STUDI TENTANG
GRAF PERFECT DAN GRAF BERGE

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh:

SARI WAHYUNINGSIH
NIM. 991810101065

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2003

MOTTO

" Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri."

(Q.S Ar-Ra'd: 11)

" Jadikanlah sabar dan sholat sebagai penolongmu. Dan sesungguhnya yang demikian itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang beriman. "

(Q.S Al-Baqoroh: 45)

"Jadilah engkau pemaaf dan anjurkan orang berbuat baik, berpaling dari orang jahil."

(Q.S Al-A'raf: 199)

"Sesungguhnya disamping kesulitan ada kemudahan."

(Q.S Al-Insyiroh: 6)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

- *Ayahku Abdul Wachid dan Ibuku Saudah yang doa, dorongan semangat dan perhatiannya selalu mengiringi setiap langkahku.*
- *Kakakku Sahid Wahyudin yang banyak memberikan dorongan dan doa.*
- *Sahabat-sahabatku*
- *Almamaterku yang kupuja dan kubanggakan.*

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Februari 2003 sampai dengan bulan Oktober 2003 di Jurusan Matematika MIPA UNEJ. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Oktober 2003

Sari Wahyuningsih

ABSTRAK

Studi Tentang Graf Berge dan Graf Perfect, Sari Wahyuningsih, 991810101065, Skripsi, November 2003, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Sebuah graf adalah graf *perfect* jika untuk setiap subgraf terinduksi H dari graf G mempunyai bilangan kromatik dari H sama dengan bilangan *clique* dari H, $\chi(H) = \omega(H)$. Bilangan kromatik dari subgraf terinduksi H dari graf G, $\chi(H)$ adalah jumlah warna terkecil yang dapat diberikan pada titik-titik di H sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang saling bertetangga mendapat warna yang berbeda. Bilangan *clique* dari subgraf terinduksi H dari graf G, $\omega(H)$ adalah order maksimum *clique* yang dapat dibentuk dari graf G. *Clique* dari graf G adalah subgraf lengkap dari G. Sebuah graf dikatakan graf Berge jika graf tersebut tidak memuat *hole* ganjil dan *antihole* ganjil. *Hole* adalah subgraf terinduksi H dari G yang isomorfik dengan sebuah sikel dengan panjang paling sedikit empat, sedangkan *antihole* adalah subgraf terinduksi H' dari $\overline{G}$ yang isomorfik dengan komplemen suatu sikel. *Hole* dan *antihole* bernilai ganjil atau genap ditentukan oleh banyaknya titik yang dimiliki oleh *hole* dan *antihole* tersebut. Penulisan skripsi ini bertujuan untuk membuktikan bahwa graf bipartit lengkap, *line graph* dari graf bipartit lengkap, dan komplemen *line graph* dari graf bipartit lengkap adalah graf *perfect* dan graf Berge. Hasil dari penelitian yang telah dilakukan didapatkan bahwa graf bipartit lengkap, *line graph* dari graf bipartit lengkap, dan komplemen *line graph* dari graf bipartit lengkap adalah graf *perfect* dan graf Berge.

Kata kunci: *clique*, *hole*, *antihole*, *graf Berge*, *dan graf perfect*.

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : SENIN

Tanggal : 17 NOV 2003

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)

Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si

NIP. 132 258 180

Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)

Kiswara Agung Santoso, S.Si

NIP. 132 207 813

Anggota I

Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si

NIP. 132 257 933

Anggota II

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si

NIP. 132 206 019

Mengesahkan

Dekan FMIPA Universitas Jember

Ir. Sumadi, MS

NIP 130 368 784

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaah puji syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat, barokah dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar kesarjanaan Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis telah banyak mendapatkan bantuan dan dorongan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kiswara Agung Santoso, S.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan dan arahan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Ibu Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si dan Bapak Kosala Dwidja P, S.Si, selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Kedua orangtuaku dan kakakku yang telah banyak memberikan dorongan semangat.
4. Teman-temanku Holifah, Husnul, Lusi, Fitriya, Drita, Joko, Hessy, Indari, Pras, Yeti, Anang terima kasih atas bantuannya.
5. Teman-temanku di KKT yakni Ninik, Rina, Muda, Ike, Maya, Anam, dan Setyo.
6. Semua pihak yang telah membantu kelancaran penulisan skripsi ini.

Penyusunan skripsi ini masih belum sempurna, untuk itu sangat diharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembacanya.

Jember, Oktober 2003

Penulis

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai berbagai macam fenomena yang bisa dipresentasikan dengan graf, misalnya jaringan telekomunikasi, desain lalu lintas dan sebagainya. Pada teori graf terdapat berbagai macam topik yang menarik untuk diteliti diantaranya pewarnaan graf, graf *perfect*, graf Berge, dan lain-lain.

Pada internet terdapat *homepage*, dimana dalam *homepage* tersebut terdapat *paper* yang berjudul "*PERFECT PROBLEMS*" (Lovász, Reed, and Chvátal, 2001). Di dalam *paper* tersebut menyatakan bahwa pada tahun 1960, Claude Berge membuat suatu *dugaan* (*conjecture*), dimana *conjecture* ini menjadi salah satu masalah yang sangat terkenal dalam teori graf. *Conjecture* tersebut menyatakan bahwa sebuah graf yang tidak memuat sikel ganjil terinduksi (*induced odd cycles*) dengan panjang lebih besar 3 dan komplemen dari sikel ganjil terinduksi tersebut adalah *perfect*. Kemudian *conjecture* ini dikenal dengan *the Strong Perfect Graph Conjecture* (Golumbic, 1980; Skiena, 1990). Graf yang tidak memuat sikel ganjil terinduksi dengan panjang lebih besar 3 dan komplemen dari sikel ganjil terinduksi disebut graf Berge. *Conjecture* tersebut dapat dinyatakan dengan lebih sederhana sebagai penegasan bahwa sebuah graf adalah *perfect* jika dan hanya jika graf tersebut adalah graf Berge.

Pada bulai Mei 2002, Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, dan Robin Thomas dapat membuktikan *conjecture* dari Claude Berge sehingga *Strong Perfect Graph Conjecture* menjadi *Strong Perfect Graph Theorem* (Cornuejols, 2002; Mackenzie, 2002).

1.2 Rumusan Masalah

Pada skripsi ini masalah yang dikaji adalah apakah graf bipartit lengkap, *line graph* dari graf bipartit lengkap, dan komplemen *line graph* dari graf bipartit lengkap adalah graf *perfect* dan graf Berge.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan pada skripsi ini dibatasi pada graf hingga dan graf sederhana.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah membuktikan bahwa graf bipartit lengkap, *line graph* dari graf bipartit lengkap, dan komplemen *line graph* dari graf bipartit lengkap adalah graf *perfect* dan graf Berge.

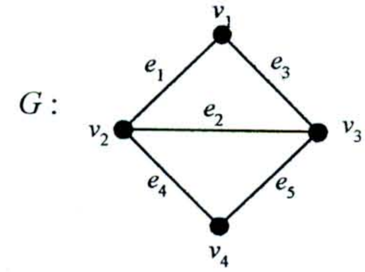
1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diambil dari pembahasan masalah ini adalah menambah wawasan bagi para ilmuwan di bidang graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

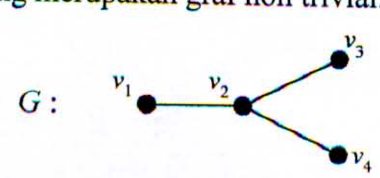
2.1 Definisi dan Notasi

Graf tak berarah G (*undirected graph*) didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G),E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga dan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut (u,v) dari titik u,v di V yang disebut *sisi* (*edge*). Jadi bisa dikatakan bahwa komponen utama terbentuknya suatu graf G adalah titik. Kemudian sisi dalam graf G akan ditulis dengan $e = uv$ dan graf tak berarah G akan disebut graf G saja. Sebagai contoh, graf G pada Gambar 2.1 adalah graf dengan $V(G) = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ yaitu pasangan tak terurut dari $\{v_1v_2,v_2v_3,v_1v_3,v_2v_4,v_4v_3\}$.



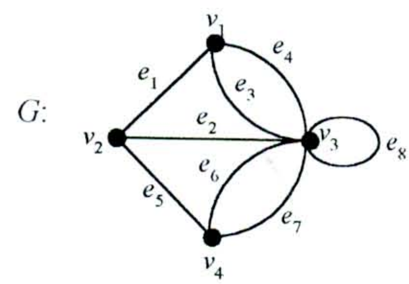
Gambar 2.1 Graf G dengan 4 titik dan 5 sisi

Banyaknya titik yang dimiliki suatu graf G dinamakan *order* dari graf G, yang disimbolkan dengan $n(V)$ atau $|V|$. *Graf hingga* merupakan graf yang mempunyai order hingga. *Graf trivial* adalah graf berorder 1 dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong, sedangkan *graf non trivial* adalah graf berorder lebih dari 1 (Chartrand and Ortrud, 1993). Sebagai contoh, Gambar 2.2 adalah graf order 4 yang merupakan graf non trivial.



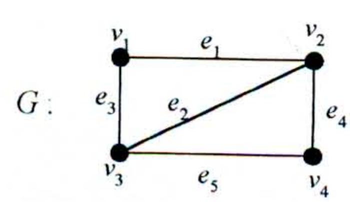
Gambar 2.2 Graf G order 4

Dalam suatu graf G, jika suatu sisi berawal dan berakhir pada titik yang sama, maka sisi tersebut dinamakan *gelung* (*loop*). Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edges* atau *paralel edges*). Graf yang tidak mengandung gelung dan sisi rangkap disebut *graf sederhana* (*simple graph*). Semua graf yang dibahas pada skripsi ini adalah graf sederhana dan graf hingga. Contoh graf yang mengandung gelung dan sisi rangkap diberikan pada Gambar 2.3, dimana e_8 adalah gelung sedangkan sisi e_3,e_4,e_6,e_7 adalah sisi-sisi rangkap.



Gambar 2.3 Graf G dengan *loop* dan sisi rangkap

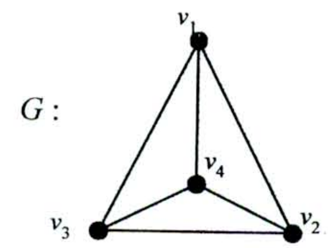
Jika titik v dan w pada graf G dihubungkan oleh sebuah sisi e, maka titik v dan w dikatakan saling *tetangga* (*adjacent*) dan sisi e dikatakan *menempel* (*incident*) pada titik v dan w. Sebagai contoh, pada Gambar 2.4 titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_3 tetapi tidak bertetangga dengan titik v_4, sedangkan sisi e_2 menempel pada titik v_2 dan v_3, sisi e_4 menempel pada titik v_2 dan v_4, tetapi sisi e_1 tidak menempel pada titik v_4.



Gambar 2.4 Graf untuk mengilustrasikan tetangga dan menempel

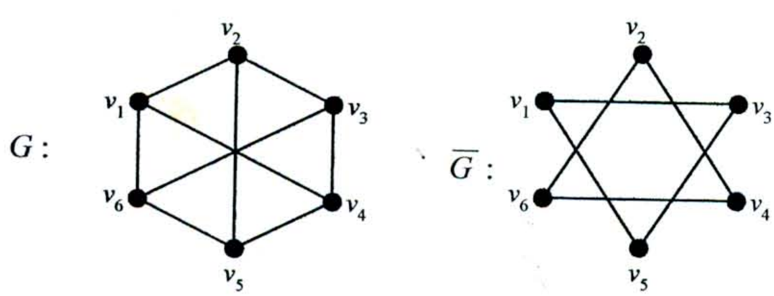
Derajat (*degree*) dari titik v di G adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan titik v, dan dinotasikan dengan $d(v)$. Jika titik v mempunyai derajat 0 yang berarti titik v tidak bertetangga dengan titik yang lainnya, maka titik v disebut *titik terisolasi* (*isolated vertex*). Misalkan pada Gambar 2.4, $d(v_1)= d(v_4)= 2$ dan $d(v_2)=$

$d(v_3)= 3$. Jika setiap titik dalam suatu graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan *graf reguler* (*regular graphs*). Sebuah graf G dikatakan r-reguler atau reguler pada derajat r, jika setiap titik pada G mempunyai derajat r. Sebagai contoh, pada Gambar 2.5, graf G adalah graf 3–reguler.



Gambar 2.5 Graf 3-reguler

Komplemen dari graf G (*complement*), dinotasikan dengan $\overline{G}$ adalah graf dengan himpunan titik sama dengan himpunan titik di G, $V(\overline{G}) = V(G)$ dimana titik u,v di $\overline{G}$ adalah tetangga jika dan hanya jika titik u,v di G tidak tetangga. Contoh graf dan komplemennya dapat dilihat pada Gambar 2.6.



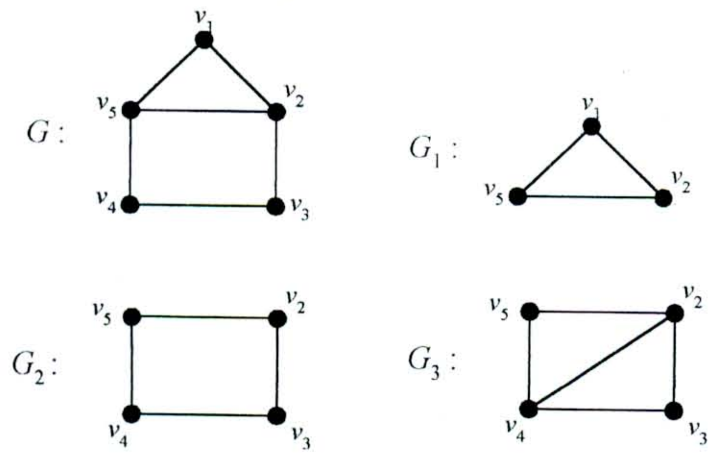
Gambar 2.6 Graf dan komplemennya

2.2 Subgraf

Graf H dikatakan *subgraf* dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Sebagai contoh, pada Gambar 2.7, G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G tetapi G_3 bukan subgraf dari G karena ada sisi v_2v_4 di $E(G_3)$ yang bukan elemen di $E(G)$.

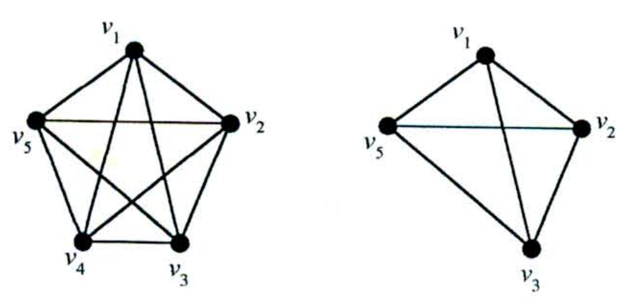
Graf H dikatakan *subgraf lengkap* dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ dimana setiap titik di H saling bertetangga. Misalkan pada Gambar 2.7, G_1

adalah subgraf lengkap dari G tetapi G_2 bukan subgraf lengkap dari G karena tidak ada sisi yang menghubungkan antara titik v_3,v_5 dan antara titik v_2,v_4.



Gambar 2.7 Graf dan subgraf

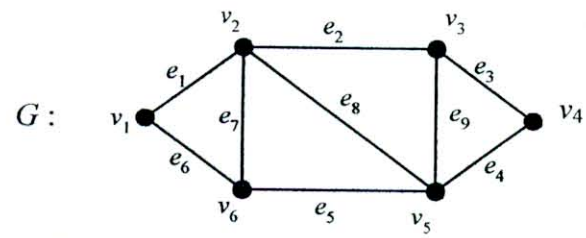
Subgraf terinduksi (*induced subgraph*) H dari graf G adalah subgraf dari G yang memuat himpunan titik V bersama dengan semua sisi-sisi uv dari graf G dimana $u,v \in V$. Contoh graf dan subgraf terinduksi dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf dan subgraf terinduksinya

2. 3 Graf Terhubung

Sebuah *jalan* (*walk*) W dari titik v_0 ke v_n pada graf G adalah suatu barisan hingga yang berganti-ganti dari titik dan sisi $v_0,e_0,v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,v_{n-1},e_{n-1},v_n$, sedemikian hingga $e_i = v_iv_{i+1}$ untuk setiap $i = 0,1,2,\ldots,n-1$. Jalan ini menghubungkan titik v_0 dan v_n, dan dapat juga dinotasikan sebagai v_0-v_1-…-v_n. *Panjang* suatu jalan adalah jumlah sisi pada jalan tersebut. Jalan dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$ dan terbuka jika $v_0 \neq v_n$. Jalan dikatakan *lintasan* (*path*) jika semua titiknya berbeda. *Sikel* (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Dengan kata lain, sikel adalah lintasan tertutup. Sikel dengan panjang n dapat juga ditulis sebagai n-sikel.

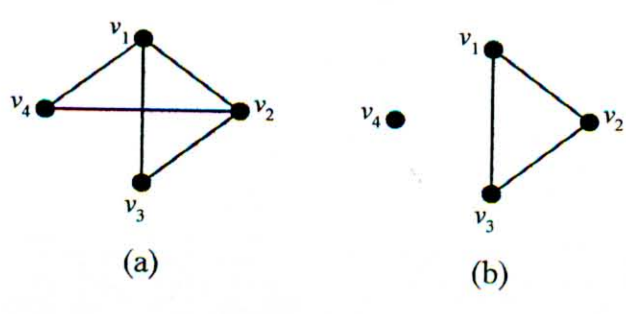


Gambar 2.9 Graf untuk mengilustrasikan jalan

Pada Gambar 2.9, barisan v_1-v_2-v_3-v_5-v_2-v_6-v_5-v_4 adalah jalan. Barisan v_1-v_2-v_3-v_5-v_6-v_1 adalah jalan tertutup dengan panjang 5 dan barisan v_1-v_2-v_6-v_5-v_4 adalah jalan terbuka dengan panjang 4. Selanjutnya, jalan v_6-v_5-v_3-v_2 adalah lintasan, sedangkan jalan v_2-v_3-v_5-v_6-v_2 adalah sikel.

Jika setiap pasang titik v_i dan v_j dalam himpunan V di graf G terdapat lintasan dari v_i ke v_j (berarti ada lintasan dari v_j ke v_i), maka graf G dinamakan *graf terhubung* (*connected graph*). Jika tidak, maka graf G disebut *graf tak terhubung* (*disconnected graph*) (Munir, 2001).

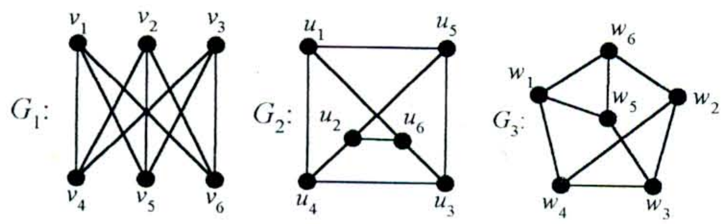
Komponen dari graf G (*component*) adalah subgraf terhubung maksimum dari G. Dengan demikian setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen, sedangkan graf tak terhubung mempunyai sedikitnya dua komponen. Graf pada Gambar 2.10 (a) adalah graf terhubung dan (b) adalah graf tak terhubung dengan dua komponen.



Gambar 2.10 Graf terhubung dan graf tak terhubung

2.4 Graf Isomorfik

Dua graf G dan H dikatakan *isomorfik* (ditulis $G \cong H$), jika ada korespondensi satu-satu dari himpunan titik G ke H yang mengawetkan ketetanggaan.

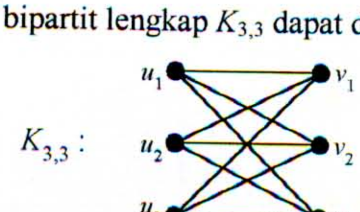


Gambar 2.11 G_1 isomorfik dengan G_2, tetapi G_1 dan G_2 tidak isomorfik dengan G_3

Pada Gambar 2.11, G_1 isomorfik dengan G_2, karena titik v_i di G_1 berkorespondensi satu-satu dengan titik u_i di G_2, untuk setiap $i = 1,2,\ldots,6$. G_1 dan G_2 tidak isomorfik dengan G_3, karena pada G_3 memuat sikel ganjil, sedangkan pada G_1 dan G_2, tidak memuat sikel ganjil.

2.5 Kelas-kelas Graf

Graf *n-partit* didefinisikan sebagai graf dimana himpunan titik $V(G)$ dapat dipartisi menjadi n himpunan titik, yaitu $V_1(G), V_2(G), \ldots, V_n(G)$, sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan titik dari $V_i(G)$ ke titik-titik pada himpunan titik selain $V_i(G)$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$. Untuk $n = 2$, dinamakan *graf bipartit*. Jika $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, maka graf bipartit tersebut dinotasikan dengan $B_{m,n}$ dan jika setiap pasang titik di V_1 dan V_2 saling terhubung maka graf tersebut dinamakan *graf bipartit lengkap* (*complete bipartite graph*) yang dinotasikan dengan $K_{m,n}$. Contoh graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ dapat dilihat pada Gambar 2.12.



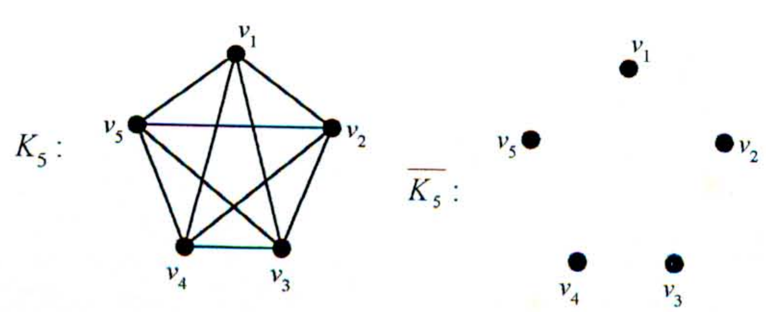
Gambar 2.12 Graf bipartit lengkap

Teorema 2.1:

Jika suatu graf non trivial G adalah bipartit maka G tidak mempunyai sikel ganjil.

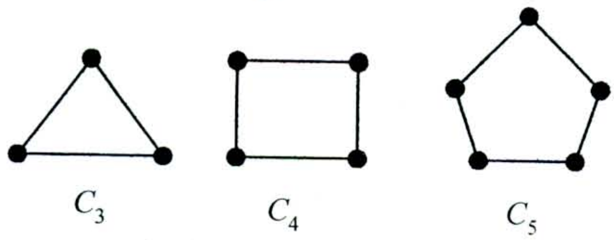
Bukti: Misal G adalah graf bipartit. Maka, $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan titik tak kosong V_1 dan V_2 sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan setiap titik di V_1 ke setiap titik di V_2. Misal G memuat n-sikel C: $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$. Akan ditunjukkan bahwa n adalah genap. Misal $v_1 \in V_1$, maka sisi v_1v_2 menghubungkan sebuah titik dari V_1 ke sebuah titik di V_2, sehingga $v_2 \in V_2$. Untuk alasan yang sama, kita dapatkan $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$, dan seterusnya. Karena sisi v_nv_1 adalah sebuah sisi dari G dan $v_1 \in V_1$, maka $v_n \in V_2$, sehingga n adalah genap. Jadi terbukti bahwa jika suatu graf non trivial G adalah bipartit maka G tidak mempunyai sikel ganjil (Chartrand and Ortrud, 1993). □

Graf lengkap (*complete graph*) dengan n titik, dinotasikan K_n, didefinisikan sebagai sebuah graf dimana setiap titiknya saling bertetangga. Jadi K_n mempunyai $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ sisi dan setiap titiknya berderajat $(n\text{-}1)$. Komplemen dari graf lengkap K_n, yaitu $\overline{K_n}$ adalah graf dengan n titik berderajat 0. Sebagai contoh, Gambar 2.13 menunjukkan graf lengkap K_5 dan komplemennya $\overline{K_5}$.



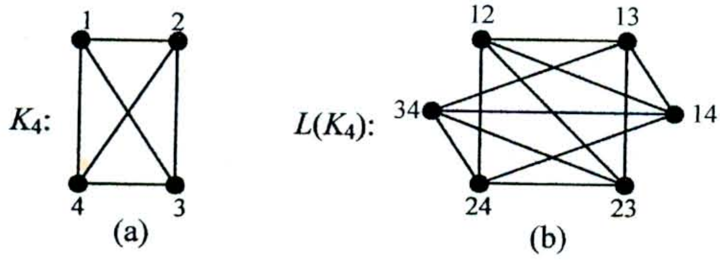
Gambar 2.13 Graf lengkap K_5 dan komplemennya

Graf sikel (*cycle graph*) C_n adalah graf terhubung 2-reguler yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi. Gambar 2.14 adalah contoh dari graf sikel.



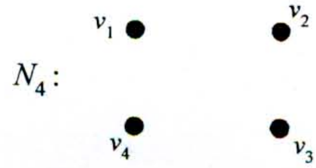
Gambar 2.14 Graf sikel

Line Graph (*interchange graph*) dari suatu graf $G = (V,E)$, dinotasikan dengan $L(G)$ adalah suatu graf yang himpunan titiknya sama dengan himpunan sisi dari G $(n' = e)$ dan himpunan sisi dari $L(G)$, $e' = 1/2 \sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2} - e$ (Skiena, 1990) dimana d_i adalah derajat titik ke-i dari G, sedangkan n', e' secara berturut-turut adalah order dan jumlah sisi dari $L(G)$. Ini berarti bahwa suatu titik uv di $L(G)$ bertetangga dengan suatu titik wx jika dan hanya jika $v = w$. Sebagai contoh, pada Gambar 2.15 (a) adalah graf K_4 dan (b) adalah *line graph*-nya.



Gambar 2.15 Graf K_4 dan *line graph*-nya

Graf kosong (*null graph or empty graph*) dengan n titik, dinotasikan N_n, didefinisikan sebagai sebuah graf dimana himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (Munir, 2001). Sebagai contoh, Gambar 2.16 menunjukkan graf kosong N_4.

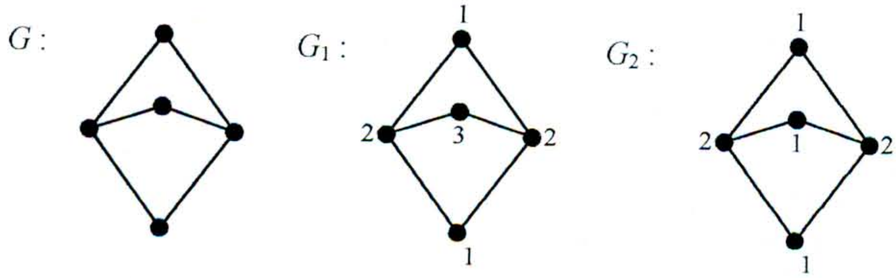


Gambar 2.16 Graf kosong N_4

2.6 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah suatu pemberian warna pada salah satu elemen-elemennya (titik dan sisi), sehingga elemen-elemen yang saling bertetangga mendapat warna yang berbeda. Dalam subbab ini yang dibahas hanya pewarnaan titik, karena merupakan fokus pembahasan skripsi ini.

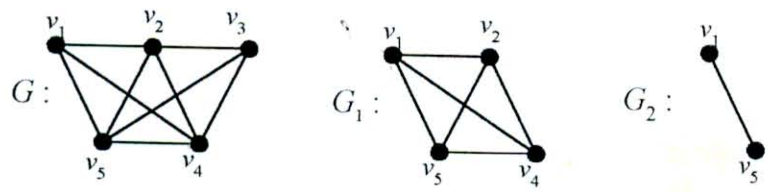
Pewarnaan titik pada graf G didefinisikan sebagai pemberian warna untuk setiap titik di G, sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang bertetangga mendapat warna yang berbeda. Bilangan kromatik $\chi(G)$ adalah jumlah warna terkecil yang dapat diberikan pada titik-titik di G sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang bertetangga mendapat dua warna yang berbeda. Jika $\chi(G) = k$, maka titik-titik pada graf G dapat diwarnai dengan k warna, tetapi tidak dapat diwarnai dengan k-1 warna. Maksimum warna yang dapat digunakan untuk mewarnai graf G adalah sejumlah titik pada graf G. Graf kosong mempunyai bilangan kromatik $\chi(N_n) = 1$. Pewarnaan titik suatu graf adalah tidak tunggal. Sebagai contoh, pada Gambar 2.17, graf G dapat diwarnai dengan beberapa cara, diantaranya seperti yang ditunjukkan pada graf G_1 dengan 3 warna dan graf G_2 dengan 2 warna dimana bilangan kromatik $\chi(G) = 2$.



Gambar 2.17 Pewarnaan titik pada graf

2.7 Graf Perfect

Clique dari graf G adalah subgraf lengkap dari graf G. Bilangan *clique*, dinotasikan $\omega(G)$ dari graf G didefinisikan sebagai order maksimum *clique* yang bisa dibentuk dari graf G. Graf kosong mempunyai bilangan *clique* $\omega(N_n) = 1$. Bilangan *clique* $\omega(G)$ lebih kecil atau sama dengan bilangan kromatik $\chi(G)$. Hal ini disebabkan karena jika K_n adalah subgraf lengkap maksimum dari graf G, maka $\chi(G) \geq \chi(K_n) = n$ dan bilangan *clique* dari G, yaitu $\omega(G) = \chi(K_n)$ (karena order maksimum yang dipunyai *clique* dari graf G sama dengan minimum warna dari subgraf lengkap maksimum K_n). Sebagai contoh, graf sikel ganjil C_{2k+1}, $k\geq2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(C_{2k+1}) = 3$, sedangkan *clique* dari sikel ganjil adalah graf lengkap dengan dua titik. Dengan demikian bilangan *clique* dari sikel ganjil adalah $\omega(C_{2k+1}) = 2$. Jadi $\chi(C_{2k+1})>\omega(C_{2k+1})$. Pada Gambar 2.18, G_1 dan G_2 adalah *clique* dari G dengan $\omega(G)=4$.



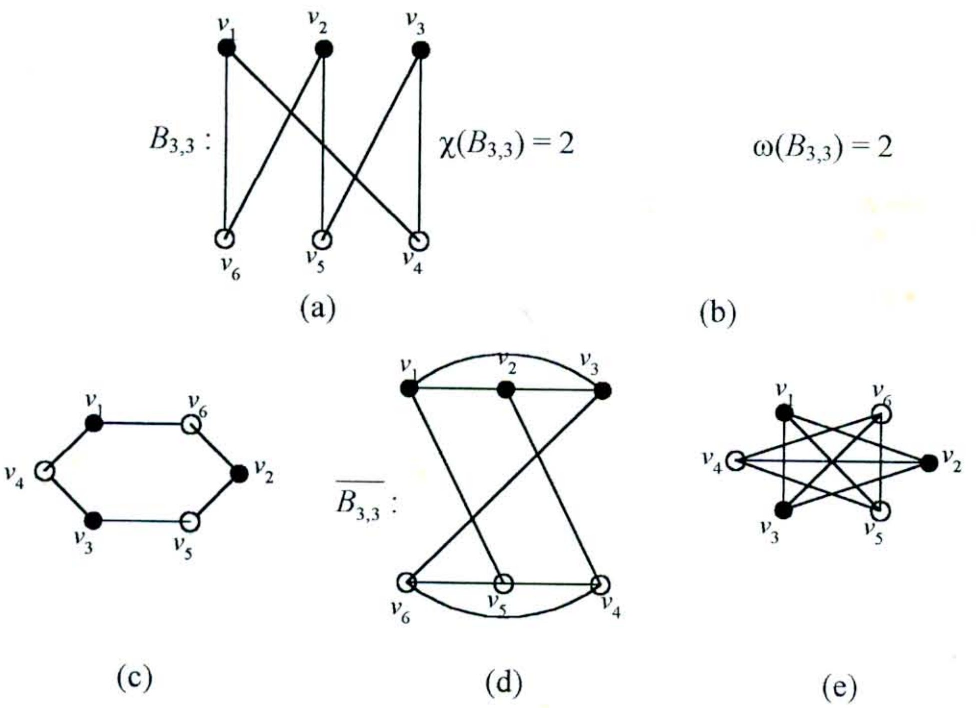
Gambar 2.18 Graf dan *clique*nya

Graf *perfect* adalah suatu graf yang mempunyai bilangan kromatik dan bilangan *clique* yang sama untuk setiap subgraf terinduksi H dari graf G, ($\chi(H) = \omega(H)$) (Chartrand and Lesniak, 1996). Karena graf kosong mempunyai bilangan kromatik sama dengan bilangan *clique*, $\chi(N_n) = \omega(N_n) = 1$, maka graf kosong merupakan graf *perfect*.

2.8 Graf Berge

Hole dalam sebuah graf G adalah subgraf terinduksi dari G yang isomorfik dengan sebuah sikel yang mempunyai panjang paling sedikit empat. *Antihole* adalah subgraf terinduksi dari $\overline{G}$ yang isomorfik dengan komplemen dari sebuah sikel (Lovász, Reed and Chvátal, 2001). Atau, dapat juga dikatakan bahwa *antihole* adalah komplemen dari *hole*. *Hole* dan *antihole* bernilai ganjil atau genap ditentukan oleh banyaknya titik yang dimiliki oleh *hole* atau *antihole* tersebut. *Hole* ganjil dan *antihole* ganjil bukan termasuk graf *perfect* (karena bilangan *clique* dari *hole* ganjil adalah 2 dan bilangan kromatiknya sama dengan 3, sedangkan bilangan *clique* dari *antihole* ganjil dengan $2k+1$ titik sama dengan k dan bilangan kromatiknya sama dengan $k+1$). Sebagai contoh Gambar 2.19 (a) adalah graf bipartit $B_{3,3}$ dengan $\chi(B_{3,3}) =2$, (b) adalah *clique* dari graf bipartit $B_{3,3}$

dengan $\omega(B_{3,3}) = 2$, (c) adalah subgraf terinduksi dari $B_{3,3}$ yang isomorfik dengan C_6 sehingga disebut *hole* dan karena berorder genap maka disebut *hole* genap, (d) adalah komplemen dari $B_{3,3}$, yaitu ($\overline{B_{3,3}}$), dan (e) adalah subgraf terinduksi dari $\overline{B_{3,3}}$ yang isomorfik dengan $\overline{C_6}$ sehingga disebut *antihole* dan karena berorder genap maka disebut *antihole* genap.



Gambar 2.19 (a) adalah graf bipartit $B_{3,3}$ (b) adalah *clique* dari graf bipartit $B_{3,3}$ (c) adalah *hole* genap, (d) adalah $\overline{B_{3,3}}$ dan (e) adalah *antihole* genap

Pada tahun 1960, Claude Berge membuat *conjecture* yang menyatakan bahwa sebuah graf adalah *perfect* jika dan hanya jika graf tersebut tidak memuat *hole* ganjil dan *antihole* ganjil. Kemudian *conjecture* tersebut menjadi *the Strong Perfect Graph Conjecture*. Sebuah graf disebut *graf Berge (Berge graph)* jika graf tersebut tidak memuat *hole* ganjil dan *antihole* ganjil. *The Strong Perfect Graph Conjecture* menegaskan bahwa sebuah graf adalah *perfect* jika dan hanya jika graf tersebut adalah sebuah graf Berge.

Hubungan antara graf Berge dengan graf *perfect* adalah bahwa *hole* genap dari graf Berge merupakan subgraf terinduksi H dari graf G dengan $\chi(H) = \omega(H)$, sedangkan *antihole* genap dari graf Berge merupakan subgraf terinduksi H' dari graf $\overline{G}$ dengan $\chi(H') = \omega(H')$. Jadi jika G adalah graf Berge maka ada subgraf terinduksi H di G yang memenuhi $\chi(H) = \omega(H)$. Pada bulan Mei 2002, Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, dan Robin Thomas sudah dapat membuktikan *conjecture* tersebut dan akibatnya *Strong Perfect Graph Conjecture* menjadi *Strong Perfect Graph Theorem*.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa graf bipartit lengkap, *line graph* dari graf bipartit lengkap, serta komplemen *line graph* dari graf bipartit lengkap adalah graf *perfect* dan graf Berge.

4.2 Saran

Penelitian mengenai graf Berge dan graf *perfect* ini masih bisa dikembangkan pada masalah lain, misalnya saja membuktikan bahwa *square-free Berge graph* adalah *perfect*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand G. and Lesniak L, 1996, *Graphs & Digraphs*, 3^{rd} edition, Chapman and Hall.

[2] Chartrand G. and Ortrud R. Oellermann, 1993, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill, Inc., USA.

[3] Cornuejols G, 2002, *The Strong Perfect Graph Conjecture*, International Congress of Mathematics, Beijing, China, vol 3.pp.547-559.

[4] Golumbic M.C, 1980, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York.

[5] Lovász L, Reed B, and Chvátal V, 2001, *Perfect Problems*, Princeton University On June 10-14, 1993.

[6] Mackenzie D, 2002, *Graph Theory Uncovers the Roots of Perfection*, Science 297, 38.

[7] Munir R, 2001, *Matematika Diskrit*, CV. Informatika, Bandung.

[8] Skiena S, 1990, *Implementing Discrete Mathematics:Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Reading, MA: Addison-Wesley.