ANALISIS PEWARNAAN TITIK DAN SISI r-DINAMIS PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI $C_n \trianglerighteq H$

TESIS

Oleh

Novian Nur Fatihah

NIM 151820101008

MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

ANALISIS PEWARNAAN TITIK DAN SISI r-DINAMIS PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI $C_n \trianglerighteq H$

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Novian Nur Fatihah
NIM 151820101008

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2017

HALAMAN PERSEMBAHAN

Atas berkah rahmat Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam hidupku, teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda tercinta Slamet Pujianto dan Ibunda tercinta Istiqomah, serta Adikku Alifah Antika yang selalu meberikan semangat, dorongan, motivasi, cinta, dan kasih sayangnya serta doa yang tiada pernah henti yang selalu mengiringi setiap langkah untuk menyelesaikan gelar master ini;

2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D selaku DPU dan Drs. Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc.,Ph.D selaku DPA yang telah membimbing, memotivasi, mendukung, dan berkorban demi kesuksesan mengerjakan tesis ini;

3. Bu Ika Hesti Agustin, S.Si.,M.Si. penguji tesis saya tapi rasa pembimbing yang selalu membantu menyelesaikan masalah tesis saya jika sudah tidak menemukan hasil;

4. Seluruh dosen FMIPA yang telah memberikan pengalaman, memberikan ilmu, dan dorongan semangat selama saya menempuh masa studi S2 ini;

5. Sahabatku dari jaman Akselerasi yang sudah mendapatkan gelar Master lebih dulu, Bella, yang selalu menegurku disaat saya bosan mengerjakan, dan selalu memberikan semangat yang membara dalam menyelesaikan tesis saya dengan cepat dan tepat;

6. Seluruh teman-teman seperjuangan S2 MIPA, dan keluarga CGANT (mbak ina, mbak nika, mbak bie, mbak dwi, ridho, mbak mitha, mas saddam), yang senantiasa saling memberikan semangat, pengalaman dan ilmu tentang kehidupan;

7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Perbandingan kedua golongan itu (orang-orang kafir dan orang-orang mukmin), seperti orang buta dan tuli dengan orang yang dapat melihat dan dapat mendengar. Adakah kedua golongan itu sama keadaan dan sifatnya? Maka tidakkah kamu mengambil pelajaran (daripada perbandingan itu)?."

(QS. Huud : 24) *)

"Niatkan mendapatkan gelar di belakang nama kita itu adalah untuk ibadah menuntut ilmu, bukan untuk mencari pekerjaan."

(N.N. Fatihah) **)

---

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

**) Penulis

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Novian Nur Fatihah

NIM : 151820101008

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: Analisis Pewarnaan Titik dan Sisi r-Dinamis pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi $C_n \trianglerighteq H$ benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2017
Yang menyatakan,

Novian Nur Fatihah
NIM. 151820101008

TESIS

ANALISIS PEWARNAAN TITIK DAN SISI r-DINAMIS PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI $C_n \trianglerighteq H$

Oleh

Novian Nur Fatihah
NIM 151820101008

Pembimbing I : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Pembimbing II : Drs. Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc.,Ph.D

PERSETUJUAN

ANALISIS PEWARNAAN TITIK DAN SISI r-DINAMIS PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI $C_n \trianglerighteq H$

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Nama Mahasiswa	:	Novian Nur Fatihah
NIM	:	151820101008
Jurusan	:	MIPA
Program Studi	:	Matematika
Angkatan Tahun	:	2015
Daerah Asal	:	Jombang
Tempat, Tanggal Lahir	:	Jombang, 21 Nopember 1994

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D	Drs. Antonius Cahya P, M.App.Sc.,Ph.D
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19690928 199302 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis berjudul "ANALISIS PEWARNAAN TITIK DAN SISI r-DINAMIS PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI $C_n \trianglerighteq H$" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D NIP.19680802 199303 1 004	Drs. Antonius Cahya P, M.App.Sc.,Ph.D NIP.19690928 199302 1 001
Anggota I,	Anggota II,
Drs. Rusli Hidayat, M.Sc NIP.19661012 199303 1 001	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si NIP.19840801 200801 2 006

Mengetahui,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Drs. Sujito,Ph.D.
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Analisis Pewarnaan Titik dan Sisi r-Dinamis pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi $C_n \trianglerighteq H$; Novian Nur Fatihah, 151820101008; 2017: 103 halaman; Program Studi Magister Matematika S2, Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pewarnaan merupakan salah satu topik penelitian yang banyak diminati dalam teori graf. Pewarnaan graf, merupakan kasus khusus dari pelabelan graf yang memiliki tiga macam aspek yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pewarnaan r-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan k-warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_(G)$.

Penelitian ini meneliti tentang pewarnaan titik r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi serta pengembangannya pada pewarnaan sisi r-dinamis. Graf hasil operasi comb sisi yaitu salah satu operasi graf yang menerapkan definisi perpangkatan. Graf hasil operasi comb sisi dapat diartikan dengan menempelkan sisi pada suatu graf dengan salah satu sisi pada graf lain yang dilambangkan dengan $G \trianglerighteq H$, dimana G dan H merupakan sebarang graf. Adapun graf-graf khusus yang dimaksud dalam pewarnaan r-dinamis diantaranya adalah graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf buku segitiga (*triangular book*), dan graf bintang (*star*). Hasil penelitian ini adalah pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis dari hasil operasi comb sisi graf $G \trianglerighteq H$ dengan graf G merupakan graf lingkaran dan graf H merupakan semua graf khusus.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, yang diawali dengan istilah yang tidak didefinisikan dan istilah yang didefinisikan, kemudian dapat disusun pernyataan pangkal yang biasa disebut

aksioma atau postulat. Setelah itu, disusun teorema-teorema ataupun definisi-definisi. Adapun teorema yang disusun harus dibuktikan melalui proses deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum dalam ruang lingkupnya.

Hasil penelitian ini berupa teorema baru mengenai pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi $C_n \trianglerighteq H$. Dari penelitian ini didapatkan Observasi, Teorema, Lemma, dan Dugaan yang dihasilkan sebagai berikut:

a. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq H$, maka $\Delta(G) \geq \Delta(H)$. Yang telah dibuktikan pada **Observasi** 4.1.1;

b. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq H$, maka $\Delta(G) \geq \Delta(H) + 1$. Yang telah dibuktikan pada **Observasi** 4.1.2;

c. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan sisi y_1y_2 sebagai sisi cangkok pada graf P_m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan titik pada $C_n \trianglerighteq P_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_r(C_n \trianglerighteq P_m) = \begin{cases} 3 & ;\ 1 \leq r \leq 2 \\ 4 & ;\ r \geq 3 \\ 5 & ;\ r \geq 3\ dan\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5) \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.1**;

d. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 4$ dan sisi y_iy_{i+1} sebagai sisi cangkok pada graf P_m dengan $2 \leq i \leq m-1$. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan titik pada $C_n \trianglerighteq P_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_r(C_n \trianglerighteq P_m) = \begin{cases} 3 & ;\ 1 \leq r \leq 2 \\ 4 & ;\ r = 3 \\ 5 & ;\ r \geq 4 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.2**;

e. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq C_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ dan sisi cangkok pada graf C_m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan titik pada

$C_n \trianglerighteq C_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_r(C_n \trianglerighteq C_m) = \begin{cases} 3 & ;\ 1 \leq r \leq 2 \\ 4 & ;\ r = 3 \\ 5 & ;\ r \geq 3 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.3**;

f. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq S_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ dan sisi cangkok pada graf S_m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan titik pada $C_n \trianglerighteq S_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_r(C_n \trianglerighteq S_m) = \begin{cases} 3 & ;\ 1 \leq r \leq \delta + 1 \\ r + 1 & ;\ \delta + 2 \leq r \leq \Delta \\ \Delta + 1 & ;\ r \geq \Delta \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.4**;

f. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq Amal(C_3, P_2, m)$ untuk $n \geq 3$ dimana sisi cangkok p_2 pada m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan titik pada $C_n \trianglerighteq Amal(C_3, P_2, m)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_r(C_n \trianglerighteq Amal(C_3, P_2, m)) = \begin{cases} 3 & ;\ 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1 & ;\ \delta + 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ \Delta + 1 & ;\ r \geq \Delta \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.5**;

g. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan sisi y_1y_2 sebagai sisi cangkok pada graf P_m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan sisi pada $C_n \trianglerighteq P_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda_r = \begin{cases} 3 & ;\ untuk\ 1 \leq r \leq 2 \\ 5 & ;\ untuk\ n \equiv 0 (\text{mod } 5),\ \text{r} \geq 3 \\ 6 & ;\ untuk\ n \neq 0 (\text{mod } 5),\ \text{r} \geq 3 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.1**;

h. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 4$ dan sisi $y_i y_{i+1}$ sebagai sisi cangkok pada graf P_m dengan $2 \leq i \leq m-1$. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan sisi pada $C_n \trianglerighteq P_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda_r = \begin{cases} 4 & ;\ untuk\ 1 \leq r \leq 3 \\ 5 & ;\ untuk\ r = 4 \\ 8 & ;\ untuk\ i = genap,\ r \geq 5 \\ 9 & ;\ untuk\ i = ganjil,\ r \geq 5 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.2**;

i. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq C_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ dan sisi cangkok pada graf C_m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan sisi pada $C_n \trianglerighteq C_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda_r = \begin{cases} 4 & ;\ untuk\ 1 \leq r \leq 3 \\ 6 & ;\ m \neq 4\ untuk\ semua\ n\ dan\ m \neq 5\ untuk\ n \equiv 1 (\text{mod } 3); \\ & \ \ 4 \leq r \leq 5 \\ 7 & ;\ m = 4\ untuk\ semua\ n\ dan\ m = 5\ untuk\ n \equiv 1 (\text{mod } 3); \\ & \ \ 4 \leq r \leq 5 \\ 8 & ;\ n \equiv 1 (\text{mod } 3)\ \text{dan n} \equiv 2 (\text{mod } 3);\ \text{r} \geq 6 \\ 9 & ;\ n \equiv 0 (\text{mod } 3);\ \text{r} \geq 6 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.3**;

j. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq S_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ dan sisi cangkok pada graf S_m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan sisi pada $C_n \trianglerighteq S_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda_r = \begin{cases} \Delta & ;\ 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ 2\Delta & ;\ \Delta \leq r \leq \Delta + 2 \\ 2\Delta + 1 & ;\ r \geq \Delta + 3 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.4**;

k. Misalkan G merupakan graf $C_n \trianglerighteq Amal(C_3, P_2, m)$ untuk $n \geq 3$ dimana sisi cangkok p_2 pada m. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan sisi pada $C_n \trianglerighteq Amal(C_3, P_2, m)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda_r(C_n \trianglerighteq Amal(C_3, P_2, m)) = \begin{cases} \Delta & ; i = genap,\ 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ \Delta + 1 & ; i = ganjil,\ 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ \Delta + 2 & ;\ \Delta \leq r \leq \Delta + 1 \\ 2\Delta & ; i = genap,\ r \geq 2\Delta - 2 \\ 2\Delta + 1 & ; i = ganjil,\ r \geq 2\Delta - 2 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.5**;

l. Diberikan Δ merupakan derajat terbesar pada $C_n \trianglerighteq H$. Maka batas bawah bilangan kromatik pewarnaan titik $r-$dinamis pada $C_n \trianglerighteq H$ adalah $\chi_r(C_n \trianglerighteq H)$ $\geq \Delta(H) + 1$ untuk $r \geq \Delta$.
yang telah dibuktikan pada **Lemma 4.2.1**;

m. Diberikan Δ merupakan derajat terbesar pada $C_n \trianglerighteq H$. Maka bilangan kromatik pewarnaan sisi $r-$dinamis pada $C_n \trianglerighteq H$ adalah $\Delta \leq \lambda_r(C_n \trianglerighteq H) \leq$ $2\Delta + 1$ untuk $r \geq \Delta + 3$.
yang telah dibuktikan pada **Dugaan 4.2.1**;

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul Analisis Pewarnaan Titik dan Sisi r-Dinamis pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi $C_n \trianglerighteq H$. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Magister Matematika (S2) pada Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA) Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas MIPA Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Magister Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Drs. Antonius Cahya P, M.App.Sc.,Ph.D selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Keluarga Besar Mahasiswa Magister Matematika 2015 dan CGANT yang telah memberikan semangat dan bantuan dalam proses penulisan tesis ini;
7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhir kata penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan memberikan motivasi kepada mahasiswa lain untuk melakukan penelitian sejenis.

Jember, April 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

G	graf
$V(G)$	himpunan titik graf G
$E(G)$	himpunan sisi graf G
$\|V(G)\|$	banyaknya titik graf G
$\|E(G)\|$	banyaknya sisi graf G
N	himpunan bilangan asli
u	titik pada graf
uv	sisi pada graf yang menghubungkan titik u dan v
$N(u)$	himpunan semua tetangga dari u / ketetanggaan dari u
$\|c(N(v))\|$	banyaknya warna ketetanggaan titik u
$d(v)$	derajat titik v
$\delta(G)$	derajat terkecil titik pada graf G
$\triangle\ (G)$	derajat terbesar titik pada graf G
P_n	graf lintasan dengan n titik
C_n	graf sikel dengan n titik
K_n	graf lengkap dengan n titik
$K_{m,n}$	graf bipartit lengkap dengan $m+n$ titik
W_n	graf roda dengan $n+1$ titik
S_n	graf bintang dengan $n+1$ titik
$+$	operasi *join* graf
$\circ$	operasi corona graf
$amal\{G_i, v_{oi}, m\}$	operasi amalgamasi graf G_i terhadap titik v_{oi} sebanyak m salinan
$c(u)$	pewarnaan pada titik u
$\chi(G)$	bilangan kromatik titik graf G
$\chi_d(G)$	bilangan kromatik titik dinamis graf G
$\chi_r(G)$	bilangan kromatik titik r-dinamis graf G
$\lambda(G)$	bilangan kromatik sisi graf G
$\lambda_d(G)$	bilangan kromatik sisi dinamis graf G
$\lambda_r(G)$	bilangan kromatik sisi r-dinamis graf G

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pewarnaan merupakan salah satu topik penelitian yang banyak diminati dalam teori graf. Pewarnaan graf, merupakan kasus khusus dari pelabelan graf yang memiliki tiga macam aspek yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada pewarnaan graf, titik atau sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Selain itu, pemberian warna tersebut harus menggunakan k warna yang minimal, yang disebut bilangan kromatik dan dilambangkan dengan $\chi(G)$. Begitu pula dengan pewarnaan wilayah dari suatu graf adalah pemetaan warna-warna ke wilayah-wilayah dari graf G sedemikian hingga wilayah yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Hingga saat ini, penelitian terkait pewarnaan graf masih dilakukan dengan berbagai pengembangannya yang telah divariasi.

Tingginya minat peneliti tentang pewarnaan dipicu oleh banyaknya permasalahan yang dapat dipecahkan dengan menggunakan konsep pewarnaan graf, salah satu masalahnya adalah tentang *scheduling*, dikarenakan jumlah elemen dan konektivitas yang tercakup semakin masif jumlahnya. Elemen bisa diartikan sebagai komponen atau alat transportasi seperti kereta api, bis, pesawat terbang, dan sebagainya. Sedangkan konektivitas bisa diartikan seperti rute jalan, rel kereta api, rute penerbangan, dan sebagainya. Tuntutan akan estimasi dan efektivitas *scheduling* semakin tinggi, hal inilah yang menyebabkan penjadwalan semakin kompleks.

Perkembangan terkini pada penelitian tentang pewarnaan graf adalah terkait dengan pewarnaan dinamis. Pewarnaan dinamis merupakan pewarnaan titik pada graf dimana setiap titik berderajat minimal dua memiliki lebih dari satu warna terhadap titik-titik ketetanggaannya. Pewarnaan titik dinamis kemudian berkembang menjadi pewarnaan titik dan sisi r-dinamis yang disesuaikan dengan kondisi atau syarat pada pewarnaan graf.

Hasil penelitian tentang pewarnaan dinamis pertama kali diperkenalkan pada tahun 2001 oleh Bruce Montgomery, memperkenalkan konsep baru pada bilangan kromatik 2-dinamis adalah $\chi(G)_2 \leq \chi(G) + 2$ ketika G adalah graf reguler yang menjadi topik kajian pada tesisnya yang berjudul *Dynamic Coloring*. Tahun 2002, H. Lai dan B. Montgomery menuangkan konsep pewarnaan dinamis tersebut dalam suatu artikel yang berjudul *Dynamic Coloring of Graphs*. Adapun pada tahun 2003, H. Lai, B. Montgomery, dan H. Poon juga membuat artikel yang berjudul *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. Pada kedua artikel tersebut antara lain dikaji tentang bilangan kromatik dinamis pada graf, batas atas pewarnaan dinamis, dan perbandingan antara bilangan kromatik dan bilangan kromatik dinamis. Selain itu, pengembangan konsep pewarnaan dinamis menjadi pewarnaan r-dinamis juga dikaji pada artikel tersebut. Beberapa teorema telah dihasilkan terkait dengan pewarnaan r-dinamis.

Selanjutnya, peneliti-peneliti lain berusaha mengkaji lebih dalam pewarnaan r-dinamis dan menghasilkan teorema-teorema baru. Beberapa diantaranya adalah N. Mohanapriya, dkk. (2010) yang meneliti tentang bilangan kromatik dinamis pada graf 4-reguler dengan *girth* 3 dan 4, Meysam Alishahi (2011) membuat artikel tentang *Dynamic Chromatic Number of Regular Graphs* yang membahas tentang pewarnaan dinamis pada graf dan hipergraf, S. Kim, dkk. (2012) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf planar, R. Kang, dkk. (2014) meneliti tentang pewarnaan r-dinamis pada graf *grid* dan S. Jahanbekam, dkk. (2014) meneliti tentang pewarnaan r-dinamis pada graf yang membahas tentang bilangan kromatik, batas-batas pewarnaan r-dinamis, diameter, dan hasil kali *Cartesian*.

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan oleh para peneliti sebelumnya, peneliti tertarik untuk turut mengkaji lebih lanjut mengenai pewarnaan r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi serta pengembangannya pada r-dinamis pewarnaan sisi karena belum pernah ada peneliti yang mengkaji topik ini. Graf hasil operasi comb sisi yaitu salah satu operasi graf yang menerapkan definisi perpangkatan. Graf hasil operasi comb sisi dapat diartikan dengan menempelkan sisi pada suatu graf dengan salah satu sisi pada graf lain yang dilambangkan dengan $G \trianglerighteq H$, dimana G dan H merupakan sebarang graf. Adapun graf-graf khusus yang dimaksud dalam pewarnaan r-dinamis diantaranya adalah graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf buku segitiga (*triangular book*), dan graf bintang (*star*). Penelitian ini menggunakan hasil operasi comb sisi, karena belum ada yang meneliti tentang pewarnaan r-dinamis titik dan sisi pada hasil operasi comb sisi untuk graf tersebut. Penelitian ini nantinya akan dapat menentukan hasil operasi comb sisi graf $G \trianglerighteq H$ dengan graf G merupakan graf lingkaran dan graf H merupakan semua graf khusus.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan sebelumnya, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Berapa nilai kromatik pewarnaan titik r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi $C_n \trianglerighteq H$?
2. Berapa nilai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi $C_n \trianglerighteq H$?
3. Bagaimana hubungan antara pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi $C_n \trianglerighteq H$?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut :

1. Graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf buku segitiga (*triangular book*), dan graf bintang (*star*).
2. Graf hasil operasi comb sisi yang digunakan adalah graf lingkaran (*cycle*) comb sisi dengan graf khusus.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian adalah sebagai berikut:

1. Untuk menentukan nilai kromatik pewarnaan titik r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi $C_n \trianglerighteq H$.

2. Untuk menentukan nilai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi $C_n \trianglerighteq H$.

3. Untuk mengetahui hubungan antara pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi $C_n \trianglerighteq H$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai pengembangan pewarnaan r-dinamis, baik titik maupun sisi pada beberapa graf hasil operasi comb sisi.

2. Membuka peluang bagi peneliti lain untuk melakukan analisis lebih lanjut terhadap hasil penelitian ini.

3. Hasil penelitian ini diharapkan dapat berguna untuk perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pewarnaan graf.

1.6 Kebaruan Penelitian

Kebaruan yang didapatkan dari penelitian ini adalah:

1. Jenis operasi graf yang digunakan yaitu graf hasil operasi comb sisi.

2. Penentuan nilai kromatik pewarnaan titik dan sisi r-dinamis pada beberapa graf hasil operasi comb sisi, sebagai contoh adalah menentukan nilai $\chi(G \trianglerighteq H)$ dengan graf G merupakan C_n dan graf H yang merupakan graf khusus.

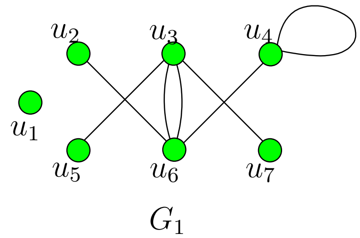
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf *(graph)* adalah himpunan benda-benda yang disebut simpul *(vertex)* yang terhubung oleh sisi *(edge)*. Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $(V(G))$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan $(E(G))$ adalah sebuah himpunan boleh kosong yang menghubungkan pasangan tak terurut $\{u, v\}$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi (*edge*). $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G. Secara sederhana, dapat juga ditulis $G = (V, E)$. Jadi sebuah graf dimungkinkan untuk tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu (Slamin, 2009). Graf yang hanya memiliki satu buah (*vertex*) tanpa sebuah (*edge*) dinamakan graf trivia.

Banyak simpul *(vertex)* pada graf G disebut sebagai *order* atau dapat ditulis sebagai $|V|$, sedangkan banyak sisi *(edge)* pada graf G disebut dengan *size* biasa dituliskan $|E|$. Graf yang ordernya berhingga dinamakan graf berhingga. Sebuah graf dikatakan terhubung apabila terdapat sisi yang menghubungkan setiap dua buah titik pada graf tersebut. Sedangkan graf disebut graf sederhana apabila tidak mempunyai *loop* atau sisi rangkap *(multiedge)*. Sebuah graf G mungkin mengandung *loop*, yaitu sisi yang berbentuk uu, dan atau sisi rangkap, yaitu sisi yang menghubungkan sepasang titik yang sama lebih dari satu. Contoh graf dengan *loop* dan sisi ganda dapat dilihat pada Gambar 1.1. Pada Gambar 1.1, sisi u_4u_4 merupakan *loop* dan sisi u_3u_6 mengandung sisi rangkap.

Jika dua buah simpul u dan v adalah titik-titik pada graf G, dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi, yaitu $e = uv$. Selanjutnya, v disebut sebagai tetangga dari u. Himpunan semua tetangga dari u disebut ketetanggaan dari u dan dinotasikan dengan $N(u)$. Sebuah sisi e disebut bersisian (*incident*) dengan titik u atau v jika sisi e merupakan penghubung titik u dan v, begitupun sebaliknya.



Gambar 2.1 Contoh graf dengan *loop* dan sisi ganda

Derajat sebuah graf dari titik v pada G dapat diartikan banyaknya titik-titik yang bertetangga dengan v, yaitu jumlah semua tetangga dari v (Slamin, 2009: 13). Jika sebuah titik v mempunyai derajat 0, dengan kata lain v tidak mempunyai sisi yang bersisian dengan simpul lainnya, maka v disebut sebagai titik terasing (Isolated Vertex). Pada Gambar 1.1, titik u_1 pada graf G_1 merupakan titik terasing. Sebuah titik berderajat 1 disebut sebagai titik ujung atau daun. Jika setiap titik dari graf G mempunyai derajat yang sama maka G tersebut disebut sebagai graf reguler atau teratur, jika tidak maka disebut dengan graf non reguler. Graf yang titiknya memiliki derajat satu disebut *pendant*.

Jalan (*walk*) $v_0 - v_l$ pada graf G merupakan sebuah barisan $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_l, v_l$ bergantian titik dan sisi sedemikian hingga $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk setiap $i, 1 \leq i \leq l$. Panjang jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jalan v_0v_l dikatakan tertutup jika $v_0 = v_l$. Jika semua titik dari jalan $v_0 - v_l$ berbeda maka jalan tersebut dinamakan lintasan. Sikel adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama, lintasan yang tertutup *(closed path)*.

Jarak dari titik u ke titik v, dinotasikan dengan $\delta(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Diameter dari graf G adalah jarak terpanjang diantara sembarang dua titik pada G. Girth dari graf G adalah panjang sikel terpendek pada G.

2.2 Jenis-jenis Graf

Terdapat jenis-jenis graf yang dapat dikelompokkan, diantaranya adalah berdasarkan ada tidaknya *loop* atau sisi ganda pada suatu graf dan graf-graf khusus. Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung *loop* maupun sisi ganda. Jika graf khusus merupakan graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus.

2.2.1 Graf Sederhana Khusus

Berdasarkan ada tidaknya *loop* atau sisi ganda terdapat beberapa jenis graf, berikut ini adalah beberapa graf sederhana khusus yang sering ditemui:

a. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap verteksnya mempunyai sisi ke semua verteks lainnya. Graf lengkap dengan n buah verteks dilambangkan dengan Kn. Setiap verteks Kn berderajat $n-1$. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah verteks adalah $n(n-1)/2$. Rumus ini diperoleh sebagai berikut: untuk 1 buah verteks terdapat $(n-1)$ buah sisi ke $(n-1)$ verteks lainnya, maka untuk n buah verteks terdapat $n(n-1)$ buah sisi. Karena setiap sisi terhitung dua kali untuk pasangan verteks yang bersisian dengannya, maka jumlah sisi seluruhnya dibagi dua yaitu $n(n-1)/2$.

b. Graf Lingkaran

Graf lingakaran adalah graf sederhana yang setiap verteksnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n buah verteks dilambangkan dengan Cn. Jika verteks-verteks pada Cn adalah $v1, v2, ..., vn$, maka sisi-sisinya adalah $(v1, v2), (v2, v3), ..., (vn-1, vn), dan(vn, v1)$. Dengan kata lain, ada sisi dari verteks terakhir, vn, ke verteks pertama, $v1$.

c. Graph Teratur *(Reguler Graph)*

Graf teratur adalah graf yang setiap verteksnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap verteksnya adalah r maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur berderajat r. Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r dengan n buah verteks adalah $nr/2$. Graf lengkap Kn dan graf lingkaran juga merupakan graf teratur. Graf Kn berderajat $(n-1)$ sedangkan graf lingkaran berderajat 2.

d. Graf Bipartit *(Bipartite Graph)*

Suatu graf sederhana G dikatakan Bipartit jika himpunan verteks-verteksnya V dapat dipecah menjadi dua himpunan bagian yang saling asing, X_1 dan X_2 sedemikian hinga setiap edge dalam graf G terhubung dengan sebuah verteks dalam V_1 dan sebuah verteks lainnya dalam V_2. Dengan demikian tidak ada edge dalam G yang terhubung dengan 2 verteks dalam V_1 atau dua verteks dalam V_2.

d. Graf Isomorfik *(Isomorphic Graph)*

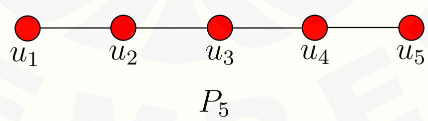
Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara verteks-verteks keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan verteks u dan v di G_1, maka sisi e yang berkorespon di G_2 juga harus bersisian dengan verteks u dan v di G_2.

2.2.2 Graf-Graf Khusus

Graf khusus merupakan suatu graf yang memiliki karakteristik dan keunikan bentuk khusus yang keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh dari graf khusus.

1. Graf Lintasan (*Path*)

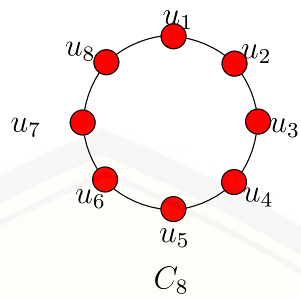
   Graf lintasan, dinotasikan dengan P_n, merupakan suatu graf dengan himpunan titik $V(P_n) = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-1}u_n\}$ (Acharya dan Mehta, 2014: 140). Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada Gambar 1.



Gambar 2.2 Graf lintasan

2. Graf Sikel (*Cycle*)

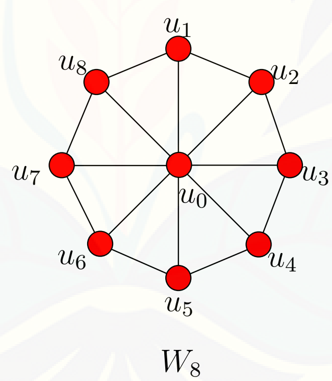
   Graf sikel, dinotasikan dengan C_n dimana $n \geq 3$, merupakan graf yang memiliki himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{u_n u_1\}$ (Acharya dan Mehta, 2014: 140). Gambar 2 merupakan contoh graf sikel.



Gambar 2.3 Graf sikel

3. Graf Roda *(Wheel Graph)*

   Graf roda *(Wheel Graph)* dinotasikan W_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lingkaran C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat. Jadi, W_n terdiri dari $n+1$ titik dan $2n$ sisi (Hararyet dalam Meganingtyas, 2015).

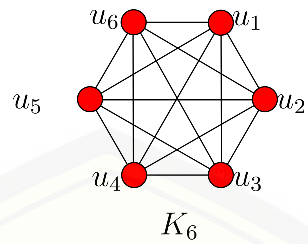


Gambar 2.4 Graf roda

4. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

   Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya terhubung dengan semua titik yang lain dengan hanya satu sisi (Wibisono, 2008:128). Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Dengan demikian, himpunan titik

$V(K_n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan himpunan sisinya $E(K_n) = \{u_n u_1\}$. Pada K_n, $|V(K_n)| = n$ dan $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Gambar 4 menunjukkan contoh gambar graf lengkap.



Gambar 2.5 Graf lengkap

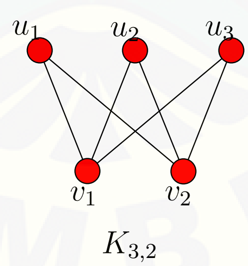
5. Graf Bipartit Lengkap *(Complete Bipartite Graph)*
   Graf bipartit lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$, adalah sebuah graf yang memenuhi 3 (tiga) kondisi berikut:

   (a) memiliki himpunan titik $V(G) = A \cup B$, dimana A dan B merupakan gabungan himpunan tidak kosong,

   (b) A dan B adalah himpunan yang independen,

   (c) Setiap titik pada A bertetangga dengan setiap titik pada B.

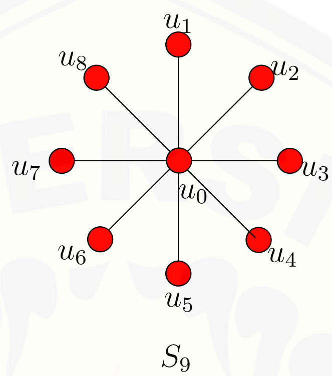
   (Destacamento, dkk., 2014: 2)
   Pada $K_{m,n}$, $|V(K_{m,n})| = m+n$ dan $|E(K_{m,n})| = m \times n$. Contoh graf bipartit lengkap dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 2.6 Contoh graf bipartit lengkap, $K_{3,2}$

6. Graf Bintang (*Star Graph*)

   Graf bintang, dinotasikan dengan S_n, merupakan graf berorder $n+1$ yang mempunyai himpunan titik $V(S_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{u_0\}$ dan himpunan sisi $E(S_n) = \{u_0u_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Titik u_0 biasanya disebut dengan titik pusat yang bertetangga dengan setiap titik yang lain. Derajat titik u_0 adalah n, sedangkan derajat $u_i, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah 1. Contoh gambar graf bintang dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 2.7 Graf bintang

7. Graf Triangular Ladder TLn

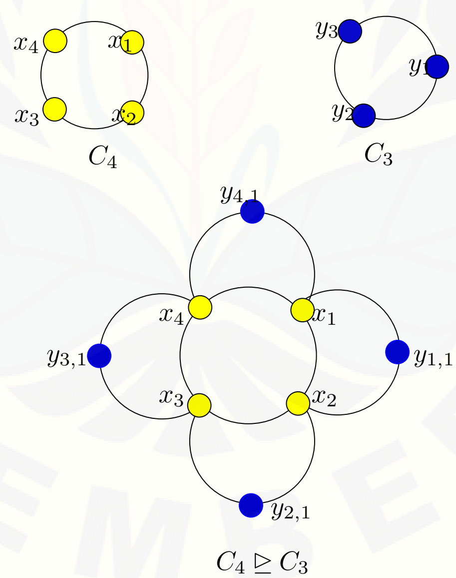
   Graf Triangular Ladder TLn adalah graf yang diperoleh dari graf ladder $L_n = P_n \times P_2 (n \geq 2)$ dengan penambahan sisi $\{u_iu_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1$ dimana titik - titik kedua P_n adalah $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dengan sisi $\{u_iv_i\}$ (Jeyanthi dan Maheswari,2015).

2.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan salah satu teknik mendapatkan suatu jenis graf baru dengan cara melakukan operasi terhadap dua atau lebih graf. Ada beberapa macam operasi graf yang telah dikembangkan, akan tetapi pada penelitian kali ini membahas tentang graf hasil operasi comb sisi. Graf hasil operasi comb sisi dapat diartikan dengan menempelkan setiap sisi pada suatu graf dengan graf lainnya. Graf hasil operasi comb sisi disimbolkan dengan $G \trianglerighteq H$, dimana G dan H merupakan sebarang graf. Gambar 1.8 merupakan contoh dari graf hasil operasi comb sisi $C_4 \trianglerighteq C_3$.

Definisi 2.3.1. *Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan e adalah sisi di H, operasi comb sisi dari graf G dan H dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan G dan $|E(G)|$ salinan dari H dan merekatkan salinan ke-i dari graf H di sisi cangkok e pada titik ke-i dari graf G. Dengan demikian, himpunan titik dan sisi dari graf $G \trianglerighteq H$ adalah sebagai berikut: $V(G \trianglerighteq H) = \{(a,v)|a \in V(G); v \in V(H)\} \cup \{(a,v,z)|a \in V(G); v,z \in V(H)\}$ dan jika $v = w$ dan $z = y$, $y = w$ maka $E(G \trianglerighteq H) = \{(a,v)(b,w,z)|a,b \in V(G); v,w,z \in V(H)\} \cup \{(b,w,z)(c,w,y)|b,c \in V(G); z,w,y \in V(H)\} \cup \{(c,w,y)(d,v)|c,d \in V(G); v,w,y \in V(H)\}$ jika $a = b$ maka $E(G \trianglerighteq H) = \{(a,v)(b,w)|a,b \in V(G); v,w \in V(H)\}$ sehingga $p = |V(G \trianglerighteq H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $q = |E(G \trianglerighteq H)| = q_1 q_2$.*

Dari contoh gambar 1.8 dapat diperoleh kardinalitas dari graf $C_4 \trianglerighteq P_3$ yaitu himpunan titik $V(C_4 \trianglerighteq P_3) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_{(1,1)}, y_{(2,1)}, y_{(3,1)}, y_{(4,1)}\}$ dan himpunan sisi $E(C_4 \trianglerighteq P_3) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1, x_1y_{1,1}, y_{1,1}x_2, x_2y_{2,1}, y_{2,1}x_3, x_3y_{3,1}, y_{3,1}x_4, x_4y_{4,1}, y_{4,1}x_1,\}$ sehingga $p = |V(C_4 \trianglerighteq P_3)| = 8$, $q = |E(C_4 \trianglerighteq P_3)| = 12$

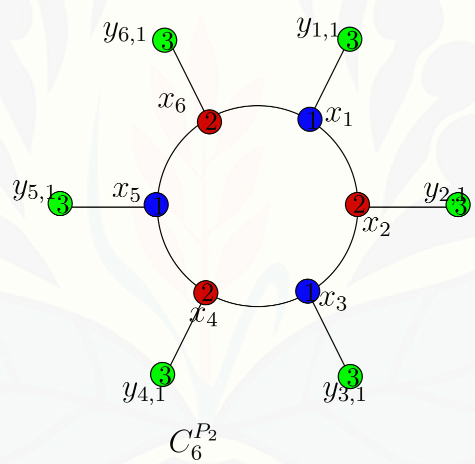


Gambar 2.8 Graf $C_4 \trianglerighteq C_3$

2.4 Pewarnaan Graf

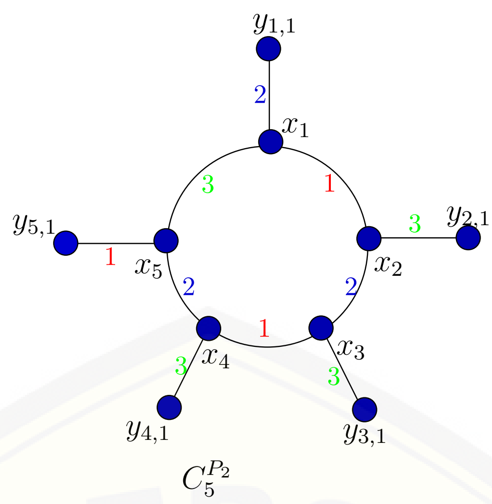
Pewarnaan graf *(graph coloring)* dapat dilakukan dengan 3 cara yaitu, pewarnaan titik *(vertex coloring)*, pewarnaan sisi *(edge coloring)*, dan pewarnaan wilayah *(region coloring)* (Munir,2009).

Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009:147). Adapun warna yang digunakan dapat berupa elemen dari sebarang himpunan, ataupun bilangan bulat positif $(1, 2, 3, \ldots, k)$. Dengan demikian, pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \rightarrow N$, dimana N adalah bilangan bulat positif, sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga. Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai titik pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Contoh dari pewarnaan titik pada gambar 1.9.



Gambar 2.9 Pewarnaan Titik pada Graf $C_6 \trianglerighteq P_2$

Suatu pewarnaan sisi pada graf G merupakan pemberian warna pada sisi-sisi graf G, satu warna untuk setiap sisi pada graf G, dimana sisi-sisi yang bertetangga diberikan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009:249). Seperti halnya pada pewarnaan titik, pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai fungsi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ sedemikian hingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap dua sisi e



Gambar 2.10 Pewarnaan Sisi pada Graf $C_5 \trianglerighteq P_2$

dan f yang bertetangga pada G. Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai indeks kromatik (atau disebut juga bilangan kromatik sisi) graf G dan dinotasikan dengan $\chi'(G)$. Contoh dari pewarnaan sisi pada gambar 1.10.

2.5 Pewarnaan r-dinamis pada Graf

2.5.1 Pewarnaan r-dinamis Titik pada Graf

Pewarnaan r-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan k-warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_d(G)$.

Ide mengenai pewarnaan k-warna dinamis berasal dari pemikiran bahwa dalam mewarnai suatu graf, kita tidak hanya dapat memberikan satu warna berbeda pada titik-titik bertetangga pada graf (seperti pewarnaan titik graf pada umumnya). Pada kasus khusus, kita dapat mewarnai titik-titik pada graf dengan beberapa warna berbeda yang merepresentasikan situasi dimana suatu individu memiliki keragaman yang lebih besar pada bentuk hubungannya dengan individu lain. Dengan demikian, keseluruhan interaksi tidak begitu terbatas melainkan bersifat lebih dinamis.

Oleh karena itu, pewarnaan dinamis pada graf didefinisikan sebagai pewarnaan titik pada graf dimana setiap titik berderajat minimal dua memiliki lebih dari satu warna terhadap titik-titik ketetanggaannya. Permasalahan-permasalahan yang terdapat pada kasus pewarnaan graf juga dimungkinkan dapat dipertimbangkan pada kasus pewarnaan dinamis, dimana terdapat sifat-sifat tambahan yang diberikan.

Suatu graf G memiliki himpunan titik $V = (G)$, himpunan sisi $E = E(G)$, dan n menyatakan banyaknya titik, yaitu $|V|$. Himpunan ketetanggaan suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$, merupakan himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik v. Derajat dari suatu titik v dinotasikan dengan $d(v)$, derajat titik yang minimum pada graf G dinotasikan dengan $\delta = \delta(G)$, dan derajat titik yang maksimum pada graf G dinotasikan dengan $\triangle = \triangle\ (G)$.

Pewarnaan k-warna pada graf G merupakan pemberian sejumlah k warna pada titik-titik graf G, yakni $1, 2, 3, \ldots, k$, dan disebut tepat (*proper*) jika tidak ada warna yang sama yang diberikan pada dua titik yang bertetangga. Bilangan kromatik, $\chi = \chi(G)$, merupakan nilai k yang minimal agar graf G memiliki pewarnaan k-warna yang tepat. Pewarnaan yang demikian disebut sebagai pewarnaan χ-warna pada graf G.

Definisi 2.5.1. *Pewarnaan dinamis didefinisikan sebagai pewarnaan yang tepat (proper) sehingga setiap titik berderajat minimal dua mempunyai lebih dari satu warna yang berbeda pada setiap titik-titik ketetanggaannya. Pewarnaan dinamis merupakan suatu pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

1. *jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan*

2. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002: 2)

Bilangan kromatik dinamis, dinotasikan dengan $\chi_d = \chi_d(G)$, merupakan nilai k yang minimal yang diperoleh agar graf G memenuhi kondisi pewarnaan k-warna dinamis. Pewarnaan dinamis pada akhirnya berkembang menjadi pewarnaan r-dinamis dengan cara menggeneralisasikan konsep pewarnaan dinamis. Adapun pengertian mengenai pewarnaan r-dinamis dapat dilihat pada Definisi 1.5.2.

Definisi 2.5.2. *Pewarnaan r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

1. *jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan*
2. *$\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.*

(Lai dan Montgomery, 2002: 12)

Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k-warna r-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik r-dinamis, yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\chi(G)$. Adapun bilangan kromatik 2-dinamis diperkenalkan oleh Montgomery sebagai bilangan kromatik dinamis. Dia menduga bahwa jika G merupakan graf reguler, maka $\chi_2(G) \leq \chi(G) + 2$.

Berdasarkan kedua kondisi pada Definisi 1.5.2, dapat dilihat bahwa $\chi_r(G) \geq \min\{\{r, \triangle\} + 1$. Untuk setiap pewarnaan r-dinamis pada graf G juga merupakan pewarnaan t-dinamis pada graf G, dimana $r > t \geq 1$. Dengan demikian, jika $r > t \geq 1$ maka berlaku $\chi_r(G) \geq \chi_t(G)$ untuk setiap graf G (Lai dan Montgomery, 2002: 12).

Pada penelitian yang dilakukan, Montgomery beberapa teorema yang berkaitan dengan pewarnaan r-dinamis. Selain itu, Taherkhani(2014) juga melakukan penelitian mengenai bilangan kromatik r-dinamis pada graf yang menghasilkan beberapa teorema.

Teorema 2.5.1. *Jika $r \geq 2$ maka*

$$\chi_r(C_n) = \begin{cases} 5, & \text{jika } n = 5, \\ 3, & \text{jika } n = 3k, k \geq 1 \\ 4, & n \text{ lainnya} \end{cases}$$

(Lai dan Montgomery, 2002: 12).

Teorema 2.5.2. *Untuk setiap graf pohon G, berlaku $\chi_r(G) = \min\{\triangle, r\} + 1$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13).*

Teorema 2.5.3. *Jika $k \geq r + 1$ maka $\chi_r(K_{i_1,\ldots,i_k} = k$ untuk setiap $i_j \geq 1$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13).*

Suatu graf G disebut sebagai r-normal jika $\chi_r(G) = \chi(G)$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13). Untuk setiap sikel C_n, dimana n ganjil dan kelipatan 3, merupakan r-normal, dimana $r \geq 2$. Graf lengkap juga merupakan r-normal untuk $r \geq 2$. Adapun graf pohon yang termasuk r-normal untuk setidaknya satu nilai r adalah K_1 dan K_2.

Teorema 2.5.4. *Hanya graf lengkap K_n dan graf sikel C_n, dimana panjang sikel merupakan kelipatan 3, yang merupakan graf r-normal untuk setiap $r \geq 2$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13).*

Teorema 2.5.5. *Jika pada setiap titik v graf G terdapat K_k, dimana $k \geq \min\{r, d(v)\} + 1$, maka G merupakan r-normal (Lai dan Montgomery, 2002: 14).*

Teorema 2.5.6. $\forall r \geq 2, \chi_r(G) = n$ *jika dan hanya jika setiap dua titik yang tidak bertetangga pada G, bertetangga dengan sebuah titik yang berderajat maksimum r (Lai dan Montgomery, 2002: 14).*

Untuk mendapatkan nilai dari bilangan kromatik titik dinamis, Jahanbekam, dkk. merumuskannya dalam suatu persamaan pada Observasi 1.5.1 dan Observasi 1.5.2 sebagai berikut.

Observasi 2.5.1. *Selalu berlaku $\chi(G) = \chi_1(G) \leq \cdots \leq \chi_{\triangle(G)}(G) = \chi(G^2)$. Jika $r \geq \triangle(G)$ maka $\chi_r(G) = \chi_{\triangle(G)}(G)$.*

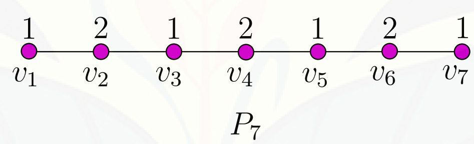
i	$c(v_i)$	$\|c(N(v_i))\|$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$
1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	2	1
3	1	1	1	2	1
4	2	1	1	2	1
5	1	1	1	2	1
6	2	1	1	2	1
7	1	1	1	1	1

Tabel 2.1 Pewarnaan 1-dinamis pada P_7

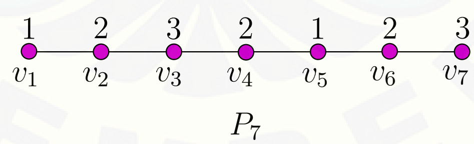
Observasi 2.5.2. $\chi_r(G) \geq \min\{\triangle\ (G), r\} + 1$ *dan hal ini sudah jelas.*

Bukti. Ketetanggaan dari sebuah titik pada graf G yang mempunyai derajat tertinggi membutuhkan $\min\{\triangle\ (G), r\} + 1$ warna. Jika G adalah graf Pohon. Misalkan x adalah salah satu titik pada graf G yang disebut sebagai akar. Berikan warna pada titik-titik yang lain secara keseluruhan dengan warna-warna yang berbeda dari titik x, maka warna yang dibutuhkan adalah sebanyak $\min\{\triangle\ (G), r\} + 1$. $\square$

Contoh pewarnaan r-dinamis pada graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 1.11 dan Gambar 1.12.



Gambar 2.11 Pewarnaan 1-dinamis pada P_7



Gambar 2.12 Pewarnaan 2-dinamis pada P_7

i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$
1	1	1	2	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2
4	1	2	2	2	2
5	2	2	2	2	2
6	3	2	2	2	2
7	1	1	2	1	2

Tabel 2.2 Pewarnaan 2-dinamis pada P_7

2.5.2 Pewarnaan Sisi r-Dynamis pada Graf

Pewarnaan sisi r-dinamis merupakan perluasan konsep dari perwanaan titik r-dinamis. Definisi pewarnaan sisi r-dinamis dikembangkan dari definisi pada pewarnaan titik r-dinamis yang disesuaikan dengan kondisi atau syarat pada pewarnaan sisi graf. Pewarnaan k- warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada graf G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik - titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, dinotasikan dengan $\chi_d(G)$.

Definisi 2.5.3. *Pewarnaan sisi r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari E ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

1. *jika $e = uv, f = vw \in E(G)$ maka $c(e) \neq c(f)$, dan*
2. *$\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(v) + d(u) - 2\}$.*

Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k-warna sisi r-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik sisi r-dinamis, yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\lambda(G)$. Adapun bilangan kromatik sisi 2-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik sisi dinamis, $\lambda_d(G)$.

2.6 Fungsi Flooring dan Ceiling

Fungsi flooring $f : R \to Z$, dimana $f(x)$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Sedangkan fungsi ceiling $f : R \to Z$, dimana $f(x)$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $f(x) = \lceil x \rceil$. Berikut ini merukapan sifat-sifat dari fungsi flooring dan ceiling:

1. $\lfloor x \rfloor = n$ bila $n \leq x \leq n + 1$
2. $\lceil x \rceil = n$ bila $n - 1 < x < n$
3. $\lfloor x \rfloor = n$ bila $x - 1 < n < x$
4. $\lceil x \rceil = n$ bila $x \leq n \leq x + 1$
5. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
6. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
7. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
8. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
9. $\lceil x + n \rceil = \lfloor x \rfloor + n$

2.7 Hasil Penelitian Pewarnaan Titik dan Sisi r-Dinamis Sebelumnya

Penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan titik dan sisi r-dinamis yang digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian tersebut bisa dilihat pada tabel 1.7 dan tabel 1.7 di bawah ini :

Tabel 2.3 Hasil Pewarnaan Titik r-Dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik r-Dinamis	Keterangan
Graf Lintasan (P_n); $n \geq 2$	$\chi(P_n) = 2$; $n \geq 2$ $\chi_2(P_n) = \chi_r(P_n) = 3$; $n \geq 2, r \geq 2$	Meganingtyas, 2015
Graf Sikel (C_n); $n \geq 3$	$\chi(C_n) = 2$; n genap $\chi(C_n) = 3$; n ganjil $\chi_{r\geq 2}(C_n) = 3$; $n = 3k, k \in N$ $\chi_{r\geq 2}(C_n) = 4$; $n = 3k+1, k \in N$ $\chi_{r\geq 2}(C_n) = 5$; $n = 3k+2, k \in N$	Meganingtyas, 2015
Graf $(P_n + C_m)$; $n \geq 2$,$m \geq 3$	$\chi_5(P_n + C_m) = 5$; untuk $m = 3k, k \in A$ $\chi_5(P_n + C_m) = 5$; untuk m lainnya $chi_5(P_n + C_m) = 6$; untuk $m = 3$ $chi_5(P_n + C_m) = 8$; untuk $m = 5$ $chi_5(P_n + C_m) = 7$; untuk m lainnya $\chi_r(P_n + C_m) = r + m - 2$ untuk $3 \leq m \leq r - 2$; $\chi_r(P_n + C_m) = 2r - 3$ untuk m lainnya	Meganingtyas, 2015

Tabel 2.4 Hasil Pewarnaan Sisi r-Dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik r-Dinamis	Keterangan
Graf Lintasan (P_n); $n \geq 2$	$\lambda(P_n) = 2$; $n \geq 2$ $\lambda_2(P_n) = \lambda_r(P_n) = 3$; $n \geq 2, r \geq 2$	Meganingtyas, 2015
Graf Sikel (C_n); $n \geq 3$	$\lambda(C_n) = 2$; n genap $\lambda(C_n) = 3$; n ganjil $\lambda_{r\geq 2}(C_n) = 3$; $n = 3k, k \in N$ $\lambda_{r\geq 2}(C_n) = 4$; $n = 3k + 1, k \in N$ $\lambda_{r\geq 2}(C_n) = 5$; $n = 3k + 2, k \in N$	Meganingtyas, 2015
Graf Bintang (S_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r\geq 1}(S_n) = n$	Meganingtyas,2015
Graf Roda (W_n); $n \geq 5$	$\lambda_{r\leq n-1}(W_n) = n$; $1 \leq r \leq n - 1$ $\lambda_{r\geq n}(W_n) = 10$; $n = 5, r \geq n$ $\lambda_{r\geq n}(W_n) = n + 3$; $n = 3k + 3, k \in N, r \geq n$ $\lambda_{r\geq n}(W_n) = n + 4$; n lainnya, $r \geq n$	Meganingtyas, 2015
Graf *Friendship* (F_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r\leq 2n-1}(F_n) = 2n$, $\lambda_{r\geq 2n}(F_n) = 2n + 1$,	Meganingtyas, 2015
Graf Amalgamasi Lintasan(P_n); $n \geq 2, m \geq 3$	$\lambda(amal(P_n, v, m)) =$ $\lambda_2(amal(P_n, v, m)) = m$, $\lambda_{r\geq 3n}(amal(P_n, v, m)) = m + 1$,	Meganingtyas, 2015

Graf	Bilangan Kromatik r-Dinamis	Keterangan
Graf Prisma (P_n); $n \geq 3$	$\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 2$; n genap $\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 3$; n ganjil $\lambda_3(P_n) = 4$; $n = 3$ $\lambda_3(P_n) = 5$; n lainnya $\lambda_{r\geq 4}(P_n) = 9$;$n = 3$ $\lambda_{r\geq 4}(P_n) = 6$; $n = 4k, k \in N$ $\lambda_{r\geq 4}(P_n) = 8$; $n = 5, 6, 4k + 7k \in N$ $\lambda_{r\geq 4}(P_n) = 7$; n lainnya	Meganingtyas, 2015
Graf Tangga (L_n); $n \geq 3$	$\lambda(L_n) = \lambda_2(L_n) = 3$, $\lambda_3(L_n) = 5$, $\lambda_4(L_n) = \lambda_r(L_n) = 6$,	Meganingtyas, 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, yaitu metode penelitian yang menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada kemudian menurunkan sebagai alternatif penyelesaian masalah. Setelah itu, disusun teorema-teorema ataupun definisi-definisi. Adapun teorema yang disusun harus dibuktikan melalui proses deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum dalam ruang lingkupnya. Dalam proses deduktif juga mungkin diawali dengan proses induktif yang meliputi penyusunan konjektur, model matematika, analogi dan atau generalisasi melalui pengamatan terhadap suatu data. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola *(pattern recognition)*, yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan r-dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian yang akan dilakukan terkait analisis pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi adalah sebagai berikut:

1. memilih graf khusus dan menentukan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf hasil operasi comb sisi, serta kardinalitas graf,
2. melakukan pewarnaan,
   a. melabeli titik-titik sedemikian hingga,
      - jika pewarnaan titik r-dinamis memenuhi $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$,
      - jika pewarnaan sisi r-dinamis memenuhi $e = uv, f = vw \in E(G)$ maka $c(e) \neq c(f)$, dan $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(v) + d(u) - 2\}$,

b. memeriksa apakah terdeteksi pola pewarnaan, bila iya maka akan dilanjutkan dengan langkah selanjutnya, bila tidak kembali ke langkah sebelumnya,

c. mengekspan kardinalitasnya untuk melihat apakah pola itu berlaku secara umum, apabila pola berlaku secara umum maka ditentukan nilai kromatiknya dari graf ekspansi tersebut,

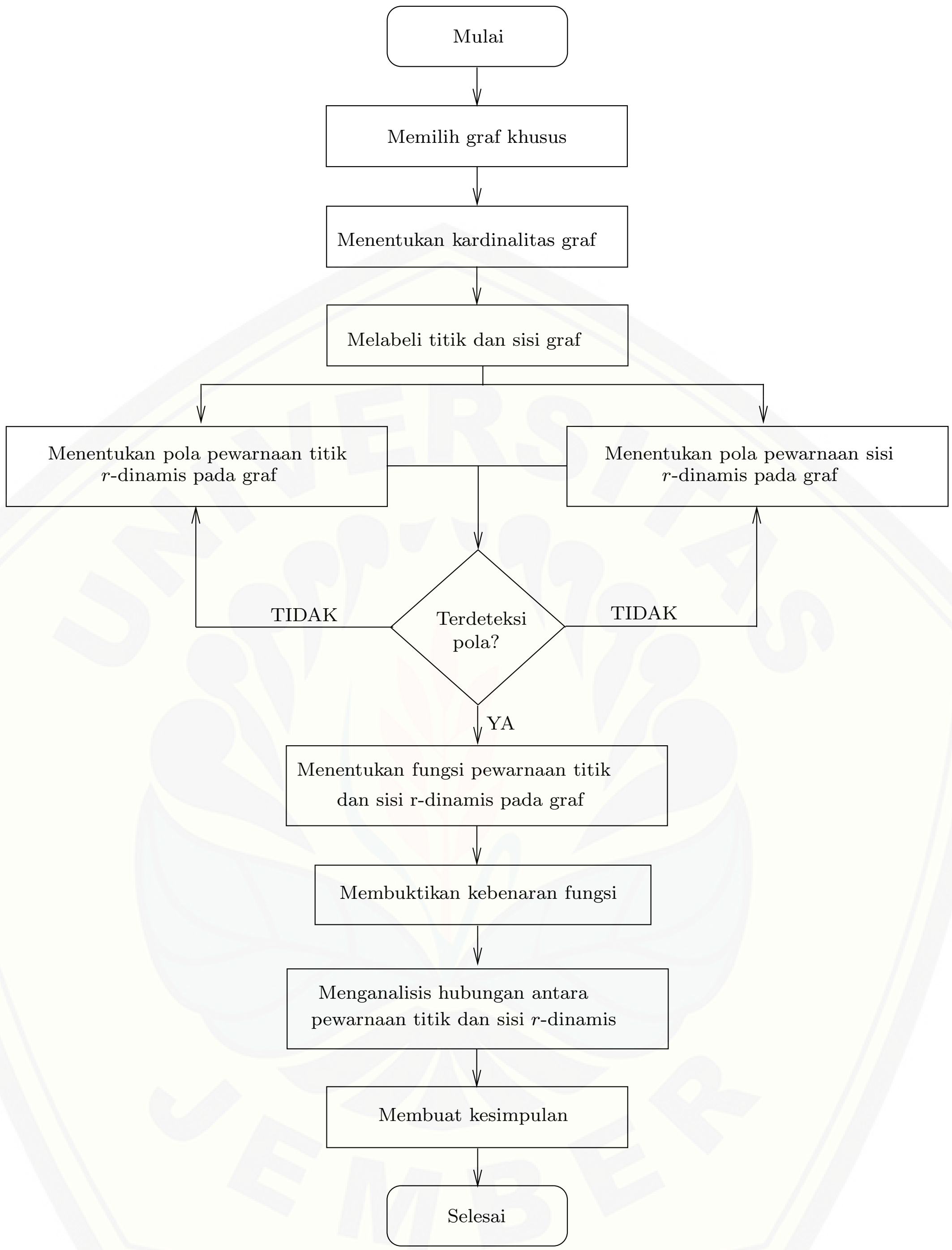
d. menentukan nilai kromatik dari graf tersebut untuk kardinalitas secara umum,

e. menentukan fungsi pewarnaan titik r-dinamis pada masing-masing graf hasil operasi comb sisi sehingga diperoleh teorema-teorema,

f. mengembangkan lemma dan teorema

3. menganalisis keterkaitan antara pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi.

Adapun skema penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram alur penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil-hasil dari pembahasan pada bab 4 sebelumnya, didapatkan:

1. Bilangan kromatik pewarnaan titik r-dinamis pada graf $C_n \trianglerighteq H$ adalah $\chi_r(C_n \trianglerighteq H) \leq \Delta(H) + 1$ untuk $r \geq \Delta(H)$.
2. Bilangan kromatik pewarnaan sisi r-dinamis pada graf $C_n \trianglerighteq H$ adalah $\Delta(C_n \trianglerighteq H) \leq \lambda_r(C_n \trianglerighteq H) \leq 2\Delta(C_n \trianglerighteq H) + 1$ untuk $r \geq \Delta + 3$.
3. Hubungan antara pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf $C_n \trianglerighteq H$ adalah $\lambda_r \leq 2(\chi_r) - 1$ untuk $r \geq \Delta$ dengan graf H merupakan graf khusus P_m, C_m, S_m, dan Bt_m.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan titik dan sisi r-dinamis pada beberapa graf hasil operasi comb sisi, dengan graf G yang digunakan adalah C_n maka penulis memberikan saran kepada pembaca untuk dapat mengembangkan pewarnaan titik dan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi comb sisi dengan jenis graf dasar G lainnya seperti graf lintasan (*path*), graf roda (*wheel*), ataupun graf bintang (*star*) untuk mengetahui banyaknya bilangan kromatik untuk graf G secara umum, dan juga mengembangkan pewarnaan titik dan sisi r-dinamis pada sebarang graf comb sisi sebarang graf dengan notasi $G \trianglerighteq H$.

DAFTAR PUSTAKA

Acharya, U.P. dan Mehta, H.S. 2014. *2-Cartesian Product of Special Graphs*. Journal: International Journal of Mathematics and Soft Computing, Vol. 4, No. 1, pp 139-144.

Alishahi, M. 2007. *On the Dynamic Coloring of Graphs*. Journal: Discrete Applied Mathematics 159, pp 152-156.

Cameron, P.J., dkk. 2007. *On the Quantum Chromatic Number of a Graph*. Journal: The Electronic Journal of Combinatorics 14.

Chartrand, Gary dan Zhang, Ping. 2009. *Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. Australia: University of Ballarat.

Destacamento,C.J.,dkk. 2014. *The Game Chromatic Number of Some Clasess Graphs*. Artikel(Dipresentasikan). Manila : DLSU Research Congress 2014.

DEW Meganingtyas, Dafik, Slamin. 2011. *On r-dynamic Coloring of Operation Product of Cycle and Path Graph*, University of Jember.

DEW Meganingtyas. 2015. *Analisis Pewarnaan r-Dinamis pada Graf-graf Khusus*. Tesis: Universitas Jember.

Gallian, Joseph A. 2014. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics 17.

Galvin, F. 1995. *The List Chromatic Index of a Bipartite Multigraph*. Jurnal: Journal of Combinatorial Theory, Series B 63, pp 153-158.

Jahanbekam, S., dkk. 2014. *On r-dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan).

Jeyanti.P , Maheswari A. 2015. *One Modulo Three Mean Labeling Of Cycle Related Graphs*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 103 No.4 2015,625-633.

Lai, H. dan Montgomery, B. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel WV 26506-6310. Morgantown: West Virginia University.

Lai, H., dkk. 2003. *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. Ars Combinatoria 68 pp. 193-201.

Kim, Seong-Jin, dkk. 2012. *Dynamic Coloring and List Dynamic Coloring of Planar Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Seoul: Konkuk University.

Mohanapriya, N., dkk. 2010. *On Dynamic Chromatic Number of 4-regular Graphs with Girth 3 and 4*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). India.

Montgomery. B., 2001. *Dynamic Coloring*. Ph.D Dissertation, West Virginia University.

Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit Edisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.

Taherkhani, A. 2014. *r-Dynamic Chromatic Number of Graphs.* preprint (arXiv: 1401.6470v1 [math.CO], 24 Jan 2014).

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit Edisi Kedua.* Yogyakarta: Graha Ilmu.