PENERAPAN *RAINBOW 2-CONNECTED* PADA GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI KORONA DAN CARTESIAN

SKRIPSI

Oleh

Dinda Alviani Fauziah

NIM 131810101055

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

PENERAPAN *RAINBOW 2-CONNECTED* PADA GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI KORONA DAN CARTESIAN

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Dinda Alviani Fauziah

NIM 131810101055

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

SKRIPSI

PENERAPAN *RAINBOW 2-CONNECTED* PADA GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI KORONA DAN CARTESIAN

Oleh

Dinda Alviani Fauziah
NIM 131810101055

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu bagian dari matematika diskrit yang sering kali digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu permasalahan agar lebih mudah dipahami dan diselesaikan adalah teori graf atau graph theory. Meskipun pada awalnya graf diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian kasus, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri (Slamin, 2009). Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan berkebangsaan Swiss pada 1936 yaitu Leonhard Euler, melalui tulisannya yang berisi tentang pemecahan masalah Jembatan Konigsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu.

Rainbow connection atau koneksi pelangi yang merupakan salah satu teori pada graf adalah pemberian warna pada sisi graf dimana setiap dua titik yang berbeda harus memiliki minimal satu lintasan yang bisa dilewati (*rainbow path*) sehingga graf tersebut bersifat *rainbow connected.* Pewarnaan minimal yang digunakan pada graf G agar dapat dikatakan *rainbow connected* disebut dengan istilah *rainbow connection number* yang dinotasikan dengan $rc(G)$. Apabila terdapat minimal 2 bagian dalam *rainbow path* yang terpisah (*internaly disjoin rainbow path*) yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G, maka graf G dikatakan *rainbow 2-connected* yang dinotasikan dengan $rc_2(G)$ (Chartrand et al., 2006). *Rainbow 2-connected* dapat diaplikasikan pada proses distribusi pesan, barang, dokumen rahasia, soal-soal ujian dan lain sebagainya agar terjaga kemanannya. Misalnya untuk distribusi dokumen rahasia berupa soal SBMPTN, memberikan pengawalan ketat dan tim pengawas merupakan salah satu cara untuk meminimalisir terjadinya kecurangan dalam proses pendistribusian soal SBMPTN dari pusat penyimpanan soal sampai ke Perguruan Tinggi atau Universitas agar kerahasiaan soal tetap terjaga, dimana jalur yang akan dilewati distributor dijaga oleh tim pengawas yang berbeda. Hal ini ditujukan agar tim pengawas dapat fokus dalam menjalankan tugasnya di masing-masing jalur yang telah ditentukan. Jalan alternatif juga harus disediakan dalam proses distribusi soal SBMPTN ini demi menghindari kemacetan jalan. Apabila soal sampai ke Universitas dengan jumlah sama seperti semula, maka dapat dikatakan bahwa tidak terjadi kecurangan saat pendistribusian.

Rainbow connection juga dapat diterapkan pada graf khusus dan operasi graf. Jenis operasi graf antara lain adalah *joint*, *cartesian product*, *tensor product*, *composition*, *amalgamation*, *shackle* dan *crown product*. Beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai *rainbow connection* antara lain Histamedika (2012) telah melakukan penelitian yang mengkaji tentang *rainbow connection* pada beberapa graf, Wijaya (2013) telah melakukan penelitian tentang bilangan *rainbow connection* pada graf komplemen, Alfarisi dan Dafik (2014) telah melakukan pengembangan *rainbow connection* pada sembarang graf khusus, Fajariyanto (2015) telah melakukan penelitian *rainbow connection* pada graf-graf hasil operasi.

Pada penelitian ini, peneliti akan mengembangkan *rainbow connection* yang sebelumnya bersifat *rainbow 1-connected* yaitu hanya mempunyai satu lintasan $u - v$ menjadi *rainbow 2-connected* yaitu dua lintasan $u - v$ yang bisa dilewati pada graf khusus dan hasil operasi korona dan *cartesian product*. Oleh karena itu, penelitian ini memiliki judul "Penerapan *Rainbow 2-Connected* Pada Graf Khusus dan Beberapa Operasi Graf Korona dan Cartesian".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut

a. Bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf operasi $C_3 \square K_n$, $Wd_{3,2} \square K_n$, $K_4 \square K_n$, $C_4 \odot K_n$, $K_n \odot C_3$, dan dua graf khusus yaitu $Pr_{(4,n)}$ dan $Wd_{n,2}$?

b. Bagaimana menentukan *rainbow connection number* pada graf operasi $C_3 \square K_n$,

$Wd_{3,2}\square K_n$, $K_4\square K_n$, $C_4 \odot K_n$, $K_n \odot C_3$, dan dua graf khusus yaitu $Pr_{(4,n)}$ dan $Wd_{n,2}$?

c. Bagaimana menentukan *rainbow 2-connected* pada graf operasi $C_3\square K_n$, $Wd_{3,2}\square K_n$, $K_4\square K_n$, $C_4 \odot K_n$, $K_n \odot C_3$, dan dua graf khusus yaitu $Pr_{(4,n)}$ dan $Wd_{n,2}$?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini diantaranya sebagai berikut

a. Graf tidak berarah dan konektif

b. Operasi graf yang digunakan adalah operasi *crown product*

c. Graf hasil operasi yang digunakan adalah $C_3\square K_n$, $Wd_{3,2}\square K_n$, $K_4\square K_n$, $C_4 \odot K_n$, $K_n \odot C_3$, dan dua graf khusus yaitu $Pr_{(4,n)}$ dan $Wd_{n,2}$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini diantaranya sebagai berikut

a. Menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf operasi $C_3\square K_n$, $Wd_{3,2}\square K_n$, $K_4\square K_n$, $C_4 \odot K_n$, $K_n \odot C_3$, dan dua graf khusus yaitu $Pr_{(4,n)}$ dan $Wd_{n,2}$.

b. Menentukan *rainbow connection number* pada graf operasi $C_3\square K_n$, $Wd_{3,2}\square K_n$, $K_4\square K_n$, $C_4 \odot K_n$, $K_n \odot C_3$, dan dua graf khusus yaitu $Pr_{(4,n)}$ dan $Wd_{n,2}$.

c. Menentukan *rainbow 2-connected* pada graf operasi $C_3\square K_n$, $Wd_{3,2}\square K_n$, $K_4\square K_n$, $C_4 \odot K_n$, $K_n \odot C_3$, dan dua graf khusus yaitu $Pr_{(4,n)}$ dan $Wd_{n,2}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini diantaranya sebagai berikut

a. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup *rainbow connection.*

b. Memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih lanjut tentang *rainbow 2-connected* pada graf eksponensial dan operasi graf.

1.6 Kebaharuan

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini diantaranya sebagai berikut

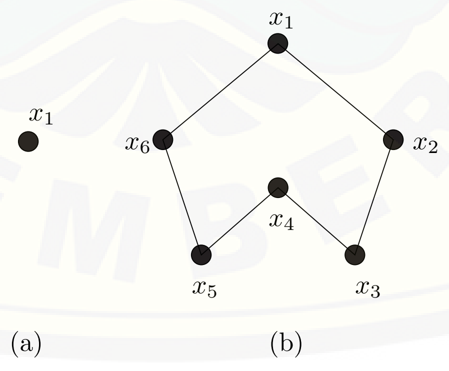
a. Mengembangkan *rainbow connection* yang sebelumnya bersifat *rainbow 1-connected* yaitu hanya mempunyai satu lintasan $u - v$ menjadi *rainbow 2-connected* yaitu dua lintasan $u - v$ yang bisa dilewati pada graf khusus dan operasi graf.

b. Mengembangkan *rainbow connection* yang sebelumnya bersifat *join* sisi menjadi *almost disjoin rainbow path*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

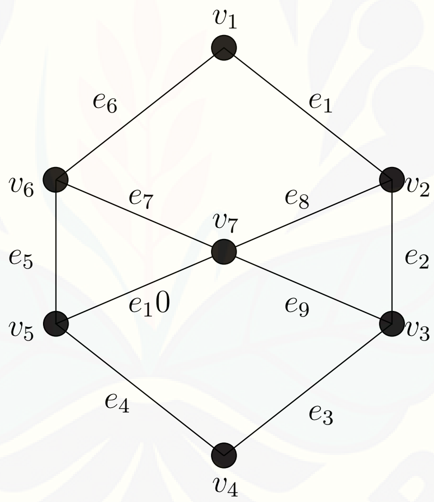
2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Suatu graf G didefnisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dimana $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ merupakan himpunan tidak kosong dari simpul-simpul yang elemennya disebut titik (*vertex/node*) dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ merupakan himpunan boleh kosong dan digambarkan garis-garis yang menghubungkan sepasang simpul yang elemen-elemennya disebut sisi (*edge*). Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Sisi menggambarkan garis yang menghubungkan dua titik yang disebut (*endvertices*). Secara matematis, sisi merupakan pasangan tak terurut (u, v) dari dua titik u dan v di V. Sebuah sisi dengan titik (u) dan (v) dinotasikan uv. Dengan demikian suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi tetapi harus memiliki titik (Slamin, 2009). Graf yang tidak mempunyai sisi atau graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) disebut dengan graf trivial. Suatu graf disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat path dari v_i dan v_j. Jika tidak, maka graf tersebut disebut graf tak terhubung (*disconnect graph*) (Purwanto dkk, 2006).



Gambar 2.1 (a)Graf Trivial (b) Graf Terhubung

Banyaknya titik yang ada pada graf G dinyatakan sebagai $|V(G)|$ atau $|V|$. Banyak sisi yang ada pada graf G dinyatakan sebagai $|E(G)|$ atau $|E|$ (Harary, 2007). Misal graf G mempunyai titik u dan v. Jarak dari titik u ke titik v dinotasikan dengan dist(u,v) adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Sebagai contoh Gambar 2.2 dengan $V(G) = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $E(G) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}$ dimana $e_1 = v_1v_2$; $e_2 = v_2v_3$; $e_3 = v_3v_4$; $e_4 = v_4v_5$; $e_5 = v_5v_6$; $e_6 = v_1v_6$; $e_7 = v_6v_7$; $e_8 = v_2v_7$; $e_9 = v_3v_7$; $e_{10} = v_5v_7$ dan jarak dari titik v_1 ke v_3 adalah 2. Diameter dari sebuah graf G adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik yang dinotasikan dengan $diam(G) = maxe(v) : v\epsilon V$. Titik v_1 dan v_2 pada graf G dikatakan bertetangga ($adjacent$) karena terdapat sisi e_1 yang menghubungkan kedua titik tersebut.



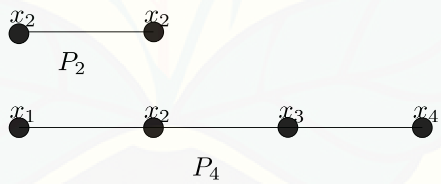
Gambar 2.2 Graf G

Jalan ($walk$) pada graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) yang dinotasikan dengan W, dimana $W = (v_0, e_1, v_2, e_3, ..., e_k, v_k)$ sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah akhir sisi e_1 untuk $1 \leq i \leq k$. W dikatakan jalan dengan v_0 adalah titik awal W dan v_k adalah titik akhir W. Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W yang dinotasikan dengan k. Jalan W dikatakan tertutup apabila titik awal dan titik akhir W sama ($v_0 = v_k$), sedangkan jalan W dikatakan terbuka apabila ($v_0 \neq v_k$). Lintasan (*path*) pada graf G adalah jalan dengan titik dan sisi yang berbeda, dimana tidak ada titik maupun sisi yang digunakan berulang.

2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

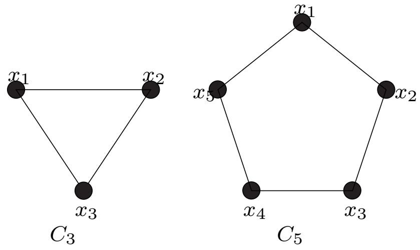
Graf khusus adalah graf yang memiliki keunikan dan karakteristik bentuk khusus.Keunikan graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya,sedangkan karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan tetap simetris. Graf khusus yang akan diteliti pada penelitian ini adalah graf lintasan, graf siklus, graf prisma, graf kincir, dan graf lengkap. Berikut ini pengertian dari graf khusus yang akan digunakan dalam penelitian:

Definisi 2.2.1. Graf lintasan (*path graph*) yang dinotasikan dengan P_n adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$ (Damayanti, 2011). Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada Gambar 2.3 Graf Lintasan P_2 dan P_4.



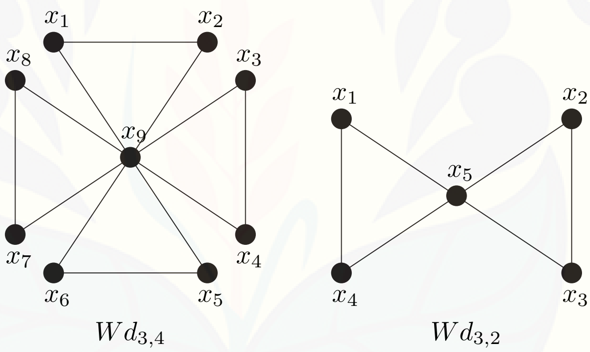
Gambar 2.3 Graf Lintasan

Definisi 2.2.2. Graf lingkaran (*Cycle Graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n (Harary, 2007). Contoh dari graf siklus bisa dilihat pada Gambar 2.4



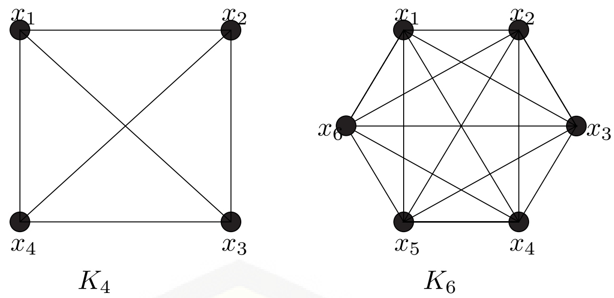
Gambar 2.4 Graf Lingkaran

Definisi 2.2.3. Graf Kincir (*Windmill Graph*) yang dinotasikan dengan $Wd_{(n,m)}$, dimana n adalah banyaknya titik $(n \geq 3)$ dan m adalah banyaknya salinan dari graf lengkap K_n $(m \geq 2)$ dengan pusat sebuah titik yang digunakan bersama dari semua salinan. Graf kincir memiliki $nm - (m-1)$ titik dan $\frac{n(n-1)}{2}m$ sisi (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).



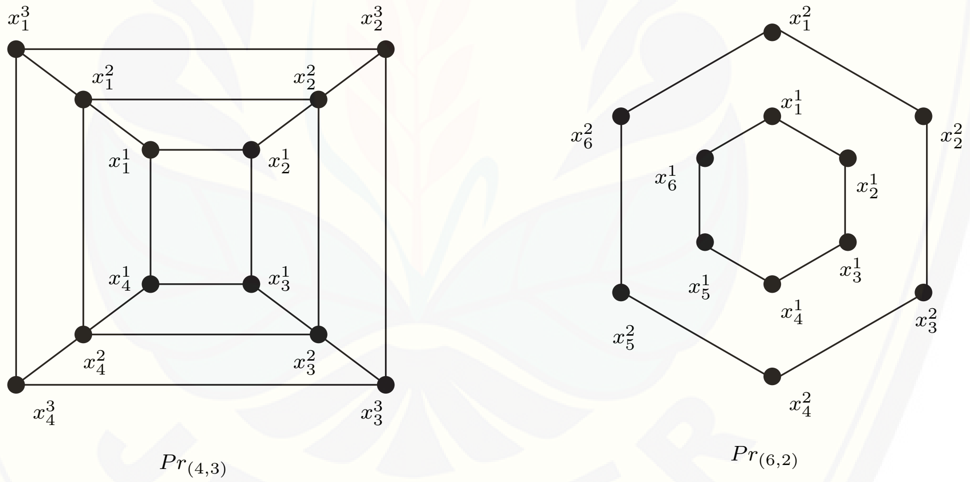
Gambar 2.5 Graf Kincir

Definisi 2.2.4. Graf Lengkap (*Complete Graph*) yang dinotasikan dengan K_n adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik yang lain. Setiap titik pada K_n berderajat $n-1$, sehingga jumlah sisinya adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ (Wibisono, 2008).



Gambar 2.6 Graf Lengkap

Definisi 2.2.5. Graf Prisma (*Prism Graph*) dinotasikan dengan $P_{m,n}$ adalah sebuah graf yang terdiri dari siklus luar dengan m titik $y_1, y_2, y_3, ..., y_m$ dan sebuah siklus dalam dengan m titik $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$. Kemudian antara siklus luar dan siklus dalam dihubungkan dengan n jari-jari $x_i\ y_j, i = 1, 2, 3, ..., n$ (Lin, Slamin, dan Milter 2001).

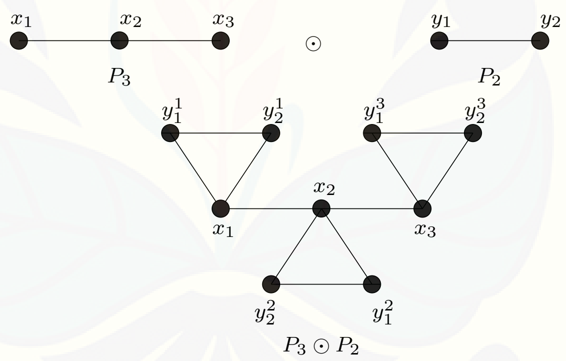


Gambar 2.7 Graf Prisma

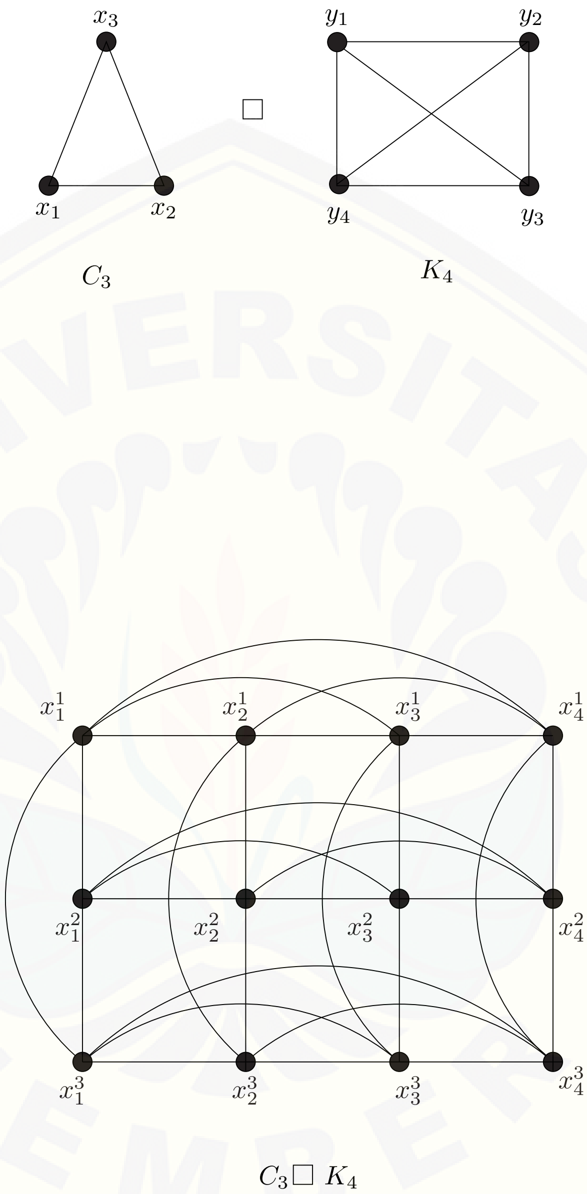
Operasi graf adalah cara untuk menghasilkan suatu graf baru dengan mengoperasikan duah buah graf. Macam-macam operasi graf antara lain yaitu *joint, cartesian product, tensor product, shackle, composition, amalgamation.* Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi graf *korona product* dan *cartesian product.*

Definisi 2.2.6. *Korona product* dari dua graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G_1 \odot G_2$, yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan $|V(G_1)|$ duplikat dari $(G_2.G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, G_2, |V(G_1)|)$, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G_1 ke setiap titik di $G_{2,i}, i = 1, 2, 3|V(G_1)|$ (Harsya et al., 2014).

Definisi 2.2.7. *Cartesian product* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G = G_1 \Box G_2$ yaitu graf dengan himpunan titik $V(G_1)$ x $V(G_2)$, dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku : $u_1 = v_1$ dan $(u_2v_2 \in E_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1v_1 \in E_1)$, misalkan $|V(G_1)| = p_1$ dan $|E(G_1)| = q_1$, sedangkan $|V(G_2)| = p_2$ dan $|E(G_2)| = q_2$ maka $|V(G_1 \Box G_2)| = p_1p_2$ dan $|E(G_1 \Box G_2)| = q_1p_2 + q_2p_1$ (Harary, 2007).



Gambar 2.8 Operasi Korona Product $P_3 \odot P2$



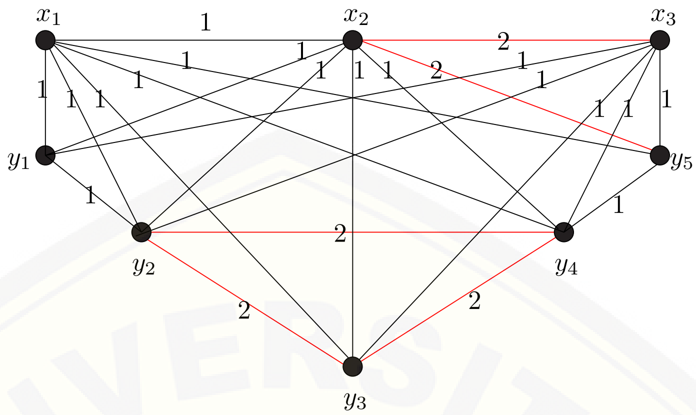
Gambar 2.9 *Cartesian Product* dari $C_3\square K_4$

2.3 *Rainbow Connection* (Koneksi Pelangi)

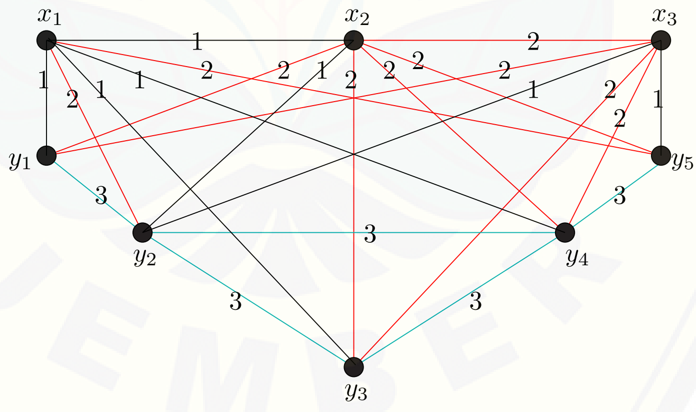
Misalkan G adalah graf terhubung tidak trivial dan pewarnaan sisi di G didefinisikan sebagai $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., r|r \in N\}$. Sedemikian hingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu $u - v$ path P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan dengan *rainbow path*. Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow coloring*. *Rainbow connection number* dari graf terhubung G dinotasikan dengan $rc(G)$ yang didefnisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected* (Histamedika, 2012).

Apabila terdapat k rainbow path yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G, maka graf G dikatakan rainbow connected yang dinotasikan dengan $rc_k(G)$. Sedemikian hingga, apabila graf G memiliki minimal 2 *disjoin rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G, maka graf G dikatakan *rainbow 2-connected* yang dinotasikan dengan $rc_2(G)$. Selanjutkan dikatakan *almost rainbow-2 connected* apabila graf G hampir memiliki minimal 2 *disjoin rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G dikarenakan sisi yang dapat dilewati kembali atau dikatakan *share* sisi dan kemudian dinotasikan dengan $rc_{ak}(G)$. Berikut ini teorema yang telah diperoleh dari penelitian sebelumnya, mengenai batas atas dan batas bawah dari *rainbow connection*. Teorema 2.3.1 akan digunakan untuk membuktikan beberapa teorema dalam penelitian ini.

$\diamondsuit$ **Teorema 2.3.1.** *Misalkan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$ sehingga $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G) + 1$, dengan d adalah derajat. Misalkan G bersifat rainbow κ-connected dengan $\kappa \geq 1$ sehingga $rc_1(G) \leq rc_2 \leq ... \leq rc_\kappa(G)$, dimana κ adalah banyaknya rainbow path yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G* (Li and Sun, 2012).



Gambar 2.10 Rainbow Connection $RC_1 = 2$

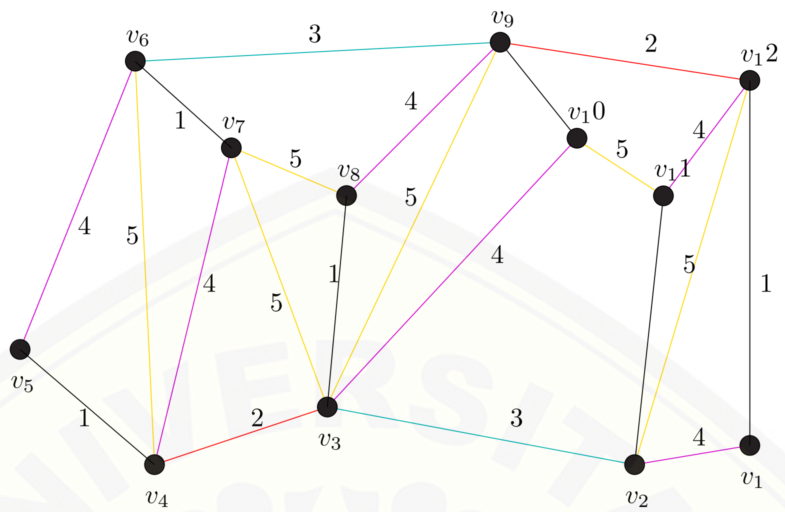


Gambar 2.11 Rainbow Connection $RC_2 = RC_1 + 1 = 3$

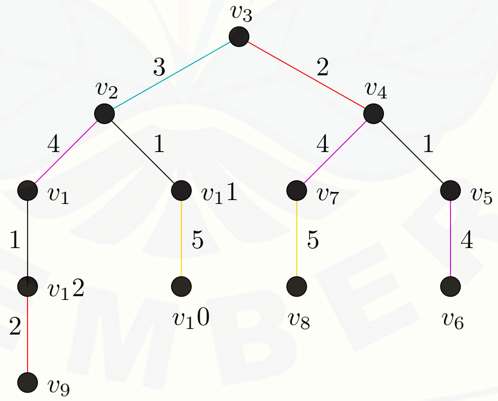
2.4 Aplikasi *Rainbow Connection*

Konsep *rainbow connection* dapat diaplikasikan pada proses distribusi, misalnya digunakan dalam distribusi soal SBMPTN dari pusat penyimpanan soal menuju ke Perguruan Tinggi Negeri (PTN) atau sekolah tempat dilaksanakannya ujian SBMPTN. Pendistribusian ini memerlukan pengawalan dan pengawasan yang ketat untuk menghindari terjadinya masalah yang tidak diinginkan karena merupakan dokumen negara yang bersifat rahasia. Pendistribusian soal SBMPTN ini akan dilakukan oleh tim pengawalan pengawas yang terdiri dari unsur dikti, polres, LPMP (Lembaga Penjamin Mutu Pendidikan), dan pihak PTN. Jalan yang akan dilewati dalam pendistribusian soal SBMPTN ke setiap PTN harus dijaga oleh tim pengawas yang melibatkan tiga unsur pengawas dengan syarat perwakilan dari polres dan dikti atau polres dan LPMP harus ada pada setiap tim. Selain jalan utama, diperlukan jalan lain sebagai alternatif dengan menggunakan konsep *rainbow 2-connection* untuk menghindari kemacetan atau kendala lainnya sehingga proses distribusi tidak terhambat. Kedua jalan tersebut akan dijaga tim pengawas yang berbeda agar keamanan soal SBMPTN tetap terjaga, sehingga hal-hal buruk seperti kebocoran soal dapat diminimalisir. Situasi inilah yang dapat dimodelkan dalam *rainbow connection number.*

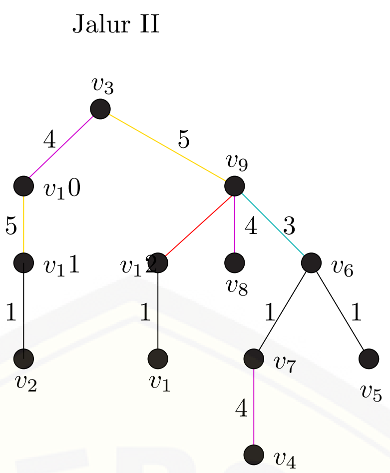
Berdasarkan Gambar 2.12 dapat diketahui $rc(G) = 5$, sehingga dapat disimpulkan bahwa dibutuhkan 5 tim pengawas dengan kombinasi yang berbeda disebar sesuai *rainbow coloring* dari $rc(G)$ seperti pada Gambar 2.8. Tim tersebut yakni diantaranya tim pengawas 1 yang terdiri dari polres, dikti dan pihak PTN, tim pengawas 2 yang terdiri dari polres, dikti dan LPMP, tim pengawas 3 yang terdiri dari polres, LPMP dan pihan PTN, tim pengawas 4 terdiri dari LPMP, polres dan dikti, serta tim pengawas 5 yang terdiri dari dikti, PTN dan polres. Kemudian diambil lintasan yang dapat menjangkau titik terbanyak



Gambar 2.12 *Rainbow 2-Connected* Peta Jalur Distribusi



Gambar 2.13 Aplikasi Spanning Tree Jalur I



Gambar 2.14 Aplikasi Spanning Tree Jalur II

dengan warna sisi yang berbeda. Kondisi tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk *spanning tree*.

Misalkan v_3 adalah pusat penyimpanan soal SBMPTN. Untuk menuju ke PTN yang berada di titik v_{12} berkas soal SBMPTN akan diperiksa oleh tim pengawas 3, tim pengawas 4, dan tim pengawas 1 berturut-turut sesuai dengan Jalur I. Namun untuk menghindari terjadi hal buruk misalnya kemacetan, dari pusat penyimpanan soal v_3 menuju tempat dilaksanakannya ujian SBMPTN di titik v_{12} dapat melalui Jalur II yang akan diperiksa oleh tim pengawas 5 dan tim pengawas 2. Dengan demikian Jalur II dapat dikatan sebagai jalan alternatif untuk proses distribusi. Sehingga tidak ada keterlambatan untuk distribusi soal ujian SBMPTN.

2.5 Hasil Penelitian *Rainbow Connection*

Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, terkait koneksi pelangi yang dapat dijadikan sebagai rujukan pada penelitian ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 2.1: Hasil Penelitian *Rainbow Connection* Sebelumnya

Graf	Hasil	Keterangan
Complete Graph (K_n); $n \geq 2$	$rc(K_n) = 1$	Chartrand, dkk, 2008
Cycle Graph (C_n); $n \geq 4$	$rc(C_n) = \frac{n}{2}$	Chartrand, dkk, 2008
Tree Graph (T_n); $n \geq 2$	$rc(C_n) = m$	Chartrand, dkk, 2008
Wheel Graph (W_n); $n \geq 3$	$rc(W_n) = 1$, untuk $n = 3$ $rc(W_n) = 2$, untuk $4 \leq n \leq 6$ $rc(W_n) = 3$, untuk $n \geq 7$	Chartrand, dkk, 2008
Complete Graph $(K_{2,9})$	$rc(K_{2,9}) = 3$	Histamedika, 2012
Cycle Complement Graph $(\bar{C}_8)$	$rc(\bar{C}_8) = 2$	Wijaya, 2013
Handle Fan $(Kt_n); n \geq 2$	$rc(Kt_n) = 2$, untuk $n = 2$ $rc(Kt_n) = 3$, untuk $n \geq 3$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Spider Web $(Wb_n); n \geq 3$	$rc(Wb_n) = 3$, untuk $3 \leq n \leq 6$ $rc(Wb_n) = 4$, untuk $n = 7$ $rc(Wb_n) = 5$, untuk $n \geq 8$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Diamond Ladder $(Dl_n); n \geq 2$	$rc(Dl_n) = n + 1$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Flower Graph $(Fl_n); n \geq 2$	$rc(Fl_n) = 3$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Parachute Graph $(Pc_n); n \geq 2$	$rc(Pc_n) = n + 1$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Windmill Graph $(W_4^n); n \geq 2$	$rc(W_4^n) = 3$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Joint Graph $(P_n + C_n); n \geq 3$	$rc(P_n + C_n) = 2,$	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(C_n + S_n); n \geq 3$	$rc(C_n + S_n) = 2,$	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(P_n + W_n); n \geq 3$	$rc(P_n + W_n) = 2,$	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(C_n + W_n); n \geq 3$	$rc(C_n + W_n) = 2,$	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(S_n + W_n); n \geq 3$	$rc(S_n + W_n) = 2,$	Fajariyanto, 2015

Graf	Hasil	Keterangan
Cartesian Graph $(P_n \square W_m)$; $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n \square W_m) = n; m = 6$, $rc(P_n \square W_m) = n + 1$; $4 \leq m \leq 6$ $rc(P_n \square W_m) = n + 2$ $m \geq 6$	Fajariyanto, 2015
Graph Amal$(W_n, v = 1, r) \square P_2$; $n \geq 3; r \geq 3$	$rc(Amal(W_n, v = 1, r),$ $\square P_2) = 4$	Fajariyanto, 2015
Graph $P_n \otimes C_m; n \geq 3$	$rc(P_n \otimes C_m) = n$,	Fajariyanto, 2015
Graph $P_n[C_m]$; $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n[C_m]) = n - 1;$, $n - 1 \geq \frac{m}{2}$ $rc(P_n[C_m]) = 1; m = 3$; $n - 1 < \frac{m}{2}$ $rc(P_n[C_m]) = \frac{m}{2}$; $n - 1 < \frac{m}{2}; m$ genap $rc(P_n[C_m]) = \frac{m-1}{2} + 1$; $n - 1 < \frac{m}{2}; m$ ganjil> 3	Fajariyanto, 2015
Graph $P_n[W_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[W_m]) = 3; n = 3$, $rc(P_n[W_m]) = n - 1$; $n \geq 4$	Fajariyanto, 2015
Graph $P_n[S_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[S_m]) = 3; n = 3$, $rc(P_n[S_m]) = n - 1$; $n \geq 4$	Fajariyanto, 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif-aksiomatik dalam menyelesaikan masalah. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah.

3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf eksponensial dan beberapa operasi graf khusus. Graf khusus yang akan digunakan dalam penelitian ini antara lain yaitu graf lintasan, graf siklus, graf kincir, graf lengkap, dan graf prisma. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

a. Menentukan graf khusus yang akan dijadikan objek penelitian.

b. Menerapkan operasi graf pada graf khusus yang telah ditentukan.

c. Menentukan kardinalitas graf baru yang telah dibentuk.

d. Menerapkan *rainbow coloring* pada graf baru yang telah dibentuk.

e. Memeriksa keoptimalan $rc(G)$ dan $rc_2(G)$, apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan *rainbow coloring* pada graf baru yang telah dibentuk.

f. Menentukan fungsi berdasarkan keteraturan dari *rainbow coloring* sehingga didapatkan teorema.

g. Membuktikan teorema yang telah didapatkan.

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga dilihat dalam skema pada Gambar 3.1.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan, dapat disimpulkan sebagai berikut :

a. Kardinalitas titik dan sisi dari graf hasil operasi yang telah diperoleh antara lain yaitu $|V(C_3\square K_n)| = 3n$ dan $|E(C_3\square K_n)| = 3n+3(\frac{n(n-1)}{2})$, $|V(Wd_{(3,2)}\square K_n)| = 5n$ dan $|E(Wd_{(3,2)}\square K_n)| = 6n+5(\frac{n(n-1)}{2})$, $|V(K_4\square K_n)| = 4n$ dan $|E(K_4\square K_n)| = 6n+4(\frac{n(n-1)}{2})$, $|V(Pr_{4,n})| = 4n$ dan $|E(Pr_{4,n})| = 8n-4$, $|V(Wd_{n,2})| = 2n-1$ dan $|E(Wd_{n,2})| = \frac{n(n-1)}{2}$, $|V(C_4 \odot K_n)| = 4n+4$ dan $|E(C_4 \odot K_n)| = 2n^2+2n+4$, $|V(K_n \odot C_3)| = 4n$ dan $|E(C_4 \odot K_n)| = 6n + (\frac{n(n-1)}{2})$, .

b. *Rainbow connection* dari graf hasil operasi yang telah diperoleh antara lain yaitu $rc(C_3\square K_n) = 2$, $rc(Wd_{(3,2)}\square K_n) = 3$, $rc(K_4\square K_n) = 2$, $rc(Pr_{4,n}) = n+1$, $rc(Wd_{n,2}) = 2$, $rc(C_4 \odot K_n) = 4$, dan $rc(K_n \odot C_3) = 3$.

c. *Rainbow 2-connected* dari graf hasil operasi yang telah diperoleh antara lain yaitu $rc_2(C_3\square K_n) = 3$, $rc_2(Wd_{(3,2)}\square K_n) = 4$, $rc_2(K_4\square K_n) = 3$, $rc_2(Pr_{4,n}) = n+2$, $rc_2(Wd_{n,2}) = 3$, $rc_2(C_4 \odot K_n) = 5$, dan $rc_2(K_n \odot C_3) = 4$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *rainbow 2-connected* pada graf khusus, *cartesian product* dan *crown product* dari beberapa graf khusus yaitu dari graf siklus, lengkap, kincir dan prisma, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar melakukan penelitian tentang *rainbow 2-connected* pada graf hasil operasi yang lainnya serta melakukan penelitian mengenai karakteristik $rc(G)$ dengan $rc_2(G)$.

DAFTAR PUSTAKA

Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The Rainbow Connection Number of Special Graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ,* **1**(1):457-461.

Chartrand, G., G.L. Jhons, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. *Rainbow Connection in Graphs.* Jurnal : *Math. Bohem.*, **133**:85-98.

Dafik., Agustin, I., Fajariyanto, A. Alfarisi, R. 2016. *On the Rainbow Coloring for Some graph Operation.* University of Jember. Indonesia

Damayanti, R. T. 2011. Automorfisme graf bintang dan graf lintasan. *Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Brawijaya*, pages1-97.

Darmawan, R. N. dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number of Prism and Product of Two Graphs. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika SENDIKMAD UAD*, **1** (1):449-456.

Fajariyanto, A. 2015. *Penerapan Rainbow Connection pada Graf-Graf Hasil Operasi.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Harary, F. 2007. *Graph Theory.* New London : Wesley.

Harsya, A. Y., Agustin, I. H., and Dafik. 2014. Pewarnaan titik pada operasi graf lintasan, graf sikle dan graf bintang. *Posding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik FMIPA UNEJ*, **1** No.1:498-505.

Hartsfield, N. dan Rigel, G. 1994. Pearls in Graph Theory. *United Kingdom : Academic Press Limited.*

Histamedika, G. 2012. Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*, **2**:17-25.

Li, X. and Sun, Y. 2012. *Rainbow Connection of Graphs.* Tiajin: Springer Science.

Lin, Slamin, and Miller, M. 2001. *On d-Antimagic labeling of Antiprism.* University of New Castle. Australia.

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3.* Bandung : Informatika Bandung.

Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit.* Jakarta : PT. Ercontara Rajawali.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf.* Jember : Universitas Jember.

Susanti,B.H., Salman,A.N.M., dan Simanjuntak, R. 2015. Upper Bounds for Rainbow 2-Connectivity of the Cartesian Product of a Path and a Cycle. *International Conference on Graph Theory and Information Security*, **74**:151-154.

Syafrizal, Sy., dan Estetikasari, Dewi. 2013. On Rainbow Connection for Some Corona Graphs. *Applied Mathematical Sciences*,**7** (100):4975-4979.

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit Edisi 2.* Yogyakarta : Graha Ilmu.

Wijaya, R. 2013. Bilangan Rainbow Connection untuk Graf Komplemen. *Matematika UNAD*, **2**:9-12.

Yulianti, A. dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number pada Operasi Graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, **1**(1):521-525.