IDENTITAS WARD-TAKAHASHI, SLAVNOV-TAYLOR DAN BRST DALAM KONDISI GAUGE UMUM

SKRIPSI

Diajukan Untuk memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program
Sarjana Sains Jurusan Fisika Fakultas Matematika
dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jemben

Oleh :

Endhah Purwandari
NIM. 9918 1020 1019

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
MEI 2003

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Februari 2003 sampai dengan bulan Mei 2003 di Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember. Bersama ini saya menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Mei 2003
Endhah Purwandari

MOTTO

" Pilihan bukanlah segala-galanya, tetapi ketekunanlah yang menentukan sebuah kesuksesan."

(Endhah, 2003)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Kupersembahkan skripsi ini kepada:

- *Allah SWT* Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang
- Rasulullah *Muhammad SAW*, semoga shalawat dan salam senantiasa tercurahkan selalu kepadanya
- Ayahanda Almarhum *Bagus Subiantoro* dan Ibunda *Widarsih Khurniati* yang sangat kucintai
- Adik-adikku, *Fajar Dwi Saksana* dan *Tri Saktika Aji,* yang kusayangi
- *Hery Purnomo*, kesabaran dan keteguhan hatimu adalah semangat dalam hidupku
- *Bapak Drs. Sujito, Ph. D.* yang telah memberikan motivasi besar dalam penyelesaian studiku
- *Bapak Sutisna SPd., M. Si.* yang selalu perhatian dan pengertian selama masa bimbingan
- Almamaterku, *Fakultas MIPA Jurusan Fisika Universitas Jember*, yang kubanggakan

ABSTRAK

Identitas Ward-Takahashi, Slavnov-Taylor dan BRST Dalam Kondisi Gauge Umum (Endhah Purwandari, 991810201019, Skripsi, Bulan Mei, Tahun 2003, Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember)

Invariannya Lagrangian medan bebas terhadap transformasi gauge menghasilkan identitas Ward-Takahashi untuk kasus Abelian, sedangkan pada kasus non-Abelian dihasilkan identitas Slavnov-Taylor dan BRST. Dalam teori medan kuantum, identitas ini memegang peranan penting karena mengandung informasi tentang transversalitas energi diri dari medan gauge. Di dalam makalah ini, ketiga identitas tersebut telah diturunkan pada kondisi gauge umum yang mewakili gauge Lorentz, Axial dan Fock-Schwinger. Penerapan kondisi gauge umum khususnya untuk gauge Lorentz pada teori medan gauge non-Abelian, mengakibatkan munculnya kesulitan dalam menuliskan identitas Slavnov-Taylor ke bentuk yang lebih sederhana. Dengan adanya transformasi BRST, kesulitan untuk merumuskan identitas Slavnov-Taylor dapat teratasi, sehingga dapat dirumuskan suatu bentuk identitas yang dituliskan dalam bentuk gauge umum dan untuk selanjutnya dikenal sebagai identitas BRST. Namun untuk kondisi gauge Axial dan Fock-Schwinger ternyata perumusan identitas Slavnov-Taylor dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih sederhana.

Kata kunci: Identitas Ward-Takahashi, Identitas Slavnov-Taylor, Identitas BRST, Kondisi Gauge Umum

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada

Hari : JUM'AT

Tanggal : 27 JUN 2003

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji,

Dosen Pembimbing Utama	Dosen Pembimbing Anggota
(Sutisna, SPd., M.Si.)	**(Drs. Sujito, Ph.D.)**
NIP. 132 257 929	**NIP. 131 756 172**
Penguji I	Penguji II
(Dra. Arry Y. Nurhayati, M.Sc.)	**(Dra. Nanik Yulianti, M.Si.)**
NIP. 131 577 293	**NIP. 132 162 508**

Mengesahkan,

Dekan F MIPA Universitas Jember

(Ir. Sumadi, MS.)
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur Penulis panjatkan kehadirat Allah SWT Yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang, sebab hanya karena rakhmat dan ridlo-Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Skripsi yang berjudul *"Identitas Ward-Takahashi, Slavnov-Taylor dan BRST dalam Kondisi Gauge Umum"* ini disusun guna memenuhi persyaratan penyelesaian program sarjana sains Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jasa dan peranan Bapak Sutisna, SPd., MSi. selaku dosen pembimbing utama dan Bapak Drs. Sujito, Ph.D selaku dosen pembimbing anggota tidak dapat diukur dalam penulisan skripsi ini. Kejelian, kecermatan, kesabaran dan kesungguhannya sebagai dosen pembimbing patut untuk diteladani. Melalui skripsi ini, dengan rasa hormat penulis sampaikan terima kasih dan penghargaan yang tiada berhingga serta permohonan maaf kepada beliau. Kepada semua pihak yang telah membantu proses penulisan ini tidak lupa penulis ucapkan terima kasih. Semoga jasa dan amalan beliau semua mendapatkan pahala yang sepadan dari Allah Yang Maha Pemurah.

Akhirnya Penulis berharap, penelitian ini dapat memberikan kontribusi terhadap kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang Fisika Teoretik.

Jember, Mei 2003

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR APENDIKS

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori medan kuantum, pada prinsipnya merupakan suatu generalisasi dari mekanika kuantum benda titik dengan menjadikan banyaknya titik menjadi tak berhingga. Akibatnya, teori Hamilton-Lagrange yang digunakan untuk menyatakan dinamika dari benda titik dapat dipakai dalam teori medan kuantum asalkan kita menggunakan rapat fungsi Lagrange (selanjutnya disebut Lagrangian) dan rapat fungsi Hamilton (Hamiltonian).

Interaksi antar partikel di dalam teori medan kuantum direpresentasikan oleh suatu medan yang dinamakan medan gauge (medan tera). Foton atau medan elektromagnetik merupakan medan gauge yang merepresentasikan interaksi antar partikel bermuatan listrik di dalam elektrodinamika. Gluon adalah medan gauge yang merepresentasikan interaksi antar quark, sedangkan boson W^+, W^-, dan Z adalah medan-medan gauge yang merepresentasikan interaksi lemah. Salah satu ciri yang dimiliki medan gauge adalah adanya kebebasan untuk memasukkan suatu kondisi ekstra padanya. Kondisi ini dinamakan kondisi gauge. Kondisi gauge Lorentz merupakan kondisi gauge yang sangat dikenal. Dengan kondisi ini ungkapan persamaan Maxwell di dalam fungsi potensial menjadi lebih sederhana. Kondisi gauge lainnya yang tidak kalah pentingnya adalah kondisi gauge Axial dan Fock-Schwinger. Kondisi gauge memegang peranan penting di dalam teori medan kuantum karena banyak aspek di dalam teori medan yang sangat bergantung pada bentuk kondisi gauge.

Hal lain yang tidak kalah pentingnya di dalam teori medan kuantum adalah fungsional pembangkit (generating functional)[1],

$$Z[J,\overline{\eta}]=\int \mathcal{D}[A,\psi]\Delta[A]\exp\left(i\int \mathcal{L}\,\mathrm{d}x\right) . \tag{1.1}$$

Fungsional ini menggambarkan amplitudo transisi dari suatu keadaan awal ke keadaan akhir dan ekivalen dengan harga ekspektasi dari suatu keadaan vakum ke keadaan vakum lain. Pada notasi di atas, J dan $\overline{\eta}$ menyatakan sumber eksternal bagi medan gauge A_μ dan medan-medan partikel ψ. $\mathcal{L}$ adalah Lagrangian dari sistem yang bersangkutan dan dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{gf} + J\,A + \overline{\eta}\,\psi \,. \tag{1.2}$$

Disini $\mathcal{L}_0$ menyatakan Lagrangian bagi sistem yang bebas, $\mathcal{L}_{gf}$ suku yang menggambarkan kondisi gauge yang dipilih dan dua suku terakhir adalah suku sumber eksternal. *"Integral Measure"* dinyatakan oleh $\mathcal{D}[A,\psi] = \prod_{x,a,\mu} dA_\mu^a(x)\,d\psi(x)$ sedangkan fungsional

$$\Delta[A] = \left\{ \int d\theta\,\delta\left[G^\mu\, A_\mu{}^{(\theta)}\right] \right\}^{-1} \tag{1.3}$$

diperkenalkan pertama kali oleh Faddeev-Popov[2] agar supaya kedivergenan Z yang muncul sebagai akibat dari invariannya Lagrangian $\mathcal{L}$ terhadap transformasi gauge infinitesimal

$$A_\mu^a \to A_\mu{}^{(\theta)a} = A_\mu^a - g\,f^{abc}\,A_\mu^b\,\Lambda^c - \partial_\mu\,\Lambda^a$$

$$\psi \to \psi' = (1 - i\,g\,\Lambda)\psi \tag{1.4}$$

bisa dikeluarkan. Dalam notasi (1.3), kondisi gauge

$$G^\mu\,A_\mu = 0 \tag{1.5}$$

telah dipilih.

Dari persamaan (1.1) tampak bahwa fungsional Z tidak berubah terhadap sembarang transformasi medan. Jika transformasi gauge yang dipilih sebagai transformasi medan maka invariannya $\mathcal{L}_0$ terhadap transformasi ini menyebabkan timbulnya suatu identitas yang dinamakan identitas Ward-Takahashi[3,4] (WT) dan dalam bentuk variabel-variabel medan $(A_\mu, \psi, \overline{\psi})$ dinyatakan dengan

$$-\frac{\Box}{\lambda} i\partial^\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu} - i\partial_\mu J^\mu + e\frac{\delta W}{\delta \eta}\eta - e\frac{\delta W}{\delta \overline{\eta}}\overline{\eta} = 0 \,. \tag{1.6}$$

Rumusan di atas merupakan bentuk identitas untuk teori medan gauge Abelian dengan $\Box$ adalah operator *d'Alembertian*, λ konstanta sembarang, e menunjukkan muatan dari medan materi dan W adalah fungsional pembangkit untuk fungsi Green tersambung. Sedangkan untuk teori medan gauge non-Abelian didapatkan identitas

$$\int dx\left[\frac{\delta}{i\delta K^{a}}+\int dy\, J^{b\mu}(y)D_{\mu}^{bc}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)M^{-1ca}\left(x,y,\frac{\delta}{i\delta J}\right)\right]Z=0\,, \qquad (1.7)$$

dengan $M^{ca}=\partial^{\mu}D_{\mu}^{ca}\,\delta(x-y)$ dan D_{μ}^{ca} merupakan turunan kovarian. Rumusan di atas disebut sebagai identitas Slavnov-Taylor[2,4,5] (ST). Selain itu didapatkan pula bentuk identitas lain yaitu identitas Becchi-Rouet-Stora-Tyutin[4,6] (BRST) yang masih digolongkan ke dalam teori medan gauge non-Abelian yang berbentuk

$$\int dx\left[J^{a\mu}\frac{\delta W}{\delta u^{a\mu}}+\frac{\delta W}{\delta K^{a}}\xi^{a}-\xi^{*a}\frac{\delta W}{\delta v^{a}}-\overline{\eta}\frac{\delta W}{\delta\overline{\omega}}+\frac{\delta W}{\delta\omega}\overline{\eta}\right]=0 \qquad (1.8)$$

dengan $u^{a\mu}, \xi^{a}, v$ dan ω adalah sumber-sumber eksternal dari medan yang bersangkutan. Semua hasil identitas di atas hanya diturunkan dalam kondisi gauge Lorentz saja. Identitas-identitas di atas memegang peranan yang sangat penting di dalam teori medan kuantum karena mengandung informasi tentang sifat transversalitas dari energi diri medan gauge.

Di dalam skripsi ini, identitas-identitas tersebut akan diturunkan pada kondisi gauge umum $G^{\mu}A_{\mu}=0$, yang mewakili kondisi gauge Lorentz, Axial, dan Fock-Schwinger. Disamping itu juga akan dikaji bagaimana kebergantungannya pada gauge yang dipilih dan kandungan informasi/arti fisis dari identitas yang kita dapatkan.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan menjadi bahasan dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimanakah bentuk umum perumusan identitas WT, ST, dan BRST yang mewakili penggunaan kondisi gauge Lorentz, Axial, dan Fock-Schwinger ?
2. Bagaimanakah kebergantungan identitas WT, ST, dan BRST terhadap kondisi gauge yang dipilih ?
3. Informasi/arti fisis apa yang terkandung dalam identitas WT, ST, dan BRST dengan adanya penerapan kondisi gauge umum ?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, mengingat masalah waktu maka permasalahan yang diangkat akan Penulis batasi hanya untuk sistem medan fermion saja.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari bentuk umum perumusan identitas WT, ST, dan BRST untuk penggunaan kondisi gauge Lorentz, Axial, dan Fock-Schwinger.
2. Melihat kebergantungan identitas WT, ST, dan BRST terhadap kondisi gauge yang dipilih.
3. Mencari kandungan informasi/arti fisis dari identitas-identitas yang didapatkan.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah untuk memberikan sumbangan pemikiran dalam bidang fisika teori terutama yang menyangkut permasalahan mengenai bentuk yang lebih umum dari perumusan identitas dalam teori medan kuantum yang bisa mencakup penerapan pada beberapa kondisi gauge.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Notasi Relativistik

Dalam tinjauan relativistik, keadaan sebuah partikel pada suatu ruang tertentu tidak lagi dinyatakan dalam tiga vektor dimensional, akan tetapi diberikan dalam empat vektor dimensional yaitu dalam x, y, z, dan t. Keempat vektor dimensional di atas sering disebut sebagai ruang Euclidean[7].

Sebuah titik dalam koordinat kartesian dapat dituliskan sebagai

$$x^{\mu} = (x^0, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

$$x_{\mu} = (x_0, -\vec{r}) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z). \tag{2.1}$$

Dari bentuk penulisan di atas, kita dapat nyatakan interval antara dua buah titik dalam ruang waktu sebagai berikut

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=0}^{3} dx^{\mu}\, dx_{\mu} \\ &= dx^0\, dx_0 + dx^1\, dx_1 + dx^2\, dx_2 + dx^3\, dx_3 \\ &= c^2\, dt^2 - (\, dx^2 + dy^2 + dz^2\,)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dalam vektor empat ini x^{μ} disebut sebagai vektor kontravarian sedangkan x_{μ} disebut sebagai vektor kovarian[1].

Jika harga $ds^2>0$ maka dikatakan sebagai interval *timelike*, perpindahan dua buah titik tinjauan terjadi pada kedudukan yang sama. Jika harga $ds^2<0$ maka peristiwa yang terjadi memiliki interval *spacelike*, pergerakan dua buah titik tinjauan terjadi pada saat yang sama. Jika $ds^2=0$ maka dapat dinyatakan bahwa dua buah peristiwa yang terjadi, salah satunya bergerak relatif terhadap yang lainnya dengan kecepatan cahaya. Dalam hal ini ds disebut sebagai interval *lightlike*[1,8].

Bentuk interval diatas merupakan somasi Einstein yang dapat pula dituliskan sebagai[1]

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu \ , \tag{2.3}$$

dan penulisan $dx^\mu dx_\mu$ sama artinya dengan $\sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu$ [1].

Untuk menghubungkan x^μ dan x_μ, dalam hal ini diperkenalkan sebuah tensor metrik $g_{\mu\nu}$ atau $g^{\mu\nu}$ yang memenuhi[1]:

$$\begin{aligned} x^\mu &= g^{\mu\nu} x_\nu \ , \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1) pada persamaan (2.4) diperoleh komponen vektor dari tensor metrik $g_{\mu\nu}$ dan $g^{\mu\nu}$ sebagai berikut:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{2.5}$$

Setelah kita mengetahui bentuk vektor posisi dalam notasi relativistik, sekarang kita definisikan penulisan baru dari operator differensial untuk orde 1 dan orde 2.

- Operator differensial orde pertama dinyatakan oleh[1]

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \tag{2.6}$$

- Operator differensial orde kedua diberikan oleh[1]

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \ . \tag{2.7}$$

Tanda $\Box$ disebut sebagai *operator d'Alembertian*[1].

Untuk menghubungkan ∂^{μ} dan ∂_{μ}, kita juga dapat menggunakan tensor metrik $g_{\mu\nu}$ atau $g^{\mu\nu}$ dalam rumusan

$$\partial^{\mu} = g^{\mu\nu}\,\partial_{\nu} \qquad \partial_{\mu} = g_{\mu\nu}\,\partial^{\nu}, \tag{2.8}$$

Besaran fisika lain yang dituliskan dalam notasi relativistik adalah vektor empat energi-momentum dari sebuah partikel yang dinyatakan sebagai

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad , \quad p_{\mu} = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \tag{2.9}$$

Bentuk kuadrat dari vektor empat energi–momentum ini menghasilkan suatu tetapan dan dengan mengambil sistem satuan $c=1$ kita peroleh

$$p^2 = p^{\mu}\, p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}.\vec{p} = m^2 c^2, \tag{2.10}$$

$$p^2 = E^2 - p^2 = m^2\ . \tag{2.11}$$

Notasi m dalam persamaan di atas menyatakan massa partikel.

2.2 Bentuk-Bentuk Transformasi Gauge

Lagrangian dari suatu sistem yang menyatakan dinamika dari suatu medan, yaitu kumpulan partikel yang tak berhingga banyaknya, memungkinkan mengalami sebuah transformasi medan. Jika transformasi medan (selanjutnya disebut transformasi gauge) yang diberikan secara fisis tidak membuat Lagrangian mengalami perubahan maka dikatakan Lagrangian tersebut bersifat invarian.

Secara umum ada dua jenis transformasi gauge yakni transformasi gauge jenis pertama dan transformasi gauge jenis kedua. Jika parameter transformasi yang diberikan hanya berupa bilangan real dan berlaku sama untuk setiap titik dari sebuah sistem dalam ruang-waktu, maka transformasi ini dikenal sebagai transformasi gauge global dan merupakan transformasi gauge jenis pertama. Sedangkan untuk transformasi gauge jenis kedua dilakukan dengan mengambil parameter transformasi yang digunakan sebagai fungsi ruang dan waktu. Transformasi gauge jenis ini dikenal sebagai transformasi gauge lokal.

Keunikan bentuk muncul ketika suatu sistem mengalami sebuah transformasi yang ternyata bersesuaian dengan rotasi dua dimensi dan tergolong kedalam grup ortogonal O(2). Bentuk transformasi semacam ini pada umumnya bersifat Abelian. Perluasan dari kasus ini terjadi pada suatu sistem yang memiliki simetri yang lebih tinggi dari O(2) yaitu yang tergolong dalam grup ortogonal tiga dimensi O(3). Akibatnya, transformasi gauge yang dilakukan nantinya tidak lagi bersifat komut. Transformasi gauge semacam ini dikatakan bersifat non-Abelian.

Dengan demikian dapat kita katakan bahwa Lagrangian dari suatu sistem disebut invarian apabila bentuknya tidak berubah setelah mengalami transformasi gauge global ataupun transformasi gauge lokal baik untuk kasus Abelian maupun non-Abelian.

2.3 Medan Fermion

Bahasan mengenai teori medan gauge banyak diterapkan dalam elektrodinamika partikel bermuatan. Selanjutnya akan kita tinjau elektrodinamika dari fermion-fermion bermuatan Qe (untuk elektron Q=-1) dengan massa m, yang dinyatakan oleh medan Dirac ψ. Lagrangian untuk sistem ini adalah

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi \quad , \tag{2.12}$$

dengan $\overline{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0}$, γ^{0} dan γ^{μ} merupakan matriks gamma Dirac yang memenuhi hubungan $\gamma^{\mu} = \left(\gamma^{0}, \gamma^{i}\right)$. Jika kita masukkan Lagrangian (2.12) pada persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_{\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\overline{\psi}\right)}\right] = 0 \tag{2.13}$$

maka diperoleh hubungan

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0 \ . \tag{2.14}$$

yang disebut sebagai 'persamaan Dirac'.

Selanjutnya kita akan melihat bagaimana medan fermion dalam ungkapan Lagrangian (2.12) invarian terhadap transformasi gauge global dan lokal baik pada kasus Abelian maupun non-Abelian.

2.3.1 Transformasi Gauge Medan Fermion Untuk Kasus Abelian

Transformasi dari medan fermion untuk kasus Abelian dilakukan dengan mengambil θ sebagai parameter transformasi dan Q sebagai muatan partikel yang murni berupa bilangan sehingga bersifat komut. Bentuk Transformasinya diberikan oleh

$$\psi \rightarrow \exp(-iQ\theta)\psi \quad . \tag{2.15}$$

Kumpulan dari transformasi ini membentuk grup U(1).

Pada transformasi jenis pertama, parameter transformasi θ hanya berupa bilangan real sehingga dapat dibuktikan bahwa Lagrangian (2.12) invarian terhadap transformasi ini (lihat Apendiks A).

Selanjutnya, jika kita terapkan transformasi gauge lokal pada Lagrangian (2.12) dengan parameter transformasi θ sebagai fungsi dari x maka dihasilkan Lagrangian yang tidak invarian terhadap transformasi gauge jenis kedua. Untuk mendapatkan Lagrangian yang invarian terhadap transformasi ini, berdasarkan prinsip gauge kita harus tambahkan suku lain pada Lagrangian (2.12) dan ternyata Lagrangian yang sesuai adalah

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \overline{\psi}\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + iQeA_{\mu}\right) - m\right]\psi \ , \tag{2.16}$$

dengan e adalah kekuatan kopling antara ψ dan A_{μ}, $F^{\mu\nu}$ adalah tensor medan elektromagnetik yang didefinisikan oleh

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \tag{2.17}$$

dan A^{μ} adalah potensial medan elektromagnetik yang bertransformasi sebagai berikut:

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} + \frac{1}{e}\partial^{\mu}\theta \,. \qquad (2.18)$$

Bukti invariannya (2.16) terhadap transformasi gauge lokal Abelian dapat dilihat pada bagian Apendiks A. Dari sini kita dapat simpulkan bahwa kita dapat memperoleh Larangian yang invarian di bawah transformasi gauge lokal dari Lagrangian yang invarian terhadap transformasi gauge global melalui penggantian

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + iQeA_{\mu} \quad , \qquad (2.19)$$

yang merupakan turunan kovarian dan memenuhi $[D_{\mu}, D_{\nu}] = iQeF^{\mu\nu}$.

2.3.2 Transformasi Gauge Medan Fermion Untuk Kasus non-Abelian

Pada bagian sebelumnya, telah diberikan Lagrangian untuk elektrodinamika kuantum yang diperoleh dari prinsip gauge Abelian dengan muatan listrik Q memenuhi aljabar komut (Abelian) yang bersesuaian dengan grup U(1). Untuk selanjutnya, akan diperluas pada kasus non-Abelian, yaitu untuk aljabar tidak komut, yang disebut sebagai Teori Yang-Mills (teori medan gauge non-Abelian).

Kita tinjau medan fermion $\psi(x)$ dengan massa m yang mempunyai representasi fundamental berdimensi N dari grup G, sehingga medan $\psi(x)$ mempunyai N komponen, $\psi_i(x)$, i = 1,2,3,... N. Bentuk transformasi medan $\psi(x)$ adalah

$$\psi_i' = U_{ij}\psi_j \quad , \quad U = \exp\left(-iT^a\theta^a\right), \qquad (2.20)$$

dengan

θ^a adalah parameter transformasi,

$T^a = \dfrac{\tau^a}{2}$, $a = 1, 2, \ldots n$ adalah generator pembangkit dari grup G.

Jika kita terapkan transformasi gauge global non-Abelian pada Lagrangian (2.12) maka dapat dibuktikan sifat invarian persamaan tersebut (lihat Apendiks A). Dalam hal ini, parameter transformasi θ^a berupa konstanta real.

Sedangkan dibawah transformasi gauge lokal non-Abelian dengan parameter transformasi θ^{a} sebagai fungsi dari x, Lagrangian (2.12) tidak bersifat invarian. Kita dapat menebak bentuk Lagrangian yang invarian melalui analogi dari persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - i g T^{a} A_{\mu}^{a} \quad , \tag{2.21}$$

dimana g adalah kekuatan kopling antara ψ dan A_{μ}^{a} yang ekivalen dengan e pada kasus Abelian dan A_{μ}^{a} medan gauge yang ekivalen dengan A_{μ} pada kasus Abelian. Sehingga melalui penurunan yang dapat dilihat pada Apendiks A diperoleh bentuk umum Lagrangian yang invarian di bawah transformasi gauge lokal non-Abelian sebagai berikut[9]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{a} F^{a\mu\nu} + \overline{\psi}\left(i \gamma^{\mu} D_{\mu} - m\right)\psi \quad , \tag{2.22}$$

dengan

$$F_{\mu\nu}^{a} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{a} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{a} + g f^{abc} A_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} \quad , \tag{2.23}$$

yang merupakan tensor kuat medan untuk medan gauge non-Abelian, dan analog dengan tensor medan elektromagnetik untuk kasus Abelian.

2.4 Metode Integral Lintas

Pada bagian ini akan ditunjukkan fenomena transisi dalam sebuah sistem kuantum yang terangkum dalam tinjauan amplitudo transisi. Dari sini nanti, akan diturunkan perumusan fungsional pembangkit yang akan diperluas untuk beberapa medan gauge.

2.4.1Tinjauan Amplitudo Transisi

Fenomena transisi dari suatu keadaan ke keadaan lain dalam sebuah sistem kuantum (non-relativistik) diwakili oleh suatu kuantitas yang disebut sebagai 'Amplitudo Transisi'. Keadaan ini dilambangkan oleh $|q\rangle$ yang memenuhi persamaan eigen dalam gambaran Schrodinger,

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle \quad , \tag{2.24}$$

dengan q adalah harga eigen dari operator posisi $\hat{Q}$.

Untuk keadaan kuantum yang berubah terhadap waktu maka definisikan

$$|qt\rangle = e^{i\hat{H}t}|q\rangle, \tag{2.25}$$

$$\langle qt| = \langle q|e^{-i\hat{H}t}, \tag{2.26}$$

dengan $\hat{H}$ adalah operator Hamiltonian yang secara eksplisit tidak bergantung pada waktu. Untuk menyatakan amplitudo transisi dari keadaaan $|q_i t_i\rangle$ pada waktu t_i ke keadaaan $|q_f t_f\rangle$ pada waktu t_f dapat kita tuliskan dengan menggunakan persamaan (2.25) dan (2.26) sebagai berikut:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i\rangle = \langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i\rangle \quad . \tag{2.27}$$

Jika kita ambil keadaan kuantum (2.27) untuk transisi waktu yang relatif sempit, maka dapat dilakukan dengan membuat interval waktu t_f-t_i menjadi *(n+1)* bagian dengan tiap-tiap bagiannya mempunyai nilai yang sama τ. Sehingga untuk $\tau \to 0$ (atau $n \to \sim$) persamaan (2.27) menjadi

$$\langle q_f t_f | q_i t_i\rangle = \lim_{n\to\sim} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \langle q_f t_f | q_n t_n\rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1}\rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i\rangle . \tag{2.28}$$

Sekarang kita tinjau amplitudo transisi untuk satu segmen waktu

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j\rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\tau} | q_j\rangle \\
&= \langle q_{j+1} | 1 - i\hat{H}\tau - O(\tau^2) | q_j\rangle \\
&= \langle q_{j+1} | q_j\rangle - i\tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j\rangle \\
&= \delta(q_{j+1} - q_j) - i\tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dp_j \exp[i p (q_{j+1} - q_j)] - i\tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j\rangle \quad ,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

dengan $\tau = t_{j+1} - t_j$.

Kita tahu bahwa operator Hamiltonian $\hat{H}$ dalam persamaan (2.29) secara eksplisit merupakan fungsi dari operator momentum $\hat{p}$ dan posisi $\hat{Q}$,

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V\left(\hat{Q}\right) . \tag{2.30}$$

Oleh karenanya, elemen matriks pada persamaan (2.29) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\left\langle q_{j+1}\right|\frac{\hat{p}^2}{2m}\left|q_j\right\rangle &= \int dp'dp\left\langle q_{j+1}\middle|p'\right\rangle\left\langle p'\right|\frac{p^2}{2m}\left|p\right\rangle\left\langle p\middle|q_j\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int dp'dp\exp\left[i\left(p'q_{j+1}-pq_j\right)\right]\frac{p^2}{2m}\delta\left(p'-p\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int dp\exp\left[i\,p\left(q_{j+1}-q_j\right)\right]\frac{p^2}{2m}\end{aligned} \tag{2.31a}$$

dan

$$\begin{aligned}\left\langle q_{j+1}\right|V\left(\hat{Q}\right)\left|q_j\right\rangle &= V(q)\left\langle q_{j+1}\middle|q_j\right\rangle \\ &= V(q)\delta\left(q_{j+1}-q_j\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int dp\exp\left[i\,p\left(q_{j+1}-q_j\right)\right]V(q) \quad ,\end{aligned} \tag{2.31b}$$

dengan mengingat bahwa

$$\int dp'\left|p'\right\rangle\left\langle p'\right|=1 \qquad \text{dan} \qquad \int dp\left|p\right\rangle\left\langle p\right|=1 .$$

Kita substitusikan (2.31a) dan (2.31b) ke dalam (2.29), sehingga didapatkan bentuk:

$$\begin{aligned}\left\langle q_{j+1}\right|\hat{H}\left|q_j\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int dp\exp\left[i\,p\left(q_{j+1}-q_j\right)\right]\left(\frac{p^2}{2m}+V(q)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int dp\exp\left[i\,p\left(q_{j+1}-q_j\right)\right]\,H\left(p,q\right) \quad ,\end{aligned} \tag{2.32}$$

dimana $H\left(p,q\right)=\dfrac{p^2}{2m}+V\left(q\right)$.

Akhirnya persamaan (2.29) menjadi

$$\left\langle q_{j+1}\middle|q_j\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int dp_j\exp\left\{i\left[p_j\left(q_{j+1}-q_j\right)-\tau H\left(p_j,q_j\right)\right]\right\} \quad , \tag{2.33}$$

dengan p_j adalah momentum dalam selang waktu t_j dan t_{j+1} . Oleh karena ungkapan di atas hanya menyatakan propagator untuk satu semen saja, maka untuk memperoleh propagator total dapat dilakukan dengan mensubstitusikan (2.33) ke (2.28) dan didapatkan

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=0}^{n} \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left\{ i \sum_{j=0}^{n} \left[p_j \left(q_{j+1} - q_j \right) - \tau H \left(p_j , q_j \right) \right] \right\} . \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) dapat pula dituliskan dalam bentuk

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\, \mathcal{D}p}{2\pi} \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p\dot{q} - \tau H(p,q) \right] \right\} , \quad (2.35)$$

dimana

$$\mathcal{D}q = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \quad , \quad \mathcal{D}p = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dp_j \quad , \quad q(t_i) = q_i \text{ dan } q(t_f) = q_f .$$

Persamaan (2.35) merupakan integral lintas untuk amplitudo transisi dari keadaan kuantum (q_i,t_i) ke keadaan kuantum (q_f,t_f). Integral yang digunakan merupakan integral fungsional yang dapat dioperasikan terhadap semua fungsi dan oleh karenanya berdimensi tak hingga. Jika kita jabarkan H dalam bentuk eksplisitnya, maka persamaan (2.34) akan menjadi

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=0}^{n} \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left\{ i \sum_{j=0}^{n} \left[p_j \left(q_{j+1} - q_j \right) - \frac{\tau}{2m} p_j^2 - V\tau \right] \right\}$$

.... (2.36)

Jika kita terapkan identitas berikut

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-ax^2 + bx + c \right) = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c \right) \quad (2.37)$$

maka persamaan (2.37) menjadi

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi\tau} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \exp\left\{ i\tau \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} - V \right) \right] \right\}$$

$$= N \int \mathcal{D}q \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q}) dt \right], \quad (2.38)$$

dengan $L = T - V$ adalah Lagrangian klasik.

2.4.2 Fungsional Pembangkit

Kita telah mengenal bentuk amplitudo transisi yang mewakili keadaan kuantum sebuah sistem. Propagator yang telah diberikan dapat dituliskan ke dalam bentuk yang lebih rapi dan sederhana dengan menggunakan turunan fungsional terhadap sumber eksternal. Bentuk ini terangkum ke dalam sebuah bentuk integral fungsional sebagai fungsi dari sumber eksternal.

Untuk merumuskan integral fungsional ini, kita awali dari penjabaran propagator (2.28), disebut juga sebagai *kernel* atau fungsi Green, pada sebuah operator $\hat{Q}$ pada waktu t_{n_1}, untuk $t_i < t_{n_1} < t_f$ dan dipilih $t_1, \ldots, t_n$. Harga ekspektasinya diberikan oleh

$$\begin{aligned}\langle q_f t_f | \hat{Q}(t_{n_1}) | q_i t_i \rangle = \lim_{n \to \infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \\ \ldots \langle q_{n_1} t_{n_1} | \hat{Q}(t_{n_1}) | q_{n_1 -1} t_{n_1 -1} \rangle \\ \ldots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle \end{aligned} \qquad (2.39)$$

Kita dapat menuliskan kuantitas $\langle q_{n_1} t_{n_1} | \hat{Q}(t_{n_1}) | q_{n_1 -1} t_{n_1 -1} \rangle$ ke dalam bentuk $q(t_{n_1}) \langle q_{n_1} t_{n_1} | q_{n_1 -1} t_{n_1 -1} \rangle$, dengan $q(t_{n_1})$ adalah besaran skalar. Dengan mengambil analogi dari penurunan persamaan (2.28) sampai (2.35), maka diperoleh

$$\langle q_f t_f | \hat{Q}(t_1) | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{2\pi} q(t_1) \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p\dot{q} - H(p,q) \right] \right\} \qquad (2.40)$$

Jika kita perluas (2.40) untuk dua buah operator $\hat{Q}(t_{n_1})$ dan $\hat{Q}(t_{n_2})$ dimana $t_{n_1} > t_{n_2}$ maka diperoleh

$$\left\langle q_f t_f \left| \hat{Q}(t_{n_1}) \hat{Q}(t_{n_2}) \right| q_i t_i \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \left\langle q_f t_f \middle| q_n t_n \right\rangle \left\langle q_n t_n \middle| q_{n-1} t_{n-1} \right\rangle x$$

$$\ldots \left\langle q_{n_1} t_{n_1} \left| \hat{Q}(t_{n_1}) \right| q_{n_1-1} t_{n_1-1} \right\rangle$$

$$\ldots \left\langle q_{n_2} t_{n_2} \left| \hat{Q}(t_{n_2}) \right| q_{n_2-1} t_{n_2-1} \right\rangle$$

$$\ldots \left\langle q_1 t_1 \middle| q_i t_i \right\rangle. \qquad (2.41)$$

yang memberikan

$$\left\langle q_f t_f \left| \hat{Q}(t_1) \hat{Q}(t_2) \right| q_i t_i \right\rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\, \mathcal{D}p}{2\pi} q(t_1) q(t_2) \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p\dot{q} - H(p,q) \right] \right\} \qquad (2.42)$$

dengan $t_1 > t_2$.

Untuk kasus $t_2 > t_1$, ungkapan di atas tidaklah benar karena operasi dua operator belum tentu komut. Sehingga dalam hal ini diperlukan bentuk penulisan yang lebih kompleks untuk keadaan yang demikian. Perkenalkan T, yaitu '*time ordering product*', yang didefinisikan oleh

$$T\left[\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\right] = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2),\ jika\, t_1 > t_2 \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1),\ jika\, t_1 < t_2 \end{cases} \qquad (2.43)$$

Sehingga secara umum dituliskan

$$\left\langle q_f t_f \left| T\left[\hat{Q}(t_1) \ldots \hat{Q}(t_n)\right] \right| q_i t_i \right\rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\, \mathcal{D}p}{2\pi} q(t_1) \ldots q(t_n) \ x$$

$$\exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p\dot{q} - H(p,q) \right] \right\}$$

$$= N \int \mathcal{D}q\, q(t_1) \ldots q(t_n) \exp\left(i \int_{t_i}^{t_f} L\, dt \right) \qquad (2.44)$$

dengan $L = p\dot{q} - H$.

Untuk kehadiran sumber eksternal $j(t)$, amplitudo transisi menjadi

$$\left\langle q_f t_f \middle| q_i t_i \right\rangle^j = N \int \mathcal{D}q \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} \left[L(q,\dot{q}) + j(t) q \right] dt \right\}. \qquad (2.45)$$

Jika kita perhatikan, persamaan (2.45) mengandung fungsi sumber medan eksternal j sehingga dapat kita nyatakan ke dalam fungsi integral $Z[j]$ sebagai berikut:

$$Z[j]=\int \mathcal{D}q \exp\left\{ i\int_{t_i}^{t_f}\left[L(q,\dot{q})+j(t)q\right]dt\right\}. \tag{2.46}$$

Turunan dari integral fungsi terhadap n fungsi medan untuk keadaan bebas sumber ($j=0$) ternyata identik dengan propagator (2.44)

$$\left.\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(t_1)\ldots j(t_n)}\right|_{j=0} = i^n \int \mathcal{D}q\, q(t_1)\ldots q(t_n)\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f} L\,dt\right), \tag{2.47}$$

maka

$$\left\langle q_f t_f \left| T\left[\hat{Q}(t_1)\ldots\hat{Q}(t_n)\right]\right| q_i t_i\right\rangle \propto \frac{1}{i^n}\left.\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(t_1)\ldots\delta j(t_n)}\right|_{j=0}. \tag{2.48}$$

Ketika $t_f \to \infty$ dan $t_i \to -\infty$ maka amplitudo transisi dengan kehadiran sumber eksternal $j(t)$ didominasi oleh kontribusi dari vektor keadaan vakum $|0\rangle$. Jika $|0,t\rangle^j$ adalah vektor keadaan vakum (dalam kerangka bergerak) dengan kehadiran sumber eksternal j, maka amplitudo transisinya adalah[1]

$$Z[j]\infty\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^j. \tag{2.49}$$

Sehingga persamaan (2.47) menjadi

$$\left.\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(t_1)\ldots j(t_n)}\right|_{j=0} \propto i^n\left\langle 0,\infty\left|T\left[\hat{Q}(t_1)\ldots\hat{Q}(t_n)\right]\right|0,-\infty\right\rangle, \tag{2.50}$$

atau dituliskan sebagai

$$\left.\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(t_1)\ldots j(t_n)}\right|_{j=0} \propto i^n\left\langle 0\left|T\left[\hat{Q}(t_1)\ldots\hat{Q}(t_n)\right]\right|0\right\rangle. \tag{2.51}$$

Dari persamaan (2.50) dapat disimpulkan bahwa nilai ekspektasi vakum dari *'product urutan waktu'* n-buah operator $\hat{Q}(t)$ dapat diperoleh melalui differensiasi fungsional $Z[j]$. Dengan kata lain, integral fungsional $Z[j]$ dapat membangkitkan seluruh fungsi Green untuk keadaan vakum dan oleh karenanya disebut sebagai fungsional pembangkit[9].

Untuk menyatakan keadaan kuantum dari suatu sistem dalam rumusan relativistik dilakukan dengan melakukan penggantian

$$q(t)\to\phi(t,\vec{x})=\phi(x), \tag{2.52}$$

$$Q(t) \rightarrow \hat{\phi}(t, \vec{x}) = \hat{\phi}(x) \quad . \tag{2.53}$$

maka fungsional pembangkit dari medan $\phi(x)$ adalah

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left\{i \int \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + j\phi\right] dx\right\}. \tag{2.54}$$

Sedangkan turunan terhadap sumber eksternal adalah

$$\left.\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1) \ldots j(x_n)}\right|_{j=0} \propto i^n \langle 0 | T\left[\hat{Q}(x_1) \ldots \hat{Q}(x_n)\right] | 0 \rangle \quad . \tag{2.55}$$

Normalisasi $Z[j]$ dalam persamaan (2.54) mensyaratkan kondisi $Z[0]=1$[1].

Kita dapat menjabarkan fungsional pembangkit $Z[j]$ ke dalam bentuk deret Taylor sebagai berikut [1]

$$Z[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n \; j(x_1) \ldots j(x_n) \, \tau(x_1, \ldots x_n) \quad , \tag{2.56}$$

dengan

$$\tau(x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{i^n} \left.\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1) \ldots \delta j(x_n)}\right|_{j=0} = \langle 0 | T\left[\hat{\phi}(x_1) \ldots \hat{\phi}(x_n)\right] | 0 \rangle \quad , \tag{2.57}$$

yang disebut sebagai fungsi n-titik (fungsi Green), bersesuaian dengan persamaan (2.50) dalam kasus non relativistik.

Fungsi Green meliputi dua bagian yaitu bagian tersambung (fungsi Green connected) dan tak tersambung (disconnected) yang memenuhi hubungan

$$\tau(x_1, \ldots x_n) = \tau_c(x_1, \ldots x_n) + disc. \tag{2.58}$$

dengan

$$\tau_c = \frac{1}{i^n} \left.\frac{\delta^n W[j]}{\delta j(x_1) \ldots \delta j(x_2)}\right|_{j=0} \quad , \tag{2.59}$$

yang merupakan rumusan untuk fungsi Green tersambung. Pada ungkapan di atas $W[j]$ adalah fungsional pembangkit untuk fungsi Green tersambung, yang hubungannya dengan $Z[j]$ dinyatakan oleh

$$Z = e^{-iW} \quad . \tag{2.60}$$

Persamaan (2.87) dapat pula dituliskan dalam bentuk

$$Z[j] = \exp\left[-\frac{i}{2} \int dx \, dy \, j(x) \Delta(x, y) j(y)\right] \quad , \tag{2.61}$$

dengan $\Delta(x,y)$ didefinisikan oleh

$$\left(\square + m^2 - i\varepsilon\right)\Delta(x,y) = -\delta(x), \tag{2.62}$$

dan disebut sebagai *propagator Feynman*[11].

2.5 Medan Gauge

Seperti yang telah dipaparkan dalam pendahuluan bahwa interaksi antar partikel di dalam teori medan kuantum dinyatakan oleh suatu medan yang dinamakan medan gauge. Salah satu ciri yang dimiliki medan gauge adalah adanya kebebasan untuk memasukkan kondisi gauge.

Ada banyak macam gauge dalam teori medan kuantum, hanya tiga diantaranya yang akan dibahas nantinya, yaitu kondisi gauge Lorentz, Axial dan Fock-Schwinger. Ketiga macam kondisi gauge tersebut akan kita rangkum dalam bentuk kondisi gauge umum, $G^{\mu} A_{\mu} = 0$ dengan G^{μ} mempunyai nilai sebagai berikut:

1. Gauge Lorentz, $G^{\mu} = \partial^{\mu}$ sehingga

$$\partial^{\mu} A_{\mu} = 0 \tag{2.63a}$$

2. Gauge Axial, $G^{\mu} = n^{\mu}$ dengan n^{μ} konstanta vektor empat spacelike

$$n^{\mu} A_{\mu} = 0 \tag{2.63b}$$

3. Gauge Fock-Schwinger, $G^{\mu} = x^{\mu}$

$$x^{\mu} A_{\mu} = 0. \tag{2.63c}$$

Rumusan fungsional pembangkit secara umum telah diberikan dalam persamaan (2.54). Jika kita terapkan dalam kasus medan gauge $A_{\mu}^{a}(x)$, maka fungsional pembangkit yang serupa untuk kasus ini adalah

$$Z[J] = \int \mathcal{D} A_{\mu}^{a} \exp\left\{i \int dx \left[\mathcal{L}_o\left(A_{\mu}^{a}, \partial_{\mu} A_{\mu}^{a}\right) + J^{a\mu} A_{\mu}^{a}\right]\right\} , \tag{2.64}$$

dengan

$$\mathcal{L}_o = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{a} F^{a\mu\nu}. \tag{2.65}$$

Seperti dapat dilihat pada apendiks A, $\mathcal{L}_o$ bersifat invarian di bawah transformasi gauge infinitesimal

$$\delta A_\mu^a = A_\mu^{a\,\prime} - A_\mu^a = f^{abc}\,\theta^b\,A_\mu^c - \frac{1}{g}\partial^\mu \theta^a \quad , \tag{2.66}$$

dimana θ^b adalah parameter grup transformasi , f^{abc} adalah konstanta struktur dari grup tersebut dan g adalah konstanta kopling.

Akibat dari sifat invariansi medan gauge ini, fungsional pembangkit (2.64) tanpa sumber eksternal dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Z[0] = \int \mathcal{D} A^{(\theta)} \exp\left\{ i \int dx \left[\mathcal{L}_o \left(A^{(\theta)}, \partial_\mu A^{(\theta)} \right) \right] \right\} \tag{2.67}$$

dengan $A^{(\theta)}(x) = A_\mu^{\prime\,a}(x)$.

Integrasi terhadap $A^{(\theta)}$ pada persamaan (2.67) bersifat divergen karena adanya faktor volume gauge berderajat kebebasan tak hingga , $\int \prod_{x,a} d\theta^a(x)$. Faktor ini dapat dieliminasi dengan menambahkan fungsional Δ $[A]$ pada persamaan (2.67) yang berbentuk

$$\Delta[A] \int \mathcal{D}\theta\, \delta\left(G^\mu A_\mu^{(\theta)}\right) = 1 \quad , \tag{2.68}$$

yang diperkenalkan oleh Feddev-Popov dan terbukti bersifat invarian

$$\begin{aligned} \left(\Delta\left[A^{(\theta)}\right]\right)^{-1} &= \int \mathcal{D}\theta'\, \delta\left(G^\mu A_\mu^{(\theta'\theta)}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\theta'\theta\, \delta\left(G^\mu A_\mu^{(\theta'\theta)}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\theta''\, \delta\left(G^\mu A_\mu^{(\theta'')}\right) \\ &= \left(\Delta[A]\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Jika kita sisipkan fungsional (2.68) pada (2.67), $\int \mathcal{D}\theta$ dapat direduksi dengan terserapnya faktor ini ke dalam faktor normalisasi, sehingga fungsional pembangkit (2.67) menjadi

$$Z[0] = \int \mathcal{D} A\, \Delta[A]\, \delta\left(G^\mu \partial_\mu\right) \exp\left\{ i \int dx \left[\mathcal{L}_o \left(A, \partial_\mu A \right) \right] \right\} \quad , \tag{2.70}$$

dengan $\delta\left(G^\mu A_\mu\right)$ menyatakan kondisi gauge homogen seperti yang diberikan dalam persamaan (2.63).

Generalisasi fungsional pembangkit untuk kondisi gauge non homogen

$$\left(G^{\mu} A_{\mu}\right)=B(x) \quad , \tag{2.71}$$

dengan B adalah fungsi ruang-waktu sembarang yang tidak bergantung pada medan gauge, adalah

$$Z[0]=\int \mathcal{D}A\,\Delta[A]\,\delta\left(G^{\mu} A_{\mu}-B(x)\right) \exp\left\{i \int dx\, \mathcal{L}_{o}(A, \partial A)\right\} \, . \tag{2.72}$$

Kita boleh mengintegrasi ruas kanan persamaan (2.72) terhadap B karena translasi medan menjamin bahwa *Z[0]* tidak bergantung B. Dalam hal ini kita dapat menggunakan fungsi bobot Gaussian

$$\exp\left[-\frac{i}{2\lambda} \int B^{2}(x) dx\right] \tag{2.73}$$

dengan λ adalah konstanta sembarang. Dengan memasukkan sumber eksternal j, akan diperoleh bentuk fungsional pembangkit sebagai berikut:

$$Z[j]=\int \mathcal{D}A\,\Delta[A] \exp\left\{i \int dx\left(\mathcal{L}_{o}+\mathcal{L}_{gf}+j\, A\right)\right\} \tag{2.74}$$

dimana $\mathcal{L}_{gf}$ adalah suku gauge fixing dari Lagrangian yang berbentuk

$$\mathcal{L}_{gf}=-\frac{1}{2\lambda}\left(G^{\mu} A_{\mu}\right)^{2} \, . \tag{2.75}$$

Ungkapan di atas dapat pula dituliskan dalam bentuk lain dengan memperkenalkan faktor pengali Lagrange $C^{a}(x)$

$$\mathcal{L}_{gf}=C\, G\, A+\frac{\lambda}{2} C^{2} \, . \tag{2.76}$$

Dengan adanya penulisan tersebut kita harus tambahkan faktor C^{a} sebagai bagian fungsional dari integral pada fungsional pembangkit (2.74), sehingga menjadi

$$Z[j]=\int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}C\, \Delta[A] \exp\left\{i \int dx\left(\mathcal{L}_{0}+\mathcal{L}_{gf}+j\, \mathrm{A}\right)\right. \, . \tag{2.77}$$

Persamaan (2.77) merupakan rumusan yang lengkap dari fungsional pembangkit dalam kondisi gauge non-homogen yang disertai oleh kehadiran sumber eksternal.

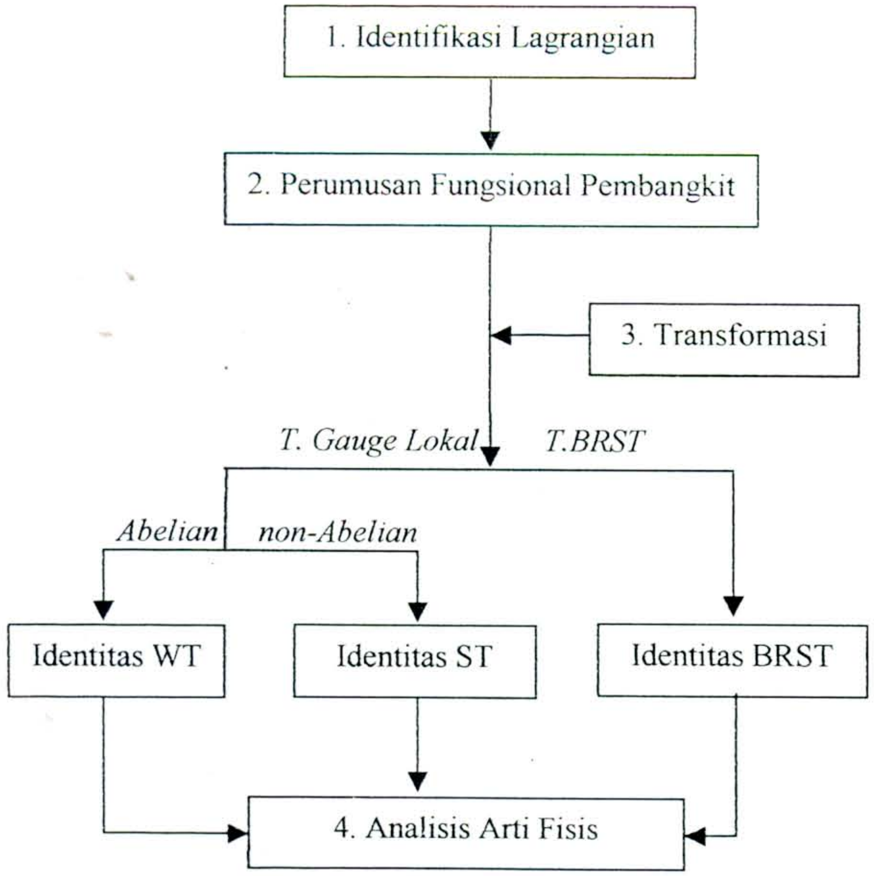
BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Waktu Pelaksanaan

Penelitian ini akan dilaksanakan mulai bulan Februari 2003 dan diharapkan selesai pada bulan Mei 2003.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian yang akan dilakukan ini tergolong ke dalam bidang fisika teoretik, yang mempelajari suatu gejala fisis melalui analisa matematis. Adapun analisa yang dimaksud dalam hal ini dilakukan dengan cara derivasi analitik. Garis besar dari apa yang akan dilakukan dalam penelitian ini digambarkan dalam diagram berikut:



Keterangan:

1. Identifikasi Lagrangian

Kita identifikasi Lagrangian ($\mathcal{L}$) untuk sistem QED (Quantum Electrodynamics), yaitu sistem yang menyatakan dinamika dari interaksi antar partikel bermuatan yang merupakan teori medan gauge Abelian, dengan memasukkan kondisi gauge umum. Lagrangian yang didapatkan kemudian kita generalisasi untuk sistem yang lebih luas yang melibatkan dinamika dari interaksi partikel-partikel (sebagai contoh quark) yang tergolong ke dalam teori medan gauge non-Abelian dan disebut sebagai QCD (Quantum Chromodynamics) dengan memasukkan kondisi gauge umum.

2. Perumusan Fungsional Pembangkit

Setelah Lagrangian kita dapatkan, kita masukkan ke dalam perumusan untuk fungsional pembangkit (Z), dengan menambahkan suku-suku sumber eksternal bagi medan yang tercakup.

3. Transformasi

Pada fungsional pembangkit yang sudah kita dapatkan, kita lakukan transformasi gauge lokal dan transformasi BRST. Dari prinsip gauge, akibat invariannya $\mathcal{L}_0$ (Lagrangian untuk medan bebas) terhadap transformasi gauge lokal akan menghasilkan identitas Ward-Takahashi (WT) dalam kasus Abelian dan identitas Slavnov-Taylor (ST) dalam kasus non-Abelian. Sedangkan invariannya $\mathcal{L}_0$ terhadap transformasi BRST akan menghasilkan identitas BRST.

4. Analisis Arti Fisis

Setelah bentuk identitas WT, ST dan BRST didapatkan, selanjutnya dilakukan analisis mengenai arti fisis dari masing-masing identitas tersebut.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Konsekuensi dari invariannya Lagrangian untuk medan bebas telah menghasilkan identitas Ward-Takahashi dan dalam skripsi ini telah diturunkan identitas tersebut dalam kondisi gauge Axial dan Fock-Schwinger. Bersama-sama dengan gauge Lorentz, identitas tersebut dapat dituliskan ke dalam bentuk gauge umum yang mewakili penggunaan ketiga kondisi gauge tersebut.

Untuk kasus yang diperluas dengan melibatkan teori medan gauge non-Abelian, hanya pada kondisi gauge bebas hantu (gauge Axial dan gauge Fock-Schwinger) saja identitas Slavnov-Taylor dapat dituliskan ke dalam bentuk yang lebih sederhana. Untuk menuliskannya ke dalam bentuk gauge umum kita gunakan transformasi BRST dan identitas yang dihasilkan disebut sebagai identitas BRST.

Ketiga jenis identitas yang telah diturunkan dalam kondisi gauge umum kesemuanya mempunyai arti fisis yang sama yaitu transversalitas dari energi diri medan gauge. Ini berarti bahwa penerapan suatu kondisi gauge pada Lagrangian suatu sistem fisis tidak akan mempengaruhi sifat fisis dari sistem tersebut. Kebergantungan identitas pada kondisi gauge yang diambil hanya menyebabkan perbedaan dalam perumusan propagator dari medan-medan terkait dan itu berada di luar cakupan skripsi ini.

5.2 Saran

Kebergantungan identitas Ward-Takahashi, Slavnov-Taylor dan BRST pada kondisi gauge yang dipilih hanya menyebabkan perbedaan dalam perumusan propagator dari medan-medan terkait. Untuk mengetahui perbedaan yang muncul dalam perumusan propagator ini diperlukan kajian yang lebih mendalam sehingga diperlukan penelitian lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

1. Lewis H. Ryder, 1985, *Quantum Field Theory*, Cambridge Universty Press

2. L.D. Faddev, V.N. Popov, 1967, *Physics Letter 25 B*

3. A. Karlhede, V. Lindstrom, M. Rocek, P.V. Niuwenluizen, 1987, *Physics Letter 186 B*

4. Triyanta, Ph.D, 1991, *Thesis*, Universty of Tasmania

5. J. Schwinger, 1970, *Particles, Source and Field Vol I*, Addison Wesley

6. M.B. Halpern, 1979, *Physics Review D19(2)*

7. Jose A. Heras, 1994, *Electromagnetism in Euclidean Four Space: A Discussion between God and The Devil*, American Journal Physics Vol.62 No.68

8. Griffiths J. David, 1995, *Introduction to Electrodynamic*, New Delhi, Prentice-Hall

9. Taizo Muta, 1986, *Foundation of Quantum Chromodynamics*, Singapore, World Scientific

APENDIKS

A. Transformasi Gauge Untuk Medan Fermion

Persamaan gerak dari fermion-fermion bermuatan dinyatakan oleh persamaan Dirac, yang diperoleh dengan mensubstitusikan Lagrangian (2.12) pada persamaan Euler-Lagrange sebagai berikut:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \overline{\psi})} \right] = 0$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{A.1}$$

1. Kasus Abelian

1.1 Transformasi gauge global

$$\psi' = e^{-iQ\theta}\psi \quad , \quad \delta\psi' = -iQ\theta\psi , \tag{A.2}$$

$$\overline{\psi}' = e^{iQ\theta}\overline{\psi} \quad , \quad \delta\overline{\psi}' = iQ\theta\overline{\psi} . \tag{A.3}$$

Dengan menggunakan transformasi di atas maka bentuk Lagrangian hasil transformasinya adalah

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \overline{\psi}'\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi' \\
&= e^{iQ\theta}\overline{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)e^{-iQ\theta}\psi \\
&= e^{iQ\theta}\overline{\psi}\, i\gamma^\mu \partial_\mu\left(e^{-iQ\theta}\psi\right) - e^{iQ\theta}\overline{\psi}\, m e^{-iQ\theta}\psi \\
&= \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} . \tag{A.4}$$

Dari persamaan (A.4) nampak bahwa Lagrangian (2.12) invarian di bawah transformasi gauge global.

1.2 Transformasi gauge lokal

Persamaan (2.16) merupakan bentuk Lagrangian yang sesuai dengan prinsip gauge, agar bersifat invarian terhadap transformasi gauge lokal Abelian. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$\bar{\psi}'\partial_\mu\psi' = e^{iQ\theta}\bar{\psi}\partial_\mu\left(e^{-iQ\theta}\psi\right)$$

$$= e^{iQ\theta}\bar{\psi}\left[(-iQ)(\partial_\mu\theta)e^{-iQ\theta}\psi + e^{-iQ\theta}\partial_\mu\psi\right]$$

$$= \bar{\psi}\left(\partial_\mu\psi - iQ\partial_\mu\theta\right)\psi\ , \qquad \text{(A.5)}$$

maka

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}'F^{\mu\nu}{}' + \bar{\psi}'\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + iQeA_\mu'\right) - m\right]\psi'$$

$$= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\gamma^\mu\bar{\psi}\left(\partial_\mu\psi - iQ\partial_\mu\theta\right)\psi - \gamma^\mu Q\,e\,\bar{\psi}A_\mu\psi - \gamma^\mu Q\bar{\psi}\left(\partial_\mu\theta\right)\psi - \bar{\psi}m\psi$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + iQeA_\mu\right) - m\right]\psi$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}\ . \qquad \text{(A.6)}$$

2. Kasus non-Abelian

2.1 Transformasi gauge global

Dengan menggunakan transformasi medan berikut ini

$$\psi' = e^{-iT^a\theta^a}\psi = U\psi\ ,$$

$$\bar{\psi}' = e^{iT^a\theta^a}\bar{\psi} = U^+\bar{\psi}\ , \qquad \text{(A.7)}$$

maka sifat invarian Lagrangian (2.12) dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi'$$

$$= e^{iT^a\theta^a}\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)e^{-iT^a\theta^a}\psi$$

$$= \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}\ , \qquad \text{(A.8)}$$

dengan θ^a berupa konstanta real.

2.2 Transformasi gauge lokal

Transformasi medan fermion kompleks yang diberikan sama dengan transformasi medan (A.5) sedangkan untuk medan gauge non-Abelian diberikan oleh

$$T^a A'^a_\mu = U\left(T^a A^a_\mu - \frac{i}{g}U^{-1}\partial_\mu U\right)U^{-1}\ , \qquad \text{(A.9)}$$

sehingga Lagrangian hasil transformasi dapat dibuktikan bersifat invarian.

$$
\begin{aligned}
(D_\mu \psi)' &= \left[\partial_\mu - i g\left(T^a A'^{a}_{\mu}\right)\right]\psi' \\
&= \left[\partial_\mu - i g U\left(T^a A^a_\mu - \frac{i}{g} U^{-1}\partial_\mu U\right)U^{-1}\right]U\psi \\
&= \left[\partial_\mu - i g U T^a A^a_\mu U^{-1} - U U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}\right]U\psi \\
&= \partial_\mu (U\psi) - \left[i g T^a A^a_\mu + \partial_\mu U\right]\psi \\
&= (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi) - i g T^a A^a_\mu \psi - (\partial_\mu U)\psi \\
&= U\left(\partial_\mu - i g T^a A^a_\mu\right)\psi \\
&= U D_\mu \psi
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

maka

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \overline{\psi}'\left(i\gamma^\mu D_\mu' - m\right)\psi' \\
&= i\gamma^\mu \overline{\psi} U^+\left(U D_\mu \psi\right) - \overline{\psi} U^+ m\psi' U \\
&= i\gamma^\mu \overline{\psi}\left(D_\mu \psi\right) - \overline{\psi}\, m\psi' \\
&= \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi .
\end{aligned} \tag{A.11}
$$

Kehadiran suku non-interaksi dari medan gauge tentunya tidak menyebabkan Lagrangian berubah di bawah transformasi gauge yang diberikan. Dalam hal ini, tensor kuat medan $F^a_{\mu\nu}$ haruslah bersifat invarian. Bentuk $F^a_{\mu\nu}$ yang memenuhi adalah

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{A.12}$$

dimana transformasi medan gaugenya diberikan oleh

$$\delta A^a_\mu = f^{abc}\theta^b A^c_\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \theta^a \tag{A.13}$$

maka

$$\delta F^{a}_{\mu\nu} = \delta\left(\partial_{\mu} A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{a}_{\mu}\right) + \delta\left(g f^{abc} A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu}\right)$$

$$= \partial_{\mu}\left(\delta A^{a}_{\nu}\right) - \partial_{\nu}\left(\delta A^{a}_{\mu}\right) + f^{abc}\left(g f^{ckl} A^{k}_{\mu} A^{l}_{\nu} \theta^{b} - A^{b}_{\mu} \partial_{\nu} \theta^{c} - A^{c}_{\nu} \partial_{\mu} \theta^{b}\right)$$

$$= f^{abc} \theta^{b}\left(\partial_{\mu} A^{c}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{c}_{\mu}\right) + f^{abc}\left[\left(\partial_{\mu} \theta^{b}\right) A^{c}_{\nu} - \left(\partial_{\nu} \theta^{b}\right) A^{c}_{\mu}\right] + f^{abc} g f^{ckl} A^{k}_{\mu} A^{l}_{\nu} \theta^{b}$$

$$- f^{abc} A^{b}_{\mu}\left(\partial_{\nu} \theta^{c}\right) - f^{abc} A^{c}_{\nu}\left(\partial_{\mu} \theta^{b}\right)$$

$$= f^{abc} \theta^{b}\left[\partial_{\mu} A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{c}_{\mu} + g f^{ckl} A^{k}_{\mu} A^{l}_{\nu}\right]$$

$$= f^{abc} \theta^{b} F^{c}_{\mu\nu}. \tag{A.14}$$

Akhirnya

$$\delta\left(F^{a}_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}\right) = 2 F^{a}_{\mu\nu}\left(\delta F^{a\mu\nu}\right)$$

$$= 2 f^{abc} \theta^{b} F^{a}_{\mu\nu} F^{c\mu\nu}$$

$$= 0. \tag{A.15}$$

Ungkapan di atas menunjukkan bahwa Lagrangian (2.22) invarian di bawah transformasi gauge lokal non-Abelian.

B. Penurunan Fungsional Pembangkit

Fungsional pembangkit yang diberikan pada persamaan (2.54) dapat diungkapkan dalam bentuk lain dengan menjabarkan komponen Lagrangiannya. Jika kita terapkan bentuk Lagrangian untuk komponen medan skalar bebas maka persamaan (2.54) menjadi

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left\{ i \int \left(\frac{1}{2}\left[\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \left(m^{2} - i\varepsilon\right)\phi^{2}\right] + j\phi \right) dx \right\} \tag{B.1}$$

dimana penambahan $\varepsilon(\varepsilon \to 0)$ menunjukkan bahwa integrasi dilakukan di sepanjang kontur bilangan kompleks. Kita gunakan turunan parsial sehingga persamaan di atas menjadi

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left\{ -i \int \left(\frac{1}{2}\phi\left[\Box + m^{2} - i\varepsilon\right]\phi - j\phi \right) dx \right\}. \tag{B.2}$$

Jika medan ϕ pada persamaan (B.2) mengalami transformasi

$$\phi(x) \to \phi(x) + \phi_{0}(x) \tag{B.3}$$

maka

$$\int \left(\frac{1}{2}\phi \left[\Box + m^2 - i\varepsilon \right] \phi - j\phi \right) dx \rightarrow \int \left(\frac{1}{2}\phi \left[\Box + m^2 - i\varepsilon \right] \phi - \frac{1}{2} j\phi_0 \right) dx \qquad \text{(B.4)}$$

dengan

$$\left(\Box + m^2 - i\varepsilon \right) \phi_0(x) = j(x). \qquad \text{(B.5)}$$

Persamaan (B.4) memiliki solusi

$$\phi_0(x) = -\int \Delta(x,y)\, j(y)\, dy \qquad \text{(B.6)}$$

maka

$$\int \left(\frac{1}{2}\phi \left[\; + m^2 - i\varepsilon \right] \phi - j\phi \right) dx \rightarrow \frac{1}{2}\left[\int \phi \left(\Box + m^2 - i\varepsilon \right) \phi + \int j(x) \Delta(x,y) j(y)\, dx\, dy \right]$$

..... (B.7)

Dengan adanya persamaan (B.7) maka fungsional pembangkit (B.2) akan mengandung dua faktor secara terpisah yaitu faktor yang hanya bergantung pada $\phi(x)$, dimana integral yang mengandung $\phi(x)$ akan menghasilkan bilangan N, dan yang bergantung pada j, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Z[j] &= N \exp\left[-\frac{i}{2} \int j(x) \Delta(x,y) j(y)\, dx\, dy \right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{i}{2} \int j(x) \Delta(x,y) j(y)\, dx\, dy \right] \end{aligned} \qquad \text{(B.8)}$$

dimana $\Delta(x,y)$ merupakan propagator Feynman yang didefinisikan oleh persamaan (2.62).

C. Sifat-Sifat Invarian Terhadap Transformasi BRST

C.1 BRST Invarian dari Lagrangian

Kita akan tunjukkan bahwa Lagrangian (4.54) bersifat invarian di bawah transformasi BRST infinitesimal:

$$\delta\,\psi(x)=i\,g\,T^{a}\,\theta\,\chi^{a}(x)\psi(x), \qquad \delta\,\chi^{a}(x)=-\frac{g}{2}\theta\,f^{abc}\,\chi^{b}(x)\chi^{c}(x),$$

$$\delta\,\overline{\psi}(x)=-\,i\,g\,\overline{\psi}(x)T^{a}\,\theta\,\chi^{a}(x), \qquad \delta\,\chi^{*a}=\theta\,C(x),$$

$$\delta\,A^{a}_{\mu}(x)=\theta\,D^{ab}_{\mu}\,\chi(x), \qquad \delta\,C^{a}(x)=0. \tag{C.1}$$

Bentuk transformasi Lagrangian (4.54) diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{0}+\mathcal{L}_{gf}+\mathcal{L}_{FP} \\ &= \delta\,C^{a}\left(G^{\mu}\,A^{a}_{\mu}+\lambda\,C^{a}\right)+C^{a}\,G^{\mu}\,\delta\,A^{a}_{\mu}-\left(\delta\,\chi^{*a}\right)G^{\mu}\,D^{ab}_{\mu}\,\chi^{b}+ \\ &\quad -\chi^{*a}\,G^{\mu}\,\delta\left(D^{ab}_{\mu}\,\chi^{b}\right) \\ &= -\chi^{*a}\,G^{\mu}\,\delta\left(D^{ab}_{\mu}\,\chi^{b}\right). \end{aligned} \tag{C.2}$$

Kita buktikan bahwa $\delta\left(D^{ab}_{\mu}\,\chi^{b}\right)$ invarian dibawah (C.1).

$$\begin{aligned} \delta\left(D^{ab}_{\mu}\,\chi^{b}\right) &= D^{ab}_{\mu}\,\delta\,\chi^{b}+\left(\delta\,D^{ab}_{\mu}\right)\chi^{b} \\ &= D^{ab}_{\mu}\,\delta\,\chi^{b}-g\,f^{abc}\left(\delta\,A^{c}_{\mu}\right)\chi^{b} \\ &= \left(\delta^{ab}\,\partial_{\mu}-g\,f^{abe}\,A^{e}_{\mu}\right)\left(-\frac{g}{2}\theta\,f^{abc}\,\chi^{c}\,\chi^{d}\right)-g\,f^{abc}\left(\theta\,D^{cd}_{\mu}\,\chi^{d}\right)\chi^{b} \\ &= -\frac{1}{2}g\,\theta\,f^{acd}\,\partial_{\mu}\left(\chi^{c}\,\chi^{d}\right)+\frac{g^{2}}{2}\theta\,f^{abc}\,f^{bcd}\,A^{e}_{\mu}\,\chi^{c}\,\chi^{d}+ \\ &\quad -g\,\theta\,f^{abc}\left[\left(\delta^{cd}\,\partial_{\mu}-g\,f^{cde}\,A^{e}_{\mu}\right)\chi^{d}\right]\chi^{b} \\ &= \frac{1}{2}g^{2}\,\theta\left(f^{aeb}\,f^{bdc}+f^{adb}\,f^{bce}+f^{acb}\,f^{bed}\right)A^{e}_{\mu}\,\chi^{c}\,\chi^{d}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas Jacobi: $=\left(f^{aeb}\,f^{bdc}+f^{adb}\,f^{bce}+f^{acb}\,f^{bed}\right)=0$ maka

$$\delta\left(D^{ab}_{\mu}\,\chi^{b}\right)=0. \tag{C.3}$$

Kita substitusikan (C.3) pada (C.2) dan terbukti bahwa

$$\delta\,\mathcal{L}=\delta\,\mathcal{L}_{0}+\delta\,\mathcal{L}_{gf}+\delta\,\mathcal{L}_{FP}=0 \tag{C.4}$$

yang menunjukkan sifat invarian dari Lagrangian (4.54) dibawah transformasi BRST invarian.

C.2 BRST Invarian dari $D_\mu^{ab}\chi^b$, $f^{abc}\chi^b\chi^c$, $\chi T^a\psi$ dan $\overline{\psi}\chi T^a$

Dibawah transformasi BRST (C.1), $D_\mu^{ab}\chi^b$, $f^{abc}\chi^b\chi^c$, $\chi T^a\psi$ dan $\overline{\psi}\chi T^a$ bersifat invarian.

(i) Sifat Invarian $D_\mu^{ab}\chi^b$

Telah dibuktikan (persamaan C.3).

(ii) Sifat Invarian $f^{abc}\chi^b\chi^c$.

$$\delta f^{abc}\chi^b\chi^c = f^{abc}\left(\delta\chi^b\right)\chi^c + f^{abc}\chi^b\,\delta\chi^c$$

$$= -\frac{1}{2}g f^{abc} f^{bde}\theta\chi^d\chi^c\chi^e - \frac{1}{2}g f^{abc} f^{cde}\theta\chi^b\chi^d\chi^e$$

$$= g\theta f^{abc} f^{cde}\chi^b\chi^d\chi^e\,, \qquad \text{(C.5)}$$

karena

$$-f^{abc} f^{cde}\chi^b\chi^d\chi^e = \left(f^{adc} f^{ceb} + f^{aec} f^{cbd}\right)\chi^b\chi^d\chi^e$$

$$= f^{abc} f^{cde}\chi^e\chi^b\chi^d + f^{abc} f^{cde}\chi^d\chi^e\chi^b$$

$$= 2 f^{abc} f^{cde}\chi^b\chi^d\chi^e\,, \qquad \text{(C.6)}$$

maka

$$f^{abc} f^{cde}\chi^b\chi^d\chi^e = 0. \qquad \text{(C.7)}$$

Substitusi persamaan C.7 ke C.5 menghasilkan

$$\delta f^{abc}\chi^b\chi = 0\,. \qquad \text{(C.8)}$$

(iii) Sifat Invarian dari $\chi T^a\psi$

$$\delta\left(\chi^a T^a\psi\right) = T^a\left(\delta\chi^a\right)\psi + T^a\chi^a\,\delta\psi$$

$$= -\frac{1}{2}g\theta f^{abc} T^a\chi^b\chi^c\psi + i g T^a\chi^a\theta T^b\chi^b\psi$$

$$= -\frac{1}{2}i g\theta\left[T^b T^c\right]\chi^b\chi^c\psi + i g\theta T^a T^b\chi^a\chi^b\psi$$

$$= i g\theta T^b T^c\chi^b\chi^c\psi - i g\theta T^b T^c\chi^b\chi^c\psi$$

$$= 0\,. \qquad \text{(C.9)}$$

(iv) Sifat invaraian $\overline{\psi}\,\chi T^a$

$$\delta\left(\overline{\psi}\,\chi^a T^a\right)=(\delta\,\psi)T^a\,\chi^a+\overline{\psi}\,T^a\,\delta\,\chi^a$$

$$=-ig\overline{\psi}\,\theta T^b\,\chi^b\,T^a\,\chi^a+\overline{\psi}\,T^a\left(-\frac{1}{2}g\,\theta\,f^{abc}\,\chi^b\,\chi^c\right)$$

$$=-ig\theta\overline{\psi}\,T^b\,\chi^b\,T^a\,\chi^b\,\chi^c+ig\theta\overline{\psi}\,T^b\,\chi^b\,T^a\,\chi^b\,\chi^c$$

$$=0\ . \tag{C.10}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $D_\mu^{ab}\,\chi^b$, $f^{abc}\,\chi^b\,\chi^c$, $\chi T^a\psi$ dan $\overline{\psi}\,\chi T^a$ invarian dibawah transformasi BRST.