ANALISIS *RAINBOW* DAN *STRONG RAINBOW VERTEX CONNECTION* PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI

TESIS

Oleh

Agustina Muharromah

NIM 151820101011

JURUSAN MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

ANALISIS *RAINBOW* DAN *STRONG RAINBOW VERTEX CONNECTION* PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Pasca Sarjana Matematika (S2) dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Agustina Muharromah
NIM 151820101011

JURUSAN MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2017

HALAMAN PERSEMBAHAN

Tesis ini saya persembahkan untuk:

1. Allah SWT yang memberikan karunia kehidupan yang indah;
2. Kedua orang tuaku Ayahanda Suhari dan Ibunda Sri Astuti yang senantiasa memberikan dukungan, doa, nasihat, dan kasih sayang dalam meraih cita-citaku;
3. Kakakku Wahyu Hartianto, S.T. dan keluarga kecilnya, adikku Sholihatin Hanifah, serta temanku Alifan Alfun Salim, S.Komp. yang memberikan dukungan dan keceriaan dalam hidupku;
4. Bapak Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing tesis yang telah memberikan ilmu dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini;
5. guru-guru sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi yang telah mendidik, memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
6. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMAN 3 Jombang, SMPN 2 Jombang, SDN Kedungpari II dan RA. Al-Ikhlas.

MOTTO

"Menuntut ilmu adalah taqwa. Menyampaikan ilmu adalah ibadah. Mengulang-ulang ilmu adalah zikir. Mencari ilmu adalah jihad."
(Imam Ghazali) *)

"Jika kamu telah selesai dengan suatu urusan, tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lainnya."
(QS.Al-Insyiroh) **)

"Pertempuran hidup tak selalu dimenangkan, oleh orang yang lebih kuat atau lebih cepat, karena cepat atau lambat, dia yang berjaya, adalah dia yang berpikir dia bisa."
(Napoleon Hill) ***)

*) kata-mutiara-4.blogspot.com/2013/09/kata-mutiara-hikmah-imam-ghazali.html

**) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung CV Penerbit J-ART.

***) Napoleon Hill from "The Law of Success", dikutip dalam buku Napoleon Hill "Selling You"

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Agustina Muharromah

NIM : 151820101011

Analisis *Rainbow* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2017
Yang menyatakan,

Agustina Muharromah
NIM. 151820101011

TESIS

ANALISIS RAINBOW DAN STRONG RAINBOW VERTEX CONNECTION PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI

Oleh

Agustina Muharromah
NIM 151820101011

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PERSETUJUAN

ANALISIS RAINBOW DAN STRONG RAINBOW VERTEX CONNECTION PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI

TESIS

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Pasca Sarjana Matematika (S2) dan mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa	: Agustina Muharromah
NIM	: 151820101011
Jurusan	: Magister Matematika
Angkatan Tahun	: 2015
Daerah Asal	: Jombang
Tempat, Tanggal Lahir	: Jombang, 2 Agustus 1991

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D NIP. 19680802 199303 1 004	Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D NIP. 19680802 199303 1 004

PENGESAHAN

Tesis berjudul Analisis *Rainbow* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.19680802 199303 1 004	NIP.19680802 199303 1 004
Penguji I,	Penguji II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Prof. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP.19770430 200501 1 001	NIP. 19610108 198602 1 001

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Drs. Sujito., Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Analisis *Rainbow* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi; Agustina Muharromah, 151820101011; 2017: 73 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Misalkan $c' : V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ menjadi *rainbow vertex k-coloring* Sebuah lintasan pada G dengan *rainbow vertex k-coloring* disebut *rainbow vertex path*, jika semua titik internal mempunyai warna berbeda. Graf G disebut *rainbow vertex connected* apabila dua titik yang berbeda yang dihubungkan oleh *rainbow vertex path. Rainbow vertex connection number* pada graf terhubung dinotasikan $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi *rainbow vertex connected.*

Rainbow vertex connection graf G disebut *strongly rainbow vertex-connected* jika untuk setiap pasangan u, v yang memiliki titik internal dengan warna berbeda, terdapat sebuah *rainbow* $u - v$ *geodesic. Rainbow u-v geodesic* di G adalah suatu *rainbow vertex path* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v. Nilai minimum k untuk *rainbow vertex path*, maka terdapat $k - coloring$ dari G menghasilkan graf *strongly rainbow vertex-connected* yang disebut *strong vertex-connection number* graf G dinotasikan dengan $srvc(G)$.

Berdasarkan penelitian pada graf hasil operasi comb sisi meliputi graf triangular book (Bt_n), graf lintasan (P_n), graf bintang (S_n), graf kipas $(F_{m,n})$, dan graf roda (W_n) telah didapatkan 10 teorema baru terkait $rvc(G \trianglerighteq Bt_m)$ dan $srvc(G \trianglerighteq Bt_m)$ dan juga beberapa analisis yang menghasilkan 2 conjecture baru, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. **Teorema 4.2.1** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$, $m \geq 2$, *dan sisi* x_1x_2 *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki* $rvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = n - 2$;

2. **Teorema 4.2.2** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$, $m \geq 2$, *dan sisi* x_iu_j

sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m *memiliki* $rvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = n-1$;

3. **Teorema 4.2.3** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 4$, $m \geq 2$, *dan sisi* x_1x_2 *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki* $rvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = 1$;

4. **Teorema 4.2.4** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 4$, $m \geq 2$, *dan sisi* x_iu_j *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki* $rvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = 3$;

5. **Teorema 4.2.5** *Untuk setiap bilangan bulat* $m \geq 3$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, *dan sisi* x_1x_2 *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki* $rvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = srvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = 3$;

6. **Teorema 4.2.6** *Untuk setiap bilangan bulat* $m \geq 3$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, *dan sisi* x_iu_j *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki* $rvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = 4$;

7. **Teorema 4.2.7** *Untuk setiap bilangan bulat* $m \geq 3$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, *dan sisi* x_iu_j *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki* $srvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = m+1$;

8. **Teorema 4.2.8** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 4$, $m \geq 2$, *dan sisi* x_1x_2 *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki*

$$rvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) \begin{cases} 2, & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 5 \\ 3, & \text{untuk}\, n \geq 6\,; \end{cases}$$

9. **Teorema 4.2.9** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 4$, $m \geq 2$, *dan sisi* x_iu_j *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki*

$$rvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) = \begin{cases} 2, & \text{untuk}\, n = 4 \\ 3, & \text{untuk}\, 5 \leq n \leq 6 \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil, & \text{untuk}\, n \geq 7\,; \end{cases}$$

10. **Teorema 4.2.10** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 4$, $m \geq 2$, *dan sisi* $x_i u_j$ *sebagai sisi cangkok pada graf* Bt_m *memiliki*

$$srvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ 5, & \text{untuk}\, n = 7 \\ n-3, & \text{untuk}\, n \geq 8\,; \end{cases}$$

11. **Dugaan 4.3.1** *Misalkan* G *adalah graf terhubung nontrivial dan* Bt_m *adalah graf triangular book, maka nilai* $rvc(G \trianglerighteq Bt_m) \geq diam(G) - 1.$;

12. **Dugaan 4.3.2** *Misalkan* G *adalah graf terhubung nontrivial dan* Bt_m *adalah graf triangular book, maka nilai* $diam(G) - 1 \leq rvc(G \trianglerighteq Bt_m) \leq srvc(G \trianglerighteq Bt_m)$.;

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul Analisis *Rainbow* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi. Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata dua (S2) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;

2. Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji I dan Prof. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dosen Penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, perhatian dan masukan demi terselesainya skripsi ini;

3. Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing serta memberi dukungan secara moral selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;

4. dosen, teknisi laboratorium dan Administrasi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, terima kasih atas segala bimbingannya selama ini Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;

5. teman-teman angkatan 2015 Magister Matematika FMIPA, teman-teman Kesayangan (Yudis, Misi, Titis, Ifa), teman-teman dan yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;

6. teman-teman pejuang graf (Novian, Nika, Bu Novi, Dwi, Mbak Bie) yang selalu berbagi suka dan duka untuk menemukan rumus dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;

7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, April 2017 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teknologi merupakan instrumen utama dari masyarakat dalam mencapai kesejahteraan, salah satunya teknologi yang perkembangannya sangat pesat adalah teknologi informasi. Perkembangan teknologi informasi memberikan peran yang sangat penting dalam pertukaran informasi yang cepat dan aman. Oleh sebab itu, suatu informasi membutuhkan perlindungan. Untuk melindungi informasi dari serangan penganggu diperlukan suatu *password* dan *firewall* angka (karakter) yang cukup besar. Sehingga terdapat permasalahan, berapakah minimal angka *password* dan *firewall* yang dibutuhkan setiap dua orang agen saat melakukan pertukaran informasi.

Permasalahan tersebut dapat diselesaikan secara matematis dengan menggunakan konsep teori graf yang merupakan bagian dari matematika diskrit. Konsep teori graf yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut adalah *rainbow connection*. Konsep ini pertama kali ditemukan oleh Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang pada tahun 2008. Chartrand dkk., mendefinisikan bahwa *Rainbow connection* merupakan pemberian warna pada graf dimana sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama, sebuah graf disebut *rainbow connection* jika setiap dua sisi pada graf memuat *rainbow path* yaitu lintasan yang sisinya memiliki warna berbeda.

Pada tahun 2009, Krivelevich dan Yuster mengembangkan konsep *rainbow connection* menjadi dua jenis yaitu *rainbow edge-connected* dan *rainbow vertex-connected*. Pengertian dari *Rainbow edge-connected* sama dengan pendefinisian *rainbow connection* oleh Chartrand dkk. *Rainbow Vertex Connected* sendiri adalah pemberian warna pada titik, dimana dua titik yang bertetangga boleh berwarna sama. Graf G disebut *Rainbow Vertex Connection*, jika setiap dua titik u dan v pada $V(G)$, terdapat lintasan $u - v$ dengan titik internal yang memiliki warna berbeda. Pemberian warna minimal dalam suatu graf G disebut *rainbow vertex* *connection number* yang dilambangkan dengan $rvc(G)$.

Rainbow vertex connection merupakan pengembangan dari konsep *rainbow connection*, penelitian mengenai *rainbow connection* sebelumnya pernah dilakukan oleh Xueliang Li (2010) yang meneliti tentang *rainbow connection number* pada *line graph* jika n_2 merupakan *inner vertice* maka $rc(L(G)) \leq n_2$. Pada tahun 2012 Xueliang Li, Yaping Mao dan Yongtang Shi melakukan penelitian *strong rainbow vertex connection number* pada graf berdiameter 2, namun penelitiannya hanya terbatas pada graf khusus meliputi graf lengkap (K_n), graf roda (W_n), dan graf lintasan (P_n). Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Simamora (2015) yang menjelaskan tentang *rainbow vertex connection number* pada graf Pensil (Pc_n) untuk $n \geq 2$ adalah $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, penelitian Simamora hanya sebatas pada *rainbow vertex connection* belum sampai pada *strong rainbow vertex connection number*. Pada tahun 2016, Ariska mengembangkan *rainbow vertex connection* pada operasi graf amalgamasi dari graf kipas untuk $m \geq 3$ adalah 1.

Berdasarkan penelitian-penelitian yang telah dilakukan sebelumnya secara garis besar penelitian berupa pencarian *rainbow connection*, *strong rainbow connection*, *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* pada graf khusus dan graf operasi. Belum ada penelitian berupa pencarian *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* pada graf hasil operasi comb sisi, sehingga pada penelitian ini akan mengambangkan teori *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* pada graf hasil operasi comb sisi. Graf hasil operasi comb sisi yaitu salah satu operasi graf yang menerapkan definisi perpangkatan. Graf hasil operasi comb sisi dapat diartikan dengan menempelkan sisi pada suatu graf dengan salah satu sisi pada graf lain yang dilambangkan dengan $G \trianglerighteq H$ dimana G dan H merupakan sebarang graf. Sehingga dalam penelitian ini penulis memilih judul "analisa *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* graf hasil operasi comb sisi".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini adalah:

a. berapa nilai *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada graf hasil operasi comb sisi?
b. bagaimana fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada graf hasil operasi comb sisi?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam tugas akhir ini masalahnya dibatasi pada:

a. graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf triangular book (Bt_n), graf lintasan (P_n), graf bintang (S_n), graf kipas ($F_{m,n}$), dan graf roda (W_n);
b. graf hasil operasi comb sisi yang digunakan adalah graf khusus comb sisi dengan graf triangular book (Bt_n), graf khusus tersebut diantaranya adalah graf lintasan (P_n), graf bintang (S_n), graf kipas ($F_{m,n}$), dan graf roda (W_n).

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan nilai *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada graf hasil operasi comb sisi;
b. menentukan fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada graf hasil operasi comb sisi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, terutama yang mempelajari *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection*;
b. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih luas tentang pencarian *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada graf-graf yang lainnya.

1.6 Kebaruan Penelitian

Hal-hal baru yang belum ada pada penelitian sebelumnya adalah sebagai berikut:

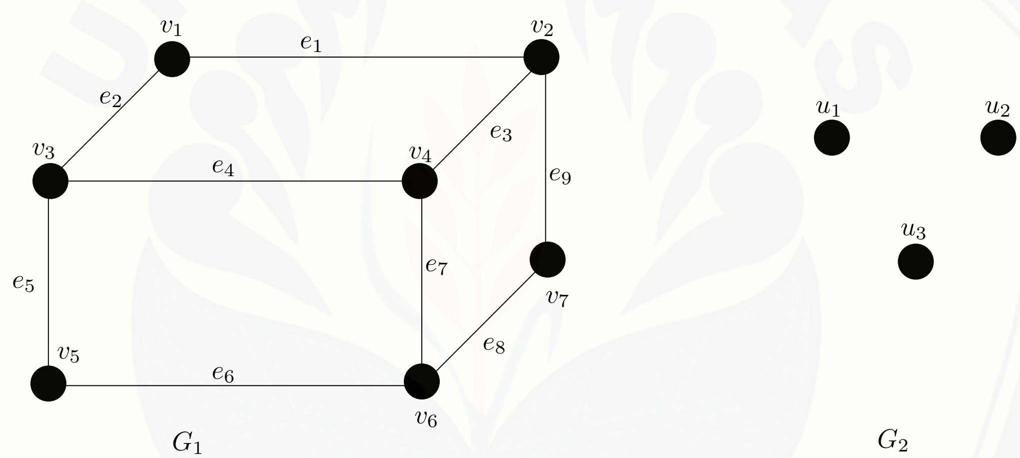
a. jenis operasi graf yang digunakan yaitu operasi comb sisi dengan order n dan m berhingga;

b. penentuan nilai *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* pada suatu operasi comb sisi yang lebih umum, sebagai contoh adalah menentukan nilai $rvc(G \trianglerighteq H)$ dengan graf H lebih spesifik dan graf G yang general;

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan (V, E) dimana V adalah sebuah himpunan tidak kosong yang berhingga yang anggota-anggotanya dinamakan titik (*vertex*). E adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua atau lebih titik. Graf dilambangkan dengan $G = (V, E)$ Dimana V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Bila (V, E) adalah himpunan berhingga maka graf yang demikian disebut dengan graf berhingga (*finite graph*) (Slamin, 2009).



Gambar 2.1 Graf G_1 dan G_2

Suatu graf dengan p buah titik dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$. Secara umum graf dapat digambarkan dengan suatu diagram dimana titik yang ditunjukkan sebagai titik yang dinotasikan dengan v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$ dan sisi yang digambarkan dengan sebuah garis lurus atau dengan garis lengkung yang menghubungkan dua titik v_i,v_j dan dinotasikan e_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, q$ disebut dengan titik-titik dari e_k.

Gambar 2.1. G adalah graf dengan $V(G_1) = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $E(G_1) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$ dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_2v_4$, $e_4 = v_3v_4$, $e_5 = v_3v_5$, $e_6 = v_5v_6$, $e_7 = v_4v_6$, $e_8 = v_6v_7$,dan $e_9 = v_2v_7$. Titik v_1 dan v_2 berhubungan langsung, sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_2. G_2 adalah graf kosong karena $E(G_2) = \emptyset$. Dua titik dikatakan berhubungan (*adjacent*) jika ada sisi yang menghubungkan keduanya dan sebuah sisi dikatakan menempel untuk titik yang menghubungkan sisi tersebut. Sejumlah sisi dikatakan menempel pada sebuah titik disebut derajat titik (*degree*). Sebagai contoh, graf G_1 pada gambar 2.1, v_1 berhubungan dengan v_2 oleh e_1 dan berhubungan dengan v_3 oleh e_2 sehingga titik v_1 memiliki derajat 2.

Sebuah jalan (*walk*) didefinisikan sebagai barisan alternatif berhingga dari titik-titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga setiap sisi yang bersisian (*edge incident*) dengan titik yang terdahulu dan dengan titik yang berikutnya. Titik akhir disebut dengan titik terminal. Dapat juga sebuah jalan (*walk*) dimulai dan diakhiri oleh titik yang sama, jalan (*walk*)yang demikian disebut dengan *close walk*. Sebaliknya sebuah jalan (*walk*) yang tidak *close* disebut *open walk*. Dalam jalan terdapat jejak (*trail*).Dikatakan jejak jika semua sisinya dalam jalan berbeda atau tanpa ada sisi yang berulang (Hartsfield and Ringel, 1994).

Jarak (distance) dinotasikan $d(v_i, v_j)$ yang artinya jarak antara dua titik v_i dan v_j . Jarak pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke v_j. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 memiliki $d(v_i, v_j) = 3$. Diameter pada suatu graf G adalah jarak maksimum diantara 2 titik pada G, yang dinotasikan dengan $diam(G) = max\{e(v) : v \in V\}$. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 memiliki diameter 3. Sedangkan derajat adalah banyaknya sisi yang bersisian pada titik, dinotasikan dengan $d(v)$, pada Gambar 2.1 jumlah derajatnya adalah 3. Suatu graf G dapat dikatakan terhubung dan tidak terhubung. Dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika setiap pasangan titik di dalam G terdapat paling tidak satu *path*, sebaliknya jika terdapat pasangan titik yang tidak mempunyai *path* penghubung maka graf itu disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Dalam suatu graf tak terhubung memungkinkan terdapat dua atau lebih graf terhubung. Setiap graf terhubung dari graf tak terhubung disebut komponen (Dafik,2007).

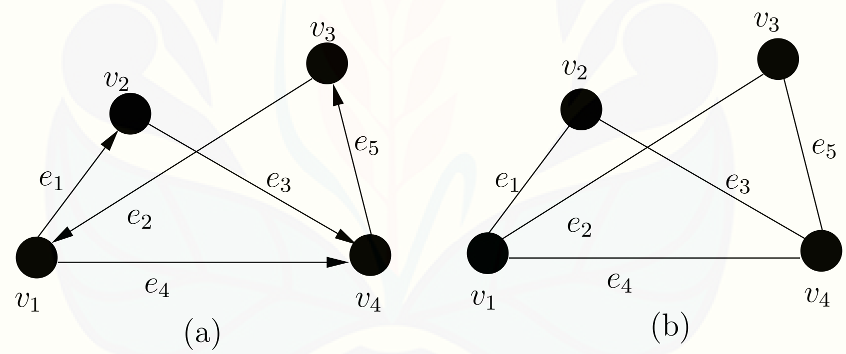
Berdasarkan arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis:

a. Graf tak-berarah *undirected graph* adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.

b. Graf berarah *direct graph* adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah, dua buah graf pada gambar 2.2(a) adalah graf berarah dan 2.2(b) adalah graf tidak berarah.

Definisi 2.1.1. *Graf berarah* directed graph/ digraph *merupakan pasangan himpunan* $(V(G), E(G))$ *dimana* $V(G)$ *adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen berbeda yang disebut titik, dan* $E(G)$ *adalah himpunan pasangan terurut* (u, v) *dari titik yang berbeda* $u, v \in V(G)$ *yang disebut sisi berarah*

(Slamin, 2009).

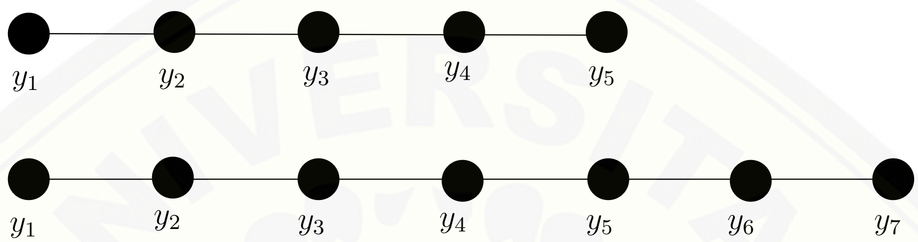


Gambar 2.2 Contoh graf berarah dan graf tidak berarah

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya, yang dimaksud dengan isomorfis adalah jika dua graf memiliki bentuk yang berbeda namun memiliki kardinalitas yang sama. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan *well-known special graph* sedangkan graf khusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan *well-defined special graph*. Berikut ini beberapa contoh graf khusus.

1. Graf Lintasan (*Path*) Graf lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$. Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf Lintasan P_5 dan P_7

2. Graf Bintang (*Star Graph*)

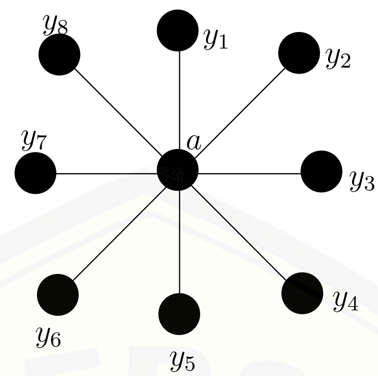
   Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $n-1$ sisi dengan $n \geqslant 3$. Sebagai ilustrasi perhatikan graf S_9 pada gambar 2.4.

3. Graf Roda(*Wheel*)

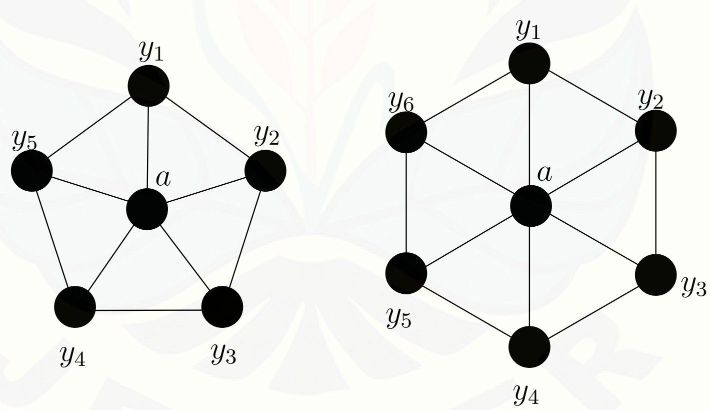
   Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran C_n, dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf lingkaran. Berikut ini contoh dari graf roda pada Gambar 2.5.

4. Graf Buku Segitiga(*Triangular Book*)

   Graf Buku Segitiga dinotasikan dengan Bt_n adalah suatu graf yag memiliki $V(Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$, $E(Bt_n) = \{x_i x_{i+1}\}$

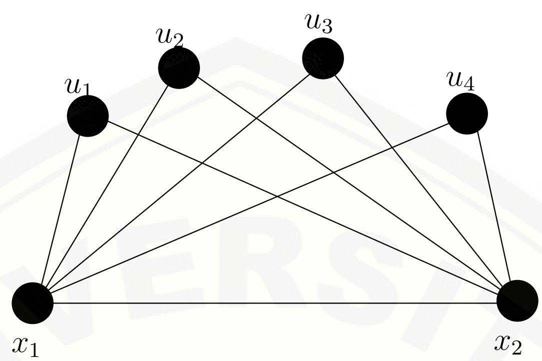


Gambar 2.4 Graf Bintang S_9



Gambar 2.5 Graf Roda W_5 dan W_6

$\cup\{x_iy_j; 1 \le i \le 2, 1 \le j \le n\}$, $|V(Bt_n)| = n + 2$, dan $|E(Bt_n)| = 2n + 1$. Graf Buku Segitiga terdiri dari n buah segitiga ($n \ge 1$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama (Munir, 2009). Contoh grag buku segitiga dpat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Buku Segitiga Bt_4

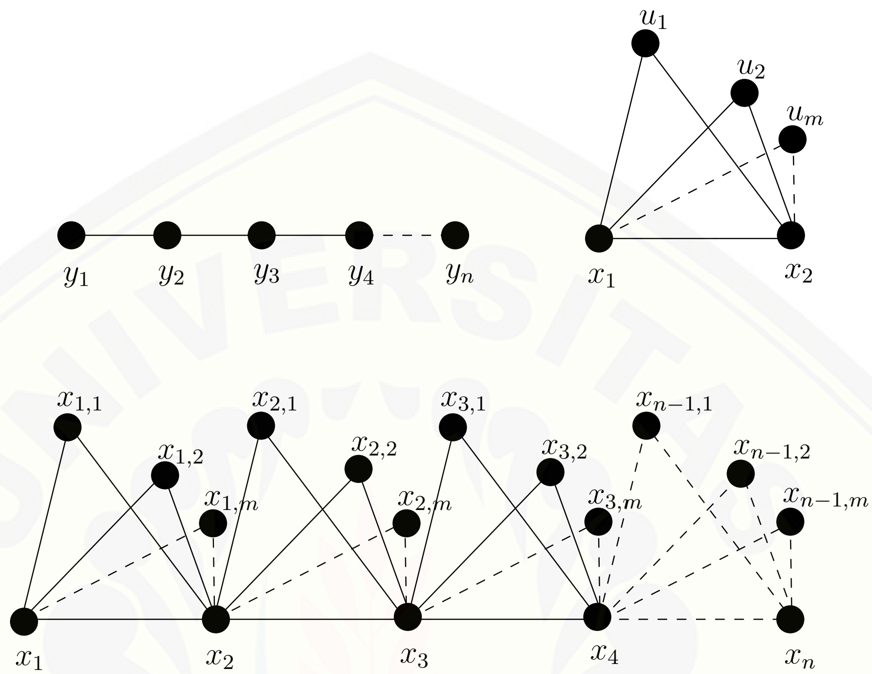
2.3 Operasi Graf

Operasi graf adalah suatu cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu operasi tertentu terhadap dua atau lebih graf. Graf hasil operasi comb sisi merupakan salah satu hasil operasi graf yang menerapkan definisi perpangkatan. Graf hasil operasi comb sisi dapat diartikan dengan menempelkan setiap sisi pada suatu graf dengan graf lainnya. Graf hasil operasi comb sisi disimbolkan dengan $G \trianglerighteq H$, dimana G dan H merupakan sebrang graf.

Definisi 2.3.1. *Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan e adalah sisi di H, operasi comb sisi dari graf G dan H dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan G dan $|E(G)|$ salinan dari H dan merekatkan salinan ke-i dari graf H di sisi cangkok e pada titik ke-i dari graf G. Dengan demikian, himpunan titik dan sisi dari graf $G \trianglerighteq H$ adalah sebagai berikut:* $V(G \trianglerighteq H) = \{(a,v)|a \in V(G); v \in V(H)\} \cup \{(a,v,z)|a \in V(G); v,z \in V(H)\} \cup$ $V(G \trianglerighteq H) = \{(a,z)|a \in V(G); z \in V(H)\}$ *dan jika* $v = w$ *dan* $z = y$, $y = w$ *maka* $E(G \trianglerighteq H) = \{(a,v)(b,w,z)|a,b \in V(G); v,w,z \in V(H)\} \cup \{(b,w,z)(c,w,y)|b,c \in$

$V(G); z, w, y \in V(H)\} \cup \{(c, w, y)\ (d, v) | c, d \in V(G); v, w, y \in V(H)\}$ jika $a = b$ maka $E(G \trianglerighteq H) = \{(a, v)(b, w) | a, b \in V(G); v, w \in V(H)\}$ sehingga $p = |V(G \trianglerighteq H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $q = |E(G \trianglerighteq H)| = q_1 q_2$.

Gambar 2.7 merupakan contoh dari graf hasil operasi comb sisi $P_n \trianglerighteq Bt_m$.



Gambar 2.7 Contoh graf comb sisi $P_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan sisi cangkok $x_1 x_2$

Dari contoh gambar 2.7 dapat diperoleh kardinalitas dari graf $V(P_n \trianglerighteq Bt_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_n \trianglerighteq Bt_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ serta memiliki $|V(P_n \trianglerighteq Bt_m)| = n + mn - m$ dan $|E(P_n \trianglerighteq Bt_m)| = n - 2m + 2mn - 1$.

2.4 Rainbow Vertex Connection

Rainbow connection pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand dkk. Kemudian pada tahun 2009, Krivelevich dan Yuster mengembangkan konsep *rainbow connection* menjadi 2 jenis yaitu *rainbow edge-connected* atau sering disebut *rainbow connected* yang didefinisikan sebagai pewarnaan sisi pada suatu graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki warna sisi-sisi yang berbeda, dan *rainbow vertex connected* yang didefinisikan sebagai pewarnaan titik pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik internal dengan warna yang berbeda.

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak-trivial. Suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi di G didefinisikan sebagai $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u \rightarrow v$ *path* di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di lintasan yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memuat suatu *rainbow* $u \rightarrow v$ *path* untuk setiap dua titik $u, v \in G$. Dalam hal ini, pewarnaan c dikatakan *rainbow coloring* di G. Jika terdapat k warna di G maka c dikatakan *rainbow k-coloring*. Minimum k sehingga terdapat *rainbow k-coloring* di G disebut *rainbow connection number*, ditulis $rc(G)$. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan $rc(G)$ warna dikatakan minimum *rainbow coloring* di G (Chartrand, 2008).

Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial dan definisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}, k \in N$, sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu $u \rightarrow u$ path di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*

Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Jelas, jika G adalah *rainbow connected*, maka G terhubung. Sebaliknya, setiap graf terhubung memiliki pewarnaan sisi trivial sehingga *rainbow connected* memiliki pewarnaan sisi dengan warna berbeda. *Rainbow connection number* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected* (Histamedika, 2012).

Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan sebanyak $rc(G)$ warna dikatakan minimum *rainbow coloring*. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G. Untuk dua titik u dan v di G, rainbow $u - v$ *geodesic* pada G adalah rainbow $u-v$ *path* yang panjangnya $d(u,v)$, dimana $d(u,v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang $u \to v$ *path* terpendek di G). Graf G dikatakan *strongly rainbow-connected* jika untuk setiap dua titik u dan v di G, terdapat suatu *rainbow* $u-v$ *geodesic*. Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan *strong rainbow coloring* di G. Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow connected* dikatakan *strong rainbow connection number* ($src(G)$) di G. Suatu *strong rainbow-coloring* di G yang menggunakan $src(G)$ warna dikatakan minimum *strong rainbow coloring* di G (Chartrand, 2008). Dari defnisi, jelas bahwa $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung G.

Hubungan $k(G)$; $rc(G)$; $src(G)$ dan banyak sisi m pada suatu graf terhubung G ditunjukkan oleh pertidaksamaan berikut: $k(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$. Teorema yang digunakan untuk batas atas dan bawah dari *rainbow connection* adalah sebagai berikut:

Teorema 2.4.1. *Andaikan G adalah graf terhubungan dengan $d(G) \geq 2$. Jika G adalah interval graf $k(G) \leq rc(G) \leq k(G)+1$, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graf, maka $k(G) = rc(G)$* (Li dan Sun,2012).

Rainbow vertex connection pada graf G adalah jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik internal dengan warna yang berbeda. Misalkan $c' : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ menjadi *rainbow vertex k-coloring* Sebuah lintasan pada G dengan *rainbow vertex k-coloring* disebut *rainbow vertex path*, jika semua titik internal mempunyai warna berbeda. Graf G disebut *rainbow vertex connected* apabila dua titik yang berbeda yang dihubungkan oleh *rainbow vertex path. Rainbow vertex connection number* pada graf terhubung dinotasikan $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi *rainbow vertex connected.* (Krivelevich dan Yuster, 2010).

Menurut Krivelevich dan Yuster dalam jurnal *The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs* memberikan teorema batas bawah dari *rainbow vertex connection* pada graf G adalah sebagai berikut:

Teorema 2.4.2. *Misalkan G adalah graf terhubung dengan $diam(G)$, maka $rvc(G) \geq diam(G) - 1$.*

Rainbow vertex connection graf G disebut *strongly rainbow vertex-connected* jika untuk setiap pasangan u, v yang memiliki titik internal dengan warna berbeda, terdapat sebuah *rainbow* $u - v$ *geodesic*. *Rainbow u-v geodesic* di G adalah suatu *rainbow vertex path* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v. Nilai minimum k untuk *rainbow vertex path*, maka terdapat $k - coloring$ dari G menghasilkan graf *strongly rainbow vertex-connected* yang disebut *strong vertex-connection number* graf G dinotasikan dengan $srvc(G)$.

Xueliang Li, dkk (2010) telah melakukan penelitian awal terkait konsep dasar dari *(strong) rainbow vertex connection numbers* pada graf. Pada penelitiannya tersebut didapatkan beberapa nilai *(strong) rainbow vertex connection numbers* dari beberapa kelas graf khusus, seperti graf lengkap, graf roda, dan graf lintasan. Berikut ini beberapa teorema yang didapatkan.

Teorema 2.4.3. *Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial dengan order n, maka*

(a) $diam(G) - 1 \leq rvc(G) \leq srvc(G)$, *dimana* $diam(G)$ *adalah diameter* G*;*

(b) $srvc(G) = 0$ *jika dan hanya jika* G *adalah graf lengkap;*

(c) $srvc(G) = 1$ *jika dan hanya jika* $diam(G) = 2$

Teorema 2.4.4. *Misalkan $K_{s,t}$, $K_{n1,n2,\ldots,nk}$, W_n dan P_n merupakan notasi dari graf bipartit lengkap, graf lengkap multipartit, graf roda, dan graf lintasan. Maka*

(a) Untuk $s \geq 2$ *dan* $t \geq 1$, $srvc(K_{s,t}) = 1$*;*

(b) Untuk $k \geq 3$, $srvc(K_{n1,n2,\ldots,nk}) = 1$*;*

(c) Untuk $n \geq 3$, $srvc(W_n) = 1$*;*

(d) Untuk $n \geq 3$, $srvc(P_n) = n - 2$*;*

2.5 Hasil-Hasil Rainbow Vertex Connection

Beberapa hasil penelitian terdahulu mengenai *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* pada tabel 2.1, dapat kita lihat kajian yang diteliti meliputi graf khusus diantaranya graf lengkap (*complete graph*), graf bintang (*star graph*), graf lingkaran (*cycle graph*), graf roda (*wheel graph*), graf pensil (*pencil graph*), dan graf lintasan (*path graph*). Penelitian tentang *rainbow vertex connection* terus berkembang, pada tahun 2016 Ariska melakukan penelitian tentang *rainbow vertex connection* pada graf hasil operasi amalgamasi, korona, join, dan *shackel*. Pada penelitian yang dilakukan oleh Ariska graf yang dioperasikan merupakan graf khusus dengan graf khusus sebagai contoh operasi join $F_{1,m} + C_n$, disitu Ariska mengoperasikan graf kipas ($F_{1,m}$) dengan graf lingkaran (C_n). Pada penelitian ini penulis mencoba untuk meneliti tentang operasi graf yang lebih umum. Oleh sebab itu, pada tugas akhir ini akan membahas penelitian tentang *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* pada graf hasil operasi comb sisi yang digunakan adalah graf khusus comb sisi dengan graf triangular book (Bt_n), graf khusus tersebut diantaranya adalah graf lintasan (P_n), graf bintang (S_n), graf kipas ($F_{m,n}$), dan graf roda (W_n). Dari penelitian tersebut diharapkan menghasilkan nilai *rainbow vertex connection* dan *strong rainbow vertex connection* pada graf hasil comb sisi yang lebih umum.

Tabel 2.1 Penelitian Terdahulu *Rainbow Vertex Connection* $rvc(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
K_n (*Complete Graph*);	$rvc(K_n) = 1$	Krivelevich,dkk., 2009
S_n(*Star Graph*);	$rvc(S_n) = 1$	Krivelevich,dkk., 2009
C_n (*Cycle Graph*);	$rvc(C_n) = 1$; $n = 4$ dan 5. $rvc(C_n) = 3$; $n = 9$. $rvc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$; $n = 6, 7,$ $8, 10, 11, 12, 13, 15.$ $rvc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$; $n = 14$, $n \geq 16$.	Li dan Liu, 2011
Pc_n (*Pencil Graph*)	$rvc(Pc_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$; $n \geq 17$ $rvc(Pc_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$; *otherwise*	Dian N.S dan A.N.M. Salman, 2015
$Amal(F_{1,m}, v, n)$;	$rvc(Amal(F_{1,m}, v, n)) = 1$	I.A dan Dafik, 2016
$Amal(Bt_m, v, n)$;	$rvc(Amal(Bt_m, v, n)) = 1$	I.A dan Dafik, 2016
$F_{1,m} \square P_n$;	$rvc(F_{1,m} \square P_n) = n$	I.A dan Dafik, 2016
$Wd_{3,m} \square P_n$;	$rvc(Wd_{3,m} \square P_n) = n$	I.A dan Dafik, 2016
$P_m \odot C_n$;	$rvc(P_m \odot C_n) = m$	I.A dan Dafik, 2016
$P_m \odot Wd_{3,n}$;	$rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) = m$	I.A dan Dafik, 2016
$Wd_{3,m} \odot C_n$;	$rvc(Wd_{3,m} \odot C_n) = 3$	I.A dan Dafik, 2016
$P_{3,m} + F_{1,n}$;	$rvc(P_{3,m} + F_{1,n}) = 1$	I.A dan Dafik, 2016
$F_{1,m} + C_n$;	$rvc(F_{1,m} + C_n) = 1$	I.A dan Dafik, 2016
$Shack(Bt_m,$ $v = y_1^{i+1}, n)$;	$rvc(Shack(Bt_m, v = y_1^{i+1}, n))$ $= 2n - 1$	I.A dan Dafik, 2016
$Shack(Bt_m,$ $v = y_1^k, n)$;	$rvc(Shack(Bt_m, v = y_1^k, n))$ $= 2n - 1$	I.A dan Dafik, 2016
$Shack((S_m + C_n),$ $v = x_k, r)$;	$rvc(Shack((S_m + C_n), v = x_2^k, r))$ $= 2r - 1$	I.A dan Dafik, 2016

Tabel 2.2 Penelitian Terdahulu *Strong Rainbow Vertex Connection* $srvc(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
K_n (*Complete Graph*)	$srvc(K_n) = 0$	Xueliang Li, dkk, 2012
$K_{s,t}$(*Complete Bipartite Graph*)	$srvc(K_{s,t}) = 1$; $s \geq 2$, $t \geq 1$	Xueliang Li, dkk, 2012
$K_{n1,n2,\ldots,nk}$ (*Complete Mulipartite Graph*)	$srvc(K_{n1,n2,\ldots,nk}) = 1$;$k \geq 3$	Xueliang Li, dkk, 2012
W_n (*Wheel Graph*)	$srvc(W_n) = 1$; $n \geq 3$	Xueliang Li, dkk, 2012
P_n (*Path Graph*)	$srvc(P_n) = n - 2$; $n \geq 3$	Xueliang Li, dkk, 2012

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan *(applied research)*.

a. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

b. Penelitian terapan *(applied research)* merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang sudah ada untuk menyelesaikan masalah.

3.2 Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu berupa graf-graf khusus antara lain graf lintasan (*Path graph*), graf bintang (*Star Graph*), graf kipas (*Fan graph*), graf roda (*Wheel graph*), dan graf buku segitiga (*triangular book*).

3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian pada tugas akhir ini untuk *rainbow vertex connection number* dilakukan pada graf hasil comp sisi, yaitu pada graf lintasan (*Path graph*), graf bintang (*Star Graph*), graf kipas (*Fan graph*), graf roda (*Wheel graph*), dan graf buku segitiga (*triangular book*). Adapun teknik penelitian sebagai berikut:

a. Menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;

b. Menerapkan operasi comp sisi pada graf-graf khusus yang telah ditentukan;

c. Menentukan kardinalitas graf-graf hasil comp sisi;

d. Menerapkan pewarnaan titik pada graf-graf hasil comp sisi menggunakan teknik *rainbow vertex connection*;

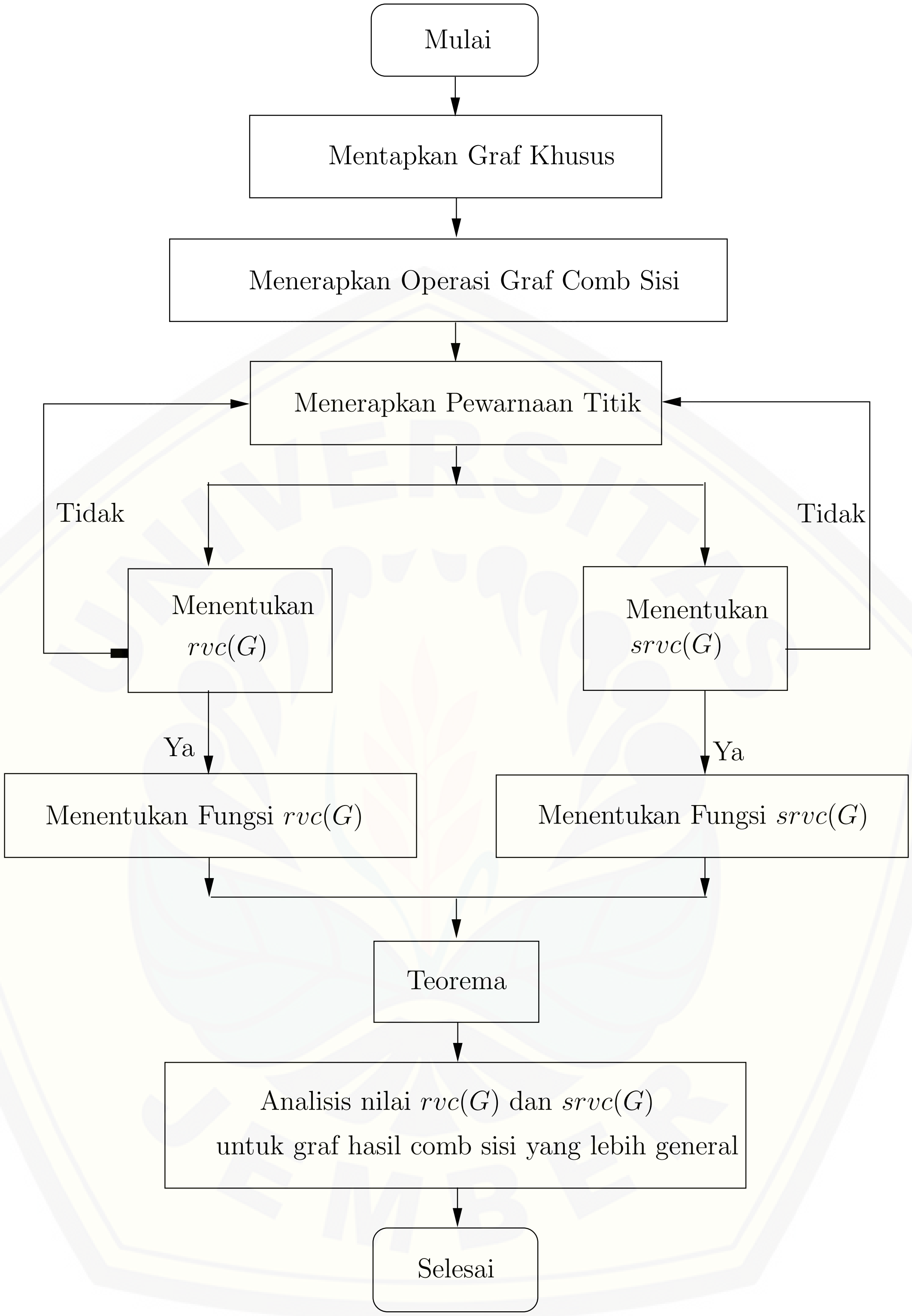
e. Memeriksa keoptimal $rvc(G)$ dan $srvc(G)$ dengan batas bawah, apabila sudah optimal, maka dilanjtkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal, maka kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan titik pada graf;

f. Menentukan fungsi pewarnaan berdasarkan keteraturan pola dari $rvc(G)$ dan $srvc(G)$ yang terbentuk;

g. fungsi yang didapatkan kemudian digunakan sebagai salah satu pembuktian teorema sehingga didapatkan teorema baru;

h. melakukan analisis terkait nilai $rvc(G)$ dan $srvc(G)$ dari graf hasil comp sisi yang general.

Rancangan penelitian diatas dapat disajikan dalam skema 3.1



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan analisis pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa *rainbow vertex connection number* dan *strong rainbow vertex connection number* pada graf hasil operasi comb sisi didapatkan 10 teorema baru yaitu sebagai berikut:

1. nilai *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada graf hasil operasi comb sisi

   (a) $rvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = n-2$ sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

   (b) $rvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(P_n \trianglerighteq Bt_m) = n-1$ sisi x_iu_j sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

   (c) $rvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = 1$ sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

   (d) $rvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(S_n \trianglerighteq Bt_m) = 3$ sisi x_iu_j sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

   (e) $rvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = srvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = 3$ sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

   (f) $rvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = 4$ sisi x_iu_j sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

   (g) $srvc(F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p) = m+1$ sisi x_iu_j sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

   (h)
   $$rvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) = srvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) \begin{cases} 2, & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 5 \\ 3, & \text{untuk}\, n \geq 6 \end{cases}$$

   sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

(i)

$$rvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) = \begin{cases} 2, & \text{untuk}\, n = 4 \\ 3, & \text{untuk}\, 5 \leq n \leq 6 \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil, & \text{untuk}\, n \geq 7 \end{cases}$$

sisi x_iu_j sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

(j)

$$srvc(W_n \trianglerighteq Bt_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ 5, & \text{untuk}\, n = 7 \\ n-3, & \text{untuk}\, n \geq 8 \end{cases}$$

sisi x_iu_j sebagai sisi cangkok pada graf Bt_m

2. fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* pada graf hasil operasi comb sisi

   (a) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* graf $P_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan $n \geq 3$, $m \geq 2$ dan sisi cangkok x_1x_2 adalah

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_i;\, i = 1, n \\ i-1, & \text{untuk}\, v = x_i;\, 2 \leq i \leq n-1 \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j};\, 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

   (b) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* graf $P_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan $n \geq 3$, $m \geq 2$ dan sisi cangkok x_iu_j adalah

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = y_i, y_{i,j};\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq m-1 \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_n \\ i, & \text{untuk}\, v = x_i;\, 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

   (c) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* graf $S_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan $n \geq 4$, $m \geq 2$ dan sisi cangkok x_1x_2

adalah

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = A \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_i;\ 1 \le i \le n-1 \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j};\ 1 \le i \le n-1,\ 1 \le j \le m \end{cases}$$

(d) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* graf $S_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan $n \ge 4$, $m \ge 2$ dan sisi cangkok $x_i u_j$ adalah

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = a_{i,j}, x_i; 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le m-1 \\ 2, & \text{untuk}\, v = y_i;\ 1 \le i \le n-1 \\ 3, & \text{untuk}\, v = a \end{cases}$$

(e) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* graf $F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p$ dengan $m \ge 3$, $n \ge 2$, $p \ge 2$ dan sisi cangkok $x_1 x_2$ adalah

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = A, x_{i,j,k};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n-1,\ 1 \le k \le p \\ 1, & \text{untuk}\, v = y_{i,j,k};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le p \\ 2, & \text{untuk}\, v = x_{i,2j-1};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3, & \text{untuk}\, v = x_{i,2j};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \end{cases}$$

(f) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* graf $F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p$ dengan $m \ge 3$, $n \ge 2$, $p \ge 2$ dan sisi cangkok $x_i u_j$ adalah

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = y_{i,j};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n-1 \\ 1, & \text{untuk}\, v = y_{i,j,k};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n-1, 1 \le k \le p-1 \\ 1, & \text{untuk}\, v = a_{i,j,k};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, 1 \le k \le p-1 \\ 2, & \text{untuk}\, v = x_{i,2j-1};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3, & \text{untuk}\, v = a_{i,j,k};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \\ 3, & \text{untuk}\, v = a_{i,2j};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 4, & \text{untuk}\, v = a \end{cases}$$

(g) Fungsi *Strong Rainbow Vertex Connection* graf $F_{m,n} \trianglerighteq Bt_p$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 2$, $p \geq 2$ dan sisi cangkok x_iu_j adalah

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = y_{i,j}, y_{i,j,k};\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq p-1 \\ 1, & \text{untuk}\, v = a_{i,j,k};\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p-1 \\ 2, & \text{untuk}\, v = x_{i,2j-1};\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3, & \text{untuk}\, v = a_{i,j};\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \\ i, & \text{untuk}\, v = x_{i,j};\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \\ m+2, & \text{untuk}\, v = a \end{cases}$$

(h) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* dan *Strong Rainbow Vertex Connection* graf $W_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan $n \geq 4$, $m \geq 2$ dan sisi cangkok x_1x_2 adalah

Untuk $n = 4$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_i;\ 1 \leq i \leq 4 \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j}, y_{i,j};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \\ 2, & \text{untuk}\, v = A \end{cases}$$

Untuk $n = 5$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_i;\ i = ganjil\, 1 \leq i \leq 4 \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j}, y_{i,j};\ 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq m \\ 2, & \text{untuk}\, v = x_i;\ i = genap\, 1 \leq i \leq 4 \\ 2, & \text{untuk}\, v = A \end{cases}$$

Untuk $n = 6$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j}, y_{i,j};\ 1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{2i-1};\ 1 \leq i \leq 2 \\ 2, & \text{untuk}\, v = x_{2i};\ 1 \leq i \leq 2 \\ 3, & \text{untuk}\, v = x_5, A \end{cases}$$

Untuk $n \geq 7$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_i;\, i = ganjil\, 1 \leq i \leq n-2,\, 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j}, y_{i,j};\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq m \\ 2, & \text{untuk}\, v = y_i;\, i = genap\, 1 \leq i \leq n-2,\, 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk}\, v = A, x_{n-1} \end{cases}$$

(i) Fungsi *Rainbow Vertex Connection* graf $W_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan $n \geq 4$, $m \geq 2$ dan sisi cangkok $x_i u_j$ adalah
untuk $n = 4$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_i;\, 1 \leq i \leq 3 \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j};\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, & \text{untuk}\, v = y_i, z_i;\, 1 \leq i \leq n-1 \\ 2, & \text{untuk}\, v = a \end{cases}$$

untuk $5 \leq n \leq 6$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_{2i-1};\, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j}, a_{i,j};\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, & \text{untuk}\, v = x_{2i};\, 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil \\ 2, & \text{untuk}\, v = y_{2i-1};\, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 2, & \text{untuk}\, v = z_i;\, 1 \leq i \leq n-1 \\ 3, & \text{untuk}\, v = a, y_{2i};\, 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil \end{cases}$$

untuk $n \geq 7$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk}\, v = x_{i,j}, a_{i,j};\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, & \text{untuk}\, v = y_{2i-1};\, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 3, & \text{untuk}\, v = y_{2i};\, 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil \\ \lceil \frac{i}{2} \rceil, & \text{untuk}\, v = x_i;\, 1 \leq i \leq n-1 \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil, & \text{untuk}\, v = a \end{cases}$$

(j) Fungsi *strong Rainbow Vertex Connection* graf $W_n \trianglerighteq Bt_m$ dengan $n \geq 4$,

$m \geq 2$ dan sisi cangkok $x_i u_j$ adalah

untuk $n = 4$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v = a_{i,j}, x_{i,j};\ 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, & \text{untuk } v = a, y_i;\ 1 \leq i \leq 3 \\ i, & \text{untuk } v = x_i;\ 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

untuk $5 \leq n \leq 6$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v = x_{2i-1};\ 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 1, & \text{untuk } v = x_{i,j}, a_{i,j};\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, & \text{untuk } v = x_{2i};\ 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil \\ 2, & \text{untuk } v = y_{2i-1};\ 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 2, & \text{untuk } v = z_i;\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 3, & \text{untuk } v = a, y_{2i};\ 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil \end{cases}$$

untuk $n = 7$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v = x_{i,j}, a_{i,j}, y_i;\ 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 1, & \text{untuk } v = x_5, z_6 \\ 2, & \text{untuk } v = x_6, z_1 \\ 5, & \text{untuk } v = a \\ i, & \text{untuk } v = x_i;\ 1 \leq i \leq 4 \\ i, & \text{untuk } v = z_i;\ 2 \leq i \leq 5 \end{cases}$$

untuk $n \geq 8$

$$c(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v = x_{i,j}, a_{i,j}, y_i;\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 1, & \text{untuk } v = x_{n-3}, z_1 \\ 2, & \text{untuk } v = x_{n-2}, z_{n-1} \\ 3, & \text{untuk } v = x_{n-1,n-2} \\ i, & \text{untuk } v = x_i;\ 1 \leq i \leq n-4 \\ i, & \text{untuk } v = z_i;\ 2 \leq i \leq n-3 \\ n-3, & \text{untuk } v = a \end{cases}$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *rainbow vertex connection number* dan *strong rainbow vertex connection number* pada graf hasil operasi comb sisi, permasalahan terbuka masih menunggu bagi pembaca yang berminat meneliti di bidang ini, yaitu diantaranya bagaimanakah karakteristik suatu graf yang memiliki $rvc(G)$ dan $srvc(G)$ sama. Kemudian untuk operasi comb sisi yang lebih general masih terbuka untuk dikaji lebih dalam dalam bagaimana nilai $rvc(G \trianglerighteq H)$.

DAFTAR PUSTAKA

Ariska, I., Dafik, dan I.H Agustin. 2016. Analisis Rainbow Vertex Connection pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya. Jember: Universitas Jember.

Dafik, dan Mahmudah, M. 2016. On The Rainbow Coloring for Some Graph Operation. *Proceeding Seminar Nasional Matematika 2014*. Jember: Universitas Jember

Dafik, dkk. 2014. Rainbow Connection Hasil Operasi Graf. *AIP CONFERENCE PROCEEDINGS AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS, THE 7TH SEAMS UGM INTERNATIONAL CONFERENCE, SCOPUS*. America: American Institute of Physics

Darmawan, R.N., dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number of Prism and Product of Two Graphs. *Proceeding Seminar Nasional Matematika 2014*. Jember: Universitas Jember.

Dian N.S. Simamora, dan A.N.M. Salman. 2015. The Rainbow(Vertex) Connection Number of Pencil Graphs. *International Conference on Graph Theory and Information Security*. 74: 138-142.

Chartrand, G., G.L.Johns, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. Rainbow Connection in Graphs. *Math. Bohem*. 133: 85-98.

Harary, F. 2007. *Graph Theory*. New London: Wesley.

Harju, dan Tero. 2011. *Graph Theory*. Finlandia: University of Turku.

Histamedika, G. 2011. Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*. 4:17-25.

Krivelevic, M., dan R. Yuster. 2009. The Rainbow Connection of a Graph is (at most) Reciprocal to Its Minimum Degree, School of Mathematics, Tel Aviv University.

Li, X., dan S. Liu. 2011a. Rainbow Connection of Graphs-A survey. ArXiv: 1101.5747v2[math.CO].

Li, X., dan Y. Shi. 2010. On The Rainbow Vertex-Connection. China: Nankai University, Tianji 300071: 1-7.

Li, X., dan S. Liu. 2014. Tight upperbound of the rainbow vertex-connection number for 2-connected graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 173: 62-69.

Li, X., dan S. Liu. 2011b. Rainbow Vertex-Connection Number of 2-Connected Graphs. China: Nankai University. arXiv: 1110.5770v1[math.CO].

Maryati, Baskoro, Ryan, dan Miller. 2010. On H-Supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamation of a Connected Graph. *Utilitas Mathematica*. 83: 333-342.

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Nastiti, A., dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number of Special Graph and Its Operations. *Proceeding Seminar Nasional Matematika 2014*. Jember: Universitas Jember

Purwanto, H., G. Indriani, dan E. Dayanti. 2006. *Matenatika Diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.

X. Li dan Y. Sun. 2012. Rainbow Connection of Graphs. New York: Springer Briefs in Mathematics.

Yulianti, A., dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number pada Operasi Graf. *Proceeding Seminar Nasional Matematika 2014*. Jember: Universitas Jember