PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF C_n, Bt_n, W_d^n DAN APLIKASI GRAF C_n PADA KRIPTOGRAFI *HILL CHIPER*

SKRIPSI

Oleh

Gita Irawan

NIM 141810101052

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2018

PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF C_n, Bt_n, W_d^n DAN APLIKASI GRAF C_n PADA KRIPTOGRAFI *HILL CHIPER*

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Gita Irawan
NIM 141810101052

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Subhanahu Wa Ta'ala yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad Shallallahu'alaihi Wassalam, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dengan teriring rasa terimakasihku yang terdalam kepada:

1. Ibuku Gigit Fantariyati dan Kakakku Dodik Irawan yang selalu mencurahkan kasih sayangnya dan mendo'akan dengan tulus tanpa kenal lelah;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Dr. Kristina Wijaya, S.Si., M.Si, selaku Dosen Penguji I dan Ikhsanul Halikin, S.Pd, M.Si., selaku Dosen Penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. Guru-guru TK Dharma Wanita 01, SDN Patrang 02 Jember, SMPN 4 Jember, SMAN 1 Arjasa dan dosen-dosen FMIPA Matematika Uiversitas Jember yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Sahabat-sahabat terbaikku: Elsa, Sinta, Firda, Facay, Nu'u, Dede, Tika dan keluarga besar angkatan matematika 2014 (EXTREME) yang selalu memberikan dukungan serta semangat;
5. Teman-teman seperjuangan graf yang selalu memberikan semangat dan berjuang bersama;
6. Alamamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
7. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

MOTTO

"Sesungguhnya bersama kesukaran itu ada keringanan. Karena itu bila kau sudah selesai (mengerjakan yang lain). Dan berharaplah kepada Tuhanmu"
(Q.S Al-Insyirah:6-8)[1]

"Tidak boleh hasad kecuali dalam dua perkara. 1.Terhadap orang yang diberi harta oleh Allah, lalu dia menghabiskannya dijalan yang benar. 2.Dan terhadap orang yang diberi hikmah (ilmu) oleh Allah lalu dia mengamalkannya dan mengajarkannya kepada orang lain"
(HR. Bukhari)[2]

1

[1]Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Quran dan Terjemahannya*. Bandung: CV. Penerbit Diponegoro.

[2]Diriwayatkan oleh Imam al-Bukhari rahimahullah didalam Shahih nya, hadist no 73, juga dalam hadist no 1409, 7141 dan 7361

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Gita Irawan

NIM : 141810101052

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF C_n, Bt_n, W_d^n DAN APLIKASI GRAF C_n PADA KRIPTOGRAFI *HILL CHIPER*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang Menyatakan

Gita Irawan

NIM 141810101052

SKRIPSI

PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF C_n, Bt_n, W_d^n DAN APLIKASI GRAF C_n PADA KRIPTOGRAFI *HILL CHIPER*

Oleh

Gita Irawan

NIM 141810101052

Pembimbing :

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing Anngota : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF C_n, Bt_n, W_d^n DAN APLIKASI GRAF C_n PADA KRIPTOGRAFI *HILL CHIPER*” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji:

Ketua,	Sekertaris,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 196808021993031004	NIP. 198408012008012006
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Dr. Kristina Wijaya, S.Si., M.Si	Ikhsanul Halikin, S.Pd, M.Si.
NIP. 197704302005011001	NIP. 196906061998031001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematikan dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF C_n, Bt_n, W_d^n DAN APLIKASI GRAF C_n PADA KRIPTOGRAFI *HILL CHIPER*; Gita Irawan, 141810101052: 75 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Cabang kajian graf yang dikembaangkan saat ini adalah pewarnaan dan pelabelan. Pewarnaan dibagi menjadi tiga macam yaitu pewarnaan titik, sisi, dan wilayah. Pelabelan sendiri merupakan pemetaan (fungsi) yang memetakan unsur-unsur dari graf dengan bilangan bulat positif dengan suatu aturan tertentu.Konsep dalam pewarnaan graf menggunakan k warna tidak diperbolehkan menggunakan warna sama yang bertetangga namun pewarnaan haruslah seminimum mungkin, k adalah bilangan bulat positif terkecil atau disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik yang berbeda dalam suatu graf. Satu warna untuk setiap titik, sehingga titik - titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda. Pelabelan sendiri juga banyak diteliti, salah satu jenis pelabelan yang sering diteliti adalah pelabelan *antimagic*. Pelabelan *antimagic* diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Pelabelan *antimagic* kemudian dikembangkan oleh Baca et al. (2003) yaitu penelitian mengenai pelabelan total *antimagic*.

Penelitian terbaru dalam pewarnaan dilakukan oleh Arumugam et al. (2017) yang berjudul lokal titik *antimagic* pada suatu graf. Pada artikel tersebut meneliti tentang bilangan kromatik dari pewarnaan lokal titik *antimagic* pada beberapa jenis graf seperti graf pohon *(T)*, graf lintasan (P_n), graf *cycle* C_n, graf *frindship* (F_n), graf lengkap $(K_{m,n})$, graf *complete bipartite* $(K_{2,n})$, graf tangga (L_n), graf roda (W_n), dan graf G. Penelitian yang dilakukan oleh Arumugam et al. (2017) hanya meneneliti tentang lokal titik *antimagic* yang berarti hanya melabeli sisi kemudian memberi bobot pada setiap titiknya.

Penelitian yang telah dilakukan oleh Arumugam et al. (2017) membuat peneliti mengembangkan penelitian dengan judul pewarnaan lokal titik total *antimagic*. Pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada suatu graf $G = (V, E)$ dapat didefinisikan

yaitu suatu graf terhubung dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$ yang memiliki fungsi bijektif $f : (V \cup E) \to 1, 2, ..., m + n$ dan untuk setiap dua titik yang bertetangga u dan $v, w_t(u) \neq w_t(v)$, dimana $w_t(u) = f(u) + \Sigma_{e \in E(u)} f(e)$ dan $E(u)$ adalah himpunan dari sisi yang bertetangga pada titik u. Dengan demikian setiap pelabelan total lokal titik *antimagic* merupakan pewarnaan titik di G dimana titik u diberi warna $w_t(u)$. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* yang dinotasikan dengan $\chi_{lavt}(G)$ adalah banyaknya warna minimum dari seluruh warna yang didapatkan pada pelabelan lokal titik total *antimagic* graf G.

Pada penelitian ini telah diteliti pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada 1 graf khusus dan graf hasil operasi amalgmasi. Graf tersebut diantaranya $C_n, amal(C_3, v, m), amal(C_3, e, m)$. Dari penelitian ini didapat 3 teorema baru diantaranya:

Teorema 4.1. *Misalkan G adalah graf hasil operasi amalgamasi pada graf cycle* C_3*, untuk* $k \geq 2$*, maka* $\chi_{lvat}(amal(C_3, v, m)) = 3$.

Teorema 4.2. *Misalkan G adalah graf hasil operasi amalgamasi pada graf cycle* C_3*, untuk* $m \geq 2$*, maka* $\chi_{lvat}(amal(C_3, e, m)) = 3$.

Teorema 4.3. *Misalkan G merupakan graf cycle* C_n*, untuk* $n \geq 3$*, maka bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total antimagic* C_n *adalah*

$$\chi_{lvat}(C_n) = \begin{cases} 2 & , untuk\ n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4) \\ 3 & , untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

Selain 3 teorema baru tersebut penelitian ini juga diterapkan pada bidang kriptografi *Hill cipher*. Algoritma *Hill Cipher* untuk membuat matriks kunci dari graf *cycle* C_n yaitu

a. Menentukan graf *cycle* C_n dengan n ganjil;

b. Menggunakan bobot titik pada graf *cycle* C_n sebagai kuncil awal;

c. Matriks kunci berbentuk matriks 3×3 yang diambil dari pelabelan titik dan sisi graf *cycle* C_n;

d. Matriks kuncinya didapatkan dengan susunan yaitu, baris pertama merupakan label titik, baris kedua merupakan label sisi sebelah kiri dari bobot titik, dan baris ketiga merupakan label sisi sebelah kanan dari bobot titik;

e. Penentuan matriks kunci diperoleh dengan aturan berikut:
Rumus bobot titik yang digunakan pada kunci awal saat $n = 3$ yaitu $2n+7,\ n+9$, dan $2n + 5$ sehingga didapat rumus matriks kuncinya yaitu,

$$K = \begin{bmatrix} n & 1 & 2 \\ 6 & n+2 & n+1 \\ n+1 & 6 & n+2 \end{bmatrix}$$

f. Rumus bobot titik yang digunakan pada kunci awal saat $n \geq 5$ yaitu $\frac{1}{2}(7n + 3),\ \frac{1}{2}(7n+5)$, dan $\frac{1}{2}(7n+1)$ sehingga didapat rumus matriks kuncinya yaitu,

$$K = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 \\ n+1 & n+2 & \frac{3n+3}{2} \\ \frac{3n+1}{2} & \frac{3n+3}{2} & n+1 \end{bmatrix}$$

pada saat determinan matriksnya adalah 13, rumus matriks kuncinya yaitu

$$K = \begin{bmatrix} n & 2 & n-2 \\ n+1 & \frac{3n+1}{2} & \frac{3n+3}{2} \\ \frac{3n+1}{2} & 2n & n+1 \end{bmatrix}$$

PRAKATA

Puji syukur kepada Allah Subhanu Wa Ta'ala atas segala rahmad dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "PEWARNAAN LOKAL TITIK TOTAL *ANTIMAGIC* PADA GRAF C_n, Bt_n, W_d^n DAN APLIKASI GRAF C_n PADA KRIPTOGRAFI *HILL CHIPER*". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada Kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Dr. Kristina Wijaya, S.Si., M.Si, selaku Dosen Penguji I dan Ikhsanul Halikin, S.Pd, M.Si., selaku Dosen Penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam;
5. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah Subhanu Wa Ta'ala dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang kajian ilmu matematika yang digunakan untuk mempelajari sifat-sifat graf. Tahun 1763, seorang matematikawan Swiss, bernama L.Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan permasalahan menggunakan graf yaitu dalam menyelesaikan permasalahan jembatan konigsberg. Euler mempresentasikan empat wilayah di Kota Konisberg sebagai titik, dan tujuh jembatan sebagai sisi. Euler memberikan jawaban bahwa perjalanan melewati ketujuh jembatan tetapi tidak boleh melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali tidak mungkin dilakukan. Masalah ini menjadi awal perkembangan dari teori graf (Munir, 2012).

Teori graf saat ini semakin berkembang pesat dan banyak diminati. Perkembangan yang pesat pada teori graf membuat banyak topik yang di kaji dalam teori graf. Cabang kajian graf yang dikembaangkan saat ini adalah pewarnaan dan pelabelan. Pewarnaan dibagi menjadi tiga macam yaitu pewarnaan titik, sisi, dan wilayah. Pewarnaan titik adalah pemberian warna titik-titik pada graf dimana dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Menurut Wallis (2001) pelabelan merupakan pemetaan (fungsi) yang memetakan unsur-unsur graf kedalam suatu bilangan dengan suatu aturan tertentu. Pelabelan berdasarkan domain pemetaannya terdiri atas pelabelan titik, pelabelan sisi, pelabelan total (titik dan sisi), dan pelabelan wilayah. Pewarnaan graf berkaitan dengan bilangan kromatik. Bilangan kromatik adalah banyak warna minimum yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada suatu graf sehingga dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda(Hartsfield dan ringel, 1990).

Salah satu jenis pelabelan yang sering diteliti adalah pelabelan *antimagic*.

Pelabelan *antimagic* dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Pelabelan *antimagic* kemudian dikembangkan oleh Baca et al. (2003) yaitu penelitian mengenai pelabelan total *antimagic*. Penelitian terbaru dilakukan oleh Arumugam et al. (2017) yang berjudul lokal titik *antimagic* pada suatu graf. Pada artikel tersebut meneliti tentang bilangan kromatik dari pewarnaan lokal titik *antimagic* pada beberapa jenis graf seperti graf pohon *(T)*, graf lintasan (P_n), graf *cycle* C_n, graf *frindship* (F_n), graf lengkap $(K_{m,n})$, graf *complete bipartite* $(K_{2,n})$, graf tangga (L_n), graf roda (W_n), dan graf G.

Penelitian yang dilakukan oleh Arumugam et al. (2017) hanya meneneliti tentang lokal titik *antimagic* yang berarti hanya melabeli sisi kemudian memberi bobot pada setiap titiknya. Berdasarkan penelitian tersebut peneliti mengembangkan penelitian yaitu pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf C_n, Bt_n, dan W_d^n. Penelitian ini tidak hanya melabeli sisi saja tetapi melabeli sisi dan titik atau pelabelan total yang kemudian akan dihitung bobot pada setiap titiknya. Penelitian ini juga dapat diterapkan pada bidang kriptografi yaitu *hill cipher*. *Hill cipher* merupakan salah satu algoritma kriptografi klasik dan kuncinya merupakan sebuah matriks simetris.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut.

a. berapa bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada graf C_n, Bt_n, dan W_d^n?

b. bagaimana pengaplikasian pewarnaan lokal titik total *antimagic* graf *cycle* (C_n) untuk n ganjil pada kriptografi *hill cipher*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini sebagai berikut.

a. menentukan bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total*antimagic* pada graf C_n, Bt_n, dan W_d^n.

b. mengaplikasikan pewarnaan lokal titik total *antimagic* graf *cycle* (C_n) untuk n ganjil pada kriptografi *hill cipher*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini sebagai berikut.

a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai pewarnaan lokal titik total*antimagic* pada C_n, Bt_n, dan W_d^n;

b. menambah pengetahuan baru dalam pengaplikasian teori graf mengenai pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada bidang kriptografi *hill cipher*;

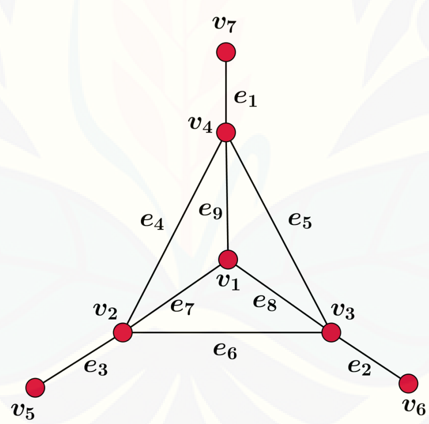
c. memberikan motivasi dan refrensi pada peneliti lain untuk meneliti pelabelan lokal titik total *antimagic* pada jenis graf dan graf operasi lain;

d. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi graf lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $\{u, v\}$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi (Slamin, 2009). Banyaknya unsur yang berada di V disebut order dari G, dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G, dinotasikan dengan $|E(G)|$ (Chartrand *et al.*, 1996).



Gambar 2.1 Contoh graf dengan $|V(G)| = 7$ dan $|E(G)| = 9$

Gambar 2.1 adalah sebuah graf dengan $|V(G)| = 7$ dan $|E(G)| = 9$, memiliki himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. Dua buah titik v_1 dan v_2 dari graf G adalah bertetangga jika v_1v_2 adalah sebuah sisi pada graf G. Dapat dikatakan juga bertetangga bila keduanya terhubung langsung yaitu pada sisi e ditulis dengan $e = v_1v_2$. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, titik v_1 bertetangga dengan

v_2, v_3 dan v_4. Jika $e_7 = v_1v_2$ adalah sebuah sisi dari graf G, maka e_7 dikatakan bersisian dengan titik v_1 dan v_2.

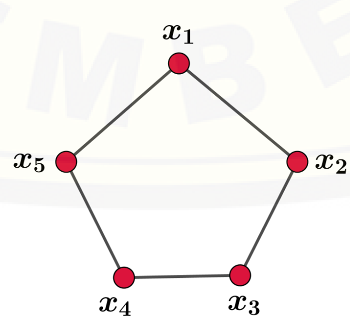
Derajat *(degree)* sebuah titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang bersisian *(incident)* pada v, dengan kata lain banyak sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik yang mempunyai derajat nol disebut titik terisolasi *(isolated vertex)*. Titik dengan derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*). Derajat terkecil dari suatu graf G adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik lain sedangkan derajat terbesar adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Notasi untuk derajat terkecil dapat dituliskan dengan $\delta(G)$, untuk derajat terbesar dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Chartrand *et al.,* 2009). Pada Gambar 2.1 menunjukkan titik $\{v_5, v_6, v_7\}$ mempunyai derajat terkecil yang sama yaitu $\delta(G) = 1$ dan untuk derajat terbesar dimiliki titik $\{v_2, v_3, v_4\}$ yaitu $\Delta(G) = 4$

2.2 Jenis-jenis Graf

Berikut adalah jenis-jenis graf

1. Graf *cycle*

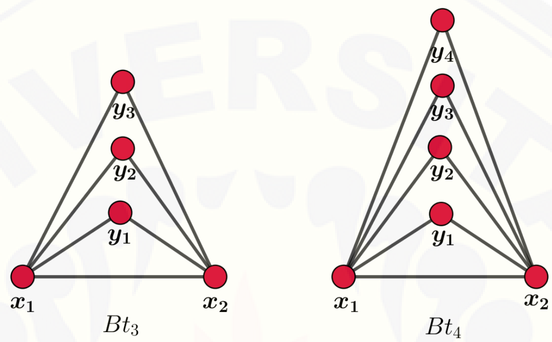
   Graf *cycle* dapat dinotasikan dengan (C_n), untuk sebuah bilangan bulat $n \geq 3$. Graf *cycle* merupakan graf dengan *orde n* dan *size n* yang memiliki titik-titik yaitu $v_1, v_2, ..., v_n$ dan sisinya sisi-sisinya adalah (v_1, v_n) dan (v_i, v_{i+1}) untuk $i = 1, 2, ..., n-1$ (Chartrand et al., 1996).



Gambar 2.2 Graf *Cycle* C_5

2. Graf *triangular book*

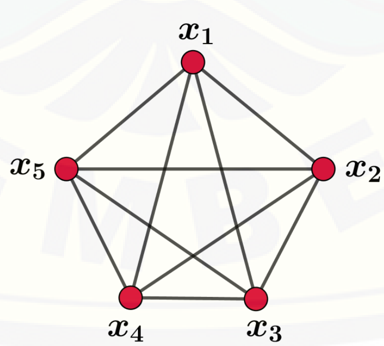
   Graf *triangular book* yang dinotasikan dengan Bt_n yaitu graf terhubung dengan himpunan titik $V(Bt_n = x_i, i = 1, 2 \cup y_j, 1 \leq j \leq n$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1, x_2\} \cup \{x_i y_j, i = 1, 2; 1 \leq j \leq n\}$ sehingga banyaknya titik $n + 2$ dan banyaknya sisi adalah $2n + 1$ (Dafik *et al.,* 2013).



Gambar 2.3 Graf *Triangular Book* Bt_3 dan Bt_4

3. Graf Lengkap

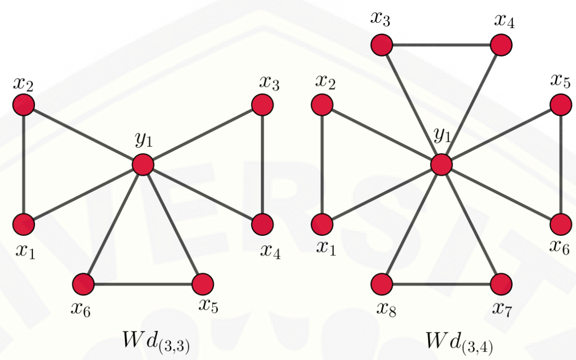
   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap pasang titiknya terhubung oleh sebuah sisi. Graf lengkap dengan n buah titik dinotasikan dengan K_n (Gross dan Yellen, 2003).



Gambar 2.4 Graf lengkap K_5

4. Graf *windmill*

   Graf *windmill* yang dinotasikan dengan W_d^k adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah titik pusat yang dihubungkan dengan setiap titik pada k buah graf lengkap K_m (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).



Gambar 2.5 Graf *Triangular Book* $Wd_{(3,3)}$ dan $Wd_{(3,4)}$

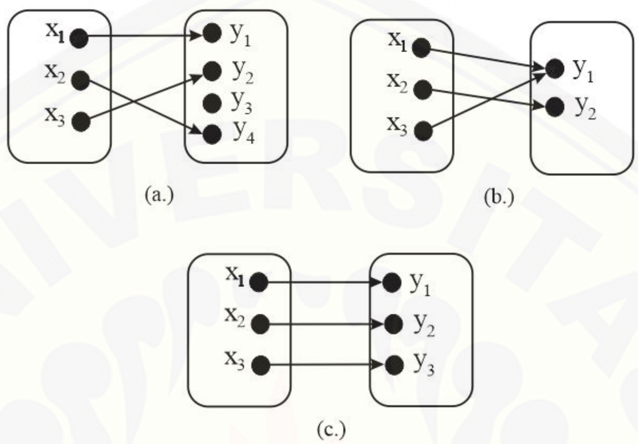
2.3 Fungsi

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Himpunan A disebut sebagai *domain* dari f dinyatakan sebagai D_f dan himpunan B diartikan sebagai *kodomain* dari f. Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan dari a, dan a disebut bayangan dari b. *Range* atau bayangan dari f dinyatakan sebagai R_f merupakan himpunan semua bayangan dari elemen A. Fungsi berdasarkan sifatnya, yaitu:

a. Fungsi injektif
   Misal $f : A \rightarrow B$ sebuah fungsi dari A ke B, disebut fungsi injektif atau satu satu jika dan hanya jika $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$
b. Fungsi surjektif
   Misal $f : A \rightarrow B$ sebuah fungsi dari A ke B, disebut fungsi surjektif atau onto jika *range* dari f adalah elemen di B, dengan kata lain untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$

c. Fungsi bijektif

Misal $f : A \to B$ adalah fungsi dari A ke B, disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif (Bartle, 2000).



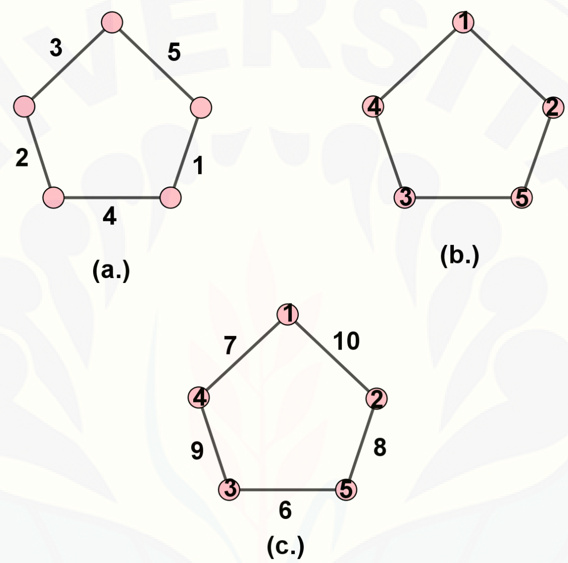
Gambar 2.6 (a.) Fungsi Injektif (b.) Fungsi Surjektif (c.) Fungsi bijektif

◊ **Teorema 2.1.** *Misal domain dan kodomain dari suatu fungsi f adalah himpunan berhingga yang memiliki kardinalitas sama. Fungsi f injektif jika dan hanya jika fungsi f surjektif (Lucas, 1990).*

2.4 Pelabelan

Pelabelan pada graf merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf berupa himpunan titik, himpunan sisi, atau gabungan himpunan keduanya ke suatu himpunan bilangan bulat dengan suatu aturan tertentu. Elemen-elemen pada graf selalu dilabeli dengan bilangan bulat positif yang berbeda, sehingga fungsi yang memetakannya disebut fungsi bijektif. Jika pelabelan diberikan pada himpunan titik, maka pelabelannya disebut disebut dengan pelabelan titik (vertex labelling). Sedangkan pelabelan yang diberikan himpunan sisi disebut dengan pelabelan sisi (edge labelling). Apabila setiap elemen (titik dan sisi) diberi label, maka pelabelan disebut pelabelan total *(total labelling)* (Wallis, 2001).

Pada pelabelan total, jumlah label dari sebuah elemen graf dengan semua label yang terhubung dengan sebuah elemen graf tersebut dinamakan dengan bobot (weight) dan dinotasikan dengan wt. Jumlah label dari sebuah titik dengan label pada setiap sisi yang menempel pada titik tersebut dinamakan dengan bobot titik. Sedangkan jumlah label dari sebuah sisi dengan label pada setiap titik yang menempel pada sisi tersebut dinamakan dengan bobot sisi (Wallis,2001).



Gambar 2.7 (a.) Pelabean Sisi (b.) Pelabelan Titik (c.) Pelabelan Total

2.5 Pewarnaan Graf

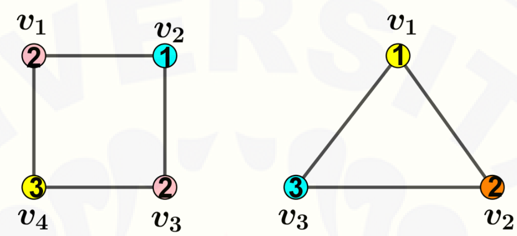
Pewarnaan graf merupakan suatu bentuk pelabelan pada graf yaitu dengan cara memberikan warna pada elemen graf.

a. Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G (Chartrand dan Zhang, 2009). Pewarnaan titik berhubungan dengan bilangan kromatik.

Definisi 2.1. *Bilangan kromatik* $\chi(G)$ *adalah banyak warna minimum yang* *digunakan untuk mewarnai titik-titik pada graf G sehingga dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda (Hartsfield dan Ringel, 1994).*

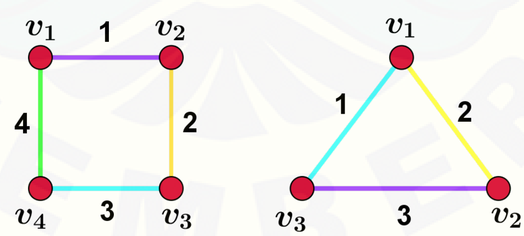
Menurut Munir (2012) beberapa graf dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf *cycle* dengan n ganjil memiliki $\chi(G) = 3$ sedangkan jika n genap maka $\chi(G) = 2$.



Gambar 2.8 Pewarnaan Titik

b. Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi pada sebuah graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda (Budayasa, 2007). Jika G memiliki pewarnaan sisi-k, maka dikatakan sisi-sisi pada graf G diwarna dengan k warna.



Gambar 2.9 Pewarnaan Sisi

2.6 Pewarnaan Lokal Titik Total *Antimagic*

Konsep graf *antimagic* diperkenalkan pertama kali oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Suatu pelabelan *antimagic* merupakan pelabelan sisi dari suatu graf dengan bilangan bulat $\{1, 2, ..., q\}$ sehingga bobot setiap titik berbeda. Penelitian terbaru dilakukan oleh Arumugam et al. (2017) yaitu meneliti tentang pewarnaan lokal titik *antimagic* dengan cara mencari bilangan kromatiknya. Adapun definisi dari pewarnaan lokal titik *antimagic* dapat dilihat pada Definisi 2.4. Sedangkan definisi dari bilangan kromatik lokal *antimagic* dapat dilihat pada Definisi 2.5.

Definisi 2.2. *Graf $G = (V, E)$ adalah sebuah graf terhubung dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$. Suatu pemetaan bijektif $f : E \to \{1, 2, .., m\}$ disebut pelabelan lokal antimagic jika untuk setiap dua titik yang bertetangga u dan v, $w(u) \neq w(v)$ dimana $w(u) = \Sigma_{e \in E(u)} f(e)$ dan $E(u)$ adalah himpunan dari sisi yang bertetangga pada titik u. Dengan demikian Setiap pelabelan lokal antimagic merupakan pewarnaan titik di G dimana titik v diberi warna $w(v)$. (Arumugam et al., 2017).*

Definisi 2.3. *Bilangan kromatik lokal antimagic $\chi_{(la)}(G)$ didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diambil dari semua warna graf G yang diakibatkan oleh pelabelan lokal antimagic dari G (Arumugam et al., 2017).*

Akibat 2.6.1. *Untuk beberapa graf $G, \chi_l a(G) \geq \chi(G)$, dimana $\chi(G)$ adalah pewarnaan titik pada suatu graf G (Arumugam et al., 2017).*

Berdasarkan definisi diatas pewarnaan lokal titik total *antimagic* dapat didefinisikan sebagai suatu graf $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$ yang memiliki fungsi bijektif $f : (V \cup E) \to 1, 2, ..., m + n$ dan untuk setiap dua titik yang bertetangga u dan $v, w_t(u) \neq w_t(v)$, dimana $w_t(u) = f(u) + \Sigma_{e \in E(u)} f(e)$ dan $E(u)$ adalah himpunan dari sisi yang bertetangga pada titik u. Dengan demikian setiap pelabelan total lokal titik *antimagic* merupakan pewarnaan titik di G dimana titik u diberi warna $w_t(u)$. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* yang dinotasikan dengan $\chi_{lavt}(G)$ adalah banyaknya warna minimum dari seluruh warna yang didapatkan pada pelabelan lokal titik total *antimagic* graf G.

2.7 Hasil Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic*

Adapun hasil mengenai pewarnaan lokal titik yang dilakukan oleh Arumugam et al. (2017) *antimagic* bisa dilihat pada tabel 2.1

Graf	Hasil	Keterangan
Graf Pohon (T_n); dengan l daun	$\chi_{la}(T) \geq l+1$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf Lintasan (P_n)	$\chi_{la}(P_n) = 3$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf *Cycle* (C_n)	$\chi_{la}(C_n) = 3$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf *Frindship* (F_n)	$\chi_{la}(F_n) = 3$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf $F_n - e$	$\chi_{la}(F_n - e) = 3$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf $(K_{m,n})$; $m, n \geq 2$	$\chi_{la}(K_{m,n}) = 2$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf *Complete Bipartite* $(K_{2,n})$; n genap dan $n \geq 4$	$\chi_{la}(K_{2,n}) = 2$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf *Complete Bipartite* $(K_{2,n})$; n ganjil dan $n = 2$	$\chi_{la}(K_{2,n}) = 3$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf Tangga (L_n); $n \geq 2$	$\chi_{la}(L_n) = n+1$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf Roda $(W_n), n+1$; $n \equiv 1,3 \; mod\,(4)$	$\chi_{la}(W_n) = 4$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf Roda $(W_n), n+1$; $n \equiv 2 \; mod\,(4)$	$\chi_{la}(W_n) = 3$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf Roda $(W_n), n+1$; $n \equiv 0 \; mod\,(4)$	$3 \leq \chi_{la}(W_n) \leq 5$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf (G_n); $n \leq 4$ dan $H = G + K_2,\ n$ genap	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H) \leq \chi_{la}(G) + 1$	Arumugam *et al.*, 2017
Graf (G_n); $n \leq 4$ dan $H = G + K_2,\ n$ lainnya	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H) \leq \chi_{la}(G) + 2$	Arumugam *et al.*, 2017

Tabel 2.2 Hasil Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic*

2.8 *Hill Cipher*

Hill Cipher diciptakan oleh Lester S. Hill pada tahun 1929. Hill Cipher merupakan *polyalphabetic cipher* yang dapat dikategorikan sebagai *block cipher* karena teks yang akan diproses akan dibagi menjadi blok-blok dengan ukuran tertentu. Hill chiper merupakan salah satu algoritma kriptografi kunci simetris. Menurut Munir (2004) Kriptografi adalah ilmu sekaligus seni untuk menjaga keamanan pesan. *Hill Cipher* menggunakan matriks berukuran $m \times m$ sebagai kunci untuk melakukan enkripsi dan dekripsi. Enkripsi adalah proses menyandikan plainteks menjadi cipherteks. Sedangkan dekripsi adalah proses mengembalikan cipherteks menjadi plainteksnya. Cipherteks adalah sebuah pesan yang tidak dapat dimengerti maknanya oleh pihak lain, maka pesan disandikan ke bentuk lain atau bentuk pesan yang tersandi. Plainteks atau yang sering disebut dengan istilah pesan adalah data atau informasi yang dapat dibaca dan dimengerti maknanya (Hill, 1929).

Hill Cipher merupakan *polyalphabetic cipher* yang dapat dikategorikan sebagai *block cipher* karena teks yang akan diproses akan dibagi menjadi blok-blok dengan ukuran tertentu. *Hill Chiper* termasuk dalam algoritma kriptografi klasik yang sangat sulit dipecahkan oleh kriptanalis apabila dilakukan hanya dengan mengetahui berkas ciphertext saja. Kriptanalisis sendiri adalah ilmu dan seni untuk memecahkan chiperteks menjadi plainteks tanpa mengetahui kunci yang diberikan (Hill, 1929).

Selain dari pihak yang ingin menjaga agat pesan tetap aman, ada pula pihak-pihak yang ingin mengetahui pesan rahasia tersebut secara ilegal. Bahkan ada pihak yang ingin agar dapat mengubah isi pesan tersebut. Ilmu untuk mendapatkan pesan yang asli dari pesan yang telah disandikan tanpa memiliki kunci untuk membuka pesan rahasia tersebut disebut kriptanalisis. Sedangkan usaha untuk membongkar suatu pesan sandi tanpa mendapatkan kunci dengan cara yang sah dikenal dengan istilah serangan (attack). Beberapa macam penyerangan terhadap pesan yang sudah dienkripsi antara lain:

1. *Ciphertext only attack*, penyerang hanya mendapatkan pesan yang sudah disandikan saja.
2. *Known plaintext attack*, penyerang mendapatkan sandi dan juga mendapat pesan asli. Disebut pula *clear-text attack*.

3. *Choosen plaintext attack*, sama dengan known plaintext attack, namun penyerang bahkan dapat memilih penggalan mana dari pesan asli yang disandikan.

Proses enkripsi *Hill Chiper* yaitu dengan mengalikan matriks kunci dengan plainteksnya. Rumus proses Enkripsinya yaitu:

$$C = K * P$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & a_{22} & k_{23} \\ k_{31} & a_{32} & k_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} mod\ (26)$$

Proses dekripsinya yaitu mengalikan invers matriks kunci dengan cipherteks. Rumus proses dekripsinya:

$$P = K^{-1} * C$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & a_{22} & k_{23} \\ k_{31} & a_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} mod\ (26)$$

$$K^{-1} = (det(K))^{-1} \times adj(K)$$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Pada Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola. Metode deduktif aksiomatik, yang diawali dengan istilah yang didefinisikan, kemudian dapat disusun pernyataan pangkal yang biasa disebut aksioma atau postulat. Metode ini menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Pada penelitian ini akan didapatkan teorema ataupun definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema atau definisi sebelumnya yang telah ada. Metode pendeteksian pola yaitu menentukan pola dengan melabeli sisi dan titik (pelabelan total) dari graf. Kemudian menentukan fungsi bijektif untuk pelabelan total graf.

3.2 Data Penelitian

Data dalam penelitian yang digunakan berupa graf *cycle* C_n dan graf operasi amalgamasi titik dan sisi.

3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian yang akan dilakukan terkait penelitian tentang pewarnaan total titik lokal *antimagic* pada graf reguler adalah sebagai berikut:

a. penelitian ini dimulai dengan memahami secara teoritis mengenai teori pewarnaan lokal titik total *antimagic*;

b. menentukan graf yang akan diteliti;

   Menentukan graf yang akan dicari pewarnaan total lokal titik *antimagic*, jenis graf yang dipilih adalah graf *cycle* C_n.

c. menentukan graf operasi;
setelah menentukan jenis graf yang akan diteliti, kemudian menerapkan graf hasil operasi amalgamasi pada graf C_3

d. menentukan kardinalitas titik dan sisi;
Graf *cycle* dan graf hasil operasi amalgamasi titik dan sisi yang telah ditetapkan kemudian dicari kardinalitas titik dan kardinalitas sisi.

e. menentukan pelabelan titik dan sisi;
Setelah ditentukan kardnalitas titik dan sisi dari graf *cycle* dan graf hasil operasi amalgamasi, graf yang digunakan diberi label mulai $1, 2, ..., V(G) + E(G)$

f. menghitung bobot total;
Pada tahap ini setelah melabeli semua titik dan sisi kemudian menghitung bobot total pada setiap titik dari pelabelan total tersebut pada graf *cycle* dan graf hasil operasi amalgamasi.

g. memeriksa apakah bobot titik total yang bertetangga berbeda;
Tahap ini akan dilihat apakah penerapan bobot titik total yang saling bertetangga memiliki bobot titik total yang berbeda. Ada dua kemungkinan yang akan terjadi yaitu penerapan bobot titik total yang bertetangga memiliki bobot titik total berbeda atau memiliki bobot titik total sama. Jika bobot titik total yang bertetangga berbeda maka akan dilanjutkan ke tahap selanjutnya, apabila bobot titik total yang bertetangga sama maka kembali ke tahap yang sebelumnya yaitu menentukan pelabelan titik dan sisi pada graf *cycle* dan graf hasil operasi amalgamasi.

h. menghitung banyak bobot yang berbeda;

i. menentukan batas bawah;
setelah bobot titik total yang saling bertetangga berbeda kita menentukan batas pewarnaan lokal titik total *antimagic*.

j. memeriksa kesamaan batas atas dan batas bawah;

   setelah di dapatkan batas bawahnya, kemudian akan di cek untuk batas atasnya apakah sama dengan batas bawahnya. Jika batas atas tidak sama dengan batas bawahnya maka graf tersebut hanya memiliki batas atas.

k. memperoleh bilangan kromatik;

l. membentuk *ciphertext*;

   Tahap ini yaitu membentuk *ciphertext* dengan cara mengaplikasikan pola pelabelan titik dan sisi pada graf C_5

Adapun pada penelitian ini langkah-langkah megaplikasikan graf *cycle* C_5 pada kriptografi *hill cipher* sebagai berikut.

a. menentukan plainteks yang akan digunakan.

b. menentukan graf *cycle* yang akan digunakan untuk aplikasi kriptografi *hill cipher*.

c. graf yang digunakan dalam penggunaan aplikasi ini adalah graf *cycle* dengan $n = 5$ atau C_5.

d. melihat bobot titik total pada C_n untuk n ganjil ada 3 bobot yang berbeda.

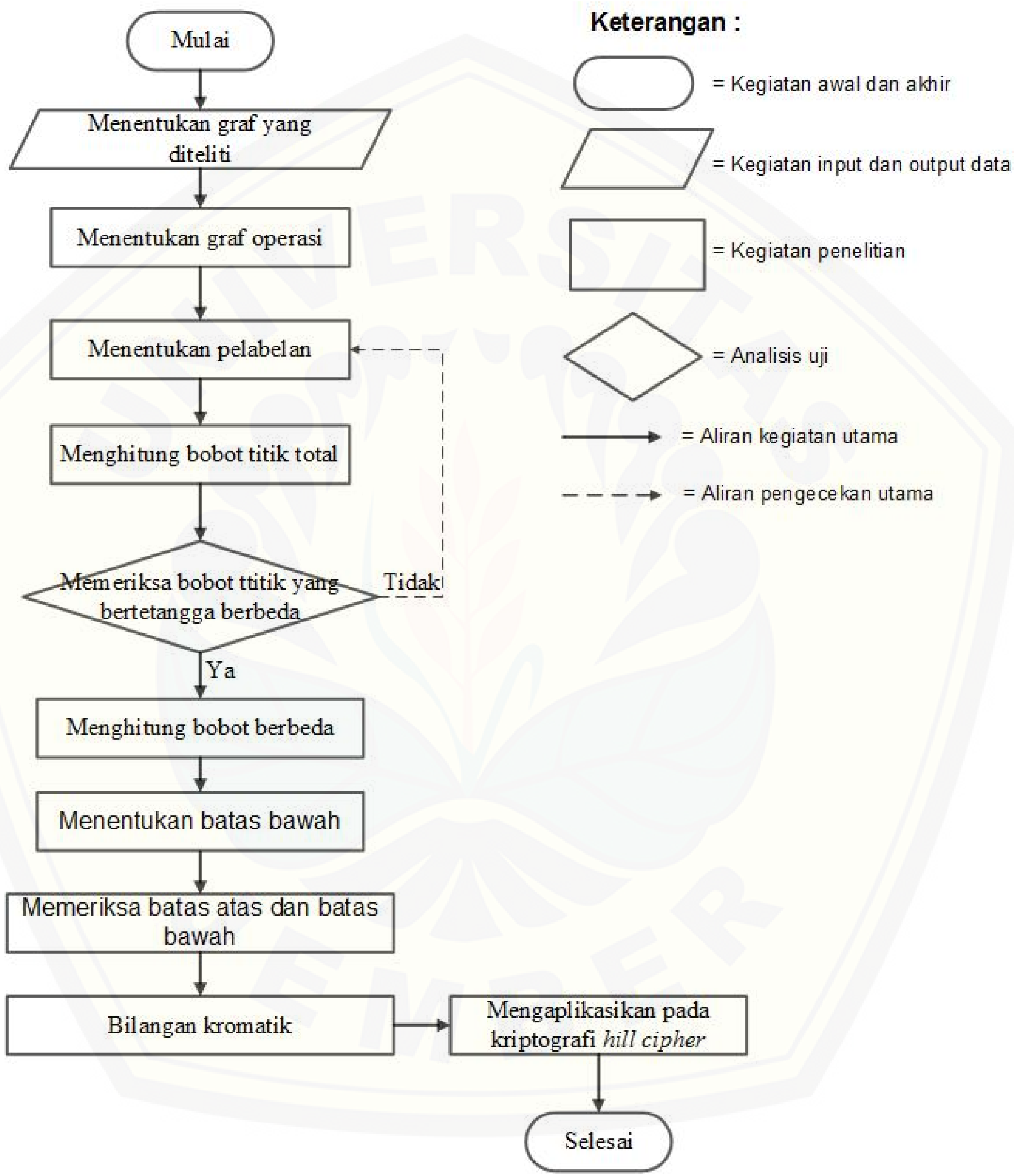
e. 3 bobot yang telah dimiliki dijadikan sebagai kunci awal.

f. kunci awal tersebut dikembangkan sehingga menjadi matriks kunci 3×3, dengan melihat pelabelan titik dan sisi pada graf tersebut.

g. melakukan enkripsi menggunakan plainteks dan kunci, untuk mendapatkan *ciphertext*.

h. melakukan dekripsi menggunakan *ciphertext* matriks kunci inversnya.

Adapun skema dari rancangan penelitian ini dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Rancangan Penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik total *antimagic* C_n yaitu

$$\chi_{lvat}(C_n) = \begin{cases} 2 & , untuk\ n \geq 6, n \equiv 2 (mod\ 4) \\ 3 & , untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

$$\chi_{lvat}(C_n) \leq 3 \qquad , untuk\ n \geq 4, n \equiv 0 (mod\ 4)$$

Bilangan kromatik pada graf hasil operasi amalgamasi titik dan sisi pada C_3 yaitu 3. Sehingga bilangan kromatik yang dihasilkan pada operasi amalgamasi titik dan sisi menghasilkan biangan kromatik yang sama dengan graf dasarnya yaitu graf C_3, sama-sama menghasilkan bilangan kromatik 3.

b. Aplikasi lokal titik total *antimagic* graf *cycle* C_n untuk n ganjil pada kriptografi *hill cipher* yaitu dengan mengambil bobot titik total sebagai kunci awalnya, kemudian kunci awal diproses hingga membentuk matriks kunci ukuran 3×3 dengan rumus-rumus tertentu pada tiap matriksnya. Rumus-rumus pada matriks kuncinya diambil dari hasil pelabelan titik dan sisi dari graf C_n untuk n ganjil.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan lokal titik total *antimagic* dari graf *cycle* C_n, graf hasil operasi amalgamasi titik $amal(C_3, v, k)$, dan graf hasil operasi amalgamasi sisi $amal(C_3, e, k)$, maka peneliti memberikan saran kepada kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian mengenai pewarnaan lokal titik total *antimagic* pada jenis graf lainnya yang memiliki derajat yang sama seperti graf antiprisma A_n, graf lengkap K, dan juga pada graf operasi lainnya seperti cartesian produk, *shackle*, comb titik, dan comb sisi.

DAFTAR PUSTAKA

Ardiansyah, R., dan Darmaji. 2013. ”Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf”. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*. 2(1): 2337-3520.

Arumugam, S., Premalatha, K., Baca, M., Semanicova-Fenovcivoka, A. 2017. ”Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph”. *Graph and Combinatorics*, 33:275-285.

Baca, M., Francois, B., dan MacDougall, J.A. 2003. ”Vertex Antimagic Total Labeling of Graph”. *Discuss Math Graph Theory*, 23. 67-83.

Bartle, R. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. United states of America.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Universitas Negeri Surabaya.

Calson, K. 2006. Generalized Book and c_m Snakes and Prime Graphs. Ars Combinatorics, 80:215-221.

Chartrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph Third Edition*. California. Chapman and Hall.

Chartrand, G dan Zhang, Pimg. 2009. *Chromatic Graph Theory*. California. Chapman and Hall.

Dafik, Ika, H. A., dan Rizky. H. P. 2013. Pengembangan Total Selimut Super pada Graf *Shackle Triangular Book*. Procededing of International Worksho on Mathematics UAD.

Gross, J. L and J. Yellen. 2003. *Handbook of Graph Theory*. New York: CRC Press.

Hartsfield, N., dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Australia: Academic Press.

Hill, L. 1929. "Cryptography in an Algebraic Alphabet". *Mathematical Association of America*, 36:306-312.

Lucas, John. 1990. *Introduction to Abstract Mathematics*. Oshkosh: University of Wisconsin.

Munir, R. 2004. *Pengantar Kriptografi*. Bandung: Informatika Bandung.

Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit Edisi 5*. Bandung: Informatika Bandung.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember : Universitas Jember.

Waliis, W. D., Baskoro, E. T., Miller, M., dan Slamin. 2001. "Edge Magic Total Labelling". *Australian Journal of Combinatorics*, 22. 185.