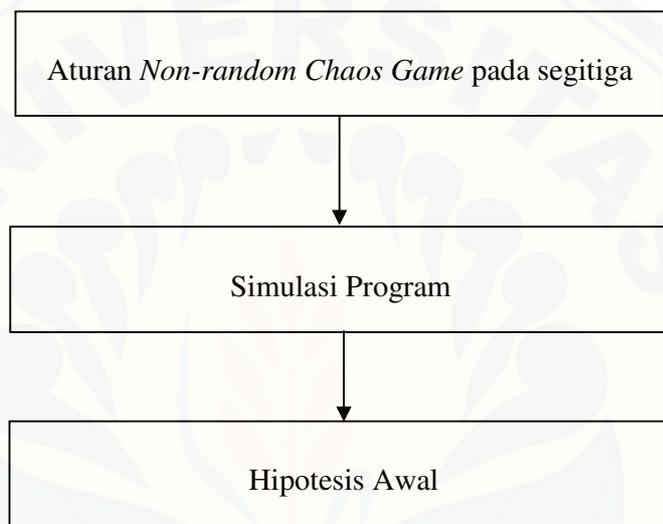
Gambar 2.14 Sierpinski hexagon  
(Sumber: Devaney, 2003)

Gambar 2.14 menunjukkan sebuah Sierpinski hexagon pada iterasi ke-1000. Sierpinski hexagon di atas terdiri dari enam bagian yang *self-similarity*, yang masing-masing berukuran sepertiga ukuran penuh Sierpinski hexagon tersebut. Jadi setiap bagian tersebut berukuran sama seperti jarak permainan yang telah ditentukan di awal.



### BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini membahas tentang prosedur yang akan digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini. Secara skematik, langkah-langkah yang akan dilakukan dapat digambarkan dengan diagram alir pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Penelitian

Berdasarkan skema pada Gambar 3.1, langkah-langkah penelitian dapat dijelaskan sebagai berikut:

#### 3.1 Aturan *Non-Random Chaos Game*

*Non-random Chaos Game* hampir sama seperti *Chaos Game* biasanya, namun perbedaannya adalah cara pemilihan titik sudutnya yang urut dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya. Misalkan kita tentukan urutan pemilihan titik sudut pada segitiga adalah 2, 3, 1, maka untuk iterasi pertama dipilih titik sudut 2. Iterasi kedua dipilih titik sudut 3 dan iterasi ketiga dipilih titik sudut 1, begitu seterusnya sampai pada iterasi yang diinginkan. Jika urutan titik sudut dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya dijadikan sebuah urutan barisan maka akan menjadi 231231231231231231...

Berikut adalah algoritma *non-random Chaos Game* pada segitiga:

- a. membuat sebuah segitiga.
- b. memilih titik sebarang sebagai titik awal.
- c. memilih titik sudut segitiga sesuai urutan yang telah ditentukan.
- d. menentukan titik baru yang berjarak setengah dari titik awal ke titik sudut.
- e. menjadikan titik baru dari langkah (d) menjadi titik awal.
- f. mengulang langkah 3 dengan urutan titik sudut selanjutnya.
- g. melakukan hingga iterasi yang diinginkan.

### 3.2 Simulasi Program

Software yang digunakan untuk membuat program dalam penelitian ini adalah software MATLAB R2015b. Prosedur untuk membuat program ini adalah sebagai berikut:

#### 1. Input

Pada tahap ini diinputkan iterasi yang dilakukan pada *Chaos Game*, bidang segitiga, serta titik awal untuk memulai *Chaos Game*.

#### 2. Proses

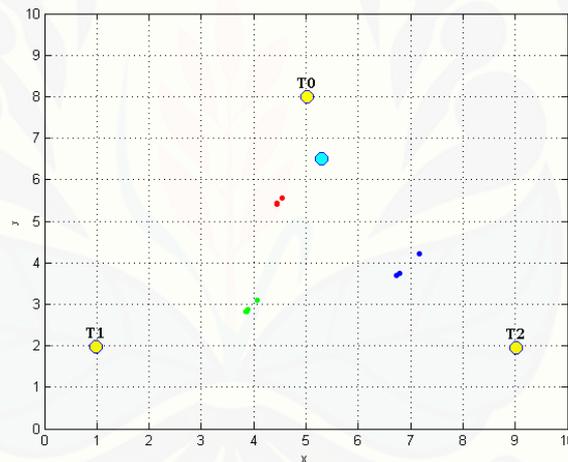
Pada tahap ini dilakukan pemrosesan program untuk aturan *non-random Chaos Game* yang telah dijelaskan pada langkah di atas.

#### 3. Output

Output yang dihasilkan dari simulasi ini berupa visualisasi objek sesuai dengan aturan *non-random Chaos Game* pada segitiga. Terdapat tiga titik sudut dengan warna pendistribusian yang berbeda, yaitu merah, hijau dan biru. Titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_0$  berwarna merah, pemilihan titik sudut  $T_1$  berwarna hijau dan pemilihan titik sudut  $T_2$  berwarna biru. Hal tersebut bertujuan untuk membedakan pengelompokan geometri titik-titik yang dibentuk sehingga memudahkan dalam analisis fraktal yang dihasilkan.

### 3.3 Hipotesis Awal

Hasil simulasi program di atas merupakan visualisasi dari aturan *non-random Chaos Game*. Pada tahap ini dijelaskan pembuktian dari hipotesis awal aturan *non-random Chaos Game* pada segitiga. Hipotesis awal sesuai dengan hasil visualisasi program untuk aturan *non-random Chaos Game* adalah kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen ke titik koordinat tertentu. Makna dari “pemilihan titik sudut yang sama” adalah titik-titik yang memiliki warna pendistribusian yang sama. Misalnya pada Gambar 2.3 titik-titik yang berwarna merah merupakan titik-titik dengan pemilihan titik sudut yang sama, karena semua titik merah merupakan titik yang dihasilkan dengan pemilihan titik sudut  $T_0$ . Gambar 3.2 adalah visualisasi program aturan *non-random Chaos Game*.



Gambar 3.2 Aturan *non-random Chaos Game* pada iterasi ke-2000

Pembuktian hipotesis di atas dilakukan dengan memanfaatkan koordinat titik-titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* yang disajikan pada simulasi program. Kemudian mencari jarak antar titik-titik yang dibentuk dengan perhitungan numerik pada masing-masing pemilihan titik sudut yang sama. Selain itu, juga dilakukan perhitungan secara analitik dengan mencari koordinat titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* secara manual dengan memanfaatkan segitiga sebarang.

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan pembuktian aturan *non-random Chaos Game* pada segitiga berdasarkan hipotesis yang telah dipaparkan pada Bab 3. Pembuktian tersebut dilakukan dengan melakukan simulasi program terlebih dahulu untuk mengetahui objek yang dihasilkan aturan *non-random Chaos Game*. Kemudian dilakukan perhitungan numerik yang berdasarkan simulasi program tersebut, dilanjutkan perhitungan analitik yang menunjukkan bahwa kumpulan titik pembentuk *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen ke titik koordinat tertentu.

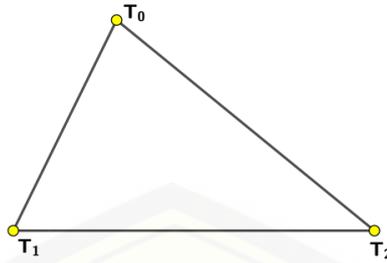
### 4.1 Aturan *Non-Random Chaos Game*

*Non-random Chaos Game* hampir sama seperti *Chaos Game* biasanya, namun perbedaannya adalah cara pemilihan titik sudutnya yang urut dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya. Titik sudut pada segitiga adalah  $T_0, T_1$ , dan  $T_2$ . Misalkan ditentukan urutan pemilihan titik sudut pada segitiga adalah  $T_1 T_0 T_2$ , maka untuk iterasi pertama dipilih titik sudut  $T_1$ . Iterasi kedua dipilih titik sudut  $T_0$ , iterasi ketiga dipilih titik sudut  $T_2$ , iterasi keempat dipilih titik sudut  $T_1$  dan begitu seterusnya sampai pada iterasi yang diinginkan. Jika urutan titik sudut dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya dijadikan sebuah urutan barisan maka akan menjadi  $T_1 T_0 T_2 T_1 T_0 T_2 T_1 T_0 T_2 \dots$

Berikut adalah algoritma *non-random Chaos Game* pada segitiga:

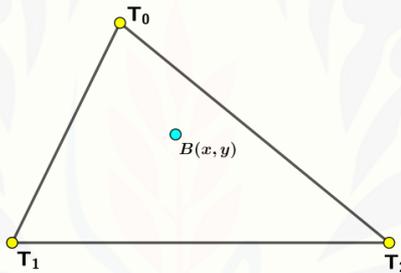
- a. membuat sebuah segitiga.

Langkah pertama adalah membuat sebuah segitiga dengan tiga titik sudut yaitu  $T_0, T_1$  dan  $T_2$ . Segitiga yang dapat digunakan adalah segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, segitiga siku-siku dan segitiga sebarang. Gambar 4.1 merupakan segitiga awal untuk memulai *non-random Chaos Game*.

Gambar 4.1 Segitiga sebarang dengan titik sudut  $T_0T_1T_2$ 

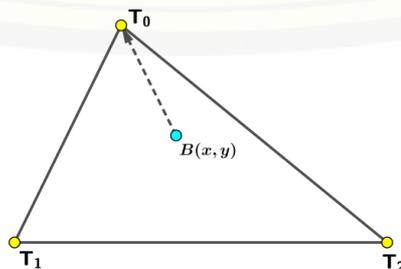
- b. memilih titik sebarang sebagai titik awal.

Titik awal adalah titik untuk memulai *non-random Chaos Game*. Titik awal dapat diletakkan di sebarang koordinat, artinya letak titik awal dapat berada di dalam, pada atau di luar segitiga yang telah di buat dari langkah (a). Misalkan ditentukan titik awal  $B(x, y)$  seperti pada Gambar 4.2.

Gambar 4.2 Titik awal *non-random Chaos Game* di dalam segitiga

- c. memilih titik sudut segitiga sesuai urutan yang telah ditentukan.

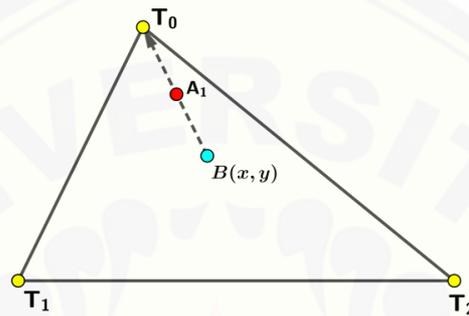
Pada langkah ini urutan pemilihan titik sudutnya sudah ditentukan oleh program. Segitiga memiliki tiga titik sudut  $T_0, T_1,$  dan  $T_2$  maka terdapat enam kombinasi urutan pemilihan titik sudut yang dapat muncul di program. Misalkan ditentukan urutan pemilihan titik sudut pada program adalah  $T_0T_1T_2T_0T_1T_2T_0T_1T_2\dots$  maka pada langkah ini dipilih titik sudut  $T_0$  seperti Gambar 4.3.



Gambar 4.3 pemilihan titik sudut ke-1

- d. menentukan titik baru yang berjarak setengah dari titik awal ke titik sudut.

Berdasarkan pemisalan pada langkah (b) dan (c), maka ditentukan titik tengah antara titik awal  $B(x, y)$  dengan titik sudut  $T_0$  sehingga didapatkan titik baru  $A_1$  seperti pada Gambar 4.4. Perhitungan koordinat titik tengah yang digunakan adalah pada Persamaan (1.3).



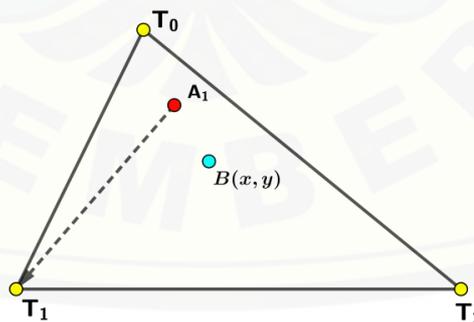
Gambar 4.4 *Non-random Chaos Game* iterasi ke-1

- e. menjadikan titik baru dari langkah (d) menjadi titik awal.

Pada langkah ini titik awal yang digunakan bukan titik  $B(x, y)$ , melainkan titik  $A_1$ .

- f. mengulang langkah (c) dengan urutan titik sudut selanjutnya.

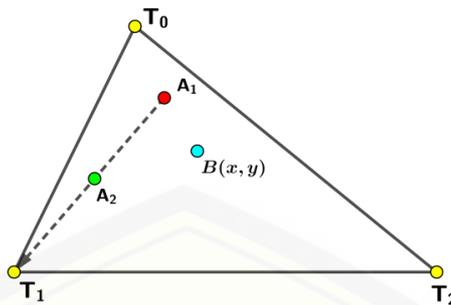
Selanjutnya memilih titik sudut pada urutan selanjutnya. Berdasarkan urutan pemilihan yang ditentukan pada langkah (c), pada langkah ini dipilih titik sudut  $T_1$  seperti pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Urutan pemilihan titik sudut ke-2 dengan titik awal  $A_1$

- g. melakukan hingga iterasi yang diinginkan.

Kemudian melakukan langkah (d), (e), (f) secara berulang-ulang sampai pada iterasi yang diinginkan. Titik  $A_2$  merupakan titik tengah antara  $A_1$  dengan  $T_1$ .

Gambar 4.6 *Non-random Chaos Game* iterasi ke-2

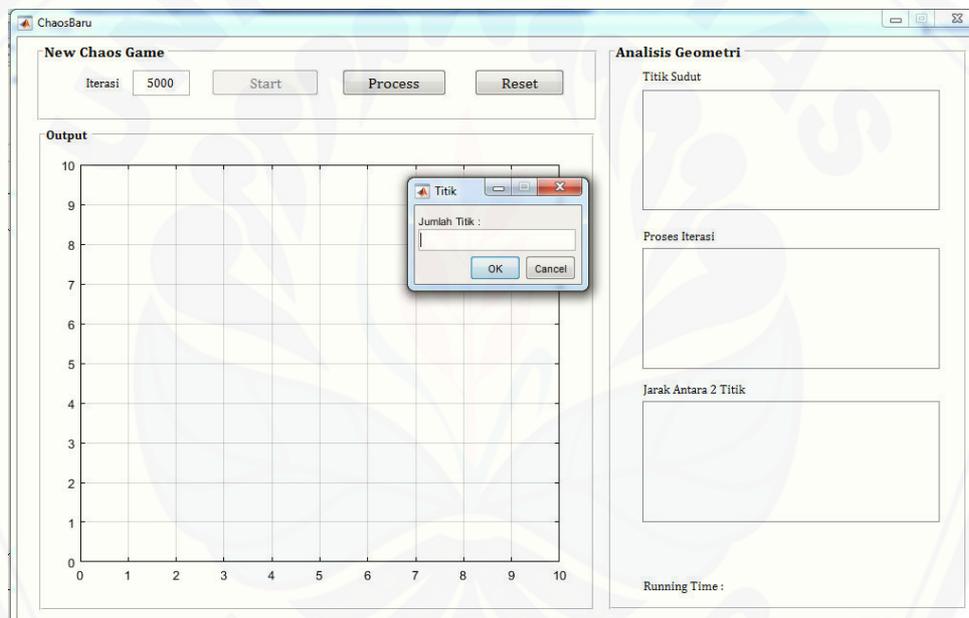
## 4.2 Simulasi Program

### 4.2.1 Fasilitas yang Tersedia pada GUI

Software yang digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini adalah MATLAB R2015b. Terdapat dua hal yang harus diperhatikan pada tampilan GUI yang disajikan pada layar untuk menghasilkan visualisasi objek-objek dari aturan *non-random Chaos Game* pada segitiga, diantaranya pemilihan titik sudut dan koordinat pembentuk titik *non-random Chaos Game*.

Pada matlab terdapat istilah uipanel yang berarti bagian dan uitable yang berarti tabel. Pada uipanel *New Chaos Game*, terdapat edit teks Iterasi yang berfungsi menginputkan iterasi yang digunakan *non-random Chaos Game* dan tiga *pushbutton* yaitu “Start”, “Process”, dan “Reset” yang memiliki fungsi masing-masing. *Pushbutton* “Start” berfungsi untuk mengawali program dengan memilih titik koordinat bentukan segitiga serta titik awal pada *axes*. Sebelum menentukan letak titik sudut dan titik awal, terdapat *edit* teks “jumlah titik sudut” yang berfungsi untuk menentukan poligon yang akan digunakan pada aturan *non-random Chaos Game* karena pada program ini disiapkan aturan *non-random Chaos Game* untuk semua poligon meskipun yang dibahas pada penelitian ini hanya pada segitiga. *Pushbutton* “Process” berfungsi untuk memulai *non-random Chaos Game*, *pushbutton* “Reset” berfungsi untuk menghapus semua proses yang dilakukan *non-random Chaos Game*. Pada uipanel “Output” terdapat *axes* dengan tampilan koordinat kartesius yang berfungsi untuk menampilkan visualisasi *non-random Chaos Game*. Pada uipanel “Analisis Geometri” terdapat tiga uitable dan satu text. Uitable pertama yaitu “Titik Sudut” yang akan menampilkan koordinat titik-titik sudut, warna dari titik-titik tersebut, dan peluang terpilihnya titik-titik

sudut tersebut sebagai fasilitas tambahan pada program. Uitable kedua adalah “Proses Iterasi” yang menampilkan koordinat titik-titik bentukan *non-random Chaos Game*, titik sudut yang dipilih untuk membentuk titik tersebut, serta dapat mengetahui apakah letak titik tersebut berada di dalam atau di luar bidang. Uitable ketiga adalah “Jarak antara 2 titik” yang menampilkan jarak antar titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* pada masing-masing titik sudut. Terdapat fasilitas tambahan pula yaitu text “Running Time” yang berfungsi untuk menampilkan waktu yang dibutuhkan untuk *Chaos Game*. Gambar 4.7 merupakan tampilan program yang dibuat beserta fasilitas-fasilitas yang tersedia.



Gambar 4.7 Tampilan program GUI

#### 4.2.2 Data Awal yang Harus Ditentukan User

Simulasi tersebut dilakukan dengan memvariasikan segitiga, urutan pemilihan titik sudut, dan letak titik awal. Terdapat tiga titik sudut pembentuk segitiga yaitu  $T_0$ ,  $T_1$ , dan  $T_2$ . Berikut merupakan variasi segitiga, urutan pemilihan titik sudut, dan letak titik awal.

- a. Jenis segitiga
  - 1) Segitiga sama sisi
  - 2) Segitiga sama kaki

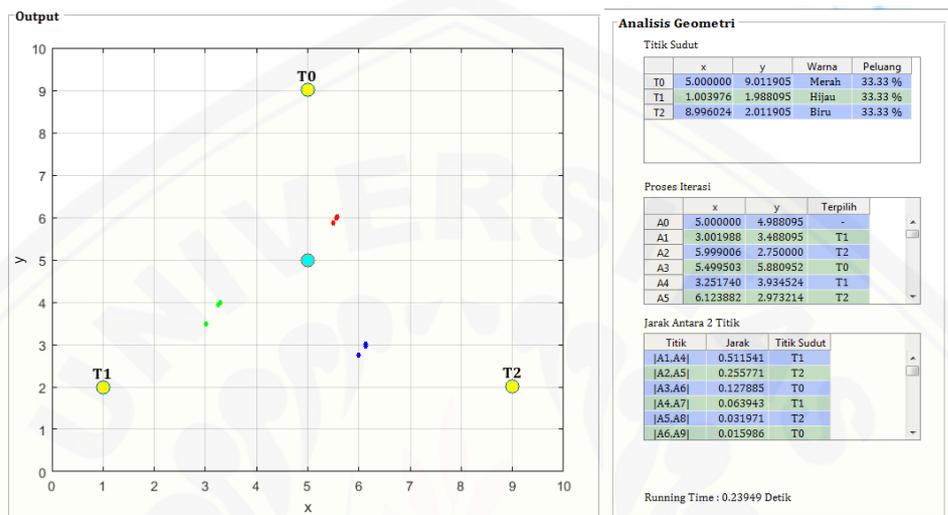
- 3) Segitiga siku-siku
  - 4) Segitiga sebarang
- b. Urutan pemilihan titik sudut
- 1)  $T_1 T_2 T_0$
  - 2)  $T_2 T_0 T_1$
  - 3)  $T_0 T_2 T_1$
  - 4)  $T_1 T_0 T_2$
  - 5)  $T_2 T_1 T_0$
  - 6)  $T_0 T_1 T_2$
- c. Letak titik awal
- 1) Pada segitiga
  - 2) Di dalam segitiga
  - 3) Di luar segitiga

#### 4.2.3 Tahapan *Non-Random Chaos Game*

Tahapan ini bertujuan untuk memvisualisasikan objek yang dihasilkan aturan *non-random Chaos Game*. Setelah mendapatkan variasi segitiga, urutan pemilihan titik sudut, dan letak titik awal, langkah selanjutnya adalah melakukan simulasi program. Iterasi yang digunakan untuk semua simulasi adalah 33 karena setelah iterasi ke-33, titik-titik yang dihasilkan *non-random Chaos Game* tumpang tindih dengan titik yang dihasilkan pada iterasi ke-33. Hal tersebut mengakibatkan objek yang dihasilkan pada iterasi tersebut sama dengan objek yang dihasilkan pada iterasi ke-33.

Langkah pertama ketika melakukan simulasi adalah memasukkan iterasi pada *edit* teks iterasi, kemudian menentukan letak titik sudut pembentuk segitiga dan titik awal pada *axes* dengan cara mengklik pada kursor sesuai letak titik yang diinginkan *user*. Sebelum menentukan titik sudut dan titik awal, *pushbutton* “*Start*” harus ditekan terlebih dahulu dan inputkan jumlah titik sudut pembentuk poligon karena pada program telah disiapkan aturan *non-random Chaos Game* untuk semua poligon. Langkah selanjutnya adalah menekan *pushbutton* “*Process*” untuk memulai *non-random Chaos Game*. Selanjutnya akan ditampilkan hasil visualisasi objek pada uipanel *output* sesuai dengan aturan *non-random Chaos*

*Game*. Peluang terpilihnya masing-masing titik sudut, warna distribusi masing-masing titik sudut dan letak titik koordinat titik sudut ditampilkan pada uitable “Titik Sudut”. Sedangkan titik koordinat dan jarak antar titik bentukan *non-random Chaos Game* ditampilkan pada uitable “Proses Iterasi”.



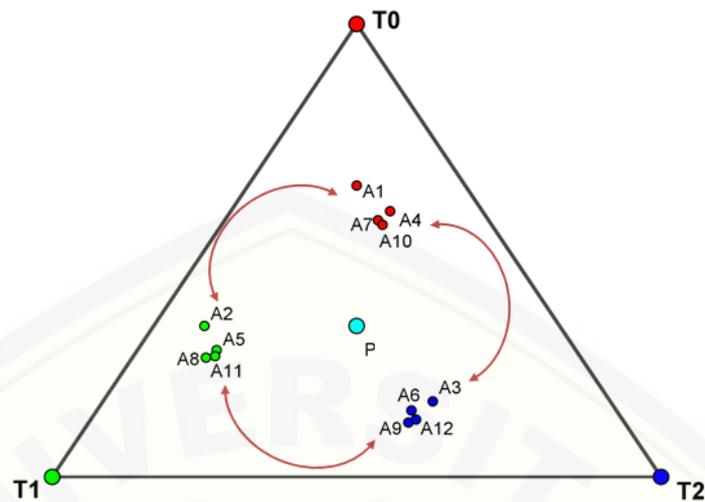
Gambar 4.8 Iterasi ke-33 percobaan ke-1

Percobaan ke-1 sampai ke-6 disimulasikan dengan memvariasikan segitiga, urutan terpilihnya titik sudut dan letak titik awal. Iterasi untuk semua simulasi adalah 33 iterasi dan peluang kemunculan masing-masing titik sudutnya secara otomatis adalah 33,33%. Gambar 4.8 merupakan visualisasi *non-random Chaos Game* berdasarkan simulasi program pada percobaan ke-1. Percobaan ke-1 memvariasikan segitiga sama sisi dengan urutan pemilihan titik sudut  $T_1$   $T_2$   $T_0$  dan letak titik awalnya berada di dalam segitiga. Pada visualisasi hasil *non-random Chaos Game*, titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* mempunyai daerah yang berbeda warna serta tidak dapat menyebar ke semua daerah titik sudut. Titik-titik tersebut berdistribusi hanya di satu tempat pada koordinat tertentu dan berdekatan dengan titik-titik sudut yang terpilih. Seluruh titik bentukan pada pemilihan titik sudut  $T_1$  adalah titik berwarna hijau, titik tersebut berdistribusi secara berkelompok pada koordinat yang terletak paling dekat dengan titik sudut  $T_1$ . Titik berwarna biru merupakan titik bentukan dari pemilihan titik sudut  $T_2$ , titik tersebut juga berkelompok pada suatu koordinat tertentu yang terletak paling

dekat dengan titik sudut  $T_2$ . Begitu juga dengan titik berwarna merah yang merupakan titik hasil bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_0$ . Visualisasi objek *non-random Chaos Game* percobaan ke-2 sampai ke-6 dipaparkan pada lampiran. Percobaan ke-2 menggunakan segitiga sebarang dengan urutan pemilihan titik sudut  $T_2 T_0 T_1$  dan letak titik awalnya berada di luar segitiga. Objek yang dihasilkan hampir menyerupai pada percobaan ke-1, titik bentukan *non-random Chaos Game* tidak menyebar merata pada seluruh daerah titik sudut, namun titik-titik tersebut berjalan mendekati suatu koordinat tertentu yang mendekati masing-masing titik sudut. Percobaan selanjutnya menggunakan segitiga sama kaki dengan urutan pemilihan titik sudutnya adalah  $T_0 T_2 T_1$  dan letak titik awalnya berada di dalam segitiga. Tidak terdapat hasil yang berbeda secara signifikan, titik bentukan *non-random Chaos Game* tetap tidak berdistribusi secara merata pada seluruh daerah titik sudut dan hanya berkelompok pada suatu koordinat tertentu pada masing-masing pemilihan titik sudut yang sama. Percobaan ke-4 menggunakan segitiga sebarang dengan urutan pemilihan titik sudut  $T_1 T_0 T_2$  serta letak titik awalnya berada pada segitiga. Visualisasi dari aturan *non-random Chaos Game* pada percobaan ke-4 ini mirip dengan percobaan-percobaan sebelumnya, titik bentukan *non-random Chaos Game* hanya berkelompok pada koordinat tertentu pada masing-masing pemilihan titik sudut yang sama. Percobaan ke-5 menggunakan letak titik awal yang sama dengan percobaan ke-2 yaitu terletak di luar segitiga, namun segitiga yang digunakan adalah segitiga siku-siku dan urutan pemilihan titik sudutnya adalah  $T_2 T_1 T_0$ . Meskipun urutan pemilihan titik sudut dan bentuk segitiga percobaan ke-5 berbeda dengan percobaan ke-4, namun hasil percobaan ke-5 hampir sama dengan percobaan ke-4 karena titik bentukan *non-random Chaos Game* tetap tidak berdistribusi secara merata pada seluruh daerah titik sudut. Titik-titik tersebut berkelompok pada suatu koordinat tertentu pada masing-masing titik sudut yang sama. Percobaan ke-6 menggunakan segitiga yang sama dengan percobaan ke-5 yaitu segitiga siku-siku, namun urutan pemilihan titik sudutnya  $T_0 T_1 T_2$  dan letak titik awalnya pada segitiga. Titik bentukan *non-random Chaos Game* berdistribusi hanya di koordinat tertentu pada masing-masing pemilihan titik sudut yang sama.

Setiap percobaan simulasi program menghasilkan visualisasi *non-random Chaos Game* dengan titik-titik yang tidak dapat menyebar pada seluruh daerah titik sudut. Titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* hanya berkelompok di koordinat tertentu pada masing-masing pemilihan titik sudut yang sama. Titik-titik berwarna merah merupakan titik yang dibentuk dari titik yang berada pada daerah  $T_0$ , titik-titik berwarna hijau merupakan titik yang dibentuk dari titik yang berada pada daerah  $T_1$  dan titik-titik berwarna biru merupakan titik yang dibentuk dari titik yang berada pada daerah  $T_2$ . Distribusi kumpulan titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* pada titik sudut  $T_0$ ,  $T_1$  dan  $T_2$  memiliki frekuensi yang sama karena pemilihan titik sudut dilakukan secara acak sehingga pada seluruh percobaan menghasilkan peluang terpilihnya titik sudut yang cenderung sama yaitu 33,33%. Armana (2016) menyatakan bahwa peluang munculnya titik sudut berpengaruh pada distribusi pengelompokan titik-titik yang dihasilkan. Apabila titik sudut tersebut mempunyai peluang lebih banyak, maka lebih banyak pula titik yang dihasilkan dari titik sudut tersebut. Objek bentukan *non-random Chaos Game* tidak dapat dikatakan sebagai fraktal karena objek tersebut tidak membentuk suatu bentuk tertentu dan tidak memiliki salah satu sifat penting fraktal yaitu *self similarity*.

Gambar 4.9 merupakan ilustrasi pergerakan titik bentukan *non-random Chaos Game* dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya secara manual menggunakan segitiga sama sisi dan letak titik awal di dalam segitiga. Ilustrasi ini digunakan untuk menunjukkan bahwa perbedaan urutan pemilihan titik sudut tidak berpengaruh terhadap objek yang dihasilkan aturan *non-random Chaos Game*.



Gambar 4.9 Ilustrasi pergerakan titik bentukan *non-random Chaos Game*

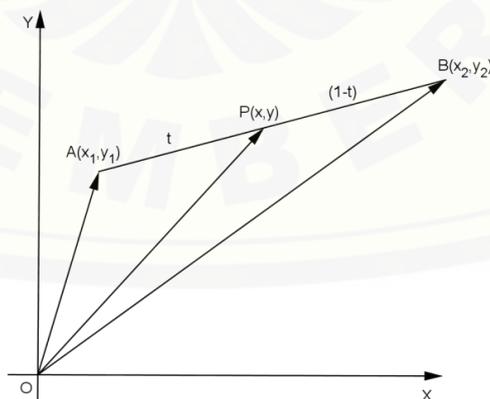
Titik-titik tersebut berkelompok di suatu koordinat tertentu pada masing-masing titik sudut. Hal tersebut disebabkan karena pada aturan ini, pemilihan titik sudut dipilih secara urut secara terus menerus mengakibatkan jarak antara titik-titik bentukan *non random Chaos Game* tidak berbeda signifikan dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya. Misalkan urutan pemilihan titik sudut yang ditentukan adalah  $T_0 T_1 T_2$  yang dilakukan berulang-ulang sampai pada iterasi yang diinginkan sehingga urutan pemilihan titik sudut secara terus menerus menjadi  $T_0 T_1 T_2 T_0 T_1 T_2 T_0 T_1 T_2 T_0 T_1 T_2 T_0 T_1 T_2 \dots$ . Terlihat bahwa tidak ada perulangan pemilihan titik sudut dari iterasi satu ke iterasi selanjutnya.  $A_1$  merupakan titik bentukan dari titik awal  $P$  dengan titik sudut  $T_0$ ,  $A_2$  dibentuk dari titik awal  $A_1$  dengan titik sudut  $T_1$ ,  $A_3$  dibentuk dari titik awal  $A_2$  dengan titik sudut  $T_2$ . Kemudian titik  $A_4$  dibentuk dari titik awal  $A_3$  dengan titik sudut  $T_0$  dan seterusnya. Titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* selanjutnya sangat bergantung pada titik-titik yang dihasilkan sebelumnya. Sehingga, apabila letak titik awal pada pemilihan titik sudut yang sama tidak berbeda signifikan, maka titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* yang dihasilkan tidak berbeda signifikan pula. Hal tersebut mengakibatkan titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* tidak dapat menyebar ke seluruh daerah titik sudut. Pemilihan titik sudut yang dilakukan urut secara melingkar serta tidak adanya perulangan pemilihan titik sudut

mengakibatkan pergerakan titik-titik yang dihasilkan hanya berputar pada lingkup tertentu seperti pada Gambar 4.3. Perbedaan urutan pemilihan titik sudut dan letak titik awal juga tidak mempengaruhi objek yang dihasilkan. Perbedaan urutan pemilihan titik sudut hanya akan merubah arah putaran pergerakan pemilihan titik sudut dan meskipun letak titik awal berada pada atau di luar segitiga, maka pada iterasi ke- $n$  titik bentukan *non-random Chaos Game* akan mendekati segitiga dan selanjutnya akan bergerak berputar seperti pada Gambar 4.3.

#### 4.3 Perhitungan Numerik Aturan *Non-Random Chaos Game* pada Segitiga

Berdasarkan variasi segitiga, urutan pemilihan titik sudut, dan letak titik awal enam percobaan pada Sub-bab 4.2, kemudian dilakukan perhitungan numerik berdasarkan percobaan simulasi program tersebut untuk mengetahui pergerakan nilai jarak dari kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama.

Selanjutnya, dilakukan iterasi secara bertahap dengan kelipatan 3 sampai pada iterasi yang ditentukan. Iterasi yang dilakukan secara bertahap dengan kelipatan 3 akan memudahkan peneliti untuk melihat pergerakan titik-titik bentukan *Chaos Game* dari iterasi awal sampai iterasi tinggi. Langkah terakhir adalah mencari jarak antara dua titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama secara bertahap. Rumus jarak antara dua titik yang digunakan dipaparkan pada Persamaan (4.1).



Gambar 4.10 Penyajian Segmen Garis

(Sumber: Kusno, 2003)

Jarak antara titik  $A$  terhadap titik  $B$  adalah

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4.1}$$

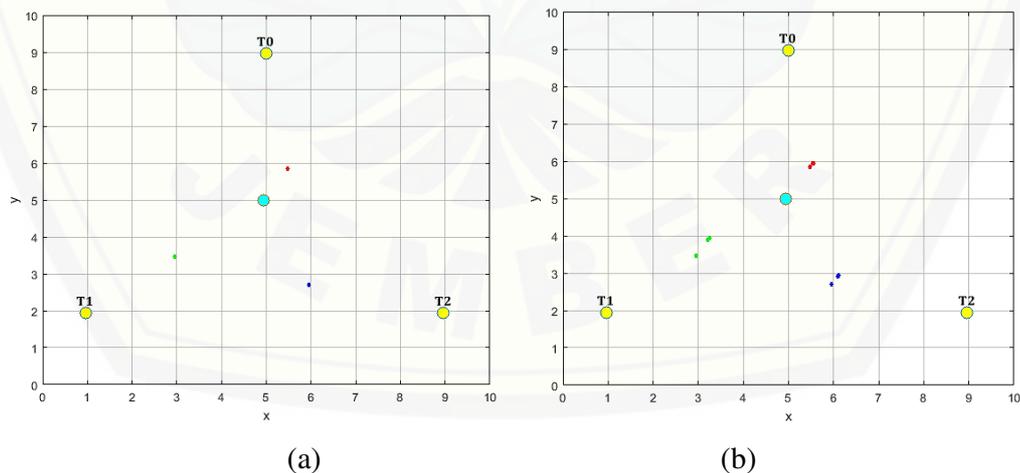
**Percobaan ke-1**

Urutan pemilihan titik sudut pada percobaan pertama adalah  $T_1 T_2 T_0$ , sehingga urutan pemilihan titik sudut secara terus menerus adalah  $T_1 T_2 T_0 T_1 T_2 T_0 T_1 T_2 T_0 T_1 T_2 T_0 \dots$ . Berikut rincian titik koordinat, warna dan peluang terpilihnya titik sudut  $T_0 T_1 T_2$  seperti pada Gambar 4.11.

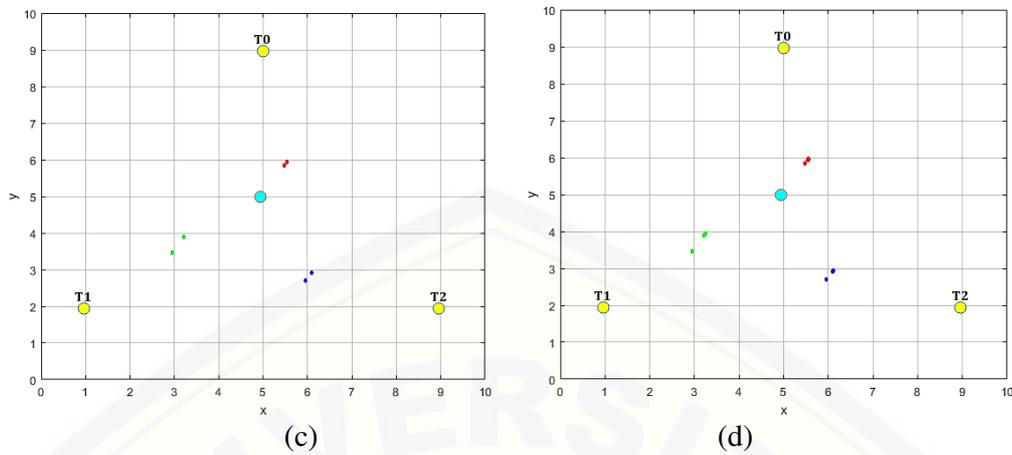
	x	y	Warna	Peluang
T0	5.000000	9.011905	Merah	33.33 %
T1	1.003976	1.988095	Hijau	33.33 %
T2	8.996024	2.011905	Biru	33.33 %

Gambar 4.11 Titik sudut percobaan ke-1

Langkah pertama adalah melakukan iterasi secara bertahap dengan kelipatan 3, dimulai dari iterasi ke-3 kemudian iterasi ke-6, selanjutnya iterasi ke-9 dan seterusnya sampai pada iterasi yang telah ditentukan seperti pada Gambar 4.12 dan Gambar 4.13. Pada percobaan ke-1 ini titik awal *Chaos Game* terletak di dalam segitiga.



Gambar 4.12 Iterasi ke-3 (a) dan Iterasi ke-6 (b) percobaan ke-1



Gambar 4.13 Iterasi ke-9 (c) dan Iterasi ke-33 (d) percobaan ke-1

Langkah selanjutnya adalah mencari jarak antara dua titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama secara bertahap menggunakan Persamaan (4.1). Berdasarkan simulasi program didapatkan hasil perhitungan jarak antara titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama pada percobaan ke-1 seperti pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Hasil perhitungan jarak pada percobaan ke-1

	Jarak dua titik di Masing-masing Pemilihan Titik Sudut		
	Titik Sudut $T_1$	Titik Sudut $T_2$	Titik Sudut $T_0$
$ \overline{A_n A_{n+3}} $	0,491533	0,245767	0,122883
- Titik sudut $T_1$	0,061442	0,030721	0,015360
$n = 1,4,7 \dots 28$	0,007680	0,003840	0,001920
- Titik sudut $T_2$	0,000960	0,000480	0,000240
$n = 2,5,8 \dots 29$	0,000120	0,000060	0,000030
- Titik sudut $T_0$	0,000015	0,000008	0,000004
$n = 3,6,9 \dots 30$	0,000002	0,000001	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000

Berdasarkan Tabel 4.1 terlihat bahwa pada percobaan ke-1, jarak antara titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama memiliki nilai yang semakin kecil dan semakin menuju nilai nol. Tabel 4.2

merupakan rancangan percobaan ke-1 sampai ke-6 dengan variasi urutan pemilihan titik sudut, jenis segitiga dan letak titik awal.

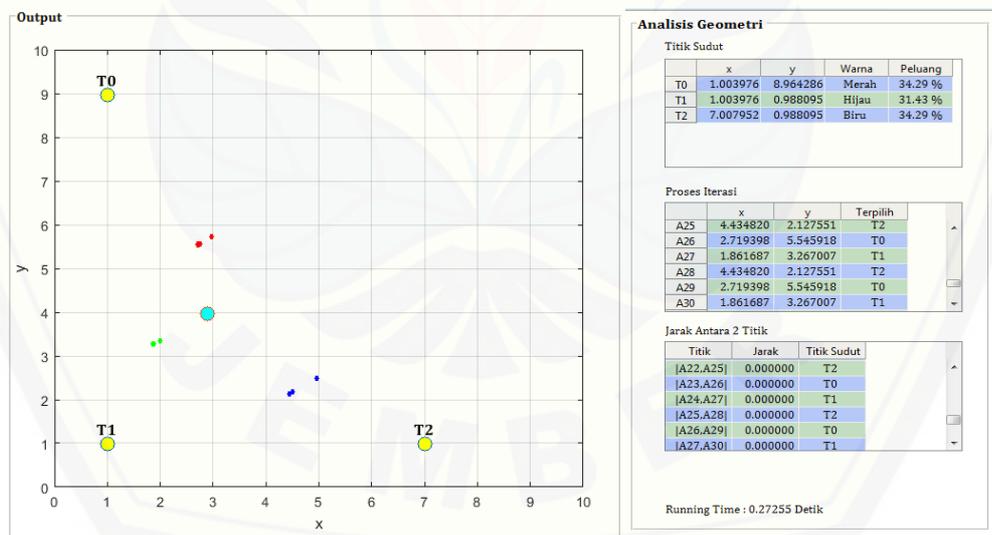
Tabel 4.2 Rancangan percobaan ke-1 sampai ke-6

Percobaan ke-	Urutan pemilihan titik sudut	Jenis segitiga	Letak titik awal
Percobaan ke-1	$T_1 T_2 T_0$	Segitiga Sama Sisi	Di Dalam Segitiga
Percobaan ke-2	$T_2 T_0 T_1$	Segitiga Sembarang	Di Luar Segitiga
Percobaan ke-3	$T_0 T_2 T_1$	Segitiga Sama Kaki	Di Dalam Segitiga
Percobaan ke-4	$T_1 T_0 T_2$	Segitiga Sembarang	Pada Segitiga
Percobaan ke-5	$T_2 T_1 T_0$	Segitiga Siku-Siku	Di Luar Segitiga
Percobaan ke-6	$T_0 T_1 T_2$	Segitiga Siku-Siku	Pada Segitiga

Pada Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa berdasarkan simulasi program, pada percobaan ke-1 *non-random Chaos Game* didapatkan selisih jarak titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* yang semakin kecil menuju nilai nol dari iterasi rendah ke iterasi tinggi pada masing-masing pemilihan titik sudut. Misalnya pada titik sudut  $T_1$  dapat dilihat bahwa jarak antara titik iterasi ke-1 dengan iterasi ke-4 adalah 0,491533, kemudian jarak antara titik iterasi ke-4 dengan iterasi ke-7 adalah 0,061442 sampai pada jarak antara titik iterasi ke-22 dengan iterasi ke-25 adalah 0,000000. Selisih jarak titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* pada titik sudut  $T_2$  dan  $T_0$  pada percobaan ke-1 juga bernilai semakin kecil dan menuju nilai nol. Tabel 4.2 merupakan rancangan percobaan untuk percobaan ke-1 sampai ke-6 dengan variasi segitiga, urutan terpilihnya titik sudut dan letak titik awal. Meskipun dilakukan berbagai variasi seperti pada Tabel 4.2 didapatkan hasil perhitungan jarak antar titik-titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik yang sama juga memiliki nilai yang semakin kecil dan menuju ke nol. Visualisasi objek yang dihasilkan *non-random Chaos Game* dan hasil perhitungan jarak berdasarkan simulasi program pada percobaan ke-2 sampai ke-6 terdapat pada lampiran. Hal tersebut menunjukkan bahwa jarak antara dua titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama semakin kecil dari iterasi rendah ke iterasi tinggi, maka titik-titik tersebut terletak

semakin dekat antar titik satu dengan titik lainnya. Artinya, pada iterasi tinggi titik-titik yang dihasilkan akan menuju pada satu titik tertentu.

Berdasarkan simulasi program yang telah dilakukan, dapat dilihat bahwa objek yang dihasilkan aturan *non-random Chaos Game* tersebut memiliki tiga kumpulan titik yang merupakan hasil pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$ . Selanjutnya akan dibuktikan apabila titik terakhir dari masing-masing kumpulan tersebut dibentuk suatu segitiga akan sebangun dengan segitiga awal untuk memulai *non-random Chaos Game*. Terdapat dua syarat untuk membuktikan suatu segitiga adalah sebangun yaitu semua perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian (berkorespondensi) sama besar dan sudut-sudut yang bersesuaian (berkorespondensi) sama besar. Berdasarkan dua syarat tersebut, maka digunakan segitiga siku-siku untuk mempermudah dalam melihat sisi-sisi dan sudut yang berkorespondensi. Gambar 4.14 adalah hasil simulasi program dengan segitiga awal siku-siku, urutan titik sudut  $T_2, T_0, T_1$  dan letak titik awalnya berada di dalam segitiga.



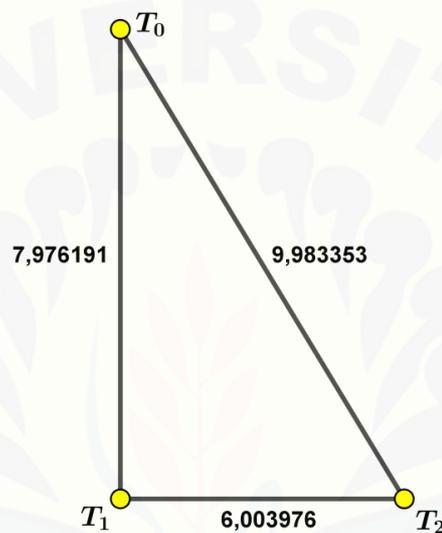
Gambar 4.14 Aturan *non-random Chaos Game* pada segitiga siku-siku

Panjang sisi segitiga siku-siku dapat diperoleh dengan menghitung jarak antar dua titik sudut memanfaatkan koordinat  $(x, y)$  pada tabel "Titik Sudut". Berikut adalah koordinat  $(x, y)$  titik sudut pembentuk segitiga awal

Tabel 4.3 Koordinat segitiga awal

Titik sudut	Koordinat x	Koordinat y	warna
$T_0$	1,003976	8,964286	Merah
$T_1$	1,003976	0,988095	Hijau
$T_2$	7,007952	0,988095	Biru

Sehingga didapatkan segitiga siku-siku dengan panjang sisinya adalah



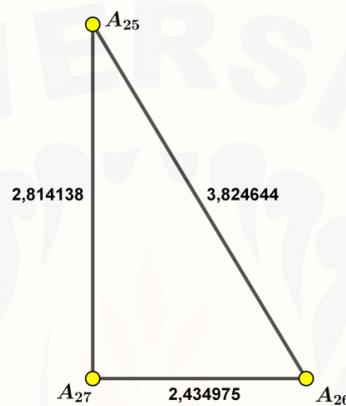
Gambar 4.15 Segitiga siku-siku yang diketahui panjang sisi-sisinya

Selanjutnya, dicari panjang sisi segitiga hasil aturan *non-random Chaos Game*. Iterasi yang digunakan adalah 35, namun dapat dilihat pada tabel “Proses Iterasi” bahwa koordinat  $x$  dan  $y$  di iterasi ke-25, 26 dan 27 sama dengan iterasi-iterasi selanjutnya pada masing-masing pemilihan titik sudut. Sehingga untuk mencari sisi-sisi segitiga hasil *non-random Chaos Game*, akan digunakan koordinat  $(x, y)$  dari iterasi ke-25 untuk pemilihan titik sudut  $T_2$ , iterasi ke-26 untuk pemilihan titik sudut  $T_0$ , dan iterasi ke-27 untuk pemilihan titik sudut  $T_1$ . Berikut adalah tabel koordinat  $(x, y)$ .

Tabel 4.4 Koordinat titik sudut segitiga hasil *non-random Chaos Game*

Titik sudut	Koordinat x	Koordinat y	warna
$A_{25}$	4,434820	2,127551	Biru
$A_{26}$	2,719398	5,545918	Merah
$A_{27}$	1,861687	3,267007	Hijau

Sehingga didapatkan segitiga hasil *non-random Chaos Game* adalah



Gambar 4.16 Segitiga hasil *non-random Chaos Game* yang diketahui panjang sisi-sisinya

Berdasarkan Gambar 4.15 dan Gambar 4.16 didapatkan perbandingan sisi-sisi yang berkorespondensi sebagai berikut:

$$\frac{|\overline{T_1 T_2}|}{|A_{26} A_{27}|} = \frac{6,003976}{2,434975} = 2,465723$$

$$\frac{|\overline{T_0 T_1}|}{|A_{25} A_{27}|} = \frac{7,976191}{2,814138} = 2,834328$$

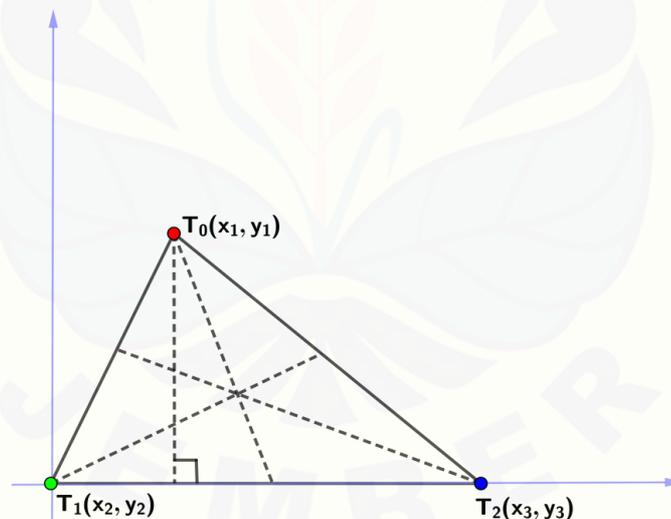
$$\frac{|\overline{T_0 T_2}|}{|A_{25} A_{26}|} = \frac{9,983353}{3,824644} = 2,610269$$

Perbandingan di atas menunjukkan bahwa ketiga perbandingan panjang sisi-sisi segitiga yang berkorespondensi memiliki nilai yang berbeda, maka tidak perlu dibuktikan untuk syarat kedua. Sehingga dapat disimpulkan berdasarkan simulasi program bahwa segitiga baru dimana titik pembentuknya adalah titik terakhir dari kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* di masing-masing

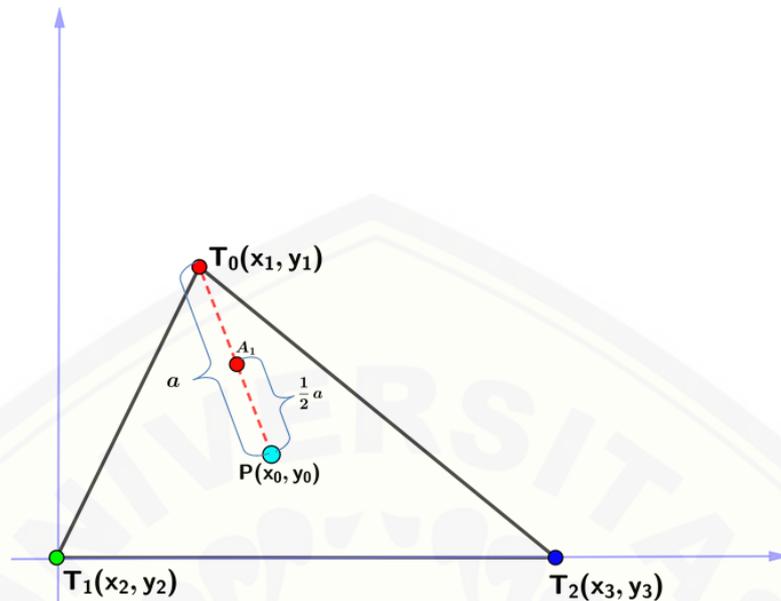
pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$  tidak sebangun dengan segitiga awal untuk memulai *non-random Chaos Game*.

#### 4.4 Perhitungan Analitik Aturan *Non-Random Chaos Game* pada Segitiga

Pada perhitungan numerik berdasarkan simulasi program telah menunjukkan bahwa jarak antara dua titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama semakin kecil dari iterasi rendah ke iterasi tinggi. Selanjutnya akan dibuktikan dengan perhitungan analitik apakah kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen ke titik tertentu. Perhitungan analitik ini memanfaatkan segitiga sebarang. Langkah pertama adalah menentukan koordinat titik sudut segitiga. Segitiga yang digunakan adalah segitiga sebarang maka diambil sebarang koordinat titik sudut  $T_0(x_1, y_1)$ ,  $T_1(x_2, y_2)$ , dan  $T_2(x_3, y_3)$  seperti pada Gambar 4.17.

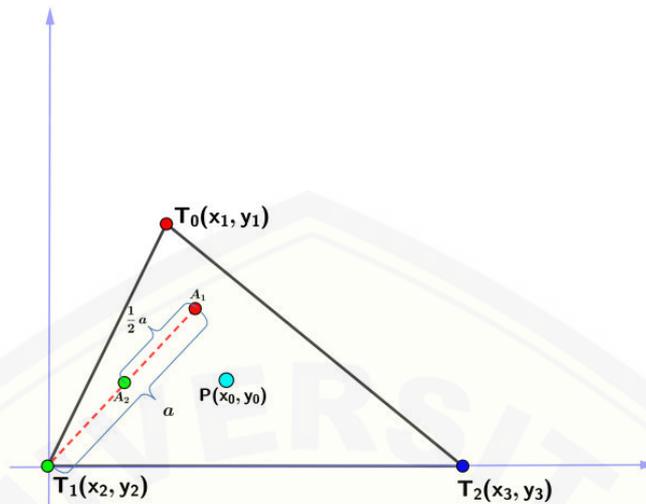


Gambar 4.17 Segitiga sebarang dengan titik sudut  $T_0 T_1 T_2$



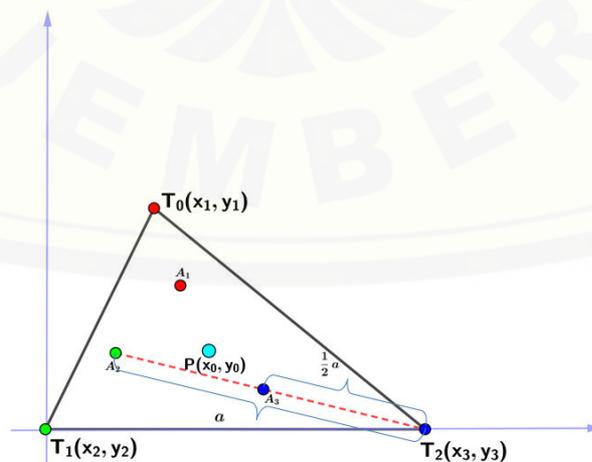
Gambar 4.18 Aturan *non-random Chaos Game* iterasi ke-1

Langkah awal untuk memulai aturan *non-random Chaos Game* setelah menentukan titik sudut pembentuk segitiga adalah menentukan titik awal untuk memulai permainan titik ini. Kemudian menentukan titik baru yang merupakan titik tengah antara titik awal dengan titik sudut yang dipilih sesuai urutan yang ditentukan. Gambar 4.18 menunjukkan titik sudut yang dipilih pada iterasi pertama adalah titik sudut  $T_0$  dan letak titik awal untuk memulai permainan ini adalah sebarang titik koordinat  $P(x_0, y_0)$ . Misalkan jarak antara titik awal  $P(x_0, y_0)$  dengan titik sudut  $T_0$  adalah  $a$ , maka jarak titik bentukan *non-random Chaos Game*  $A_1$  dengan titik awal ataupun titik sudut  $T_0$  adalah  $\frac{1}{2}a$ . Titik koordinat  $A_1$  adalah  $\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)$ .

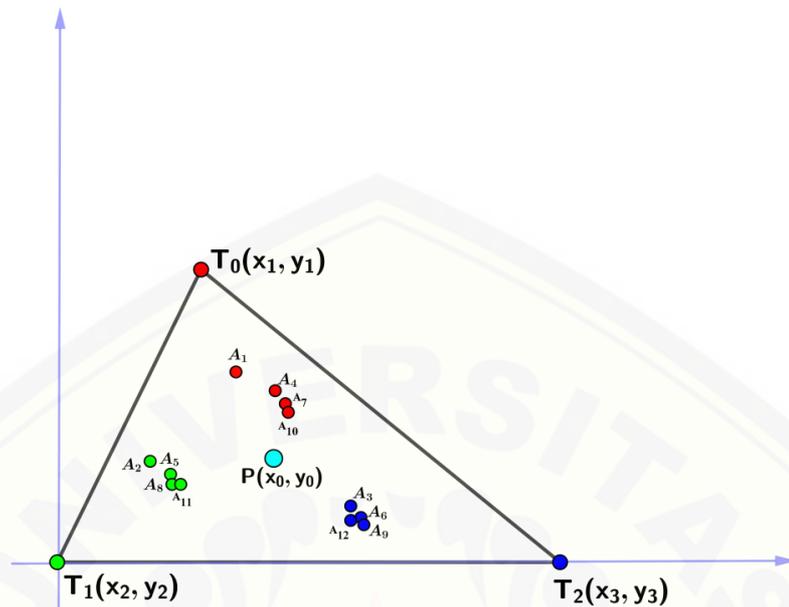


Gambar 4.19 Aturan *non-random Chaos Game* iterasi ke-2

Selanjutnya titik baru  $A_1$  berperan sebagai titik awal, sehingga didapatkan titik  $A_2$  yang merupakan titik tengah antara titik  $A_1$  dengan titik sudut  $T_1$  seperti Gambar 4.19. Titik koordinat  $A_1$  adalah  $\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)$  dan titik koordinat titik sudut  $T_1$  adalah  $(x_2, y_2)$  maka titik koordinat  $A_2$  adalah  $\left(\frac{x_0+x_1+2x_2}{2^2}, \frac{y_0+y_1+2y_2}{2^2}\right)$ . Kemudian titik  $A_2$  berperan sebagai titik awal dan didapatkan titik  $A_3$  yang merupakan titik tengah antara titik awal dengan titik sudut  $T_2$  seperti pada Gambar 4.20. Titik koordinat  $T_2$  adalah  $(x_3, y_3)$  maka titik koordinat  $A_3$  adalah  $\left(\frac{x_0+x_1+2x_2+2^2x_3}{2^3}, \frac{y_0+y_1+2y_2+2^2y_3}{2^3}\right)$ .



Gambar 4.20 Aturan *non-random Chaos Game* iterasi ke-3



Gambar 4.21 Aturan *non-random Chaos Game* iterasi ke-12

Langkah selanjutnya adalah melakukan iterasi berulang-ulang sampai pada iterasi yang telah ditentukan sehingga menghasilkan objek seperti pada Gambar 4.21 dengan urutan pemilihan titik sudutnya adalah  $T_0T_1T_2T_0T_1T_2T_0T_1T_2T_0T_1T_2T_0T_1T_2\dots$ . Terdapat dua belas titik bentukan *non-random Chaos Game* yang belum diketahui titik koordinatnya, maka untuk mengetahui koordinat titik-titik tersebut adalah menggunakan perhitungan titik tengah seperti pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Koordinat titik tengah bentukan *non-random Chaos Game*

Titik tengah	Koordinat x		Koordinat y	
	$PT_0, A_1$	$x_{A_1}$	$\frac{x_0 + x_1}{2}$	$y_{A_1}$
$A_1T_1, A_2$	$x_{A_2}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2}{2^2}$	$y_{A_2}$	$y_{A_2} = \frac{y_0 + y_1 + 2y_2}{2^2}$
$A_2T_2, A_3$	$x_{A_3}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3}{2^3}$	$y_{A_3}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3}{2^3}$
$A_3T_0, A_4$	$x_{A_4}$	$x_{A_4} = \frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1}{2^4}$	$y_{A_4}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1}{2^4}$

$A_4T_1, A_5$	$x_{A_5}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2}{2^5}$	$y_{A_5}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2}{2^5}$
$A_5T_2, A_6$	$x_{A_6}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_3}{2^6}$	$y_{A_6}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2 + 2^5y_3}{2^6}$
$A_6T_0, A_7$	$x_{A_7}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_3 + 2^6x_1}{2^7}$	$y_{A_7}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2 + 2^5y_3 + 2^6y_1}{2^7}$
$A_7T_1, A_8$	$x_{A_8}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_3 + 2^6x_1 + 2^7x_2}{2^8}$	$y_{A_8}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2 + 2^5y_3 + 2^6y_1 + 2^7y_2}{2^8}$
$A_8T_2, A_9$	$x_{A_9}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_3 + 2^6x_1 + 2^7x_2 + 2^8x_3}{2^9}$	$y_{A_9}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2 + 2^5y_3 + 2^6y_1 + 2^7y_2 + 2^8y_3}{2^9}$
$A_9T_0, A_{10}$	$x_{A_{10}}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_3 + 2^6x_1 + 2^7x_2 + 2^8x_3 + 2^9x_1}{2^{10}}$	$y_{A_{10}}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2 + 2^5y_3 + 2^6y_1 + 2^7y_2 + 2^8y_3 + 2^9y_1}{2^{10}}$
$A_{10}T_1, A_{11}$	$x_{A_{11}}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_3 + 2^6x_1 + 2^7x_2 + 2^8x_3 + 2^9x_1 + 2^{10}x_2}{2^{11}}$	$y_{A_{11}}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2 + 2^5y_3 + 2^6y_1 + 2^7y_2 + 2^8y_3 + 2^9y_1 + 2^{10}y_2}{2^{11}}$
$A_{11}T_2, A_{12}$	$x_{A_{12}}$	$\frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_3 + 2^6x_1 + 2^7x_2 + 2^8x_3 + 2^9x_1 + 2^{10}x_2 + 2^{11}x_3}{2^{12}}$	$y_{A_{12}}$	$\frac{y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_1 + 2^4y_2 + 2^5y_3 + 2^6y_1 + 2^7y_2 + 2^8y_3 + 2^9y_1 + 2^{10}y_2 + 2^{11}y_3}{2^{12}}$

Misalkan titik koordinat  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  diketahui, maka berdasarkan Tabel 4.5 didapatkan tiga rumus koordinat sebagai berikut.

1. Titik sudut  $T_0$ ,  $n = 3p + 1$  untuk  $p$  bilangan asli

$$x_{A_n} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^p 2^{3i} x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}}{2^{3p+1}}$$

$$y_{A_n} = \frac{y_0 + \sum_{i=0}^p 2^{3i} y_1 + (2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}}{2^{3p+1}}$$

2. Titik sudut  $T_1$ ,  $n = 3p + 2$  untuk  $p$  bilangan asli

$$x_{A_n} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^p 2^{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i+2} x_3}{2^{3p+2}}$$

$$y_{A_n} = \frac{y_0 + (y_1 + 2y_2) \sum_{i=0}^p 2^{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i+2} y_3}{2^{3p+2}}$$

3. Titik sudut  $T_2$ ,  $n = 3p + 3$  untuk  $p$  bilangan asli

$$x_{A_n} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^p 2^{3i}}{2^{3p+3}}$$

$$y_{A_n} = \frac{y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^p 2^{3i}}{2^{3p+3}}$$

Langkah selanjutnya adalah membuktikan ketiga rumus koordinat tersebut benar dengan menggunakan induksi matematika. Karena nilai koordinat  $x$  dan  $y$  sama, maka akan dilakukan induksi matematika pada salah satu koordinat yaitu koordinat  $x$ .

1. Buktikan benar untuk  $p = 1$  berlaku

a. Titik sudut  $T_0$ ,  $n = 3p + 1$

$$x_{A_4} = \left( \frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3}{2^3} + x_1 \right) \frac{1}{2}$$

$$x_{A_4} = \left( \frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1}{2^4} \right)$$

$$x_{A_{3.1+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^1 2^{3i} x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{1-1} 2^{3i}}{2^{3.1+1}}$$

$$x_{A_{3p+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^p 2^{3i} x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}}{2^{3p+1}}$$

Terbukti benar untuk  $p = 1$

b. Titik sudut  $T_1$ ,  $n = 3p + 2$

$$x_{A_5} = \left( \frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1}{2^4} + x_2 \right) \frac{1}{2}$$

$$x_{A_5} = \left( \frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2}{2^5} \right)$$

$$x_{A_{3.1+2}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^1 2^{3i} + \sum_{i=0}^{1-1} 2^{3i+2} x_3}{2^{3.1+2}}$$

$$x_{A_{3p+2}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^p 2^{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i+2} x_3}{2^{3p+2}}$$

Terbukti benar untuk  $p = 1$

c. Titik sudut  $T_2$ ,  $n = 3p + 3$

$$x_{A_6} = \left( \frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2}{2^5} + x_3 \right) \frac{1}{2}$$

$$x_{A_6} = \left( \frac{x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_1 + 2^4x_2 + 2^5x_6}{2^6} \right)$$

$$x_{A_{3.1+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^1 2^{3i}}{2^{3.1+3}}$$

$$x_{3p+3} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^p 2^{3i}}{2^{3p+3}}$$

Terbukti benar untuk  $p = 1$

2. Asumsikan benar untuk  $p = q$  berlaku

a. Titik sudut  $T_0$

$$x_{A_{3q+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^q 2^{3i} x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{q-1} 2^{3i}}{2^{3q+1}}$$

b. Titik sudut  $T_1$

$$x_{A_{3q+2}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^q 2^{3i} + \sum_{i=0}^{q-1} 2^{3i+2} x_3}{2^{3q+2}}$$

c. Titik sudut  $T_2$

$$x_{A_{3q+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^q 2^{3i}}{2^{3q+3}}$$

Maka untuk  $p = q + 1$

• Titik sudut  $T_0$ ,  $n = 3(q + 1) + 1$

$$\begin{aligned} x_{A_{3(q+1)+1}} &= \frac{1}{2} (A_{3q+3} + x_1) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^q 2^{3i}}{2^{3q+3}} + x_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_0 + x_1 \sum_{i=0}^q 2^{3i} + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^q 2^{3i+2^{3q+3}} x_1}{2^{3q+3}} \right) \\ &= \frac{x_0 + x_1 \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^q 2^{3i}}{2^{3q+4}} \end{aligned}$$

$$x_{A_{3(q+1)+1}} = \frac{x_0 + x_1 \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i}}{2^{3(q+1)+1}}$$

Terbukti benar untuk  $p = q + 1$

- Titik sudut  $T_1$ ,  $n = 3(q + 1) + 2$

$$\begin{aligned}
 x_{A_{3(q+1)+2}} &= \frac{1}{2} (A_{3(q+1)+1} + x_2) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_0 + x_1 \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + (2x_2 + 2^2 x_3) \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i}}{2^{3(q+1)+1}} + x_2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_0 + x_1 \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + 2x_2 \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i} + 2^2 x_3 \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i} + 2^{3(q+1)+1} x_2}{2^{3(q+1)+1}} \right) \\
 &= \frac{x_0 + x_1 \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + 2x_2 \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + 2^2 x_3 \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i}}{2^{3(q+1)+2}} \\
 x_{A_{3(q+1)+2}} &= \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + 2^2 x_3 \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i}}{2^{3(p+1)+2}}
 \end{aligned}$$

Terbukti benar untuk  $p = q + 1$

- Titik sudut  $T_2$ ,  $n = 3(q + 1) + 3$

$$\begin{aligned}
 x_{A_{3(q+1)+3}} &= \frac{1}{2} (A_{3(q+1)+2} + x_3) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + 2^2 x_3 \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i}}{2^{3(p+1)+2}} + x_3 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + 2^2 x_3 \sum_{i=0}^{(q+1)-1} 2^{3i} + 2^{3(q+1)+2} x_3}{2^{3(q+1)+2}} \right) \\
 &= \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i} + 2^2 x_3 \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i}}{2^{3(q+1)+3}} \\
 x_{A_{3(q+1)+3}} &= \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2 x_3) \sum_{i=0}^{q+1} 2^{3i}}{2^{3(p+1)+3}}
 \end{aligned}$$

Terbukti benar untuk  $p = q + 1$

Karena ketiga rumus koordinat tersebut benar pada langkah 1 dan 2 untuk koordinat  $x$ , maka dapat disimpulkan rumus tersebut adalah benar pula untuk semua  $n$  bilangan asli untuk koordinat  $y$ . Selanjutnya melakukan pembuktian kekonvergenan masing-masing kumpulan titik pada pemilihan titik sudut yang sama. Pada langkah ini dilakukan perhitungan jarak antar dua titik pada pemilihan titik sudut yang sama dengan memanfaatkan koordinat  $(x_{A_n}, y_{A_n})$  masing-masing pemilihan titik sudut.

### 1. Pemilihan Titik sudut $T_0$

Berikut adalah rumus jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_0$  dimana  $n = 3p + 1$ .

$$\begin{aligned} |\overline{A_{3(p-1)+1}A_{3p+1}}| &= \sqrt{\left(x_{A_{3p+1}} - x_{A_{3(p-1)+1}}\right)^2 + \left(y_{A_{3p+1}} - y_{A_{3(p-1)+1}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_0 + \sum_{i=0}^p 2^{3i}x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}}{2^{3p+1}} - \frac{x_0 + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i}}{2^{3(p-1)+1}}\right)^2 +} \\ &\quad \sqrt{\left(\frac{y_0 + \sum_{i=0}^p 2^{3i}y_1 + (2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}}{2^{3p+1}} - \frac{y_0 + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}y_1 + (2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i}}{2^{3(p-1)+1}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\left((1-2^3)x_0 + (x_1)(2^{3p} - 7 \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) + (2x_2 + 2^2x_3)(2^{3(p-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i})\right)}{2^{3p+1}}\right)^2 +} \\ &\quad \sqrt{\left(\frac{\left((1-2^3)y_0 + (y_1)(2^{3p} - 7 \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) + (2y_2 + 2^2y_3)(2^{3(p-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i})\right)}{2^{3p+1}}\right)^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan rumus di atas akan dibuktikan  $(2^{3p} - 7 \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) = 1$  dan  $(2^{3(p-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i}) = 1$  untuk  $p > 1$  dengan induksi matematika sebagai berikut.

1. Buktikan benar untuk  $p = 2$  berlaku

a.  $(2^{3p} - 7 \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) = 1$

$$\left(2^{3 \cdot 2} - 7 \sum_{i=0}^{2-1} 2^{3i}\right) = 1$$

$$(2^6 - 7(1 + 2^3)) = 1$$

$$(64 - 7(9)) = 1$$

$$(64 - 63) = 1$$

$$1 = 1$$

Terbukti benar untuk  $p = 2$

b.  $(2^{3(p-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i}) = 1$

$$\left(2^{3(2-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(2-1)-1} 2^{3i}\right) = 1$$

$$(2^3 - 7(1)) = 1$$

$$(8 - 7) = 1$$

$$1 = 1$$

Terbukti benar untuk  $p = 2$

2. Asumsikan benar untuk  $p = k$  berlaku

a.  $(2^{3p} - 7 \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) = 1$

$$\left( 2^{3k} - 7 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{3i} \right) = 1 \Leftrightarrow 7 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{3i} = 2^{3k} - 1$$

b.  $(2^{3(p-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i}) = 1$

$$\left( 2^{3(k-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(k-1)-1} 2^{3i} \right) = 1 \Leftrightarrow 7 \sum_{i=0}^{(k-1)-1} 2^{3i} = 2^{3(k-1)} - 1$$

Maka untuk  $p = k + 1$

- $$\begin{aligned} (2^{3(k+1)} - 7 \sum_{i=0}^{(k+1)-1} 2^{3i}) &= 2^{3k} \cdot 2^3 - 7(\sum_{i=0}^{k-1} 2^{3i} + 2^{3k}) \\ &= 2^{3k} \cdot 2^3 - 7 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{3i} - 7 \cdot 2^{3k} \\ &= 2^{3k} \cdot 2^3 - (2^{3k} - 1) - 7 \cdot 2^{3k} \\ &= 2^{3k} \cdot 8 - 7 \cdot 2^{3k} - (2^{3k} - 1) \\ &= 2^{3k} - (2^{3k} - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Terbukti benar untuk  $p = k + 1$

- $$\begin{aligned} (2^{3(k+1)-1} - 7 \sum_{i=0}^{((k+1)-1)-1} 2^{3i}) &= 2^{3k} - 7(\sum_{i=0}^{(k-1)-1} 2^{3i} + 2^{3(k-1)}) \\ &= 2^{3k} - 7 \sum_{i=0}^{(k-1)-1} 2^{3i} - 7 \cdot 2^{3(k-1)} \\ &= 2^{3(k-1)} \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^{3(k-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(k-1)-1} 2^{3i} \\ &= 2^{3(k-1)} \cdot 8 - 7 \cdot 2^{3(k-1)} - (2^{3(k-1)} - 1) \\ &= 2^{3(k-1)} - (2^{3(k-1)} - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Terbukti benar untuk  $p = k + 1$

Karena  $(2^{3p} - 7 \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) = 1$  dan  $(2^{3(p-1)} - 7 \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i}) = 1$  untuk  $p > 1$  benar, maka didapatkan rumus umum jarak antar dua titik sebagai berikut

$$|\overline{A_{3(p-1)+1}A_{3p+1}}| = \sqrt{\left(\frac{(1-2^3)x_0+(x_1)+(2x_2+2^2x_3)}{2^{3p+1}}\right)^2 + \left(\frac{(1-2^3)y_0+(y_1)+(2y_2+2^2y_3)}{2^{3p+1}}\right)^2}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan  $|\overline{A_{3(p-1)+1}A_{3p+1}}|$  untuk konvergen dengan mencari nilai  $\lim_{p \rightarrow \infty} |\overline{A_{3(p-1)+1}A_{3p+1}}|$ , maka berdasarkan Teorema 2.1 didapatkan seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{(1-2^3)x_0+(x_1)+(2x_2+2^2x_3)}{2^{3p+1}}\right)^2 + \left(\frac{(1-2^3)y_0+(y_1)+(2y_2+2^2y_3)}{2^{3p+1}}\right)^2} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2^{3p+1})^2}} \cdot \sqrt{((1-2^3)x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)^2 + ((1-2^3)y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3)^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.2 akan dibuktikan bahwa  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2^{3p+1})^2}}$  konvergen

$$\frac{1}{\sqrt{(2^{3p+1})^2}} = \frac{1}{2^{3p+1}} = \frac{1}{2^{3p}} \cdot \frac{1}{2}$$

Sehingga dibuktikan,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{3p}} = \left( \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^3 = (0)^3 = 0$$

Terbukti bahwa rumus  $|\overline{A_{3(p-1)+1}A_{3p+1}}|$  memiliki limit sama dengan nol, maka dapat disimpulkan bahwa rumus tersebut konvergen untuk sebarang  $x, y \in R$ . Sehingga dapat disimpulkan pula bahwa kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_0$  konvergen ke titik koordinat tertentu.

## 2. Pemilihan Titik sudut $T_1$

Berikut adalah rumus jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_1$  dimana  $n = 3p + 2$ .

$$\begin{aligned} |\overline{A_{3(p-1)+2}A_{3p+2}}| &= \sqrt{\left(x_{A_{3p+2}} - x_{A_{3(p-1)+2}}\right)^2 + \left(y_{A_{3p+2}} - y_{A_{3(p-1)+2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_0+(x_1+2x_2)\sum_{i=0}^p 2^{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i+2}x_3}{2^{3p+2}} - \frac{x_0+(x_1+2x_2)\sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i} + \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i+2}x_3}{2^{3(p-1)+2}}\right)^2 +} \\ & \quad \sqrt{\left(\frac{y_0+(y_1+2y_2)\sum_{i=0}^p 2^{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i+2}y_3}{2^{3p+2}} - \frac{y_0+(y_1+2y_2)\sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i} + \sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i+2}y_3}{2^{3(p-1)+2}}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\left((1-2^3)x_0+(x_1+2x_2)\left(2^{3p}-7\sum_{i=0}^{p-1}2^{3i}\right)+(2^2x_3)\left(2^{3(p-1)}-7\sum_{i=0}^{(p-1)-1}2^{3i}\right)\right)^2}{2^{3p+2}}\right)^2 + \left(\frac{\left((1-2^3)y_0+(y_1+2y_2)\left(2^{3p}-7\sum_{i=0}^{p-1}2^{3i}\right)+(2^2y_3)\left(2^{3(p-1)}-7\sum_{i=0}^{(p-1)-1}2^{3i}\right)\right)^2}{2^{3p+2}}\right)^2}$$

Karena  $(2^{3p} - 7\sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) = 1$  dan  $(2^{3(p-1)} - 7\sum_{i=0}^{(p-1)-1} 2^{3i}) = 1$  untuk  $p \in \mathbb{N} > 1$  yang telah dibuktikan benar dengan induksi matematika pada pemilihan titik sudut  $T_0$ , maka didapatkan rumus umum jarak antar dua titik sebagai berikut

$$|A_{3(p-1)+2}A_{3p+2}| = \sqrt{\left(\frac{\left((1-2^3)x_0+(x_1)+(2x_2+2^2x_3)\right)^2}{2^{3p+2}}\right)^2 + \left(\frac{\left((1-2^3)y_0+(y_1)+(2y_2+2^2y_3)\right)^2}{2^{3p+2}}\right)^2}$$

Selanjutnya akan dibuktikan  $|A_{3(p-1)+2}A_{3p+2}|$  untuk konvergen dengan mencari nilai  $\lim_{p \rightarrow \infty} |A_{3(p-1)+2}A_{3p+2}|$ , maka berdasarkan Teorema 2.1 didapatkan seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{\left((1-2^3)x_0+(x_1)+(2x_2+2^2x_3)\right)^2}{2^{3p+2}}\right)^2 + \left(\frac{\left((1-2^3)y_0+(y_1)+(2y_2+2^2y_3)\right)^2}{2^{3p+2}}\right)^2} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2^{3p+2})^2}} \cdot \sqrt{\left((1-2^3)x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3\right)^2 + \left((1-2^3)y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3\right)^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.2 akan dibuktikan bahwa  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2^{3p+2})^2}}$  konvergen

$$\frac{1}{\sqrt{(2^{3p+2})^2}} = \frac{1}{2^{3p+2}} = \frac{1}{2^{3p}} \cdot \frac{1}{2^2}$$

Sehingga dibuktikan,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{3p}} = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3 = (0)^3 = 0$$

Terbukti bahwa rumus  $|A_{3(p-1)+2}A_{3p+2}|$  memiliki limit sama dengan nol, maka dapat disimpulkan bahwa rumus tersebut konvergen untuk sebarang  $x, y \in R$ . Sehingga dapat disimpulkan pula bahwa kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_1$  konvergen ke titik koordinat tertentu.

### 3. Pemilihan Titik Sudut $T_2$

Berikut adalah rumus jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_2$  dimana  $n = 3p + 3$ .

$$\begin{aligned}
 |\overline{A_{3(p-1)+3}A_{3p+3}}| &= \sqrt{\left(x_{A_{3p+3}} - x_{A_{3(p-1)+3}}\right)^2 + \left(y_{A_{3p+3}} - y_{A_{3(p-1)+3}}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^p 2^{3i}}{2^{3p+3}} - \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}}{2^{3(p-1)+3}}\right)^2 +} \\
 &\quad \sqrt{\left(\frac{y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^p 2^{3i}}{2^{3p+3}} - \frac{y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}}{2^{3(p-1)+3}}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{(1-2^3)x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)(2^{3p-7} \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i})}{2^{3p+3}}\right)^2 +} \\
 &\quad \sqrt{\left(\frac{(1-2^3)y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3)(2^{3p-7} \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i})}{2^{3p+3}}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Karena  $(2^{3p} - 7 \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}) = 1$  untuk  $p \in \mathbb{N} > 1$  yang telah dibuktikan benar dengan induksi matematika pada pemilihan titik sudut  $T_0$  maka didapatkan rumus umum jarak antar dua titik sebagai berikut.

$$|\overline{A_{3(p-1)+3}A_{3p+3}}| = \sqrt{\left(\frac{(1-2^3)x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)}{2^{3p+3}}\right)^2 + \left(\frac{(1-2^3)y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3)}{2^{3p+3}}\right)^2}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan  $|\overline{A_{3(p-1)+3}A_{3p+3}}|$  untuk konvergen dengan mencari nilai  $\lim_{p \rightarrow \infty} |\overline{A_{3(p-1)+3}A_{3p+3}}|$ , maka berdasarkan Teorema 2.1 didapatkan seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{(1-2^3)x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)}{2^{3p+3}}\right)^2 + \left(\frac{(1-2^3)y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3)}{2^{3p+3}}\right)^2} \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2^{3p+3})^2}} \cdot \sqrt{((1-2^3)x_0 + x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)^2 + ((1-2^3)y_0 + y_1 + 2y_2 + 2^2y_3)^2}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.2 akan dibuktikan bahwa  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2^{3p+3})^2}}$  konvergen

$$\frac{1}{\sqrt{(2^{3p+3})^2}} = \frac{1}{2^{3p+3}} = \frac{1}{2^{3p}} \cdot \frac{1}{2^3}$$

Sehingga dibuktikan,

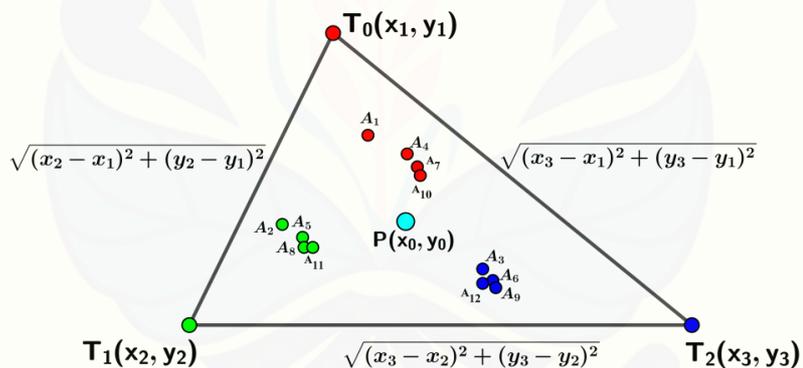
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{3p}} = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3 = (0)^3 = 0$$

Terbukti bahwa rumus  $|\overline{A_{3(p-1)+3}A_{3p+3}}|$  memiliki limit sama dengan nol, maka dapat disimpulkan bahwa rumus tersebut konvergen untuk sebarang  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Sehingga dapat disimpulkan pula bahwa kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_2$  konvergen ke titik koordinat tertentu.

Pembuktian di atas membuktikan bahwa kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_0, T_1$ , dan  $T_2$  konvergen di titik koordinat tertentu. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen di titik koordinat tertentu.

Pada Subbab 4.3 telah dibuktikan bahwa segitiga baru dimana titik pembentuknya adalah titik terakhir dari kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* di masing-masing pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$  tidak sebangun dengan segitiga awal untuk memulai *non-random Chaos Game*. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa hal tersebut benar dengan memanfaatkan segitiga sebarang pada pembuktian kekonvergenan yang telah diketahui panjang sisi-sisi pada segitiga seperti pada Gambar 4.22.



Gambar 4.22 Segitiga sebarang yang telah diketahui panjang sisi-sisi segitiga

Sebelumnya telah didapatkan tiga rumus umum untuk mengetahui koordinat terakhir titik bentukan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut  $T_0, T_1$ , dan  $T_2$ . Selanjutnya menghitung panjang sisi-sisi dari ketiga rumus tersebut menggunakan perhitungan jarak antara dua titik. Rumus yang digunakan adalah persamaan 4.1 maka didapatkan panjang sisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 |\overline{A_{3p+1}A_{3p+2}}| &= \sqrt{\frac{\left(x_0 + \sum_{i=0}^p 2^{3i}x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i-2^{3p+1}x_2}\right)^2 + \left(y_0 + \sum_{i=0}^p 2^{3i}y_1 + (2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i-2^{3p+1}y_2}\right)^2}{(2^{3p+2})^2}} \\
 |\overline{A_{3p+2}A_{3p+3}}| &= \sqrt{\frac{\left(x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^p 2^{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i+2}x_3 - 2^{3p+2}x_3\right)^2 + \left(y_0 + (y_1 + 2y_2) \sum_{i=0}^p 2^{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i+2}y_3 - 2^{3p+2}y_3\right)^2}{(2^{3p+3})^2}} \\
 |\overline{A_{3p+1}A_{3p+3}}| &= \sqrt{\frac{\left(3x_0 + 3\left(\sum_{i=0}^p 2^{3i}x_1\right) + 3\left((2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}\right) - 2^{3p+1}x_2 - 2^{3p+2}x_3\right)^2 + \left(3y_0 + 3\left(\sum_{i=0}^p 2^{3i}y_1\right) + 3\left((2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{3i}\right) - 2^{3p+1}y_2 - 2^{3p+2}y_3\right)^2}{(2^{3p+3})^2}}
 \end{aligned}$$

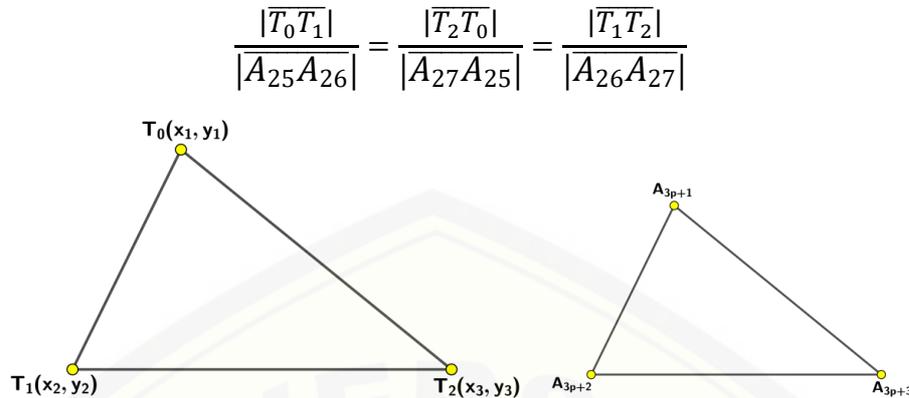
Pada subbab 4.3 dilakukan pembuktian kesebangunan berdasarkan simulasi program menggunakan iterasi ke-25, 26, dan 27, maka selanjutnya akan digunakan iterasi ke-25, 26, dan 27 pula pada perhitungan analitik. Sehingga didapatkan panjang sisi segitiga bentuka *non-random Chaos Game* sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 |\overline{A_{25}A_{26}}| &= \sqrt{\frac{\left(x_0 + \sum_{i=0}^8 2^{3i}x_1 + (2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^7 2^{3i-2^{25}x_2}\right)^2 + \left(y_0 + \sum_{i=0}^8 2^{3i}y_1 + (2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^7 2^{3i-2^{25}y_2}\right)^2}{(2^{26})^2}} \\
 |\overline{A_{26}A_{27}}| &= \sqrt{\frac{\left(x_0 + (x_1 + 2x_2) \sum_{i=0}^8 2^{3i} + \sum_{i=0}^7 2^{3i+2}x_3 - 2^{26}x_3\right)^2 + \left(y_0 + (y_1 + 2y_2) \sum_{i=0}^8 2^{3i} + \sum_{i=0}^7 2^{3i+2}y_3 - 2^{26}y_3\right)^2}{(2^{27})^2}} \\
 |\overline{A_{27}A_{25}}| &= \sqrt{\frac{\left(3x_0 + 3\left(\sum_{i=0}^8 2^{3i}x_1\right) + 3\left((2x_2 + 2^2x_3) \sum_{i=0}^7 2^{3i}\right) - 2^{25}x_2 - 2^{26}x_3\right)^2 + \left(3y_0 + 3\left(\sum_{i=0}^8 2^{3i}y_1\right) + 3\left((2y_2 + 2^2y_3) \sum_{i=0}^7 2^{3i}\right) - 2^{25}y_2 - 2^{26}y_3\right)^2}{(2^{27})^2}}
 \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
 |\overline{T_0T_1}| &\leq |\overline{T_2T_0}| \leq |\overline{T_1T_2}| \\
 |\overline{A_{25}A_{26}}| &\leq |\overline{A_{27}A_{25}}| \leq |\overline{A_{26}A_{27}}|
 \end{aligned}$$

Maka



Gambar 4.23 Kesebangunan dua segitiga sebarang

Misalkan disubstitusikan nilai  $(x_0, y_0) = (3,1)$ ,  $(x_1, y_1) = (2,2)$ ,  $(x_2, y_2) = (1,1)$ ,  $(x_3, y_3) = (4,0)$ , Sehingga didapatkan nilai perbandingan sisi-sisi yang berkorespondensi antara dua segitiga adalah sebagai berikut.

$$\frac{|\overline{T_0T_1}|}{|A_{25}A_{26}|} = \frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \cdot 2^{26}}{\sqrt{(x_0+\sum_{i=0}^8 2^{3i}x_1+(2x_2+2^2x_3)\sum_{i=0}^7 2^{3i-2^{25}}x_2)^2+(y_0+\sum_{i=0}^8 2^{3i}y_1+(2y_2+2^2y_3)\sum_{i=0}^7 2^{3i-2^{25}}y_2)^2}} = 1,485269$$

$$\frac{|\overline{T_2T_0}|}{|A_{27}A_{25}|} = \frac{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} \cdot 2^{27}}{\sqrt{(3x_0+3(\sum_{i=0}^8 2^{3i}x_1)+3((2x_2+2^2x_3)\sum_{i=0}^7 2^{3i})-2^{25}x_2-2^{26}x_3)^2+(3y_0+3(\sum_{i=0}^8 2^{3i}y_1)+3((2y_2+2^2y_3)\sum_{i=0}^7 2^{3i})-2^{25}y_2-2^{26}y_3)^2}} = 1,612126$$

$$\frac{|\overline{T_1T_2}|}{|A_{26}A_{27}|} = \frac{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2} \cdot 2^{27}}{\sqrt{(x_0+(x_1+2x_2)\sum_{i=0}^8 2^{3i}+\sum_{i=0}^7 2^{3i+2}x_3-2^{26}x_3)^2+(y_0+(y_1+2y_2)\sum_{i=0}^8 2^{3i}+\sum_{i=0}^7 2^{3i+2}y_3-2^{26}y_3)^2}} = 1,716895$$

Perbandingan di atas menunjukkan bahwa ketiga perbandingan panjang sisi-sisi segitiga yang berkorespondensi sudah jelas memiliki nilai yang berbeda, maka kedua segitiga tersebut tidak sebangun. Sehingga tidak perlu dibuktikan untuk syarat kedua. Kesimpulannya adalah berdasarkan perhitungan analitik, segitiga baru dimana titik pembentuknya adalah titik terakhir dari kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* di masing-masing pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$  tidak sebangun dengan segitiga awal untuk memulai *non-random Chaos Game*.

## BAB 5. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Kumpulan titik bentukan aturan *non-random Chaos Game* pada pemilihan titik sudut yang sama konvergen di titik koordinat tertentu.
2. Perhitungan numerik *non-random Chaos Game* menghasilkan nilai jarak antar dua titik pada pemilihan titik sudut yang sama bernilai semakin kecil dari iterasi rendah ke iterasi tinggi. Artinya, pada iterasi tinggi titik-titik yang dihasilkan *non-random Chaos Game* akan menuju pada satu titik tertentu. Sedangkan perhitungan analitik aturan *non-random Chaos Game* menghasilkan nilai jarak antar dua titik pada pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$  konvergen di titik koordinat tertentu.
3. Objek yang dihasilkan aturan *non-random Chaos Game* tidak membentuk fraktal.
4. Segitiga baru dimana titik pembentuknya adalah titik terakhir dari kumpulan titik bentukan *non-random Chaos Game* di masing-masing pemilihan titik sudut  $T_0, T_1, T_2$  tidak sebangun dengan segitiga awal untuk memulai *non-random Chaos Game*.

### 5.2 Saran

Pada penelitian ini dilakukan modifikasi aturan *Chaos Game* menjadi aturan *non-random Chaos Game* dimana pemilihan titik sudutnya dipilih secara urut. Pada penelitian selanjutnya masih banyak modifikasi aturan pada *Chaos Game* yang dapat dilakukan, misalnya menambah aturan baru pada pemilihan titik sudutnya atau merubah nilai jarak antara titik awal dengan titik sudut sehingga dapat membentuk objek fraktal.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Angelina, Lea. 2010. *Perancangan Pseudo Random Number Generator Berbasis Julias Set*. Makalah Kriptografi. Bandung: Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung
- Armana, Rere F. 2016. *Kajian Geometri Analitik Pada Masalah Chaos Game*. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember
- Barnsley, Michael F. 1993. *Fractal everywhere*. Academic Press Profesional. United States of America.
- Bartle, Robert G. 1992. *Introductions to Real Analysis*. Second edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Buorke, P. 2002. *Self Similarity*. <http://paulbourke.net/fractals/fracdim/.htm> [11 Oktober 2017]
- Devaney, Robert L. 2003. *Fractal Patterns and Chaos Game*. Boston: Department of Mathematics Boston University
- Kusno. 2003. *Geometri*. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember
- Kusno. 2010. *Geometri Rancang Bangun Studi tentang Desain dan Pemodelan Benda dengan Kurva dan Permukaan Berbantu Komputer*. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember
- Mandelbrot, B. B. 1977. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company
- Purnomo, K. D. 2014. *Pembangkitan Segitiga Sierpinski dengan Transformasi Affine Berbasis Beberapa Benda Geometris*. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana.
- Purnomo, K. D., Armana, R. F., dan Kusno. 2016. *Kajian Pembentukan Segitiga Sierpinski Pada Masalah Chaos Game dengan Memanfaatkan Transformasi Affine*. *Jurnal Matematika*. Vol. 6, No. 2:86-92.
- Sulistiyantoko, D. 2008. *Aplikasi Sekuensi Deret pada Perhitungan Pembentukan Geometri Fraktal Sederhana*. Skripsi. Yogyakarta: Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga
- Sundbye, L. 1997. *Chaos and Fractals on the TI Graphing Calculator*. *Electronic Proceedings of the Tenth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics Chicago*: Illinois

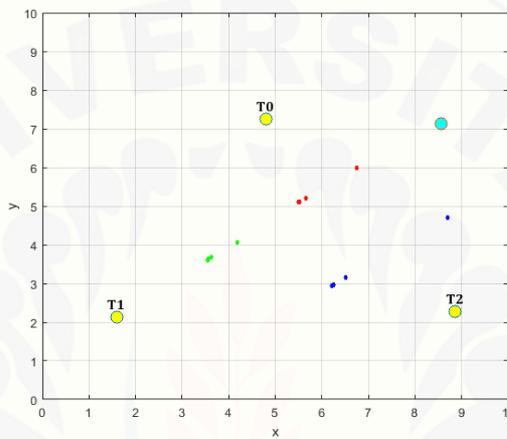
Zohuri, B. 2015. *Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientist*. Switzerland: Springer International Publishing



LAMPIRAN

A. Visualisasi Simulasi Program Percobaan ke -2 sampai ke-6

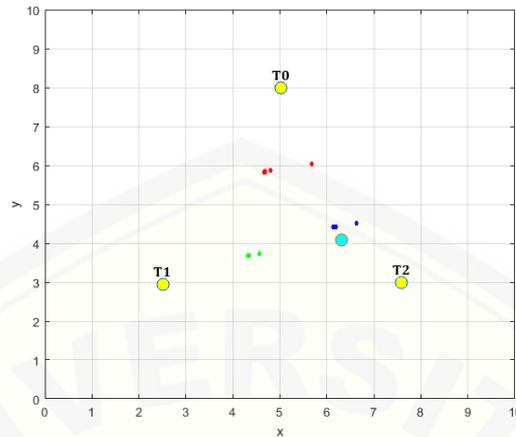
1. Visualisasi objek Percobaan ke-2 dengan urutan titik sudut  $T_2 T_1 T_0$  33 iterasi



Data jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* berdasarkan simulasi program percobaan ke-2

	Jarak Titik-titik di Masing-masing Titik Sudut		
	Titik Sudut $T_2$	Titik Sudut $T_0$	Titik Sudut $T_1$
$ \overline{A_n A_{n+3}} $	2,676999	1,338500	0,669250
- Titik sudut $T_2$	0,334625	0,167312	0,083656
$n = 1,4,7 \dots 28$	0,041828	0,020914	0,010457
- Titik sudut $T_0$	0,005229	0,002614	0,001307
$n = 2,5,8 \dots 29$	0,000654	0,000327	0,000163
- Titik sudut $T_1$	0,000082	0,000041	0,000020
$n = 3,6,9 \dots 30$	0,000010	0,000005	0,000003
	0,000001	0,000001	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000

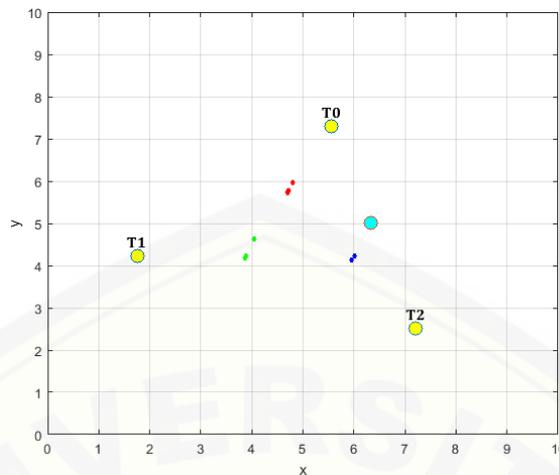
2. Visualisasi objek Percobaan ke-3 dengan urutan titik sudut  $T_0 T_2 T_1$  33 iterasi



Data jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* berdasarkan simulasi program percobaan ke-3

	Jarak Titik-titik di Masing-masing Titik Sudut		
	Titik Sudut $T_0$	Titik Sudut $T_2$	Titik Sudut $T_1$
$ \overline{A_n A_{n+3}} $	0,889140	0,444570	0,222285
- Titik sudut $T_0$	0,111143	0,055571	0,027786
$n = 1,4,7 \dots 28$	0,013893	0,006946	0,003473
- Titik sudut $T_2$	0,001737	0,000868	0,000434
$n = 2,5,8 \dots 29$	0,000217	0,000109	0,000054
- Titik sudut $T_1$	0,000027	0,000014	0,000007
$n = 3,6,9 \dots 30$	0,000003	0,000002	0,000001
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000

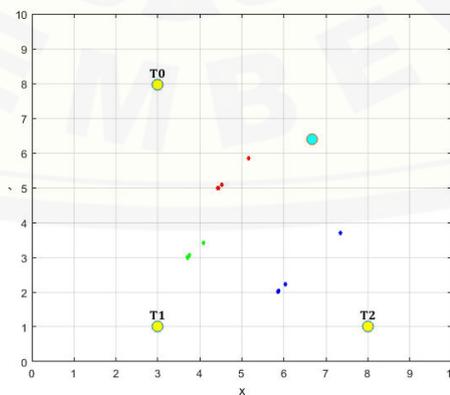
3. Visualisasi objek Percobaan ke-4 dengan urutan titik sudut  $T_1 T_0 T_2$  33 iterasi



Data jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* berdasarkan simulasi program percobaan ke-4

	Jarak Titik-titik di Masing-masing Titik Sudut		
	Titik Sudut $T_1$	Titik Sudut $T_0$	Titik Sudut $T_2$
$ \overline{A_n A_{n+3}} $	0,421604	0,210802	0,105401
- Titik sudut $T_1$	0,052701	0,026350	0,013175
$n = 1,4,7 \dots 28$	0,006588	0,003294	0,001647
- Titik sudut $T_0$	0,000823	0,000412	0,000206
$n = 2,5,8 \dots 29$	0,000103	0,000051	0,000026
- Titik sudut $T_2$	0,000013	0,000006	0,000003
$n = 3,6,9 \dots 30$	0,000002	0,000001	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000

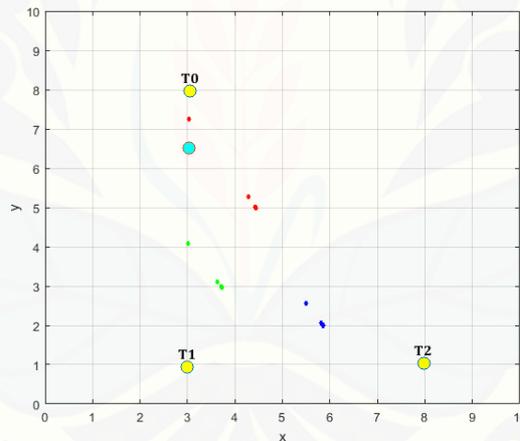
4. Visualisasi objek Percobaan ke-5 dengan urutan titik sudut  $T_2 T_0 T_1$  33 iterasi



Data jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* berdasarkan simulasi program percobaan ke-5

	Jarak Titik-titik di Masing-masing Titik Sudut		
	Titik Sudut $T_2$	Titik Sudut $T_1$	Titik Sudut $T_0$
$ \overline{A_n A_{n+3}} $	1,971073	0,985536	0,492768
- Titik sudut $T_2$	0,246384	0,123192	0,061596
$n = 1,4,7 \dots 28$	0,030798	0,015399	0,007700
- Titik sudut $T_1$	0,000481	0,000241	0,000120
$n = 2,5,8 \dots 29$	0,000060	0,000030	0,000015
- Titik sudut $T_0$	0,000008	0,000004	0,000002
$n = 3,6,9 \dots 30$	0,000001	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000

5. Visualisasi objek Percobaan ke-6 dengan urutan titik sudut  $T_0 T_1 T_2$  33 iterasi



Data jarak antar dua titik bentukan *non-random Chaos Game* berdasarkan simulasi program percobaan ke-6

	Jarak Titik-titik di Masing-masing Titik Sudut		
	Titik Sudut $T_0$	Titik Sudut $T_1$	Titik Sudut $T_2$
$ \overline{A_n A_{n+3}} $	2,328482	1,164241	0,582120
- Titik sudut $T_0$	0,291060	0,145530	0,072765
$n = 1,4,7 \dots 28$	0,036383	0,018191	0,009096
- Titik sudut $T_1$	0,004548	0,002274	0,001137
$n = 2,5,8 \dots 29$	0,000568	0,000284	0,000142
	0,000071	0,000036	0,000018
	0,000009	0,000004	0,000002
	0,000001	0,000001	0,000000

- Titik sudut $T_2$	0,000000	0,000000	0,000000
$n = 3, 6, 9 \dots 30$	0,000000	0,000000	0,000000

## B. Lampiran Script Pembangkitan Titik Tengah *Non-Random Chaos Game*

```
function [x1 y1 terpilih warna
jarak]=chaos_nr(x,y,acak,wrn,nr,iter)
n=length(x);
t=0;
for i=1:iter
    t=t+1;
    terpilih(i)=nr(t);
    warna(i)=wrn(nr(t));
    x1(i)=(acak(1)+x(nr(t)))/2;
    y1(i)=(acak(2)+y(nr(t)))/2;
    acak=[x1(i) y1(i)];
    if t>=n
        t=0;
    end
end

for z=1:iter-3
    jarak(z)=sqrt((x1(z+3)-x1(z))^2+(y1(z+3)-y1(z))^2);
end
```

## C. Lampiran Script Peluang Terpilihnya Titik Sudut

```
function P=frekuensi(D,m)
n=length(D);
k=1;b=0;
defDat=1:m;
P=zeros(1,m);
for i=2:n
    if D(i-1)==D(i)
        k=k+1;
    else
        b=b+1;
        data(defDat(D(i-1)))=D(i-1);
        P(defDat(D(i-1)))=k/n;
        frek(defDat(D(i-1)))=k;
        k=1;
    end
end
end
b=b+1;
data(defDat(D(i)))=D(i);
frek(defDat(D(i)))=k;
P(defDat(D(i)))=k/n;
```

## D. Lampiran Script Pembentuk Segitiga, Pemilihan Titik Awal Acak dan Pemilihan Urutan Titik Sudut

```
set(handles.pushbutton1,'enable','off')
prompt={'Jumlah Titik :'};
name='Titik';
numlines=1;
answer=inputdlg(prompt,name,numlines);
a=str2double(answer);
for j=1:a+1
    if j>a
        uiwait(warndlg('Tentukan Titik Acak Awal','Titik
Acak','modal'));
    end
    [x,y]=ginput(1);
    TS(j,:)= [x y];
    [m n]=size(TS);
    hold on

    if j<=a
        plot(x,y,'o','markersize',10,'markerfacecolor','y');
        text(x,y+0.2,['\color{black}T' num2str(j-
1)],'fontsize',11,'fontweight',...
'bold','fontname','cambria','HorizontalAlignment','center','Vertic
alAlignment','baseline')
    else
        plot(x,y,'o','markersize',10,'markerfacecolor','c');
    end
    set(handles.axes1,'XLim',[0 10],'YLim',[0
10],'xtick',[0:10],'ytick',[0:10]);

end
nr=randperm(m-1);
set(handles.uitable1,'Userdata',nr);
set(handles.figure1,'Userdata',TS);
```