SIMULASI PROFIL FUNGSI BESSEL

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

Wuri Kusuma Wardhany
NIM. 971810101041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
JUNI, 2003

Motto:

"......Jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar."

(Q.S. Al-Baqoroh:153)

" ......Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Alam-Nasyrah: 5)

" Orang yang tidak bahagia dengan yang sedikit selamanya tidak akan menemukan kebahagiaan."

(ABIKORS)

" Mental baja - pantang menyerah !!! ".

(UFO)

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

- Allah SWT,
- Papa dan mama tercinta yang telah mendo'akan dan mendorongku untuk tetap semangat,
- Suamiku tersayang yang telah mendampingiku dalam keadaan susah maupun senang,
- Tasyaku yang nakal dan lucu,
- Saudara-saudaraku Wulan dan Yiyik yang dengan tulus ikhlas mendukungku,
- Sahabat-sahabatku (Minthul,Annie,Widya,Yusna),
- Sulthon dan keluarga, yang telah banyak membantuku,dan
- Almamaterku yang selalu kuingat.

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Nopember 2002 sampai dengan bulan Juni 2003 di Jurusan Matematika FMIPA UNEJ. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Juni 2003 Wuri Kusuma Wardhany

ABSTRAK

Simulasi Profil Fungsi Bessel, Wuri Kusuma Wardhany, 971810101041, Skripsi, Juni 2003, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan alam, Universitas Jember.

Fungsi Bessel muncul sebagai penyelesaian dari persamaan diferensial Bessel yang terdiri dari fungsi Bessel jenis pertama dan fungsi Bessel jenis kedua. Dari kedua fungsi Bessel tersebut didapat profil fungsi Bessel dengan berbagai karakternya. Tulisan ini membahas masalah bagaimana simulasi profil dari kedua fungsi Bessel tersebut, dan profil dari fungsi Bessel yang banyak dipergunakan dalam ilmu fisika khususnya masalah yang berkaitan dengan vibrasi, rambatan gelombang dan getaran sumber bunyi.

Kata kunci: Persamaan Diferensial Bessel, Fungsi Bessel Jenis Pertama, Fungsi Bessel Jenis Kedua, dan Profil Fungsi Bessel.

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : JUM'AT

Tanggal : 27 JUN 2003

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama),	Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota),
Drs. Kusno, DEA, Ph.D. NIP. 131 592 357	Drs. Rusli Hidayat, MSc. NIP. 132 048 321
Anggota I	Anggota II
Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si. NIP. 132 257 933	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si. NIP. 132 206 019

Mengesahkan
Dekan FMIPA UNEJ

Ir. Sumadi, M.S.
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT karena telah diberi kekuatan untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Bapak Drs. Kusno, DEA, Ph.D. sebagai Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Drs. Rusli Hidayat, MSc. sebagai Dosen Pembimbing Anggota yang dengan penuh kesabaran telah membimbing serta selalu memberikan dorongan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

Banyak pihak yang telah memberi kontribusi dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu. Penulis ucapkan terima kasih kepada Bapak Kiswara Agung Santoso, S.Si. yang telah memberikan ijin penggunaan fasilitas Laboratorium Komputer serta peminjaman buku penunjang yang sangat membantu penulis untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada para teknisi yang telah membantu selama penyusunan laporan ini. Kepada rekan-rekan seangkatan saya ucapkan terima kasih atas segala bantuannya.

Akhirnya penulis berharap skripsi ini dapat memberi kontribusi terhadap kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang ilmu.

Jember, Juni 2003 Penulis,

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fungsi Bessel dibangun sebagai penyelesaian dari persamaan diferensial:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (1.1)$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial diatas adalah:

$$y = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x) \quad (1.2)$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang. Fungsi $J_v(x)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama orde v dan $Y_v(x)$ adalah fungsi Bessel jenis kedua orde v.

Profil dari fungsi Bessel sering muncul dalam persoalan-persoalan fisika. Seperti pada masalah osilasi atau vibrasi, gerak harmonik teredam (damped harmonic motion), dan getaran sumber bunyi. Dari permasalahan-permasalahan fisiska tersebut, akan didapat berbagai macam grafik atau profil. Misal grafik yang muncul berupa suatu gelombang berjalan seperti yang terdapat pada solusi fungsi Bessel jenis pertama untuk v bukan elemen bilangan bulat. Untuk itu penulis akan membuat simulasi profil untuk semua kemungkinan dari parameter v.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka rumusan masalah yang akan dikemukakan dalam tulisan ini yaitu: Bagaimana profil yang didapatkan dari kedua fungsi Bessel dengan mensimulasikan nilai dari v.

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah diatas maka tujuan dari tulisan ini yaitu mendapatkan simulasi profil dari kedua fungsi Bessel.

1.4 Manfaat

Adapun manfaat yang dapat diperoleh antara lain:

1. Menambah wawasan kita tentang persamaan Bessel, khususnya tentang profil dari fungsi Bessel tersebut.
2. Dengan memperoleh profil dari fungsi Bessel, maka dapat dipergunakan sebagai pedoman fungsi-fungsi khusus yang lain.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibicarakan solusi persamaan diferensial Bessel dari bentuk pertama dan kedua. Untuk itu diperkenalkan tentang konvergensi dari barisan dan deret bilangan real. Selanjutnya didefinisikan tentang deret kuasa dan formulasi untuk jari-jari kekonvergenan deret kuasa. Terakhir setelah dibicarakan tentang solusi persamaan diferensial order 2 berkoefisien analitik, kita bicarakan solusi persamaan diferensial Bessel bentuk pertama dan kedua tersebut. Penjelasan detailnya dapat diuraikan berikut ini.

2.1 Kekonvergenan Barisan dan Deret Bilangan Real

2.1.1 Barisan Bilangan Real Tak Terhingga

Susunan bilangan real a_1, a_2, $a_3, \ldots$ yang terurut sesuai dengan urutan bilangan asli didefinisikan sebagai barisan bilangan real. Tepatnya suatu barisan tak terhingga merupakan sebuah fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan asli N. Suatu barisan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dapat disajikan pula dengan bentuk $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau disingkat dengan $\{a_n\}$. Dengan a_n menyatakan rumus umum untuk suku ke-n (Purcell,1995:2). Sebagai contoh, lima suku pertama barisan yang rumus umumnya

(a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$

adalah:

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

(b) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots$

Kekonvergenan barisan bilangan real, didasarkan atas definisi berikut:

Definisi 1: Barisan $\{a_n\}$ dinamakan konvergen menuju L atau berlimit L dan ditulis sebagai $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ apabila untuk tiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan divergen.

Definisi tersebut menegaskan bahwa barisan divergen adalah barisan yang tidak mempunyai limit. Dalam kasus ini limit barisannya dapat $\pm\infty$ atau dapat juga tidak ada (Martono,1986:11). Selanjutnya teorema-teorema mengenai limit barisan dan kekonvergenan dapat diuraikan berikut ini (Purcell, 1995:4-7).

Teorema 1: Andaikan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan-barisan yang konvergen dan k sebuah konstanta, maka:

1. $\lim_{n\to\infty} k = k$;
2. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$;
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ asalkan $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Definisi 2: Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, maka $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

Teorema 2: (Teorema Apit). Andaikan $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ barisan yang konvergen menuju L dan andaikan $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \geq K$ (K bilangan asli yang tetap). Maka $\{b_n\}$ juga konvergen menuju L.

Teorema 3: Jika $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 4: (Teorema Barisan Monoton). Apabila U suatu batas atas untuk suatu barisan tak turun $\{a_n\}$, maka barisan ini konvergen menuju suatu limit A yang kurang dari atau sama dengan U. Begitu pula, apabila L suatu batas bawah untuk suatu barisan yang tak naik $\{b_n\}$, maka barisan $\{b_n\}$ itu konvergen menuju suatu limit B lebih dari atau sama dengan L.

2.1.2 Deret Bilangan Real Tak Terhingga

Pengertian deret merupakan jumlah suku-suku dari barisan. Untuk itu misal, diberikan barisan bilangan real $\{a_n\}$, maka dapat dibentuk suatu barisan deret berikut:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Oleh karena itu deret bilangan real secara lengkap dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3: Jika $\{a_n\}$ adalah suatu barisan bilangan real, maka

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ menyatakan jumlah parsial ke-n barisan $\{a_n\}$ dan $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dinamakan suatu deret tak terhingga bilangan real, atau disingkat deret (Martono:1986).

Definisi 4: Deret tak terhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen dan mempunyai jumlah S, apabila barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen menuju S. Apabila $\{S_n\}$ divergen, maka deret divergen. Suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah.

Definisi 5: Suatu deret yang berbentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$$

dengan $a \neq 0$ dan $|r| < 1$ dinamakan deret geometri (Purcell,1995:12).

Adapun kekonvergenan deret, dapat dibuktikan antara lain melalui teorema 5 berikut (Purcell,1995:39).

Teorema 5: (Uji Pembanding Mutlak). Andaikan $\sum u_n$ sebuah deret yang suku-sukunya tak nol. Andaikan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$$

(i) Jika $\rho < 1$, deret konvergen mutlak (jadi konvergen).

(ii) Jika $\rho > 1$, deret divergen.

(iii) Jika $\rho = 1$, pengujian ini tidak dapat memberikan kepastian.

2.2 Deret Kuasa

Seperti halnya pada barisan bilangan real dan deret bilangan real, barisan fungsi dan deret fungsi mempunyai sifat-sifat yang sama dengan barisan dan deret bilangan real. Barisan fungsi yang membentuk deret salah satunya adalah deret kuasa yang kita bicarakan pada sub bab ini.

Definisi 6: Deret kuasa (*power series*) dalam pangkat-pangkat (x-x_0) ialah sebuah deret tak hingga berbentuk

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1)$$

dengan a_0, a_1, a_2, ... adalah konstanta, yang disebut koefisien deret, sedangkan konstanta x_0 disebut pusat deret dan x adalah peubah (Kreyszig,1988:206).

Dalam hal ini semua peubah dan konstanta bernilai bilangan nyata.

Contoh-contoh deret kuasa:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad (|x| < 1), \text{ deret geometrik}$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$$

2.2.1 Kekonvergenan/Jari-jari Kekonvergenan Deret Kuasa

Deret pada persamaan (2.1) pasti konvergen pada $x = x_0$, sebab dengan demikian semua sukunya, kecuali suku pertama a_0, adalah 0. Dalam kasus khusus, ini mungkin satu-satunya x yang membuat deret (2.1) konvergen.

Jika ada nilai-nilai x lain yang membuat deret itu konvergen, nilai-nilai itu akan membuat sebuah selang, yang disebut **selang kekonvergenan** (*convergence interval*). Jika panjang selang ini terhingga maka ia mempunyai titik tengah x_0, sehingga selang itu mempunyai bentuk

$$|x - x_0| < \rho \qquad (2.2)$$

dan deret (2.1) konvergen untuk semua x dalam $|x - x_0| < \rho$ dan divergen untuk semua x dalam $|x - x_0| > \rho$. Bilangan ρ ini disebut **jari-jari kekonvergenan** (*radius of convergence*) deret (2.1). ρ dapat diperoleh dari salah satu rumus dari kedua rumus berikut:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a)}\quad \rho = 1\Big/\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|} \\ &\text{(b)}\quad \rho = 1\Big/\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

asalkan limit-limit itu ada dan tidak sama dengan nol. Jika limit itu tak hingga maka persamaan (2.1) konvergen hanya di pusat x_0.

Panjang selang kekonvergenan itu adakalanya tak hingga. Dalam hal demikian persamaan (2.1) konvergen untuk semua x. Misalnya, jika limit di dalam (2.3a) atau (2.3b) nol, maka $\rho = \infty$.

Untuk setiap x yang membuat persamaan (2.1) konvergen, terdapat sebuah nilai $s(x)$ tertentu. Kita katakan bahwa persamaan (2.1) merepresentasikan fungsi $s(x)$ di dalam selang kekonvergenan itu dan kita tuliskan

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \qquad (|x - x_0| < \rho)$$

Terdapat tiga kemungkinan kekonvergenan deret kuasa, yaitu konvergen di suatu titik, selang tertentu, atau seluruh $\Re$. Berikut diberikan contoh dari ketiga kasus tersebut.

Contoh 1. Kekonvergenan hanya di titik pusat

Untuk deret

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!\,x^m = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots$$

kita memperoleh $a_m = m!$ sehingga di dalam (2.3b)

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(m+1)!}{m!} = m+1 \to \infty \qquad \text{untuk m} \to \infty.$$

Jadi, deret ini konvergen hanya di titik pusat $x = 0$

Contoh 2. Konvergen untuk semua x dalam $|x - x_0| < \rho$ dan divergen untuk $|x - x_0| > \rho$

Untuk deret geometri kita memperoleh

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad (|x| < 1).$$

Di sini $a_m = 1$ untuk semua m, sehingga dari persamaan (2.3) kita memperoleh $\rho = 1$. Dengan kata lain deret geometri itu konvergen untuk $|x| < 1$ dan divergen untuk $|x| > 1$.

Contoh 3. Konvergen untuk semua x

Dalam kasus deret

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

kita peroleh $a_m = 1/\text{m}!$. Sehingga dalam (2.3b),

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{1/(m+1)!}{1/m!} = \frac{1}{m+1} \to 0 \ \text{ untuk m} \to \infty,$$

yang berarti deret itu konvergen untuk semua x (Kreyszig,1988:211-213).

2.2.2 Keanalitikan Fungsi

Suatu fungsi s dikatakan analitik pada titik x_0, jika fungsi ini dapat ditulis sebagai suatu deret kuasa

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \qquad (2.4)$$

Di dalam selang kekonvergenannya, deret kuasa (2.4) dapat diturunkan suku demi suku. Dengan menghitung $s(x), s'(x), s''(x), \ldots$ pada titik x_0 kita peroleh $s(x_0) = a_0$, $s'(x_0) = a_1$, $s''(x_0) = a_2 \ldots$ dan secara umum

$$s^{(m)}(x_0) = m!\, a_m \quad \text{untuk } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Jadi, $a_m = \dfrac{s^{(m)}(x_0)}{m!}$ dan deret kuasa (2.4) menjadi *uraian deret Taylor*

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \qquad (2.5)$$

dari fungsi s pada titik x_0. Jadi, suatu fungsi s analitik pada sebuah titik x_0, jika uraian fungsi itu menjadi deret Taylor (2.5) di sekitar titik x_0 ada dan mempunyai jari-jari kekonvergenan yang positif.

Berikut diberikan contoh-contoh fungsi analitik.

1. Fungsi polinom.

   Setiap polinom merupakan fungsi analitik di sekitar sebarang titik x_0. Karena turunan orde lebih besar dari n sama dengan nol, maka uraian deret Taylor polinom itu hanya mempunyai berhingga banyaknya suku-suku nol, dan dengan demikian konvergen pada setiap titik.
2. Fungsi trigonometri (*sin* x dan *cos* x).
3. Fungsi e^x (Finizio,1988:207-208).

2.3 Persamaan Linier Orde 2 dengan Koefisien Analitik

Suatu persamaan diferensial orde dua dikatakan linier jika ia dapat dituliskan dalam bentuk:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (2.6)$$

dengan fungsi-fungsi $p(x)$, $q(x)$, dan $r(x)$ analitik di sekitar $x = x_0$.

Oleh karena $p(x)$, $q(x)$, dan $r(x)$ analitik, maka dapat dideferensialkan sampai tak terhingga kali di suatu titik dan dapat dinyatakan sebagai deret pangkat di sekitar $x = x_0$, yaitu:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k \\ r(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} r_k (x - x_0)^k \end{aligned}\right\} \text{ konvergen di sekitar } x = x_0$$

dengan: $p_k = \dfrac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$, $q_k = \dfrac{q^{(k)}(x_0)}{k!}$, dan $r_k = \dfrac{r^{(k)}(x_0)}{k!}$

Ciri dari persamaan (2.6) ialah bahwa ia bersifat linier dalam fungsi y yang tidak diketahui dan turunan-turunannya. Misal suku pertama adalah $f(x)y''$, maka kita harus membagi dengan $f(x)$ untuk memperoleh bentuk baku persamaan (2.6) dengan y'' sebagai suku pertama. Dan jika persamaan diferensial tidak dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.6) , maka persamaan tersebut nonlinier.

Jika $r(x) \equiv 0$ (artinya $r(x) = 0$ untuk semua x), maka persamaan (2.6) berubah menjadi:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{.......................................} \quad (2.7)$$

dikatakan sebagai persamaan diferensial homogen. Jika $r(x) \neq 0$, maka persamaan (2.6) dikatakan tidak homogen dan fungsi p, q dan r dalam persamaan (2.6) dan (2.7) disebut koefisien.

Selanjutnya akan dicari titik-titik sebagai penyelesaian dari persamaan diferensial (2.7) di atas dalam pangkat $(x - x_0)$, dimana x_0 suatu bilangan riil. Akan kita lihat bahwa bentuk penyelesaian akan sangat bergantung pada macam titik x_0 terhadap persamaan diferensial tersebut. Sebuah titik x_0 dapat merupakan titik biasa atau titik singular menurut definisi berikut.

Definisi 7: Sebuah titik x_0 disebut titik biasa dari persamaan diferensial (2.7) jika kedua fungsi

$$p(x) \text{ dan } q(x) \quad \text{.......} \quad (2.8)$$

analitik pada titik x_0 . Jika paling sedikit satu fungsi dari (2.8) tidak analitik di titik x_0, maka x_0 disebut sebuah titik singular dari persamaan diferensial (2.7).

Dalam hubungan dengan teori mengenai penyelesaian deret adalah penting untuk mengelompokkan titik singular dari suatu persamaan diferensial ke dalam dua kategori menurut definisi berikut.

Definisi 8: Sebuah titik x_0 disebut titik singular yang regular dari persamaan diferensial (2.7) jika titik ini adalah sebuah titik singular dan kedua fungsi

$$(x - x_0)\, p(x) \text{ dan } (x - x_0)^2\, q(x) \quad \text{.......} \quad (2.9)$$

analitik di titik x_0 . Jika paling sedikit satu fungsi dalam (2.9) tidak analitik di titik x_0, maka x_0 disebut titik singular tak regular dari persamaan diferensial (2.7).

Teorema 6: Metode Frobenius

Sebarang persamaan diferensial yang berbentuk

$$y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0 \quad \text{.......} \quad (2.10)$$

dengan fungsi-fungsi $p(x)$ dan $q(x)$ analitik di $x = 0$, memiliki setidaknya satu solusi yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) \quad (a_0 \neq 0) \,.. \quad (2.11)$$

dengan r adalah sembarang bilangan (nyata ataupun kompleks) dan r dipilih sehingga $a_0 \neq 0$. Persamaan itu juga memiliki solusi yang bebas linier dari solusi pertama yang mungkin mirip dengan (2.11), dengan r dan koefisien yang berbeda atau mungkin mengandung sebuah logaritma.

Persamaan (2.11) diatas tak lain adalah deret kuasa kali x^r, dengan r tidak dibatasi pada bilangan bulat bukan negatif. Penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode deret kuasa akan membawa kita pada persamaan indikator yang nantinya dapat menunjukkan bentuk solusinya (Kreyszig, 1988:223-224).

2.3.1 Persamaan Indikator (Persamaan Indeks)

Untuk menyelesaikan persamaan (2.10), persamaan itu kita tuliskan dulu dalam bentuk yang lebih mudah

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{.......} \quad (2.12)$$

Langkah pertama yang harus dikerjakan adalah menguraikan $p(x)$ dan $q(x)$ dalam deret kuasa,

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots$$

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots$$

Kemudian kita diferensialkan persamaan (2.11) suku demi suku,

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} = x^{r-1}\left[ra_0 + (r+1)a_1 x + \ldots\right] \\ y''(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} \\ &= x^{r-2}\left[r(r-1)a_0 + (r+1)ra_1 x + \ldots\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{.....} \quad (2.13)$$

Kemudian kita substitusikan kedua deret tersebut ke persamaan (2.12), diperoleh

$$\begin{aligned} & x^r\left[r(r-1)a_0 + (r+1)ra_1 x + \ldots\right] + \\ & (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots)x^r\left[ra_0 + (r+1)a_1 x + \ldots\right] + \\ & (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots)x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = 0 \quad \text{............} \quad (2.14) \end{aligned}$$

Sekarang, seperti dijelaskan pada bahasan tentang gagasan metode deret kuasa, jumlah koefisien setiap pangkat x kita samakan dengan nol. Ini menghasilkan suatu sistem persamaan yang melibatkan koefisien a_m yang tidak diketahui. Suku x berpangkat terkecil adalah x^r, dan persamaan terkaitnya adalah

$$\left[r(r-1) + p_0 r + q_0\right]a_0 = 0.$$

Karena menurut asumsi $a_0 \neq 0$, maka yang didalam kurung siku haruslah nol. Sehingga akan didapat persamaan indikator bagi persamaan diferensial (2.10), yaitu

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \quad \text{.......} \quad (2.15)$$

Dari metode diatas akan dihasilkan suatu basis solusi. Salah satu dari solusi tersebut akan selalu berbentuk seperti pada persamaan (2.11) dengan r adalah akar persamaan (2.15). Sedangkan bentuk solusi yang satu lagi ditunjukkan oleh persamaan indikator itu, tergantung pada akar-akarnya. Terdapat tiga kemungkinan bentuk solusi yang kedua seperti yang dinyatakan oleh teorema 7.

2.3.2 Bentuk Solusi

Teorema 7: Metode Frobenius (Bentuk solusi kedua)

Jika persamaan diferensial (2.10) memenuhi asumsi bahwa fungsi-fungsinya analitik di $x = 0$, dan r_1 dan r_2 adalah akar-akar persamaan indikator persamaan (2.15), maka dijumpai tiga kemungkinan kasus bentuk solusi yang kedua.

Kasus 1: Akar-akar berbeda dan selisihnya bukan bilangan bulat

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \text{ dan} \quad (2.16)$$

$$y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots) \quad (2.17)$$

dengan koefisien-koefisien yang diperoleh berturut-turut dari persamaan (2.14) dengan masing-masing $r = r_1$ dan $r = r_2$.

Kasus 2: Akar kembar ($r_1 = r_2 = r$)

Salah satu basisnya adalah

$$y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \qquad r = \tfrac{1}{2}(1 - b_0) \quad (2.18)$$

berbentuk umum sama seperti sebelumnya, dan

$$y_2(x) = y_1 \ln(x) + x^r(A_1x + A_2x^2 + \ldots) \qquad (x > 0) \quad (2.19)$$

Kasus 3: Selisih kedua akarnya bilangan bulat.

Salah satu basisnya adalah

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \quad (2.20)$$

berbentuk umum sama seperti sebelumnya, dan

$$y_2(x) = ky_1 \ln(x) + x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots) \quad (2.21)$$

dengan pelambangan akar-akarnya dibuat sehingga $r_1 - r_2 > 0$ dan k mungkin saja sama dengan nol (Kreyszig, 1988:224-226).

2.4 Persamaan Bessel

2.4.1 Fungsi Bessel Jenis Pertama

Fungsi Bessel muncul sebagai penyelesaian dari persamaan diferensial

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad \text{.......} \quad (2.22)}$$

yang disebut sebagai *persamaan diferensial Bessel* dengan parameter v adalah sebuah bilangan yang diketahui.

Kita asumsikan bahwa parameter v dalam persamaan (2.22) adalah bilangan nyata tak negatif. Sehingga persamaan Bessel di atas mempunyai ciri seperti yang diterangkan pada teorema 6 (Metode Frobenius). Oleh karena itu, solusi dari persamaan tersebut dapat diuraikan dalam bentuk deret, yaitu

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \qquad (a_0 \neq 0) \text{.......} \qquad (2.24)$$

Selanjutnya deret di atas kita turunkan terhadap x dan disubstitusikan ke persamaan Bessel sehingga menghasilkan

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - v^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0.$$

Selanjutnya kita samakan jumlah semua koefisien suku x^{m+r} dengan nol. Maka

$$r(r-1)a_0 + ra_0 - v^2 a_0 = 0 \qquad (m=0) \text{.......} \qquad (2.25a)$$

$$(r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - v^2 a_1 = 0 \qquad (m=1) \text{.......} \qquad (2.25b)$$

$$(m+r)(m+r-1)a_m + (m+r)a_m + a_{m-2} - v^2 a_m = 0 \qquad (m = 2, 3, \ldots) \qquad (2.25c)$$

Dari persamaan (2.25a) kita memperoleh persamaan indikator

$$(r+v)(r-v) = 0. \text{.......} \qquad (2.26)$$

Akar-akarnya adalah $r_1 = v$ (≥ 0) dan $r_2 = -v$.

a. Solusi yang berkaitan dengan akar $r_1 = v$

Jika $r = r_1 = v$, persamaan (2.25b) menghasilkan $a_1 = 0$. Persamaan (2.25c) dapat dituliskan sebagai $(m + r + v)(m + r - v)a_m + a_{m-2} = 0$, dan jika $r = v$, didapat

$$(m + 2v)ma_m + a_{m-2} = 0. \text{.......} \qquad (2.27)$$

Karena $a_1 = 0$ dan $v \geq 0$, akibatnya $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, … dan seterusnya.

$$a_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(v+m)} a_{2m-2}, \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad (2.28)$$

sehingga koefisien-koefisien a_2, a_4, … dapat kita tentukan secara rekursif. Perhatikan bahwa a_0 tetap sembarang. Misal

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)} \qquad (2.29)$$

dengan $\Gamma(v + 1)$ adalah fungsi gamma. Dengan $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan oleh

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \qquad (\alpha > 0) \qquad (2.30)$$

Dengan mengintegralkan secara parsial, diperoleh

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt = -e^{-t} t^\alpha \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Bagian pertama di ruas kanan adalah nol. Sedangkan integral di ruas kanan adalah $\Gamma(\alpha)$. Ini menghasilkan hubungan pokok

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \qquad (2.31)$$

Karena $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$, kita simpulkan bahwa dari persamaan (2.31) $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$,… . Dan secara umum

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, \ldots). \qquad (2.32)$$

Sehingga dari persamaan (2.26), (2.29) dan (2.31) diperoleh

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)} = -\frac{1}{2^{2+v} 1! \Gamma(v+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(v+2)} = \frac{1}{2^{4+v} 2! \Gamma(v+3)}.$$

dan seterusnya. Secara umum

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)} \qquad (2.33)$$

Dengan mensubstitusikan koefisien-koefisien itu ke dalam (2.24) dan memperhatikan bahwa $a_1 = 0, a_3 = 0, \ldots$, diperoleh suatu solusi khusus bagi persamaan Bessel yang kita lambangkan dengan $J_v(x)$:

$$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m!\Gamma(v+m+1)} \quad \text{............} \quad (2.34)$$

Solusi bagi persamaan (2.22) ini dikenal sebagai **fungsi Bessel jenis pertama** berordo v. Solusi tersebut berbentuk hasil kali dari x^v dengan sebuah deret kuasa. Deret ini konvergen untuk semua x, yang diketahui dengan menggunakan uji banding. Nilai bulat dari v dilambangkan dengan n, sehingga untuk $n \geq 0$ persamaan (2.34) menjadi:

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \quad \text{............} \quad (2.35)$$

b. Solusi J_{-v} bagi persamaan Bessel

Dengan mengganti v dengan $-v$ dalam persamaan (2.34), kita peroleh

$$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-v} m!\Gamma(m-v+1)} \quad \text{............} \quad (2.36)$$

Karena persamaan Bessel mengandung v^2, fungsi J_v dan J_{-v} sama-sama merupakan solusi persamaan tersebut untuk v yang sama. Jika v bukan bilangan bulat, maka keduanya bebas linier. Sebab suku pertama dari persamaan (2.34) dan suku pertama dari persamaan (2.36) masing-masing merupakan kelipatan berhingga dari x^v dan x^{-v}.

Teorema 8: Solusi umum bagi persamaan Bessel

Jika v *bukan bilangan bulat*, solusi umum bagi persamaan Bessel untuk semua $x \neq 0$ adalah

$$y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x). \quad \text{............} \quad (2.37)$$

Akan tetapi, jika v bilangan bulat maka persamaan (2.37) bukanlah solusi umum. Ini merupakan akibat dari *ketidakbebasan linier fungsi-fungsi Bessel* J_n dan J_{-n}.

Teorema 9: Ketidakbebasan linier fungsi-fungsi Bessel J_n dan J_{-n}

Jika $v = n$ adalah *bilangan bulat* maka kedua fungsi Bessel $J_n(x)$ dan $J_{-n}(x)$ tidak bebas linier, sebab

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{............} \quad (2.38)$$

2.4.2 Fungsi Bessel Jenis Kedua

Jika $v = n$ adalah *bilangan bulat*, kedua fungsi Bessel $J_n(x)$ dan $J_{-n}(x)$ tidak bebas linier, sehingga keduanya tidak menyusun suatu basis solusi. Ini menimbulkan masalah bagaimana memperoleh solusi kedua yang bebas linier bila v bilangan bulat.

a. Fungsi Bessel Jenis Kedua $Y_0(x)$

Jika $v = 0$, maka persamaan Besselnya dapat dituliskan sebagai

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad \text{(2.39)}$$

dan persamaan indikatornya mempunyai akar kembar $r = 0$ yang bentuk solusi keduanya adalah

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m \quad \text{(2.40)}$$

Sekarang kita substitusikan y_2 dan kedua turunannya

$$y_2' = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-2}$$

ke dalam persamaan (2.39). Setelah suku logaritma hilang karena J_0 adalah solusi bagi persamaan (2.39), dan dua suku lain yang mengandung J_0 saling menghapus, kita memperoleh

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

Dari persamaan (2.35) diperoleh deret kuasa bagi J_0' dalam bentuk

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2mx^{2m-1}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!(m-1)!}.$$

Dengan mensubstitusikan deret ini, diperoleh

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m!(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0.$$

Akan ditunjukkan mula-mula bahwa A_m dengan m bilangan ganjil, semuanya akan bernilai nol. Koefisien bagi x^0 adalah A_1, maka $A_1 = 0$. Dengan menyamakan jumlah koefisien bagi x^{2s} dengan nol, kita memperoleh

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Karena $A_1 = 0$, maka akan diperoleh berturut-turut $A_3 = 0$, $A_5 = 0$, …

Sekarang koefisien x^{2s+1} kita samakan dengan nol, sehingga diperoleh

$$-1 + 4A_2 = 0 \qquad \text{atau} \qquad A_2 = \tfrac{1}{4} \qquad (s = 0)$$

dan untuk nilai-nilai $s = 1, 2, \ldots$

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!\,s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0.$$

Untuk $s = 1$ akan menghasilkan

$$\tfrac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \qquad \text{atau} \qquad A_4 = -\tfrac{3}{128}.$$

Dan secara umum

$$A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad (2.41)$$

Jika h_m dimisalkan $h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$ dan persamaan (2.41) dan $A_1 = A_3 = \ldots = 0$ disubstitusikan kedalam persamaan (2.40), maka diperoleh

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

$$= J_0(x)\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{128}x^4 + - \ldots \qquad (2.42)$$

Karena J_0 dan y_2 bebas linier, maka keduanya membentuk basis bagi persamaan (2.39). Tentu saja basis yang lain akan diperoleh bila y_2 diganti dengan suatu solusi khusus yang bebas yang berbentuk $a(y_2 + bJ_0)$, dengan $a \neq 0$ dan b

konstanta. Sudah menjadi kelaziman untuk mengambil $a = 2/\pi$ dan $b = \gamma - \ln 2$, dengan γ = 0.57721566490… adalah bilangan yang dinamakan **konstanta Euler,** yang didefinisikan limit dari

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s} - \ln s$$

untuk s mendekati tak hingga. Solusi khusus yang diperoleh dikenal sebagai **fungsi Bessel jenis kedua** *orde nol* atau **fungsi** *orde nol* dan dilambangkan dengan $Y_0(x)$. Jadi

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \right], \qquad (2.43)$$

untuk x positif yang kecil, fungsi $Y_0(x)$ berperilaku seperti ln x dan $Y_0(x) \to -\infty$ untuk $x \to 0$.

b. Fungsi Bessel Jenis Kedua $Y_n(x)$

Fungsi Bessel jenis kedua orde umum sebarang $v = n = 1,2,3,\ldots$ didefinisikan oleh

$$Y_v(x) = \frac{1}{\sin v\pi}\left[J_v(x)\cos v\pi - J_{-v}(x) \right] \qquad (2.44a)$$

dan

$$Y_v(x) = \lim_{v \to n} Y_v(x). \qquad (2.44b)$$

Fungsi ini dikenal sebagai **fungsi Bessel jenis kedua** *orde v* atau **fungsi Neumann** *orde v*. Untuk selanjutnya kita diskusikan kebebasan linier antara J_v dan Y_v.

Untuk orde v bukan bilangan bulat, fungsi $Y_v(x)$ jelas merupakan solusi bagi persamaan Bessel sebab $J_v(x)$ dan $J_{-v}(x)$ adalah solusi bagi persamaan tersebut. Karena untuk semua v tersebut, kedua solusi J_v dan J_{-v} bebas linier dan Y_v mengandung J_{-v}, maka fungsi-fungsi J_v dan J_{-v} bebas linier. Lebih lanjut dapat ditunjukkkan bahwa limit dalam persamaan (2.44b) ada dan Y_n merupakan solusi bagi persamaan Bessel yang ordenya bilangan bulat. Akan kita lihat bahwa deret kuasa bagi $Y_n(x)$ mengandung suku logaritma. Dengan demikian, $J_n(x)$ dan $Y_n(x)$

merupakan dua solusi yang bebas linier bagi persamaan Bessel. Deret kuasa bagi $Y_n(x)$ dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan deret (2.34)untuk $J_v(x)$ dan deret (2.36) untuk $J_{-v}(x)$ ke dalam persamaan (2.44a) dan membiarkan v mendekati n. Hasilnya adalah

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n} m!(m+n)!} x^{2m}$$

$$- \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m} \quad \text{...} \quad (2.45)$$

dengan $x > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dan

$$h_0 = 0, \qquad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s} \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

dan jika $n = 0$, jumlah terakhir dalam persamaan (2.45) harus diganti dengan 0. Jika $n = 0$, representasi persamaan (2.45)akan mengambil bentuk dari persamaan (2.43). lebih jauh dapat ditunjukkan bahwa

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n\, Y_n(x).$$

Teorema 10: Solusi umum persamaan Bessel

Solusi umum persamaan Bessel untuk semua nilai v adalah

$$y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x).$$

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasi pembahasan dapat kita simpulkan bahwa :

1. Profil yang didapat dengan mensimulasikan nilai v dari fungsi Bessel jenis pertama $J_v(x)$, berupa suatu gelombang berjalan di sekitar titik $y = vt$ pada waktu t.
2. Pada grafik fungsi Bessel jenis pertama $J_{-v}(x)$, untuk nilai $v < -1$, grafik fungsinya berada di bawah sumbu x.
3. Grafik fungsi $Y_0(x)$ berperilaku seperti fungsi ln (x) untuk x positif yang kecil $\{x | 0 < x \leq 2, x \in \Re\}$, dan $Y_0(x) \to -\infty$ untuk $x \to 0$.
4. Grafik fungsi Bessel jenis kedua $Y_n(x)$ dan $Y_{-n}(x)$ adalah identik atau sama. Seolah-olah Y_{-n} merupakan pencerminan dari fungsi Y_n. Dan grafik dari kedua fungsi tersebut gerakannya menyerupai gerak harmonik teredam.

4.2 Saran

Dari profil fungsi Bessel yang didapat dengan mensimulasikan nilai v dari fungsi Bessel jenis pertama dan fungsi Bessel jenis kedua, dapat dijadikan acuan untuk memperoleh profil dari fungsi-fungsi khusus yang lain. Seperti fungsi Legendre, Hermite, dan fungsi Bessel yang dimodifikasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kusno. 2000. *Geometri Ruang*. Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Jember. Jember

[2] Monagan. 1998. *Maple V Re. 5.0 Programming Guide*. Waterloo Maple Inc. Canada

[3] Purcell E.J.& Dale Varberg. 1995. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima*. Terjemahan oleh Bana Kartasasmita dan Rawuh. Erlangga. Jakarta

[4] Rawuh. 1993. *Geometri Transformasi*. Matematika FMIPA-ITB. Bandung

[5] Rawuh dan Bana Kartasasmita. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Ketiga*. Erlangga. Jakarta

[6] Sukirman. 1994. *Geometri Analitik Ruang*. Depdikbud Universitas Terbuka. Jakarta

[7] Thomas G.B., JR. 1960. *Calculus and Analytic Geometry*. Departement of Mathematics Massachussetts Institute of Technology. Massachussetts

[8] Wright Franklin D. 1990. *Essential Mathematics Second Edition*. D. C. Heath and Company. Toronto

Lampiran-lampiran

Lampiran 1

```
> #Fungsi Bessel Jenis Pertama Jv(x)
> with(plots):
> k:=l->0.05*(l^2)-0.05*l+0.1;
                                          2
                     k := l -> .05 l  - .05 l + .1
> for m from 1 to 5 do;
> A[m]:=BesselJ(k(m),x);
> od;
                        A[1] := BesselJ(.1, x)

                        A[2] := BesselJ(.20, x)

                        A[3] := BesselJ(.40, x)

                        A[4] := BesselJ(.70, x)

                        A[5] := BesselJ(1.10, x)

> plot({A[1],A[2],A[3],A[4],A[5]},x=0..10);
```

Lampiran 2

```
> #Fungsi Bessel Jenis Pertama J-v(x)
> with(plots):
> k:=l->(-1)*(0.05*(l^2)-0.05*l+0.1);
                                         2
                      k := l -> -.05 l  + .05 l - .1
> for m from 1 to 5 do;
> A[m]:=BesselJ(k(m),x);
> od;
                         A[1] := BesselJ(-.1, x)

                         A[2] := BesselJ(-.20, x)

                         A[3] := BesselJ(-.40, x)

                         A[4] := BesselJ(-.70, x)

                         A[5] := BesselJ(-1.10, x)

> plot({A[1],A[2],A[3],A[4],A[5]},x=0..10);
```

Lampiran 3

```
> #Fungsi Bessel Jenis Pertama J-v(x) untuk v = -1
> with(plots):
> v:=-1;
                          v := -1
> A:=BesselJ(v,x);
                   A := -BesselJ(1, x)
> plot(A,x=0..10);
```

Lampiran 4

```
> #Fungsi Bessel Jenis Kedua Y0(x)
> with(plots):v:=0;
                                   v := 0
> A:=BesselY(v,x);
                              A := BesselY(0, x)

> plot(A,x=0..10);
```

Lampiran 5

```
> #Fungsi Y(x)=ln(x)
> with(plots):
> A:=ln(x);
                         A := ln(x)

> plot(A,x=0..10);
```

Lampiran 6

```
> #Fungsi Bessel Jenis Kedua Yn(x)
> with(plots):v:=c->0.5*(c^2)-0.5*c+1;
                                        2
                    v := c -> .5 c  - .5 c + 1
> for i from 1 to 5 do;
> A[i]:=BesselY(v(i),x);
> od;
                     A[1] := BesselY(1., x)

                     A[2] := BesselY(2.0, x)

                     A[3] := BesselY(4.0, x)

                     A[4] := BesselY(7.0, x)

                     A[5] := BesselY(11.0, x)

> plot({A[1],A[2],A[3],A[4],A[5]},x=20..30);
```

Lampiran 7

```
> #Fungsi Bessel Jenis Kedua Y-n(x)

> with(plots):

> v:=c->-(0.5*(c^2)-0.5*c+1);

                                      2
                   v := c -> -.5 c  + .5 c - 1

> for i from 1 to 5 do;

> A[i]:=BesselY(v(i),x);

> od;
                        A[1] := BesselY(-1., x)

                        A[2] := BesselY(-2.0, x)

                        A[3] := BesselY(-4.0, x)

                        A[4] := BesselY(-7.0, x)

                        A[5] := BesselY(-11.0, x)

> plot({A[1],A[2],A[3],A[4],A[5]},x=20..30);
```

Lampiran 8

```
> #Fungsi Bessel Jenis Kedua Yn(x) untuk x=30..100
> with(plots):v:=c->0.5*(c^2)-0.5*c+1;
                                        2
                   v := c -> .5 c  - .5 c + 1
> for i from 1 to 5 do;
> A[i]:=BesselY(v(i),x);
> od;
                    A[1] := BesselY(1., x)

                    A[2] := BesselY(2.0, x)

                    A[3] := BesselY(4.0, x)

                    A[4] := BesselY(7.0, x)

                    A[5] := BesselY(11.0, x)

> plot({A[1],A[2],A[3],A[4],A[5]},x=30..100);
```

Lampiran 9

```
> #Fungsi Bessel Jenis Kedua Y-n(x) untuk x=30..100
> with(plots):
> v:=c->-(0.5*(c^2)-0.5*c+1);
                                    2
                  v := c -> -.5 c  + .5 c - 1
> for i from 1 to 5 do;
> A[i]:=BesselY(v(i),x);
> od;
                     A[1] := BesselY(-1., x)

                     A[2] := BesselY(-2.0, x)

                     A[3] := BesselY(-4.0, x)

                     A[4] := BesselY(-7.0, x)

                     A[5] := BesselY(-11.0, x)

> plot({A[1],A[2],A[3],A[4],A[5]},x=30..100);
```

Lampiran 10

```
> #Contoh Grafik Fungsi Gerak Harmonik Teredam
>with(plots):
> b:=0.1;
                              b := .1
> m:=2;
                              m := 2
> k:=0.5;
                              k := .5
> teta:=0.5*Pi;
                           teta := .5 Pi
> om:=sqrt((k/m)-((b/(2*m))^2));
                         om := .4993746089
> A:=2;
                              A := 2
> x:=A*exp((-b*t)/(2*m))*cos((om*t)+(teta));
         x := 2 exp(-.02500000000 t) cos(.4993746089 t + .5 Pi)
> plot(x,t=11..163);
```