LOCAL VERTEX ANTIMAGIC TOTAL COLORING PADA FAMILI GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI

TESIS

Oleh

Desi Febriani Putri
NIM 161820101010

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

LOCAL VERTEX ANTIMAGIC TOTAL COLORING PADA FAMILI GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Desi Febriani Putri
NIM 161820101010

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, tesis ini saya persembahkan untuk;

1. Ayahanda tercinta Salimin Hadi Santoso, S.Pd. dan Ibu Siti Fatimah serta kedua orang tua saya, Bapak Sururi dan Ibu Liskanah yang senantiasa memberikan dukungan, semangat, motivasi demi terselesaikannya tesis ini serta yang selalu mendoakan saya dalam setiap sujudnya;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota, yang senantiasa penuh kesabaran selama memberi ilmu dan membimbing dalam menyelesaikan tesis ini;
3. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Bapak Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang senantiasa memberikan kritik, saran, masukan yang membangun demi kesempurnaan tesis ini;
4. seluruh guru dan dosen beserta almamater sekolah, yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan di setiap masanya;
5. keluarga besar CGANT Research Group Universitas Jember yang senantiasa mendorong saya untuk tetap bersemangat dalam proses pengerjaan tesis. Terima kasih untuk semua ilmu dan pengalaman yang diberikan;
6. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat"

(QS. Al – Mujadalah : 11)*)

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu. Dan boleh jadi kamu mencintai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu. Allah Maha Mengetahui sedangkan kamu tidak mengetahui"

(QS. Al – Baqarah : 216)**)

"Life is like riding a bicycle. To keep your balance, you must keep moving"

(Albert Einstein)***)

---

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 1998. *Al – Qur'an* dan Terjemahannya. Semarang: PT. Kumudasmoro Grafindo.

**) Departemen Agama Republik Indonesia. 2006. *Al – Qur'an* dan Terjemahannya. Jakarta Timur: Maghfirah Pustaka

***) http://www.katabijakpedia.com/

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Desi Febriani Putri

NIM : 161820101010

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”*Local Vertex Antimagic Total Coloring* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang menyatakan,

Desi Febriani Putri

NIM 161820101010

TESIS

***LOCAL VERTEX ANTIMAGIC TOTAL COLORING* PADA FAMILI GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI**

Oleh

Desi Febriani Putri
NIM 161820101010

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing Anggota : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Tesis berjudul ”*Local Vertex Antimagic Total Coloring* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 196808021993031004	NIP. 198408012008012006
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.
NIP. 197704302005011001	NIP. 196906061998031001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

***Local Vertex Antimagic Total Coloring* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi**; Desi Febriani Putri, 161820101010; 2018: 73 halaman; Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pelabelan graf G adalah pemetaan yang memetakan himpunan elemen dari suatu graf G ke himpunan bilangan non negatif. Jika domain berupa titik disebut pelabelan titik. Jika domain berupa sisi disebut pelabelan sisi. Jika domain berupa titik dan sisi disebut pelabelan total. Sedangkan pewarnaan graf adalah memberikan warna pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dapat berupa titik, sisi, maupun wilayah.

Konsep pelabelan *antimagic* diperkenalkan oleh Harstfield dan Ringel pada tahun 1989. Kemudian Arumugam dkk., memperkenalkan konsep *local antimagic coloring* yang menggabungkan konsep pelabelan dan pewarnaan. Dalam jurnlanya yang berjudul textitLocal Antimagic Vertex Colorinf of a Graph, Arumugam dkk. menjelaskan tentang pelabelan pada suatu graf G kemudian dicari bobot titik atau warnanya. Pada tesis ini, mengembangkan konsep *local antimagic coloring* yaitu dengan melabeli titik dan sisi sekaligus yang disebut dengan *local vertex antimagic total coloring*.

Local vertex antimagic total coloring merupakan pemetaan fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3..., |V(G)| + |E(G)|\}$ jika untuk setiap dua titik yang bertetangga v_1 dan v_2 mempunyai bobot $w(v_1) \neq w(v_2)$, dengan $v \in G$, $w(v) = \sum_{e\in E(v)} f(e) + f(v)$, $E(v)$ dan $V(v)$ adalah himpunan sisi yang berinsiden pada v dan himpunan titik yang bertetangga pada v. Oleh karena itu, *local vertex antimagic total coloring* menginduksi pewarnaan titik dari graf G jika setiap titik v mempunyai bobot $w(v)$. Bilangan kromatik dari *local vertex antimagic total coloring* dinotasikan dengan $\gamma_{lvat}(G)$ adalah bobot titik minimum yang diperoleh dari

pelabelan total pada graf G.

Pada tesis ini diperoleh dua lemma dan tujuh teorema baru terkait *local vertex antimagic total coloring*. Teorema yang diperoleh berupa bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi diantaranya adalah graf bintang S_n, graf lintasan P_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n, serta graf hasil operasi amalgamasi dari graf bintang dan graf lintasan. Adapun lemma dan teorema tersebut adalah:

1. **Lemma 4.1.1** Jika $\chi(G)$ adalah bilangan kromatik pewarnaan titik dari suatu graf G maka berlaku $\chi_{lvat}(G) \geq \chi(G)$.

2. **Lemma 4.1.2** Misalkan T adalah graf pohon dengan n daun. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf T adalah $\chi_{lvat}(T) \geq 2$

3. **Teorema 4.1.1** Untuk n bilangan asli $n \geq 2$, bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf bintang S_n adalah $\chi_{lvat}(S_n) = 2$.

4. **Teorema 4.1.2** Untuk n bilangan asli $n \geq 5$, bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf lintasan P_n adalah $\chi_{lvat}(P_n) \leq 3$.

5. **Teorema 4.1.3** Untuk n, m bilangan asli $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf bintang ganda $S_{n,m}$ adalah $\chi_{lvat}(S_{n,m}) \leq 3$.

6. **Teorema 4.1.4** Untuk n, m bilangan asli $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah

$$\chi_{lvat}(B_{m,n}) \leq \begin{cases} 4 & \text{untuk } n \text{ ganjil}, \ m \text{ ganjil atau} \\ & \text{untuk } n \text{ genap}, \ m \text{ ganjil} \\ 5 & \text{untuk } n \text{ ganjil}, \ m \text{ genap} \\ 6 & \text{untuk } n \text{ genap}, \ m \text{ genap} \end{cases}$$

7. **Teorema 4.1.5** Untuk n bilangan asli $n \geq 4$, bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf *centipede* C_n adalah $\chi_{lvat}(C_n) \leq 4$.

8. **Teorema 4.1.6** Misalkan G adalah graf hasil operasi amalgamasi titik dari graf bintang S_n yang dinotasikan dengan $Amal(S_n, v, m)$. Untuk n, m bilangan asli $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf G adalah

$$\chi_{lvat}(G) \leq \begin{cases} 3; & \text{untuk } n \text{ ganjil atau} \\ & \text{untuk } n \text{ genap } m \text{ ganjil} \\ 4; & \text{untuk } n \text{ genap } m \text{ genap} \end{cases}$$

9. **Teorema 4.1.7** Misalkan G adalah graf hasil operasi amalgamasi titik dari graf lintasan P_3 yang dinotasikan dengan $Amal(P_3, v, m)$. Untuk m bilangan asli $m \geq 3$, bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* dari graf G adalah

$$\chi_{lvat}(G) \leq \begin{cases} 3; & \text{untuk } m \text{ ganjil} \\ 4; & \text{untuk } m \text{ genap} \end{cases}$$

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul ”*Local Vertex Antimagic Total Coloring* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi”. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata dua (S2) pada Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Jember beserta jajarannya yang telah memberikan saya kesempatan untuk menimba ilmu di perguruan tinggi, almamater tercinta;
2. Dekan Fakultas MIPA, Ketua Jurusan Matematika, dan Ketua Program Studi Magister Matematika Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
4. Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama menjadi mahasiswa;
5. kedua orang tua beserta keluarga besar saya yang telah memberikan dorongan dan doanya demi terselesaikannya tesis ini;
6. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah memberikan ilmu dan membantu penulis dalam urusan administrasi selama perkuliahan;

7. keluarga besar CGANT Research Group Universitas Jember yang senantiasa mendorong saya untuk tetap bersemangat dalam proses pengerjaan tesis. Terima kasih untuk semua ilmu dan pengalaman yang diberikan;
8. rekan-rekan pejuang graf: Elsa Yuli Kurniawati, Mokhamad Saiful Hasan, Arum Andary Ratri, Deka Maya Rose, dan Risan Nur Santi yang senantiasa saling menyemangati dalam pengerjaan tesis ini;
9. rekan-rekan seperjuangan Magister Matematika FMIPA Angkatan 2016 yang selalu ada baik dalam suka maupun duka. Terimakasih untuk waktu yang sangat berharga selama 3 semester ini;
10. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Jember, Januari 2018
Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejarah munculnya graf berawal pada permasalahan jembatan Konigsberg pada tahun 1736. Di kota Konigsberg terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Permasalahan jembatan Konigsberg adalah apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Sebagian penduduk kota berpendapat bahwa tidak mungkin melalui setiap jembatan hanya satu kali dan kembali ke tempat asal. Pada tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban dari permasalahan jembatan Konisgberg. Euler memodelkan permasalahan itu ke dalam graf dengan mengilustrasikan situasi jembatan Konigsberg dimana digambarkan empat daratan sebagai titik, dan tujuh jembatan sebagai sisi. Dari ilustrasi yang dilakukan Euler, graf mulai berkembang.

Teori graf dalam matematika dan ilmu komputer adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Graf merupakan salah satu model matematika yang kompleks dan cukup sulit, akan tetapi bisa juga menjadi solusi yang sangat bagus untuk masalah tertentu. Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik karena keunikan dan banyak sekali penerapannya. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu (Budayasa, 2007).

Dalam perkembangannya terdapat beberapa topik atau kajian tentang teori graf seperti pewarnaan r-dinamis, bilangan dominasi, *covering*, bilangan ramsey, dimensi metrik dan pelabelan. Salah satu bidang kajian dalam teori graf yang banyak mendapat perhatian adalah tentang pelabelan dan pewarnaan graf. Pewarnaan graf mulai berkembang sejak Erdos dan Szekeres (1935) memperkenalkan bilangan Ramsey dua warna dalam teori graf. Sedangkan pelabelan graf diperkenalkan secara formal oleh Kotzig dan Rosa pada tahun 1967. Pelabelan graf G adalah pemberian nilai (biasanya bilangan asli) pada titik, sisi atau keduanya pada graf (Gallian, 2009). Pelabelan pada graf G merupakan pemetaan dari himpunan titik atau himpunan sisi atau gabungan dari himpunan titik dan sisi ke suatu himpunan, biasanya himpunan bilangan asli, dengan suatu aturan tertentu. Pelabelan terhadap titik disebut pelabelan titik, pelabelan terhadap sisi disebut pelabelan sisi, pelabelan terhadap gabungan titik dan sisi disebut pelabelan total (Wallis, 2001). Sedangkan pewarnaan pada graf meliputi pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah.

Salah satu topik yang sedang berkembang saat ini adalah *local antimagic coloring*. Pada *local antimagic coloring* melabeli elemen titik, sisi dan wilayah (*face*). Dasar pemikiran *local antimagic coloring* pertama kali diperkenalkan oleh Arrumugam dkk. di awal tahun 2017 pada jurnalnya yang berjudul *"Local Antimagic Vertex Coloring of Graph"*. Konsep *local vertex antimagic coloring* adalah melabeli sisi dari graf kemudian dicari bobot titiknya dengan cara menjumlahkan nilai dari label sisi yang berinsiden dengan titik tersebut. Pada artikel ini dijelaskan bahwa bilangan kromatik *local vertex antimagic coloring* merupakan banyaknya warna minimum yang diambil dari semua warna G yang disebabkan pelabelan *local vertex antimagic*. Beberapa graf yang sudah diteliti oleh Arrumugam dkk. antara lain graf lintasan P_n, graf *cycle* C_n, graf *friendship* F_n, graf tangga L_n, graf roda W_n, dan graf hasil operasi *joint*.

Pada tahun 2017 Agustin dkk.$^{(b)}$ mengembangkan penelitian dari Arrumugam tentang *local antimagic coloring*. Hal ini dapat diketahui dari jurnalnya yang berjudul *"Local Edge Antimagic Coloring of Graphs"*. Penelitian Agustin dkk. mengacu pada penelitian Arrumugam dkk. sebelumnya. Konsep dari *local edge antimagic coloring* pada dasarnya sama dengan *local vertex antimagic coloring*. Perbedaannya terletak pada elemen yang dilabeli. Jika *local vertex antimagic coloring* melabeli sisi kemudian dicari bobot titiknya, maka untuk *local edge antimagic coloring* melabeli titik dari graf kemudian dicari bobot sisinya. Pada *local edge antimagic coloring*, bobot sisi yang diperoleh selalu terdiri dari jumlah dua nilai label titik yang bersisian dengan sisi tersebut. Pada artikel *local edge antimagic coloring* menjelaskan jika $\delta(G)$ adalah derajat terbesar dari suatu graf G maka diperoleh $\gamma_{lea}(G) \geq \delta(G)$. Beberapa graf yang telah diteliti antara lain graf lintasan P_n, graf *cycle* C_n, graf *friendship* F_n, graf tangga L_n, graf bintang S_n, graf roda W_n, graf komplit K_n, graf prisma Pr_n, dan graf hasil operasi korona.

Selanjutnya ditahun yang sama, Agustin dkk.[a] melanjutkan penlitiannya tentang *local edge antimagic coloring*. Pada penelitian sebelumnya hanya menerapkan pada graf khusus, sedangkan pada penelitian ini menerapkan pada graf hasil operasi *comb product*. Hal ini dapat terlihat dari jurnalnya yang berjudul *"Local edge antimagic coloring of comb product of graphs"*.

Agustin dkk. mengembangkan penelitiannya tentang *local edge antimagic total coloring*. Hal ini diketahui dari jurnalnya yang berjudul *"The Construction of Super Local Edge Antimagic Total Coloring by Using an EAVL Technique"*(Agustin dkk., 2017)[c]. *Local edge antimagic total coloring* merupakan pengembangan dari *local edge antimagic coloring*. Karena pewarnaan total maka elemen yang dilabeli adalah titik dan sisinya kemudian dicari bobot sisinya.

Mengacu pada hasil penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih lanjut tentang *local vertex antimagic total coloring* pada beberapa famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi. Konsep *local vertex antimagic total coloring* tidak jauh berbeda dari *local edge antimagic total coloring*. Pada *local vertex antimagic total coloring* melabeli titik dan sisi dari graf kemudian dicari bobot titiknya. Pada penelitian ini menggunakan famili graf pohon karena memiliki karakterisasi yang berbeda dengan graf khusus lainnya yakni memiliki daun atau anting. Adapun graf yang digunakan pada penelitian ini adalah famili graf pohon seperti graf bintang S_n, graf lintasan P_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n, amalgamasi titik graf bintang Amal(S_n, v, m), dan amalgamasi titik graf lintasan Amal(P_3, v, m)

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik dari *local vertex antimagic total coloring* pada graf bintang S_n, graf lintasan P_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n, amalgamasi titik graf bintang Amal(S_n, v, m), dan amalgamasi titik graf lintasan Amal(P_3, v, m)?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini yaitu:

a. graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu famili graf pohon antara lain, graf bintang, graf lintasan, graf bintang ganda, graf pohon pisang, dan graf *centipede*;
b. operasi yang digunakan pada penelitian ini menggunakan operasi amalgamasi titik.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik dari *local vertex antimagic total coloring* pada graf bintang S_n, graf lintasan P_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n, amalgamasi titik graf bintang Amal(S_n, v, m), dan amalgamasi titik graf lintasan Amal(P_3, v, m).

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini yaitu:

a. meningkatkan pemahaman mengenai famili graf pohon, graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi titik;

b. memberi motivasi pada peneliti lain untuk memperluas penelitian tentang *local vertex antimagic total coloring*;

c. hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah *local vertex antimagic total coloring*

1.6 Kebaruan Penelitian

a. pada penelitian sebelumnya, elemen yang dilabeli hanya titik atau sisi saja, sedangkan pada penelitian ini menggabungkan elemen titik dan sisi untuk dilabeli kemudian dicari bobot titiknya;

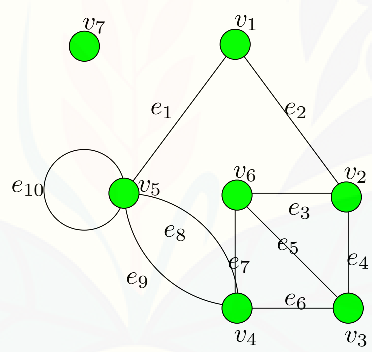
b. pada penelitian ini menggunakan operasi graf yaitu operasi amalgamasi titik;

c. graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu famili graf pohon.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri dari V, himpunan titik tak kosong dan E, himpunan sisi. Setiap sisi memiliki dua titik terhubung yang disebut titik ujung (Rosen, 2012). Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Dari penjelasan diatas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial (Munir, 2009).



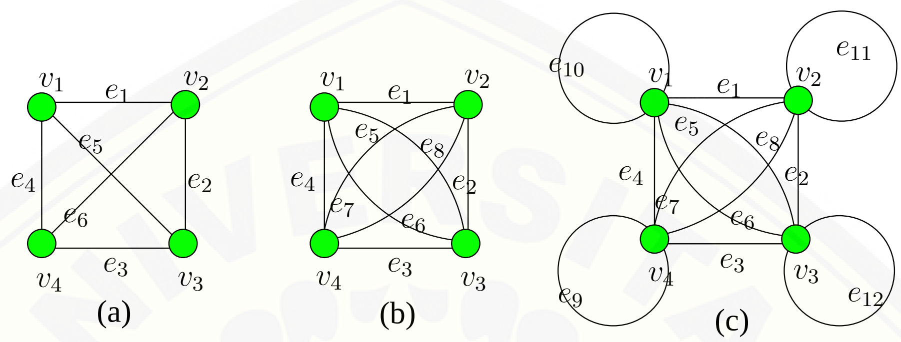
Gambar 2.1 Contoh Graf G

Pada Gambar 2.1 merupakan contoh graf G. Dari gambar tersebut terlihat bahwa pada graf G terdapat 7 titik dan 10 sisi yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}$. Sisi-sisi pada graf G dinyatakan oleh: $e_1 = v_1, v_5,\ e_2 = v_1, v_2,\ e_3 = v_2, v_6,\ e_4 = v_2, v_3,\ e_5 = v_3, v_6,\ e_6 = v_3, v_4,\ e_7 = v_4, v_6,\ e_8 = v_4, v_5,\ e_9 = v_4, v_5,\ e_{10} = v_5, v_5$. Sisi yang mempunyai ujung yang sama dinamakan sisi ganda atau *multiple edges*. Dari Gambar 2.1 yang merupakan sisi ganda adalah e_8 dan e_9. Jika suatu sisi menghubungkan titik yang sama, maka sisi tersebut dinamakan gelang atau *loop*. Dari Gambar 2.1 yang merupakan gelang adalah e_{10} (Manongga dkk., 2013).

Ordo dari sebuah graf G adalah banyaknya titik dalam graf G atau biasa disebut dengan kardinalitas titik dinotasikan dengan $|V|$. Sedangkan ukuran atau *size* adalah banyaknya sisi pada suatu graf biasa disebut kardinalitas sisi dinotasikan dengan $|E|$ (Manongga dkk., 2013). Menurut Wilson (2010), derajat sebuah titik v adalah bilangan yang menyatakan jumlah sisi yang bersinggungan dengan titik v, dan dilambangkan dengan *deg(v)*. Pendapat lain mengatakan derajat dari titik v pada G dinotasikan *deg(v)* adalah jumlah sisi yang bersisian dengan v, dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung (Lipschutz dan Lipson, 2002). Jika setiap titik pada graf G mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut dinamakan graf reguler atau teratur. Jika terdapat sebuah titik yang tidak mempunyai sisi yang terhubung dengannya atau dengan kata lain derajat titik tersebut bernilai 0, maka titik tersebut dinamakan titik terisolasi (Khud, 2010).

Jika u dan v adalah titik-titik pada graf G, dapat dikatakan u berdekatan (*adjacent*) dengan v jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan antara titik u dan v, dinotasikan dengan sisi $e = uv$, dengan kata lain u dan v bertetangga. Selanjutnya, titik u disebut bersisian/bertemu (*incident*) dengan sisi e jika titik u adalah titik ujung dari sisi e. Dapat juga dikatakan bahwa sisi e bersisian/bertemu (*incident*) dengan titik u jika titik u adalah titik ujung dari sisi e (Harstfield, 1994). Dengan kata lain, sisi e bersisian/bertemu (*incident*) dengan titik u dan v jika sisi e menghubungkan titik u dan v. Dua sisi misalnya e_1 dan e_2 dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai suatu titik ujung yang sama misalnya z, artinya e_1=uz dan e_2=vz (Nugroho, 2008).

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak sederhana (*unsimple graphs*). Berdasarkan jumlah titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dgolongkan menjadi dua jenis yaitu graf berhingga (*limited graph*)dan graf tak berhingga (*unlimited graph*). Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu graf tak berarah (*undirected graph*) dan graf berarah (*directed graph*)(Munir, 2009).



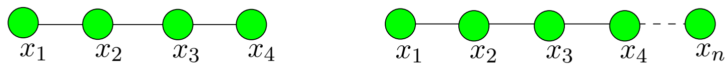
Gambar 2.2 Contoh (a)Graf Sederhana (b)Graf Ganda (c)Graf Semu

2.2 Famili Graf Pohon dan Operasi Amalgamasi

Graf terhubung yang tidak mengandung sirkuit disebut pohon. Diantara sekian banyak konsep dalam teori graf, konsep pohon (*tree*) mungkin merupakan konsep yang paling penting, karena terapannya yang luas dalam berbagai bidang ilmu baik dalam ilmu komputer maupun di luar bidang ilmu komputer. Berikut ini akan dijelaskan beberapa graf yang termasuk dalam famili graf pohon antara lain graf lintasan P_n, graf bintang S_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n dan graf kembang api $F_{m,n}$.

a. Graf Lintasan

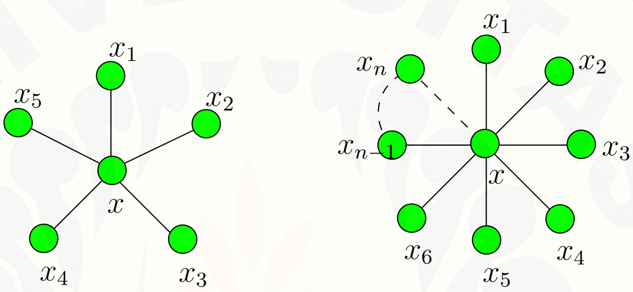
   Graf lintasan atau *path* adalah graf sederhana dengan $|V_p| = |E_p| + 1$ yang dapat digambar sehingga semua titik dan sisinya terletak pada satu garis lurus. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n mempunyai n titik dan $n - 1$ sisi (Gross dan Yellen, 2006). Sebagai ilustrasi dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Contoh Graf Lintasan P_4 dan P_n

b. Graf Bintang

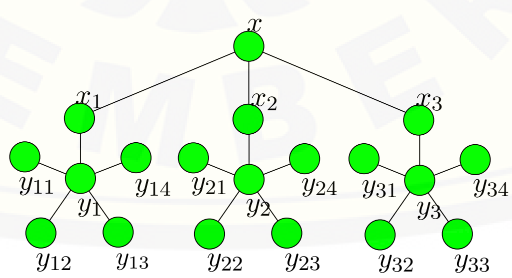
Graf bintang adalah graf dengan $n+1$ titik, dengan satu titik berderajat n, yang dinamakan titik pusat, dan n titik berderajat satu, yang dinamakan daun. Graf bintang dinotasikan dengan S_n dengan $n \geq 2$. Sebagai ilustrasi dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Contoh Graf Bintang S_3 dan S_8

c. Graf Pohon Pisang (*Banana Tree*)

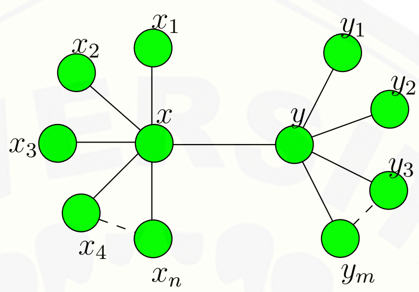
Graf pohon pisang *(banana tree)* adalah sebuah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu titik anting dari setiap m buah salinan n-graf bintang ke sebuah titik baru yang disebut titik akar x (Chen dkk., 1997). Sebagai ilustrasi dari graf pohon pisang dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Contoh Graf Pohon Pisang $B_{3,5}$

d. Graf Bintang Ganda (*Double Star*)

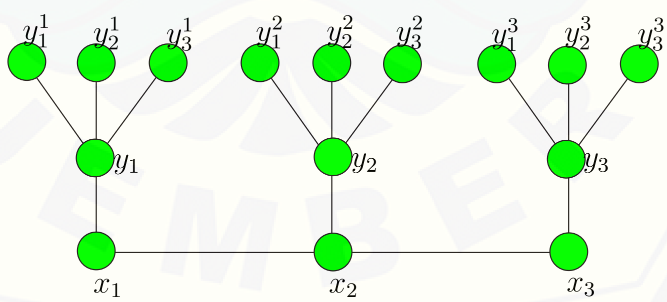
Graf bintang ganda adalah graf pohon yang mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Titik x berderajat $n+1$ dan y berderajat $m+1$. Graf bintang ganda ini dinotasikan dengan $S_{n,m}$ (Darmaji, 2011). Sebagai ilustrasi dari graf bintang ganda dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Contoh Graf Bintang Ganda $S_{n,m}$

e. Graf Kembang Api (*Firecracker*)

Graf kembang api *(firecracker)* adalah sebuah graf yang diperoleh dengan menghubungkan m buah graf bintang S_n dengan cara menghubungkan satu titik anting dari setiap graf bintang S_n dengan $1 \leq i \leq m$ dan dinotasikan dengan $F_{m,n}$ (Chen dkk., 1997). Sebagai ilustrasi dari graf kembang api dapat dilihat pada Gambar 2.7.

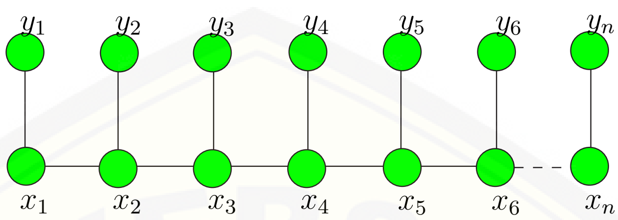


Gambar 2.7 Contoh Graf Kembang Api $F_{3,4}$

f. Graf *centipede*

Graf *centipede* (C_n) adalah pohon dengan banyaknya titik $2n$ dan banyaknya sisi

$2n-1$ yang diperoleh dengan menggabungkan titik bagian bawah dari n salinan graf lintasan P_2 dengan sebuah sisi (Sudha dkk., 2013). Sebagai ilustrasi dari graf *centipede* dapat dilihat pada Gambar 2.8.

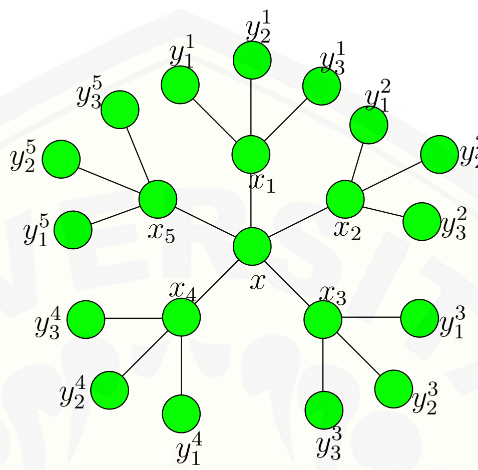


Gambar 2.8 Contoh graf *centipede* C_n

Operasi graf merupakan salah satu cara untuk mendapatkan graf baru dengan cara melakukan operasi terhadap graf. Dalam penelitian ini akan menggunakan operasi amalgamasi. Berikut definisi dari operasi amalgamasi pada graf.

Definisi 2.2.1. *Misalkan $\{G_i\}$ merupakan kumpulan graf berhingga dan masing-masing G_i mempunyai titik tertentu yang sama, yakni v_{oi}, yang disebut sebagai titik terminal. Amalgamasi pada G_i dinotasikan dengan $Amal\{G_i, v_{oi}\}$, diperoleh dengan cara menyatukan seluruh graf G_i pada titik terminalnya. Untuk sebarang bilangan bulat m, amalgamasi dari graf $\{G_i\}$ dinotasikan dengan $Amal\{G_i, v_{oi}, m\}$ dengan m adalah banyaknya duplikasi dari G_i (Maryati, dkk., 2010:339).*

Ilustrasi graf hasil operasi amalgamasi dari graf bintang $Amal(S_4, v, 5)$ dapat dilihat pada Gambar 2.9. Pada Gambar 2.9, graf bintang S_4 diduplikasi sebanyak 5 kemudian disatukan pada titik terminalnya dengan titik ujung dari graf bintang yang dijadikan sebagai titik terminal. Memperhatikan gambar tersebut dapat diketahui himpunan titik dan sisi. Adapun himpunan titik dan sisi dari graf amalgamasi graf bintang S_n berturut-turut adalah $V(G) = \{x\} \cup \{x_j;\ 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_i^j;\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(G) = \{xx_j;\ 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_j y_i^j;\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq m\}$. Kardinalitas titik dan sisi dari graf G berturut-turut adalah $|V(G)| = mn + 1$ dan $|V(G)| = mn$. Pada Gambar 2.9 merupakan hasil amalgamasi dari graf S_4 dengan $m = 5$ sehingga $|V(G)| = 21$ dan $|V(G)| = 20$.



Gambar 2.9 Graf Hasil Operasi Amalgamasi $Amal(S_4, v, 5)$

2.3 Fungsi

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, dinotasikan dengan $f : A \longrightarrow B$ adalah aturan korespondensi yang memasangkan setiap anggota di A dengan tepat satu anggota di B. Himpunan A disebut daerah asal atau *domain* dari f dan himpunan B disebut *kodomain* dari f. Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan dari a, dan a disebut bayangan dari b. *Range* atau bayangan dari f merupakan himpunan semua bayangan dari elemen A. Berikut ini beberapa jenis fungsi yaitu:

a. Fungsi injektif

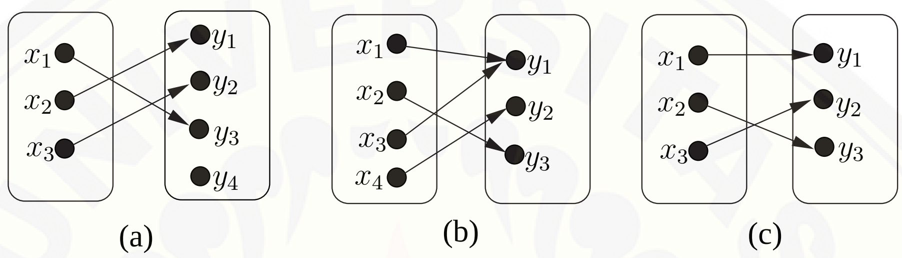
   Diberikan $f : A \longrightarrow B$ adalah sebuah fungsi dari A ke B, fungsi f disebut fungsi injektif atau satu-satu jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b. Fungsi surjektif

   Diberikan $f : A \longrightarrow B$ adalah sebuah fungsi dari A ke B, fungsi f disebut fungsi surjektif atau onto jika *range* dari f adalah elemen di B, dengan kata lain untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$.

c. Fungsi bijektif

Diberikan $f : A \longrightarrow B$ adalah sebuah fungsi dari A ke B, fungsi f disebut fungsi bijektif jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif (Bartle, 2010).

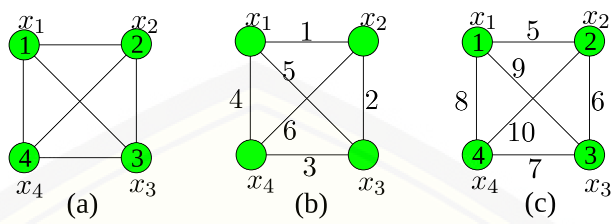


Gambar 2.10 (a) Fungsi Injektif (b) Fungsi Surjektif (c) Fungsi Bijektif

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf G adalah pemetaan yang memetakan himpunan elemen dari suatu graf ke himpunan bilangan non negatif. Jika domain berupa titik disebut pelabelan titik. Jika domain berupa sisi disebut pelabelan sisi. Jika domain berupa titik dan sisi disebut pelabelan total (Dafik, 2013).

Pada pelabelan graf terdapat jumlah label atau biasa disebut bobot dari elemen-elemen baik titik maupun sisi. Pada pelabelan titik maka didapatkan bobot sisi. Bobot sisi diperoleh dari penjumlahan dua label titik yang melekat pada sisi tersebut. Sedangkan untuk bobot titik didapatkan dari pelabelan sisi. Bobot titik diperoleh dari penjumlahan dua atau lebih label sisi yang berinsiden pada titik tersebut. Pada pelabelan total dapat diperoleh bobot sisi dan bobot titik. Untuk bobot sisi pada pelabelan total selalu diperolah dari penjumlahan dua label titik ujung yang menghubungkan sisi tersebut. Sedangkan untuk bobot titik pada pelabelan total diperoleh dari penjumlahan label sisi yang bersisihan dengan label titik itu sendiri. Contoh graf dengan pelabelan dapat dilihat pada Gambar 2.11



Gambar 2.11 Contoh (a) Pelabelan Titik (b) Pelabelan Sisi (c) Pelabelan Total

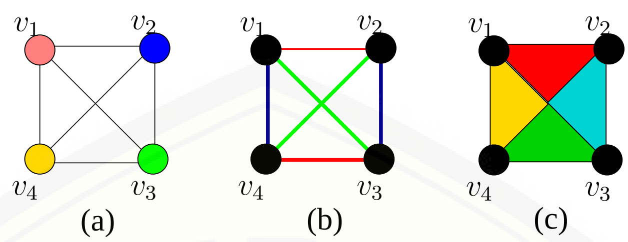
2.5 Pewarnaan Pada Graf

Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dapat berupa titik, sisi dan wilayah. Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009). Pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga.

Pewarnaan sisi pada graf G merupakan pemberian warna pada sisi-sisi graf G, satu warna untuk setiap sisi pada graf G, dimana sisi-sisi yang bertetangga diberikan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009). Seperti halnya pada pewarnaan titik, pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai fungsi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ sehingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap dua sisi e dan f yang bertetangga pada G. Bilangan asli k minimum untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai indeks kromatik (atau disebut juga bilangan kromatik sisi) graf G dan dinotasikan dengan $\chi'(G)$.

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah memberikan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama (Chartrand dan Zhang, 2009). Seperti halnya dengan pewarnaan titik dan pewarnaan sisi, pewarnaan wilayah juga dapat dinyatakan sebagai fungsi $c : R(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, sehingga $c(r) \neq c(s)$ untuk setiap wilayah r dan s

merupakan wilayah bertetangga pada G. Contoh graf dengan pewarnaan dapat dilihat pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Contoh (a) Pewarnaan Titik (b) Pewarnaan Sisi (c) Pewarnaan Wilayah

2.6 *Local Antimagic Coloring*

Konsep pelabelan *antimagic* diperkenalkan oleh Harstfield dan Ringel di tahun 1989 pada jurnalnya yang berjudul *Supermagic and Antimagic Graphs*. Pelabelan tersebut merupakan pemberian angka biasanya bilangan asli sehingga bobot pada setiap titik atau sisi berbeda. Kerangka konsep pelabelan bijektif dari sebuah graf dapat dilihat pada Gambar 2.13. Pada gambar tersebut menjelaskan posisi *local vertex antimagic total coloring* pada pelabelan bijektif dari sebuah graf. Konsep *local antimagic coloring* merupakan penggabungan dari konsep pelabelan dengan pewarnaan. Penggabungan tersebut didasarkan pada penelitian Arumugam. Pelabelan diterapkan untuk melabeli suatu elemen graf G dengan himpunan bilangan asli, sedangkan pewarnaan diterapkan pada bobot hasil penjumlahan dari label. Pada *local antimagic coloring*, $w(u) = w(v)$ adalah bobot titik pada u dan v, sedangkan $w(e)$ adalah bobot sisi pada e. Fungsi $f(v)$ dan $f(u)$ adalah fungsi label titik pada u dan v sedangkan $f(e)$ adalah fungsi label sisi pada e.

2.6.1 *Local Antimagic Vertex Coloring*

Konsep *local vertex antimagic coloring* adalah melabeli elemen dari suatu graf berupa sisi kemudian ditentukan bobot titiknya. Arumugam dkk. (2017) memberikan penjelasan terkait definisi dari *local vertex antimagic coloring* yang ditunjukkan pada Definisi 2.6.1.

Definisi 2.6.1. *Misalkan diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan ordo n dan size m dan tidak mempunyai titik terisolasi. Fungsi bijektif $f : E \longrightarrow \{1, 2, ..., m\}$ disebut local antimagic labeling untuk semua $uv \in E$ diperoleh $w(u) \neq w(v)$ dengan $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$. Graf G adalah local antimagic jika G mempunyai local antimagic labeling (Arumugam dkk., 2017).*

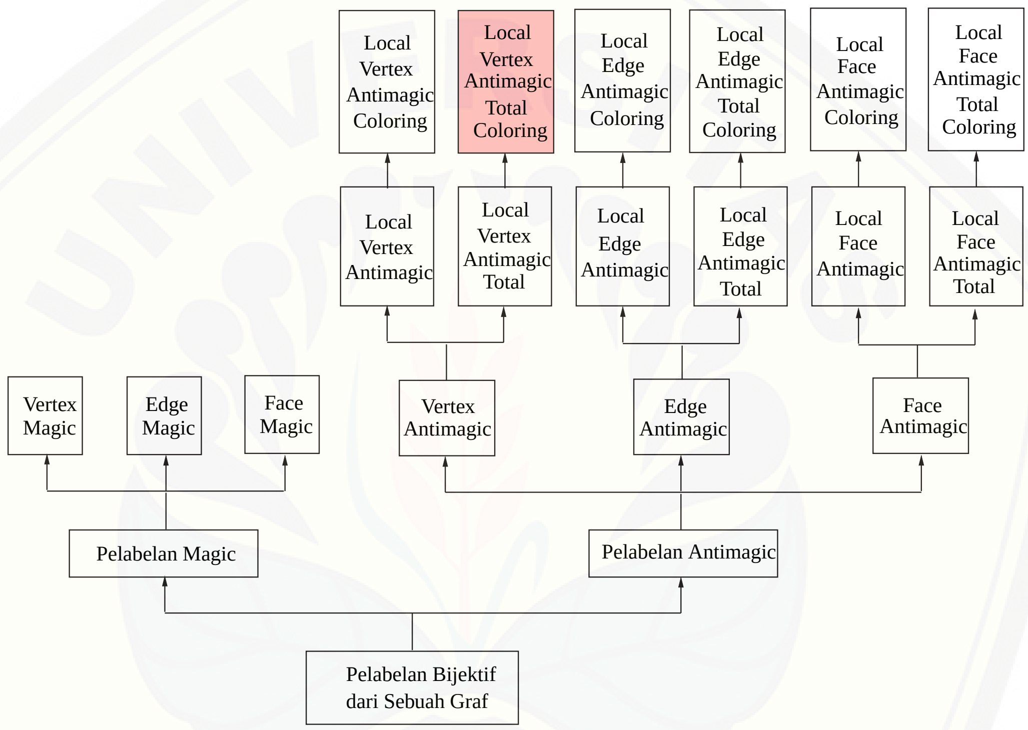
Definisi 2.6.2. *Bilangan kromatik local antimagic dinotasikan dengan $\chi_{la}(G)$ didefinisikan sebagai banyak warna minimum yang diambil dari semua warna G yang disebabkan oleh local antimagic labeling dari graf G (Arumugam dkk., 2017).*

2.6.2 *Local Edge Antimagic Coloring*

Local edge antimagic coloring merupakan pengembangan dari penelitian yang dilakukan Arumugam dkk., di tahun 2017. Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$, fungsi bijektif $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, ..., |V(G)|\}$ disebut *local edge antimagic coloring* jika untuk dua sisi yang berinsiden dengan titik yang sama e_1 dan e_2, $w(e_1) \neq w(e_2)$, dengan $e = uv \in G, w(e) = f(u) + f(v)$. *Local edge antimagic coloring* menginduksi pewarnaan sisi dari graf G jika setiap sisi e memiliki warna $w(e)$. Bilangan kromatik *local edge antimagic coloring* dinotasikan dengan $\gamma_{lea}(G)$ adalah banyak warna minimum yang diambil dari semua warna G yang disebabkan oleh *local edge antimagic coloring* graf G (Agustin dkk., 2017).

2.6.3 *Local Vertex Antimagic Total Coloring*

Local vertex antimagic total coloring merupakan pengembangan konsep dari penelitian sebelumnya. Pada *local vertex antimagic total coloring* melabeli titik dan sisi sekaligus kemudian ditentukan bobot titik. Fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3..., |V(G)| + |E(G)|\}$ disebut *local vertex antimagic* *total coloring* untuk setiap dua titik yang bertetangga v_1 dan v_2 mempunyai bobot yang berbeda $w(v_1) \neq w(v_2)$, dengan $v \in G$, $w(v) = \sum_{e \in E(v)} f(e) + f(v)$, $E(v)$ dan $V(v)$ adalah himpunan sisi yang berinsiden pada v dan himpunan titik yang bertetangga pada v. Bilangan kromatik dari *local vertex antimagic total coloring* dinotasikan dengan $\gamma_{lvat}(G)$ adalah bobot titik minimum yang diperoleh dari *local vertex antimagic total coloring* pada graf G.



Gambar 2.13 Kerangka Konsep Pelabelan Bijektif dari Sebuah Graf

2.7 Hasil Penelitian Sebelumnya tentang *Local Antimagic Coloring*

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil *Local Vertex Antimagic Coloring* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian terdahulu. Bisa dilihat pada Tabel 2.1, Tabel 2.2 dan Tabel 2.3.

Tabel 2.1: Hasil *Local Vertex Antimagic Coloring* terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf *Path* (P_n), $n \geq 3$	$\chi_{la}(P_n) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf *Cycle*(C_n), $n \geq 3$	$\chi_{la}(C_n) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf *Friendship* (F_n) untuk $n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf $F_n - \{e\}$ untuk $n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n - \{e\}) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf Komplit ($K_{m,n}$) $m, n \geq 2$	$\chi_{la}(K_{m,n}) = 2$ jika $m \equiv n(\text{mod } 2)$	Arumugam dkk., 2017
Graf Komplit Bipartit ($K_{2,n}$)	$\chi_{la}(K_{2,n}) = 2$, n genap, $n \geq 4$ $\chi_{la}(K_{2,n}) = 3$, n ganjil, $n = 2$	Arumugam dkk., 2017
Graf $L_(n)$, $n \geq 2$	$\chi_{la}(L_n) = n + 1$	Arumugam dkk., 2017
Graf *Wheel* (W_n), derajat $n + 1$	$\chi_{la}(W_n) = 4$, $n \equiv 1, 3(\text{mod } 4)$ $\chi_{la}(W_n) = 3$, $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ $3 \leq \chi_{la}(W_n) \leq 5$, $n \equiv 0(\text{mod } 4)$	Arumugam dkk., 2017
Graf G, $n \geq 4$, $H = G + \overline{K_2}$	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H) \leq \chi_{la}(G) + 1, n$ genap	Arumugam dkk., 2017
	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H) \leq \chi_{la}(G) + 2$ lainnya	Arumugam dkk., 2017

Tabel 2.2: Hasil *Local Edge Antimagic Coloring* terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf Lintasan (P_n), $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n) = 2$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
Graf Lingkaran (C_n), $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n) = 3$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
Graf *Friendship* (F_n), $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(F_n) = 2n + 1$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
Graf Tangga (L_n), $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(L_n) = 3$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
Graf Bintang (S_n), $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(S_n) = n$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
Graf Roda (W_n), $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(W_n) = 2n + 2$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$

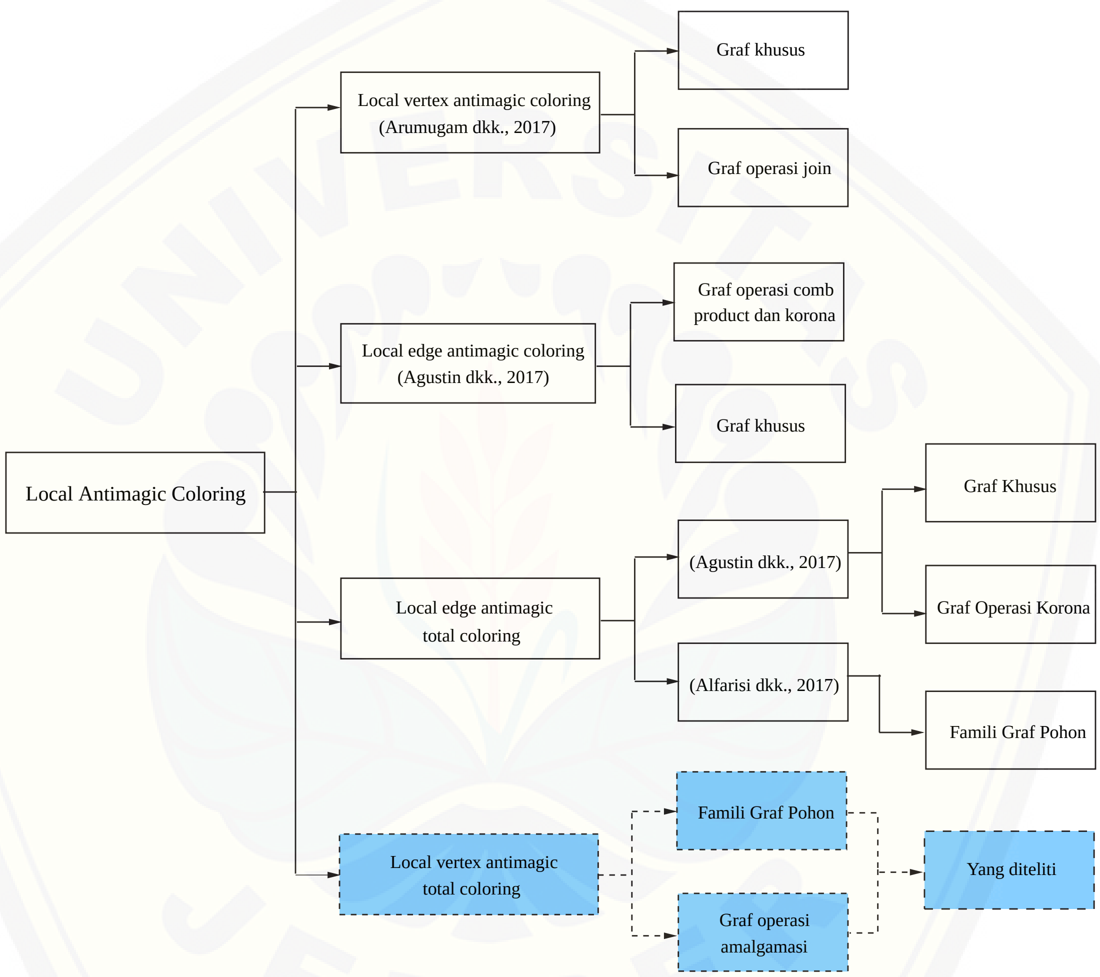
Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf Lengkap (K_n), $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} - 1$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
Graf Prisma (Pr_n), $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(Pr_n) = 5$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
$C_n \odot mK_1$ $n \geq 3, m \geq 1$	$\gamma_{lea}(C_n \odot mK_1) = m + 3$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
$G \odot mK_1$ $G \equiv n \geq 3, m \geq 1$	$\gamma_{lea}(G \odot mK_1) = \gamma_{lea}(G) + m$	Agustin dkk., 2017$^{(b)}$
$P_n \rhd P_m$; $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \rhd P_m) = 4$	Agustin dkk., 2017$^{(a)}$
$P_n \rhd C_m$; $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \rhd C_m) = 5$	Agustin dkk., 2017$^{(a)}$
$C_n \rhd P_m$; $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \rhd P_m) = 5$	Agustin dkk., 2017$^{(a)}$
$(C_n \rhd C_m)$; $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \rhd C_m) = 6$	Agustin dkk., 2017$^{(a)}$
$(P_n \rhd S_m)$; $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \rhd S_m) = 2 + m$	Agustin dkk., 2017$^{(a)}$
$(C_n \rhd S_m)$; $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \rhd S_m) = 3 + m$	Agustin dkk., 2017$^{(a)}$

Tabel 2.3: Hasil *Local Edge Antimagic Total Coloring* terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf Lintasan (P_n) n ganjil, $n \geq 3$ n genap, $n \geq 4$	 $\gamma_{leat}(P_n) = 2$ $\gamma_{leat}(P_n) = 3$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$
Graf Lingkaran (C_n) n ganjil	 $\gamma_{leat}(C_n) = 3$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$
Graf Tangga (L_n) n ganjil	 $\gamma_{leat}(L_n) = 3$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$
Graf Ulat $(C_{n,m})$ n ganjil	 $\gamma_{leat}(L_n) = m + 2$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$
Graf $P_n \odot P_2$ n ganjil	 $\gamma_{leat}(P_n \odot P_2) = 5$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$
Graf $C_n \odot P_2$ n ganjil	 $\gamma_{leat}(C_n \odot P_2) = 5$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$
Graf $G \odot P_2$	$\gamma_{leat}(G \odot P_2) = \gamma_{leat}(G) + 3$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$

Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf $H \odot mK_1$	$\gamma_{leat}(H \odot mK_1) = \gamma_{leat}(H) + m$	Agustin, I.H. dkk., 2017$^{(c)}$
Graf Kipas (F_n)		
n ganjil	$\gamma_{leat}(F_n) = n + 2$	Alfarisi, R. dkk., 2017
n genap	$\gamma_{leat}(F_n) = n + 3$	
Graf Roda (W_n)		
$n = 4$	$\gamma_{leat}(W_n) = n + 4$	Alfarisi, R. dkk., 2017
$n \geq 3$ dan $n \neq 4$	$\gamma_{leat}(W_n) = n + 3$	
Graf Gear $(J_{n,1})$	$\gamma_{leat}(J_{n,1}) = n + 2$	Alfarisi, R. dkk., 2017
$n \geq 3$		
Graf Helm (H_n)		
n ganjil	$\gamma_{leat}(H_n) = n + 4$	Alfarisi, R. dkk., 2017
n genap	$\gamma_{leat}(H_n) = n + 5$	

Pada tabel terlihat bahwa untuk *local vertex antimagic total coloring* belum pernah diteliti sebelumnya. Tabel 2.1 menunjukkan hasil penelitian dari Arumugam dkk. di tahun 2017 terkait *local vertex antimagic coloring* pada sebarang graf. Tabel 2.2 menunjukkan hasil penelitian dari Agustin dkk. (2017) terkait *local edge antimagic coloring* pada graf khusus dan graf hasil operasi *comb product*. Sedangkan Tabel 2.3 menunjukkan hasil penelitian dari Agustin dkk. (2017) dan Alfarisi dkk. (2017) terkait *local edge antimagic total coloring* pada graf khusus dan graf operasi. Mengacu pada tabel tersebut, untuk *local vertex antimagic total coloring* belum pernah ada yang meneliti, sehingga penulis tertarik untuk mengembangkan topik ini. Gambar 2.14 merupakan skema penelitian terdahulu terkait *local antimagic coloring*.



Gambar 2.14 *Skema penelitian terdahulu tentang local antimagic coloring*

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Data Penelitian

Adapun data penelitian yaitu menggunakan data yang bersumber dari *internet browsing, textbook,* jurnal atau prosiding terkait dengan famili graf pohon. Data yang digunakan berupa famili graf pohon dan graf hasil operasi. Adapun operasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi amalgamasi titik. Graf-graf yang digunakan pada penelirian ini adalah graf bintang S_n, graf lintasan P_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n, amalgamasi titik graf bintang $Amal(S_n, v, m)$, dan amalgamasi titik graf lintasan $Amal(P_3, v, m)$.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam mengambangkan lemma, teorema ataupun konjektur. Metode ini menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan lemma, dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Pada penelitian ini akan didapatkan teorema ataupun definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema atau definisi sebelumnya yang telah ada. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola yaitu dengan menentukan pola pelabelan total sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian disusun untuk memberikan gambaran secara sistematis. Pada bagian ini akan dijelaskan tentang langkah-langkah yang dilakukan terkait penelitian tentang *local vertex antimagic total coloring* pada graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi. Adapun rancangan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

a. menentukan graf sebagai objek penelitian;

Pada langkah ini menentukan graf sebagai objek dari penelitian. Graf yang digunakan yaitu famili graf pohon seperti graf bintang S_n, graf lintasan P_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n, amalgamasi titik graf bintang $Amal(S_n, v, m)$, dan amalgamasi titik graf lintasan $Amal(P_3, v, m)$.

b. menentukan notasi titik, himpunan titik dan sisi serta kardinalitasnya;

Pada langkah ini, graf pada point 1 ditentukan notasi titiknya. Dari penotasian titik diperoleh himpunan titik dan sisinya. Setelah himpunan titik dan sisi diperoleh, maka dapat diketahui banyaknya titik dan sisi yang ada pada graf.

c. menentukan pelabelan titik dan pelabelan sisi;

Pada langkah ini dilakukan pemberian label titik dan label sisi dari graf yang diteliti. Semua titik dan sisi harus diberi label sehingga tidak ada satupun titik dan sisi yang tidak berlabel. Setiap titik dan sisi mempunyai label yang berbeda. Di sisi lain, graf pada point 1 dicari pewarnaan titiknya. Sehingga diperoleh bilangan kromatiknya $\chi(G)$.

d. menghitung bobot titik total pada graf

Setelah graf diberi label, pada langkah ini akan dicari bobot titiknya. Bobot titik diperoleh dari penjumlahan label titik dan label sisi yang berinsiden dengan titik tersebut.

e. memeriksa apakah bobot titik total yang bertetangga memiliki bobot/warna yang sama. Pada langkah ini akan diperiksa keberbedaan bobot titik yang diperoleh. Apabila titik yang bertetangga memiliki bobot titik total yang sama maka akan ditinjau kembali pelabelan titik dan sisinya. Akan tetapi apabila titik yang bertetangga memiliki bobot titik total yang berbeda maka diperoleh banyaknya bobot titik total dimisalkan a;

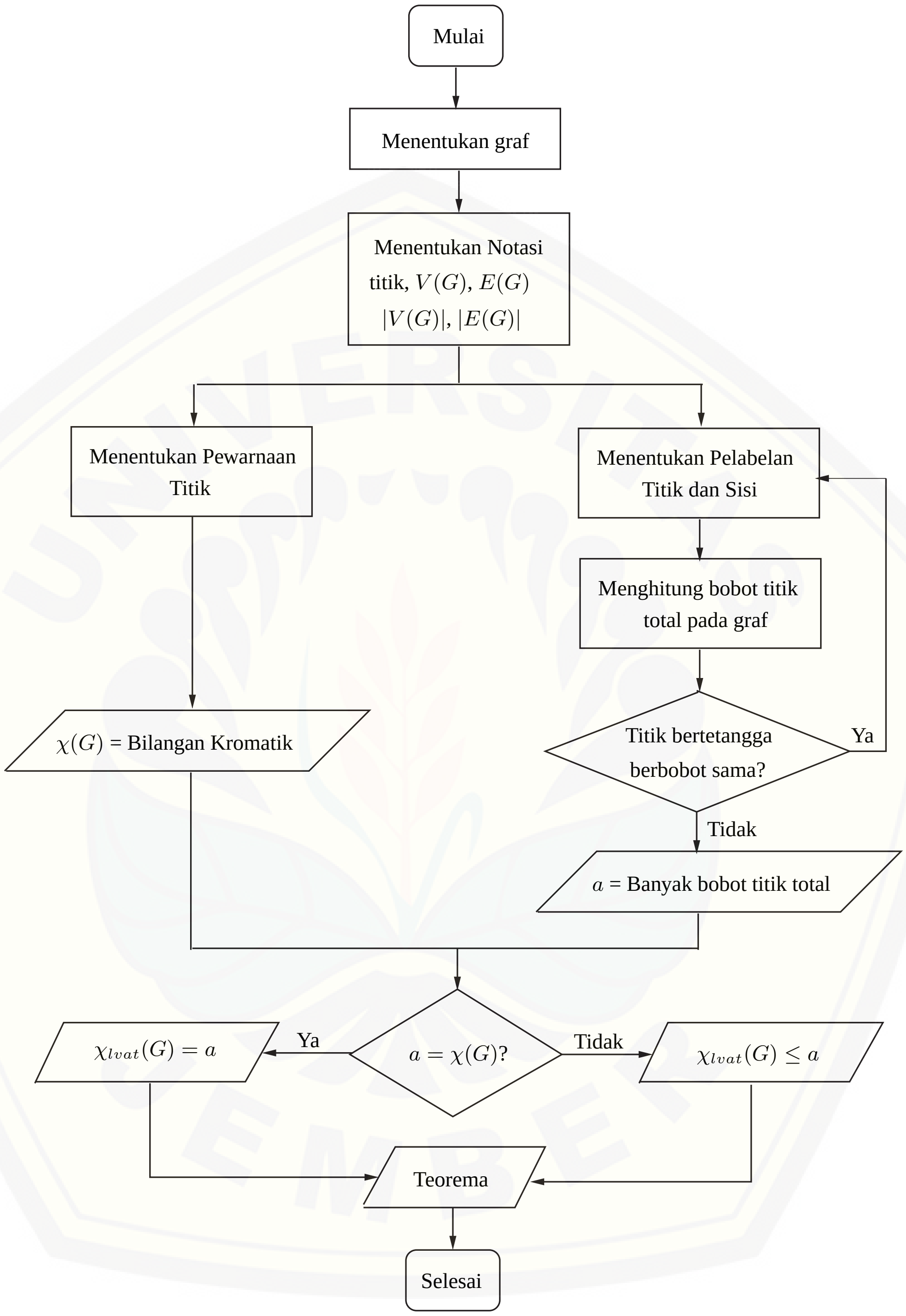
f. memeriksa banyaknya bobot titik total sama dengan bilangan kromatik;

   Pada langkah ini akan diperiksa apakah banyaknya bobot titik total yang diperoleh pada point 5 sama dengan bilangan kromatik $\chi(G)$. Jika banyaknya bobot titik total sama dengan bilangan kromatik maka $\chi_{lvat}(G) = a$, dengan a adalah banyaknya bobot titik yang diperoleh pada point 5. Jika banyaknya bobot titik total tidak sama dengan bilangan kromatik maka $\chi_{lvat}(G) \leq a$.

g. membuat teorema baru;

   Pada langkah ini akan disusun teorema baru terkait *local vertex antimagic total coloring*. Teorema yang diperoleh berupa nilai $\chi_{lvat}(G)$ pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi.

Skema dari rancangan penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Penelitian dalam tesis ini telah menemukan teorema baru terkait *local vertex antimagic total coloring*. Teorema baru tersebut tentang bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada graf bintang S_n adalah $\chi_{lvat}(S_n) = 2$. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada graf lintasan P_n adalah $\chi_{lvat}(P_n) \leq 3$. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada graf bintang ganda $S_{n,m}$ adalah $\chi_{lvat}(P_n) \leq 3$. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada graf pohon pisang $B_{n,m}$ adalah $4 \leq \chi_{lvat}(B_{m,n}) \leq 6$. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada graf *centipede* C_n adalah $\chi_{lvat}(C_n) \leq 4$. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada graf hasil operasi amalgamasi titik dari graf bintang adalah $3 \leq \chi_{lvat}(Amal(S_n, v, m)) \leq 4$. Bilangan kromatik *local vertex antimagic total coloring* pada graf hasil operasi amalgamasi titik dari graf lintasan adalah $3 \leq \chi_{lvat}(Amal(P_3, v, m)) \leq 4$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian terkait *local vertex antimagic total coloring* pada famili graf pohon seperti graf bintang S_n, graf lintasan P_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, graf pohon pisang $B_{m,n}$, graf *centipede* C_n, dan graf hasil operasi amalgamasi, peneliti memberikan saran kepada pembaca agar melakukan penelitian dan mengkaji lebih dalam tentang topik *local vertex antimagic total coloring*. Dikarenakan topik ini masih tergolong topik baru dan perlu pengembangan yang lebih luas. Diharapkan para peneliti lain dapat menemukan batas bawah dari *local vertex antimagic total coloring*. Terkait hasil penelitian yang didapatkan, peneliti memberikan saran kepada para pembaca untuk meneliti *local vertex antimagic total coloring* pada famili graf yang lain, misalkan famili graf roda dan dengan operasi yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[a]Agustin, I. H., Dafik, Moh. Hasan, Alfarisi, R., A.I. Kristiana. 2017. *Local Edge Antimagic Coloring of Comb Product of Graphs*. (Accepted)

[b]Agustin, I. H., Dafik, Moh. Hasan, Alfarisi, R., Prihandini, R.M. 2017. *Local Edge Antimagic Coloring of Graphs*. India: Far East Journal of Mathematical Sciences

[c]Agustin, I. H., Dafik, Slamin, Alfarisi, R., Kurniawati, E.Y. 2017. *The Construction of Super Local Edge Antimagic Total Coloring by Using an EAVL Technique*. (Accepted)

Alfarisi, R., Dafik, Agustin, I. H., Kristiana, A.I. 2017. *The Local Edge Antimagic Total Coloring of Some Wheel Related Graphs*. India: Far East Journal of Mathematical Sciences.

Arumugam S., Premalatha K., Baca M., Semanicova-Fenovcikova A. 2017. *Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph*. Graphs and Combinatorics. 33 275-285.

Bartle, R.G. 2010. *Introduction to Real Analysis*. Fourth Edition. University of Illionis, Urbana-Champaign.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Universitas Negeri Surabaya.

Chartrand, G. dan Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. CRC Press, Taylor and Francis Group .

Chen, W., L., H. dan Yeh, Y. 1999. *Operations of interlaced trees and graceful trees*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics 21, 337 348.

Dafik. 2013. *Antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Disconnected Graphs*. Jember: CSS.

Darmaji. 2011. Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung. *Disertasi*. Bandung: Program Studi Doktor Matematika Institut Teknologi Bandung.

Gallian, J.A. 2009. *Dinamyc Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics, 16:1-219.

Gross, J.L. dan Yellen, J. 2006. *Graph Theory and Its Applications Second Edition*. USA: CRC Press.

Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.

Hartsfield, N. and Ringel, G. 1989. *Supermagic and Antimagic Graph*. J. Rec. Math., **21** 107-115.

Khud. 2010. Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Banana Tree. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.

Lipschutz dan Lipson. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta: Salemba Teknika

Lukito, A dan Nurhidayat, A. (Tanpa Tahun). *Grup Automorfisme Graf Helm, Graf Helm Tertutup, Dan Graf Buku*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya

Manongga, D., Nataliani, Y. 2013. *Matematika Diskrit Edisi Pertama*. Jakarta: Kencana Prenada Media Group.

Maryati, T. K.; Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. *On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph*. Utilitas Math 83, 333-342.

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Nugroho, D.B. 2008. *Catatan Kuliah (2 SKS) MX 324 Pengantar Teori Graf*. Universitas Kristen Satya Wacana.

Rosen, K. H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Apllications Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill.

Sudha, S., Kanniga, V. 2013. *Superposition of Stars on Cycles and n-Centipedes are Graceful*. Mathematical Sciences International Research Journal Volume 2 Issue 2.

Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. Boston: Birkhauser.

Wilson, J. Robin. 2010. *Pengantar Teori Graf Edisi Kelima*. Jakarta: Penerbit Erlangga.