STUDI MASALAH PEMROGRAMAN GEOMETRIK PADA KAPASITAS SALURAN (*CHANNEL CAPACITY*) DENGAN DUALITAS LAGRANGE

SKRIPSI

Oleh :

Endang Sri Wahyuni
NIM 011810101076

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2007

STUDI MASALAH PEMROGRAMAN GEOMETRIK PADA KAPASITAS SALURAN (*CHANNEL CAPACITY*) DENGAN DUALITAS LAGRANGE

SKRIPSI

Diajukan Guna Melengkapi Tugas Akhir dan Memenuhi Salah Satu Syarat
untuk Menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan
Mencapai Gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Jember

Oleh :

Endang Sri Wahyuni
NIM 011810101076

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2007

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Allah SWT. tempatku bersujud, menangis dan mengadu, atas limpahan kasih sayang dan ridho-Nya yang tiada ternilai untukku;
2. Kedua orang tuaku tercinta, Ibunda Siti Alfiyah dan Ayahanda Asbullah, yang dengan tulus memberikan kasih sayangnya, doa, dan dorongan semangat, serta perhatian yang tercurahkan selalu mengiringi setiap langkahku;
3. Suamiku Mas Hendix yang memberiku dukungan, perhatian dan kasih sayangnya;
4. Adikku Wawan Wahyudi yang memberiku semangat semoga kamu dapat meraih cita-citamu.

MOTTO

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap.

(*Surat Alam Nasyrah ayat 6-8*)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Endang Sri Wahyuni

NIM : 011810101076

menyatakan dengan sesungguhnya skripsi yang berjudul *Studi Masalah Pemrograman Geometrik pada Kapasitas Saluran (Channel Capacity) dengan Dualitas Lagrange* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika disebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 17 Januari 2007

Yang menyatakan,

Endang Sri Wahyuni

011810101076

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Studi Masalah Pemrograman Geometrik pada Kapasitas Saluran (Channel Capacity) dengan Dualitas Lagrange* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Tanggal : 07 MAR 2007

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim penguji :

Ketua,
(Dosen Pembimbing Utama)

Agustina Pradjaningsih, S.Si., M.Si.
NIP 132 257 933

Sekretaris
(Dosen Pembimbing Anggota)

Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.
NIP 132 213 838

Anggota I,

Moh. Fatekurohman, S.Si., M.Si.
NIP 132 210 538

Anggota II

Drs. Budi Lestari, PGD.Sc., M.Si.
NIP 131 945 800

Mengesahkan
Dekan Fakultas MIPA

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS JEMBER FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM

Ir. Sumadi, MS.
NIP 130 368 784

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Studi Masalah Pemrograman Geometrik pada Kapasitas Saluran (Channel Chapacity) dengan Dualitas Lagrange*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Agustina Pradjaningsih, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu dan pikiran serta perhatiannya guna memberikan bimbingan dan pengarahan demi terselesaikannya penulisan skripsi ini;
2. Moh. Fatekurohman, S.Si., M.Si., dan Drs. Budi Lestari, PGD.Sc., M.Si., selaku dosen penguji yang telah banyak memberikan saran dan kritik untuk kesempurnaan skripsi ini;
3. Bapak/Ibu Budiarso dan Bapak/Ibu Asbullah sekeluarga yang telah memberikan dorongan dan doanya demi terselesaikannya skripsi ini;
4. temanku Wiwid, Mike, Beny dan "ARKOSKAR" yang menemani hari-hariku dengan penuh keceriaan;
5. teman-teman seangkatan dan seperjuangan "IMAGE 2001" dan semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, terimakasih untuk kalian semua.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga tulisan ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2007 　　　　　　　　　　Penulis

RINGKASAN

Studi Masalah Pemrograman Geometrik pada Kapasitas Saluran (*Channel Chapacity*) dengan Dualitas Lagrange, Endang Sri Wahyuni, 011810101076, 2007, 34 hlm; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pemrograman geometrik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan teori informasi dalam sistem komunikasi. Sistem komunikasi merupakan perpindahan informasi dari satu sumber atau input (W) ke tujuan atau output (W*). Terkadang perpindahan informasi dari sumber ke tujuan tidak dapat diterima secara sempurna karena ketika sinyal-sinyal melewati medium transmisi atau saluran (*channel*), sinyal terdistorsi, terinterferensi ataupun terdapat gangguan yang lain. Gangguan yang terjadi karena hal di atas harus dihilangkan atau diminimalkan agar sinyal-sinyal yang dikirim dapat diterima di tempat tujuan dengan benar. Untuk mengatasi gangguan tersebut salah satunya dengan mengoptimalkan kapasitas saluran (*channel capacity*).

Model kapasitas saluran dapat diperoleh dengan pemrograman geometrik konveks. Bagaimana mendapatkan bentuk pemrograman geometrik dengan dualitas Lagrange agar gangguan dalam sistem komunikasi dapat diminimalkan atau bahkan dihilangkan, dengan batasan masalah pada transmisi data, saluran diskret dengan sistem tanpa memori dan difokuskan pada pemakaian tunggal. Skripsi ini bertujuan untuk memodelkan kapasitas saluran dalam bentuk pemrograman geometrik dengan dualitas Lagrange.

Kapasitas $C(S)$ dari saluran diskret tanpa memori dengan batasan input nilai $\mathbf{E_p[s] = ps} \leq S$ adalah

$$C(S) = \underset{\mathbf{p}:\, \mathbf{ps} \leq S}{\text{maks}}\ I(X;Y)$$

dengan $I(X;Y)$ adalah informasi timbal balik antar input X dan output Y, yaitu:

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} Q_{ij} \log \frac{Q_{ij}}{p_i q_j} = H(Y) - H(Y|X) = -\sum_{j=1}^{M} q_j \log q_j - \mathbf{pr}$$

dengan $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{N\times 1}$ dan $r_i = -\sum_{j=1}^{M} P_{ij} \log P_{ij}$ adalah entri dari $\mathbf{r}$ yang merupakan kondisi entropy dari Y jika diberikan $X = i$.

Oleh karena itu, dipandang kapasitas saluran sebagai nilai tujuan optimal dari masalah maksimisasi yang disebut sebagai masalah kapasitas saluran dengan nilai input (yang disebut sebagai masalah primal):

$$\begin{array}{ll} \text{maksimumkan} & -\mathbf{pr} - \sum_{j=1}^{M} q_j \log q_j \\ \text{dengan kendala} & \mathbf{pP} = \mathbf{q},\ \mathbf{ps} \le S \\ & \mathbf{p1} = 1,\ \mathbf{p} \succeq 0 \end{array}$$

dengan: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ adalah variabel optimasi, $\mathbf{s}$, S adalah parameter konstan, $\mathbf{P}$ adalah matriks saluran yang merupakan parameter konstan dan $r_i = -\sum_{j=1}^{M} P_{ij} \log P_{ij}$, $\mathbf{p} \succeq 0$ artinya $p_i \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,N$.

Dari masalah kapasitas saluran dengan nilai input di atas dapat diperoleh masalah dual Lagrange yaitu dengan cara, pertama dibentuk fungsi Lagrange L dari masalah primal, kemudian dicari fungsi dual Lagrange maka diperoleh masalah dual Lagrange dalam program geometrik dalam bentuk konveks yaitu:

$$\begin{array}{ll} \text{minimumkan} & \log \sum_j e^{\alpha_j} + \gamma S \\ \text{dengan kendala} & \mathbf{P}\alpha + \gamma \mathbf{s} \succeq -\mathbf{r},\ \gamma \ge 0 \end{array}$$

dengan: α dan γ adalah variabel optimasi, $\mathbf{s}$, S adalah parameter konstan dan $\mathbf{P}$ adalah matriks saluran yang merupakan parameter konstan.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

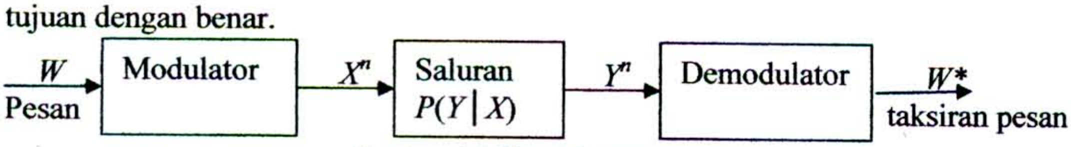
Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Optimasi adalah masalah tentang memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi tujuan yang dipengaruhi oleh kendala ataupun tanpa kendala. Masalah optimasi dibedakan menjadi dua yaitu pemrograman linier dan pemrograman nonlinier. Pemrograman linier adalah masalah optimasi dengan fungsi tujuannya berbentuk linier jika ada kendala maka kendalanya juga berbentuk linier, sedangkan pemrograman nonlinier adalah masalah optimasi dengan fungsi tujuannya berbentuk nonlinier. Pemrograman geometrik merupakan salah satu teknik yang digunakan untuk menyelesaikan pemrograman nonlinier.

Pemrograman geometrik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan teori informasi dalam sistem komunikasi. Sistem komunikasi merupakan perpindahan informasi dari satu sumber atau input (W) ke tujuan atau output (W*), diagram sistem komunikasi terlihat dalam Gambar 1.1 (Cover & Thomas, 1991). Terkadang perpindahan informasi dari sumber ke tujuan tidak dapat diterima secara sempurna karena ketika sinyal-sinyal melewati medium transmisi atau saluran (*channel*), sinyal terdistorsi, terinterferensi ataupun terdapat gangguan yang lain. Gangguan yang terjadi karena hal di atas harus dihilangkan atau diminimalkan agar sinyal-sinyal yang dikirim dapat diterima di tempat tujuan dengan benar.



Gambar 1.1 Sistem komunikasi.

Keterangan Gambar 1.1 yaitu,

X^n : kode yang dikirim

Y^n : kode yang diterima

$P(Y|X)$: peluang pengamatan pada output diterima Y ketika pada input dikirim X

Untuk mengatasi gangguan tersebut salah satunya dengan mengoptimalkan kapasitas saluran (*channel capacity*). Kapasitas saluran ini memaksimumkan tingkat transmisi sedemikian hingga peluang kesalahan yang memecahkan sinyal lenyap, sehingga sinyal-sinyal diterima di tujuan dengan benar, dimana permasalahan kapasitas saluran ini dapat diselesaikan dengan menggunakan pemrograman geometrik.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang diperoleh rumusan masalah yaitu: bagaimana mendapatkan model kapasitas saluran dalam bentuk pemrograman geometrik dengan dualitas Lagrange agar gangguan dalam sistem komunikasi dapat diminimalkan atau bahkan dihilangkan, dengan batasan masalah pada transmisi data, saluran diskret dengan sistem tanpa memori dan difokuskan pada pemakaian tunggal.

1.3 Tujuan Penelitian

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk memodelkan kapasitas saluran dalam bentuk pemrograman geometrik dengan dualitas Lagrange.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat untuk menambah pengetahuan dalam bidang pemrograman geometrik, khususnya tentang Kapasitas Saluran (*Channel Capacity*) pada sistem komunikasi. Dan bagi instansi yang bergerak dalam bidang komunikasi untuk mendapatkan hasil yang optimal dari pengiriman data. Dan

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Maksimum dan Minimum

Sebuah fungsi $f(\mathbf{x})$ dengan $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ dikatakan mempunyai minimum relatif atau lokal di $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$ jika $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}^* + \mathrm{h})$ untuk semua h = $(h_1, ..., h_j, ..., h_n)^T$ sehingga $|h_j|$ cukup kecil untuk semua j. Begitu juga untuk $\mathbf{x}^*$ adalah titik maksimum relatif atau lokal jika $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}^* + \mathrm{h})$ untuk h seperti yang didefinisikan.

Fungsi $f(\mathbf{x})$ mempunyai minimum global atau absolut di titik $\mathbf{x}^*$ jika $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ untuk setiap $\mathbf{x}$ pada daerah asal tempat $f(\mathbf{x})$ didefinisikan. Begitu juga titik $\mathbf{x}^*$ akan menjadi titik maksimum global atau absolut dari $f(\mathbf{x})$ jika $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ untuk semua $\mathbf{x}$ pada daerah asal. Titik $\mathbf{x}^*$ adalah titik ekstrim dari f jika titik tersebut adalah suatu titik maksimum (global atau lokal) atau titik minimum (global atau lokal) (Rao, 1984).

2.2 Optimasi Multivariabel dengan Kendala

Banyak metode atau teknik yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan pemrograman nonlinier, baik dengan kendala persamaan maupun dengan kendala pertidaksamaan. Dalam tulisan ini hanya dibahas teknik-teknik yang dipandang cukup relevan, mudah diterapkan serta lebih praktis antara lain metode pengali Lagrange dan kondisi Kuhn-Tucker.

2.2.1 Metode Pengali Lagrange

Metode Pengali Lagrange merupakan suatu metode yang dipergunakan untuk pencarian titik optimum dari suatu fungsi dengan kendala yang berbentuk persamaan. Permasalahan minimisasi dari fungsi yang kontinu dengan kendala persamaan berbentuk:

$$\text{minimumkan} \qquad f = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

$$\text{dengan kendala} \qquad g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1,2,\ldots,m \qquad (2.1)$$

di sini $m \le n$, sedangkan jika $m > n$ maka tidak ada solusinya.

Untuk memecahkan masalah pada persamaan (2.1), langkah awalnya menyusun fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \qquad (2.2)$$

dengan $\lambda_j, j = 1,2,\ldots,m$ disebut pengali Lagrange dan m adalah banyaknya kendala. Selanjutnya titik minimum relatif dapat diperoleh dengan menggunakan teorema berikut ini.

Teorema 2.1

Syarat perlu untuk fungsi $f(\mathbf{x})$ dengan kendala $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1,2,\ldots,m$ mempunyai minimum relatif di $\mathbf{x}^*$ adalah bahwa turunan parsial pertama dari fungsi Lagrange yang didefinisikan oleh $L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ yang terkait dengan masing-masing argumennya harus sama dengan nol.

Bukti teorema di atas dapat dilihat pada Rao (1984).

Setelah mendapatkan titik $\mathbf{x}^*$, untuk memastikan titik $\mathbf{x}^*$ adalah minimum relatif dapat digunakan teorema berikut ini.

Teorema 2.2

Syarat cukup untuk $f(\mathbf{x})$ mempunyai minimum relatif di $\mathbf{x}^*$ adalah bentuk kuadratik Q, yang didefinisikan

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j^{*} \tag{2.3}$$

yang dievaluasi di $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ harus definit positif untuk semua nilai $d\mathbf{x}$ yang memenuhi kendala.

Bukti teorema di atas dapat dilihat pada Rao (1984).

Berikut ini beberapa hal yang terkait dengan teorema di atas:

a. Jika $Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ definit negatif untuk semua nilai $d\mathbf{x}$ maka $\mathbf{x}^*$ adalah titik maksimum relatif dari $f(\mathbf{x})$.

b. Bentuk kuadratik Q akan definit positif (atau negatif) untuk semua $d\mathbf{x}$ bila setiap akar polinomial z_i didefinisikan pada persamaan determinan berikut adalah positif (atau negatif) (Rao (1998) dengan mengutip Hancock, 1960):

$$\begin{vmatrix} (L_{11}-z) & L_{12} & \Lambda & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \Lambda & g_{m1} \\ L_{21} & (l_{22}-z) & \Lambda & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \Lambda & g_{m2} \\ M & & & & & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \Lambda & (l_{nn}-z) & g_{1n} & g_{2n} & \Lambda & g_{mn} \\ g_{11} & g_{11} & \Lambda & g_{1n} & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ g_{21} & g_{11} & \Lambda & g_{2n} & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ M & & & & & & & \\ g_{m1} & g_{m1} & \Lambda & g_{mn} & 0 & 0 & \Lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4}$$

dengan

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad dan \quad g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \tag{2.5}$$

c. Persamaan (2.4) mengarah pada polinomial berorde n-m dalam z. Jika persamaan (2.4) beberapa akarnya positif dan lainnya negatif maka titik $\mathbf{x}^*$ bukan suatu titik ekstrim.

2.2.2 Kondisi Kuhn-Tucker

Kondisi Kuhn-Tucker merupakan pengembangan dari metode Lagrange. Kondisi Kuhn-Tucker digunakan untuk optimasi fungsi dengan kendala pertidaksamaan sebagai berikut:

$$\text{minimumkan} \quad f(\mathbf{x})$$

$$\text{dengan kendala} \quad g_j(\mathbf{x}) \le 0, \; j = 1,2,...,m \tag{2.6}$$

Masalah di atas merupakan masalah minimisasi, tetapi kondisi Kuhn-Tucker juga dapat diterapkan untuk masalah maksimisasi.

Kendala pertidaksamaan di atas dapat diubah menjadi kendala persamaan dengan menambahkan variabel slack non negatif y_j^2 sebagai berikut

$$g_j(\mathbf{x}) + y_j^2 = 0, \; j = 1,2,...,m \tag{2.7}$$

Kendala telah berbentuk persamaan sehingga dapat disusun fungsi Lagrange

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, [g_j(\mathbf{x}) + y_j^2] \tag{2.8}$$

dengan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_m)^T$ adalah pengali Lagrange dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$ adalah vektor variabel slack.

Titik stasioner dari fungsi Lagrange dapat ditemukan dengan menyelesaikan persamaan berikut (syarat perlu):

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = g_j(\mathbf{x}) + y_j^2 = 0, \; j = 1,2,...,m \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = 2\lambda_j y_j = 0, \; j = 1,2,...,m \tag{2.11}$$

Persamaan (2.10) menjamin bahwa kendala $g_j(\mathbf{x}) \le 0$, $j = 1,2,...,m$ terpenuhi, sedangkan persamaan (2.11) menyatakan bahwa $\lambda_j = 0$ atau $y_j = 0$. Dari persamaan (2.10) dan persamaan (2.11) diperoleh:

a. jika $\lambda_j = 0$, berarti kendala tidak aktif ($g_j < 0$) pada titik optimum sehingga dapat diabaikan.

b. jika $y_j = 0$, berarti kendala aktif ($g_j = 0$) pada titik optimum.

Misalkan kendala dibagi menjadi dua sub himpunan J_1 dan J_2, dengan J_1 adalah himpunan kendala aktif dan J_2 himpunan kendala tidak aktif. Dengan demikian untuk $j \in J_1, y_j = 0$ (kendala aktif), dan untuk $j \in J_2$,

$\lambda_j = 0$ (kendala tidak aktif) persamaan (2.9) dan (2.10) menjadi :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in J_1} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \ i = 1,2,\ldots,n \tag{2.12}$$

$$g_j(\mathbf{x}) = 0, \ j \in J_1 \tag{2.13}$$

$$g_j(\mathbf{x}) + y_j^2 = 0, \ j \in J_2 \tag{2.14}$$

Pada masalah minimisasi $\lambda_j (j \in J_1)$ akan positif dan untuk masalah maksimisasi λ_j akan negatif (Rao, 1984). Dengan demikian kondisi yang harus dipenuhi pada titik minimum $\mathbf{X}^*$ dari masalah yang dinyatakan pada persamaan (2.6) dapat dinyatakan

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in J_1} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \ i = 1,2,\ldots,n \tag{2.15}$$

dan $$\lambda_j > 0, \ j \in J_1 \tag{2.16}$$

Kondisi di atas disebut kondisi Kuhn-Tucker yang merupakan syarat perlu yang harus dipenuhi pada titik minimum relatif dari $f(\mathbf{x})$. Jika himpunan dari kendala aktif tidak diketahui, kondisi Kuhn-Tucker dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, && i = 1,2,\ldots,n \\ &\lambda_j g_j = 0 && ,\ j = 1,2,\ldots,m \\ &g_j \le 0 && ,\ j = 1,2,\ldots,m \\ &\lambda_j \ge 0 && ,\ j = 1,2,\ldots,m \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Jika kasusnya adalah maksimisasi atau kendala dalam bentuk $g_j \geq 0$, maka λ_j non positif ($\lambda_j \leq 0$). Di sisi lain jika kasusnya maksimisasi atau kendala dalam bentuk $g_j \geq 0$ maka λ_j non negatif ($\lambda_j \geq 0$).

Kondisi yang disebutkan di atas tidak cukup untuk menjamin suatu minimum relatif di $\mathbf{x}^*$. Ada satu kelas dari masalah optimasi yang dinamakan permasalahan pemrograman konveks. Masalah minimisasi yang dinyatakan dalam persamaan (2.6) disebut masalah pemrograman konveks jika fungsi tujuan $f(\mathbf{x})$ dan kendala $g_j(\mathbf{x})$ adalah konveks atau cembung (*convex*). Definisi dan sifat dari fungsi konveks akan dijelaskan pada bagian berikutnya. Untuk masalah pemrograman konveks, kondisi Kuhn-Tucker merupakan syarat perlu sekaligus syarat cukup yang menjamin hanya ada satu titik yaitu minimum global (Rao, 1984).

2.3 Himpunan dan Fungsi Konveks

Sebuah titik $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ dapat dituliskan $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)^T$ dengan $x_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1,2,...,n$ Nilai x_i disebut koordinat dari $\mathbf{x}$. Titik $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ dikatakan kombinasi konveks dari $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{R}^n$ jika terdapat $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,...,m$ dan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sehingga

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{x}_m \tag{2.18}$$

Jika diketahui titik $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ maka segmen garis (*line segment*) antara kedua titik tersebut adalah himpunan semua titik kombinasi konveks dari titik $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ atau dengan kata lain himpunan semua titik $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ dengan koordinat

$$z_j = \lambda x_j + (1-\lambda) y_j, \quad j = 1,2,...,n \text{ dan } 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{2.19}$$

Sebuah himpunan titik di $\mathbf{R}^n$ adalah konveks jika untuk dua titik yang termasuk dalam himpunan ini berlaku bahwa segmen garis antara kedua titik juga termasuk dalam himpunan ini. Misalkan titik $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$ dan S menunjukkan himpunan konveks, secara matematis dapat didefinisikan sebagai berikut :

Jika titik $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in$ S, maka titik $\mathbf{x}$ yang dapat dituliskan

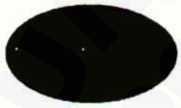
$$\mathbf{x} = \alpha\, \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\, \mathbf{x}_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{2.20}$$

berada di S. (Bazaraa, 1996)

Teorema 2.3

Interseksi dari beberapa himpunan konveks juga himpunan konveks.

Berikut ini contoh himpunan konveks dan himpunan non konveks.



a. Himpunan konveks

b. Himpunan non konveks

Gambar 2.1 Himpunan konveks dan non konveks

Suatu fungsi $f(\mathbf{x})$ dikatakan konveks atau cembung (*convex*) jika untuk setiap dua titik yang berbeda $\mathbf{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})^T$ dan $\mathbf{x}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})^T$ dan untuk semua $0 \leq \lambda \leq 1$, maka

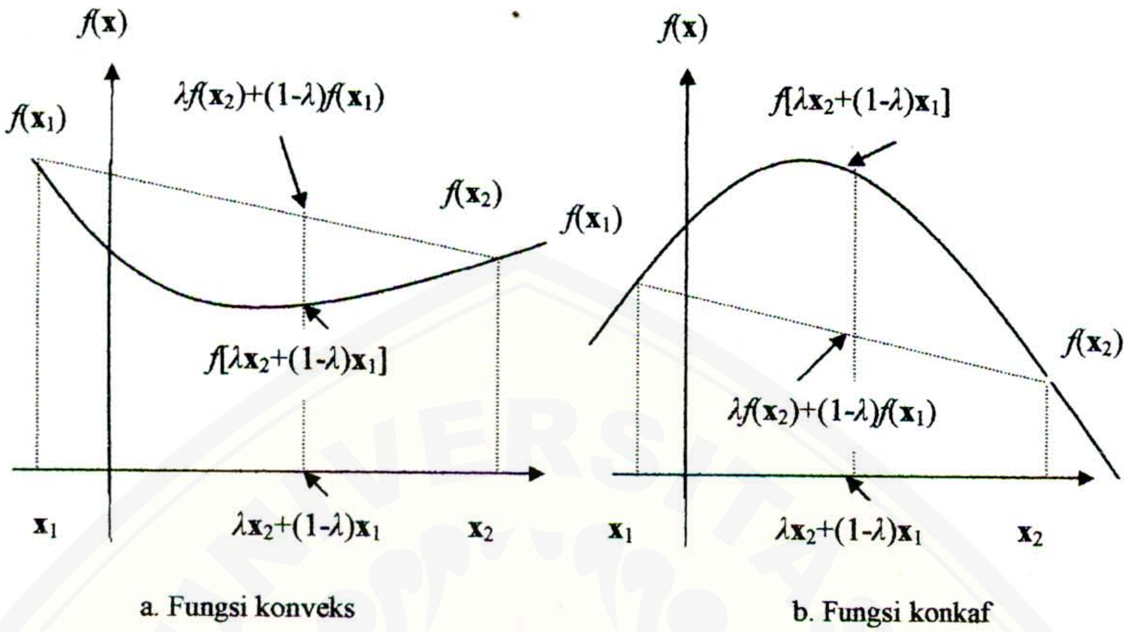
$$f(\lambda\, \mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\, \mathbf{x}_1) \leq \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_1) \tag{2.21}$$

yaitu segmen garis antara dua titik berada di atas atau pada grafik $f(\mathbf{x})$.

Begitu juga $f(\mathbf{x})$ dikatakan konkaf atau cekung (*concave*) jika untuk setiap dua titik yang berbeda $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ untuk semua $0 \leq \lambda \leq 1$, maka

$$f(\lambda\, \mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\, \mathbf{x}_1) \geq \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_1) \tag{2.22}$$

yaitu segmen garis antara dua titik berada di bawah atau pada grafik $f(\mathbf{x})$. Contoh fungsi konveks dan fungsi konkaf terdapat pada Gambar 2.2



Gambar 2.2. Fungsi konveks dan fungsi konkaf

Dapat dilihat bahwa fungsi konveks melengkung ke atas dan fungsi konkaf melengkung ke bawah, juga terlihat bahwa negatif fungsi konveks adalah fungsi konkaf dan sebaliknya. Penjumlahan dari fungsi konveks adalah fungsi konveks dan penjumlahan fungsi konkaf adalah fungsi konkaf.

Teorema 2.4

Misalkan S himpunan konveks tak kosong dalam $\mathbf{R}^n$, dan misalkan f : S→ $\mathbf{R}^1$ differensiabel pada S. Maka f adalah konveks jika $\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in$ S berlaku

$$f(\mathbf{x}_2) \geq \mathbf{x}_1 + \nabla f^T(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \qquad (2.23)$$

dengan $\nabla f(\mathbf{x}_1)$ adalah gradien fungsi f.

Teorema 2.5

Penjumlahan dari fungsi-fungsi konveks adalah fungsi konveks juga. Secara matematis, jika $f_j(\mathbf{x})$ adalah fungsi-fungsi konveks pada himpunan S, maka

$$\text{fungsi } f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} f_j(\mathbf{x}),\ j = 1,2,\ldots,k \qquad (2.24)$$

juga konveks pada S.

Teorema 2.6

Suatu minimum lokal dari suatu fungsi konveks $f(\mathbf{x})$ adalah minimum global.

Juga dapat dibuktikan bahwa maksimum lokal dari suatu fungsi konkaf $f(\mathbf{x})$ adalah maksimum global.

2.4 Bentuk Umum Fungsi Monomial dan Posinomial

2.4.1 Bentuk Umum Fungsi Monomial

Fungsi monomial $f(\mathbf{x})$ didefinisikan sebagai fungsi $f : \mathbf{R}_+^n \to \mathbf{R}$, dengan persamaan (Chiang & Boyd, 2003):

$$f(\mathbf{x}) = d x_1^{a^{(1)}} x_2^{a^{(2)}} \ldots x_n^{a^{(n)}} \tag{2.25}$$

dimana: d = konstanta pengali, $d > 0$

$a^{(j)}$ = konstanta eksponensial dan $a^{(j)} \in \mathbf{R}$, $j = 1,2,\ldots n$.

2.4.2 Bentuk Umum Fungsi Posinomial

Fungsi posinomial $f(\mathbf{x})$ didefinisikan sebagai penjumlahan dari fungsi – fungsi monomial $U(\mathbf{x})$ yang ditulis dalam persamaan berikut (Chiang & Boyd, 2003):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} U_k(\mathbf{x}) = U_1(\mathbf{x}) + U_2(\mathbf{x}) + \ldots + U_n(\mathbf{x})$$

dengan $U_k(\mathbf{x}) = d_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_k^{(j)}} = d_k x_1^{a_k^{(1)}} x_2^{a_k^{(2)}} \ldots x_n^{a_k^{(n)}}$; dan $d_k > 0$, $a_k^{(j)} \in \mathbf{R}$, $k = 1,2,\ldots,K$, $j=1,2,\ldots,n$

2.5 Bentuk Standar Pemrograman Geometrik

Pemrograman geometrik merupakan metode untuk memecahkan salah satu masalah dari pemrograman nonlinier. Pemrograman ini digunakan untuk meminimumkan suatu fungsi tujuan yang berbentuk posinomial. Jika ada kendala maka kendalanya juga posinomial.

Meminimumkan fungsi tujuan yang berbentuk posinomial ke batas atas pertidaksamaan posinomial dari fungsi kendala dan persamaan fungsi kendala yang berbentuk monomial dinamakan bentuk standar dari pemrograman geometrik (Chiang & Boyd, 2003):

$$
\begin{aligned}
&\text{minimumkan} && f_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\
&\text{dengan kendala} && f_i(\mathbf{x}) \le 1,\ i = 1, \dots, N \\
& && h_j(\mathbf{x}) = 1,\ j = 1, \dots, M
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

dengan: f_i adalah posinomial: $f_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} d_k x_1^{a_k^{(1)}} x_2^{a_k^{(2)}} \dots x_n^{a_k^{(n)}}$; dan

h_l adalah monomial: $h_j(\mathbf{x}) = d x_1^{a^{(1)}} x_2^{a^{(2)}} \dots x_n^{a^{(n)}}$

2.6 Masalah Dualitas Lagrange

Masalah dualitas merupakan konsep dasar yang memegang peranan penting dalam teori optimasi. Di sini akan dibahas perumusan dualitas Lagrange, yang mempunyai beberapa algoritma untuk menyelesaikan masalah *linier large-scale* seperti masalah non linier konveks.

Masalah pemrograman primal dapat ditulis:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimumkan} && f_0(\mathbf{x}) \\
&\text{dengan kendala} && f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, N \\
& && h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \dots, M
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

dengan variabel $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. • Diasumsikan domainnya adalah $D = \bigcap_{i=0}^{N} \mathbf{dom}\ f_i \cap \bigcap_{j=1}^{M} \mathbf{dom}\ h_j$ tidak kosong, dan nilai optimal dari (2.28) dinotasikan dengan p^*.

Dari masalah (2.28) didefinisikan fungsi Langrange $L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ yaitu:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, v) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{M} v_j h_j(\mathbf{x}),$$

dengan $\mathbf{dom}\ L = D \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$, λ_i dan v_j adalah pengali Lagrangre. Vektor λ dan v disebut variabel dual atau vektor pengali Lagrange.

Didefinisikan fungsi dual Lagrange dari masalah (2.28) $g : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ adalah nilai minimum dari fungsi Langrange sepanjang $\mathbf{x}$: untuk $\lambda \in \mathbf{R}^N, v \in \mathbf{R}^M$,

$$g(\lambda, v) = \inf_{x \in D} L(\mathbf{x}, \lambda, v) = \inf_{x \in D} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{M} v_j h_j(\mathbf{x}) \right).$$

dimana fungsi Lagrange tidak dibatasi pada $\mathbf{x}$, fungsi dual Lagrange terletak pada nilai $-\infty$. Karena fungsi dual Lagrange adalah *pointwise infimum* dari keluarga fungsi *affine* dari (λ, v) maka ini konkaf, meskipun masalah primal bukan konveks.

Untuk setiap (λ, v) dengan $\lambda \succeq \mathbf{0}$, fungsi dual Lagrange memberikan batas bawah pada nilai optimal p^* pada masalah primal. Sehingga kita memiliki sebuah batas bawah yang tergantung pada beberapa parameter λ, v.

Maka masalah dual Lagrange dapat ditulis:

$$\begin{array}{ll} \text{maksimumkan} & g(\lambda, v) \\ \text{dengan kendala} & \lambda \succeq \mathbf{0} \end{array} \tag{2.29}$$

dimana $\lambda \succeq \mathbf{0}$ berarti $\lambda_i \geq \mathbf{0}$. Istilah dual fisibel, menunjukkan pasangan (λ, v) dengan $\lambda \succeq \mathbf{0}$ dan $g(\lambda, v) > -\infty$, ini berarti bahwa (λ, v) adalah fisibel dari masalah dual Langrange (2.29). Kita menunjukkan (λ^*, v^*) adalah optimal dual atau pengali Lagrange optimal jika mereka merupakan optimal untuk masalah (2.29).

Masalah dual Lagrange ini merupakan masalah optimasi konveks. (Boyd dan Vandenberghe, 2004)

2.7 Kapasitas Saluran (*Channel Capacity*)

Kapasitas saluran merupakan tingkat tarif maksimum dalam bit tiap pemakaian saluran dimana informasi dapat dikirim dengan peluang kesalahan yang rendah (Cover & Thomas, 1991).

Definisi 2.1: Saluran diskret merupakan sebuah sistem yang terdiri dari input X, output Y dan matriks transisi peluang $\mathrm{P}(Y \mid X)$ yang menyatakan peluang pengamatan pada output diterima Y ketika pada input dikirim X. Sebuah saluran disebut tanpa memori jika distribusi peluang output tergantung hanya pada input pada saat itu dan dengan kondisi tidak terikat pada output atau input saluran sebelumnya.

Definisi 2.2: "Informasi" kapasitas saluran diskret tanpa memori terpisah dinyatakan sebagai:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y),$$

dimana yang dimaksimumkan adalah semua distribusi peluang input $p(x)$; C adalah kapasitas saluran; dan $I\,(X;Y)$ adalah informasi timbal balik antara input X dan output Y.

2.8 Langkah-Langkah Penyelesaian

Adapun langkah-langkah penyelesaian untuk mendapatkan model kapasitas saluran dalam bentuk pemrograman geometrik, dengan dualitas Lagrange adalah:

a. menentukan masalah kapasitas saluran berdasarkan pada saluran diskret, transmisi data dan difokuskan pada pemakaian tunggal, dengan sistem tanpa memori terpisah;
b. membentuk permasalahan kapasitas saluran ke dalam bentuk pemrograman geometrik;
c. hasil yang diperoleh dari langkah b digunakan untuk mencari persamaan dualitas Lagrange.

BAB 4. KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan dapat ditarik kesimpulan berikut ini:

a. Hasil pokok dalam teori informasi yaitu kapasitas $C(S)$ dari saluran diskret tanpa memori dengan batasan input nilai $\mathbf{E_p[s]} = \mathbf{ps} \leq S$ adalah

$$C(S) = \underset{\mathbf{p}:\, \mathbf{ps} \leq S}{\text{maks}}\ I(X;Y)$$

dimana $I(X;Y)$ adalah informasi timbal balik antar input X dan output Y, yakni:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} Q_{ij} \log \frac{Q_{ij}}{p_i q_j} \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= -\sum_{j=1}^{M} q_j \log q_j - \mathbf{pr} \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ dan $r_i = -\sum_{j=1}^{M} P_{ij} \log P_{ij}$ adalah entri dari $\mathbf{r}$ yang merupakan kondisi entropy dari Y jika diberikan $X = i$.

b. Kapasitas saluran sebagai nilai tujuan optimal dari masalah maksimisasi yang disebut sebagai masalah kapasitas saluran dengan nilai input :

$$\begin{aligned} &\text{maksimumkan} && -\mathbf{pr} - \textstyle\sum_{j=1}^{M} q_j \log q_j \\ &\text{dengan kendala} && \mathbf{pP} = \mathbf{q},\ \mathbf{ps} \leq S \\ &&& \mathbf{p1} = 1,\ \mathbf{p} \succeq 0 \end{aligned}$$

dengan: **p** dan **q** adalah variabel optimasi,

P adalah matriks saluran yang merupakan parameter konstan,

$r_i = -\sum_{j=1}^{M} P_{ij} \log P_{ij}$, dan

$\mathbf{p} \succeq 0$ artinya $p_i \geq 0$, i=1,2,…,N.

c. Masalah dual Lagrange dari masalah kapasitas saluran dengan nilai input dalam program geometrik dalam bentuk konveks seperti pada persamaan (3.10), yaitu:

minimumkan $\log \sum_j e^{\alpha_j} + \gamma S$

dengan kendala $\mathbf{P}\alpha + \gamma \mathbf{s} \succeq -\mathbf{r}$, $\gamma \geq 0$

dengan: α dan γ adalah variabel optimasi, dan **P** adalah matriks saluran yang merupakan parameter konstan.

4.2 Saran

Dalam skripsi ini saluran yang digunakan berbentuk saluran diskret tanpa memori terpisah (*channel capacity of a discrete memoriless channel*), seperti saluran pada faximile. Penulis lain dapat menggunakan model saluran lain misalnya *capacity with feedback of a discrete memoriless channel*, seperti saluran pada telepon.

DAFTAR PUSTAKA

Bazaraa, M. S. & Shetty, C.M. 1996. *Non Linier Programming: Theory and Algorithms*. New York: Willey.

Boyd, S & Vandenberghe, L. 2004. *Convex Optimization*. Cambride University.

Chiang, M & Boyd, S. 2003. *Geometric Programming Duals of Channel Capacity and Rate Distortion.* http://www.Stanford.edu/~boyd/reports/gp_chan_cap.pdf. Diakses pada tanggal 3 Juni 2005

Cover, T.M & Thomas. 1991. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons S New York.

Rao, S.S. 1984. *Optimation Theory ang Applications*. San Diego : Wiley Easten Limited.zzZ

Shen, D. 2005. *Optimization in Infornation Theory*. http://www.nd.edu/~jnl/ee80653/tutorials/dawei.pdf. Diakses pada tanggal 20 maret 2006