

MODEL PERPINDAHAN PANAS PADA BENDA-BENDA ELLIPSOIDA

SKRIPSI



Diajukan Untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember



Asal:	Hadiah	Klass
	Pembelian	519
Terima di:	30 SEP 2002	TRI
No. Induk		m
Oleh:	KI SIR/TE YAN	

Yudhi Trisantoro

NIM. 971810101042

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
AGUSTUS, 2002

Motto

Jadikanlah Sholat dan Sabar sebagai penolongmu. Dan sesungguhnya yang demikian itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang khusyu'

(QS. Al-Baqarah: 45)

Pelajarilah ilmu karena sesungguhnya belajarnya karena Allah SWT itu adalah taqwa, menuntut ilmu adalah ibadah, mempelajarinya adalah tasbih, membahasnya adalah jihad, mengajarkannya kepada keluarga adalah pendekatan diri kepada Allah SWT

(Mu'adz bin Jabbal r.a)

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, maka apabila kamu telah selesai dari suatu urusan, kerjakanlah dengan sungguh-sungguh urusan yang lain. Dan hanya kepada Allahlah hendaknya kamu berharap

(QS Al-Insyirah: 6-7)

Terimalah kekalahanmu sebagaimana kamu menerima kemenanganmu

(Dhie)

PERSEMBAHAN

Dengan penuh kedamaian dan cinta kasih, Aku persembahkan setitik karya ini untuk :

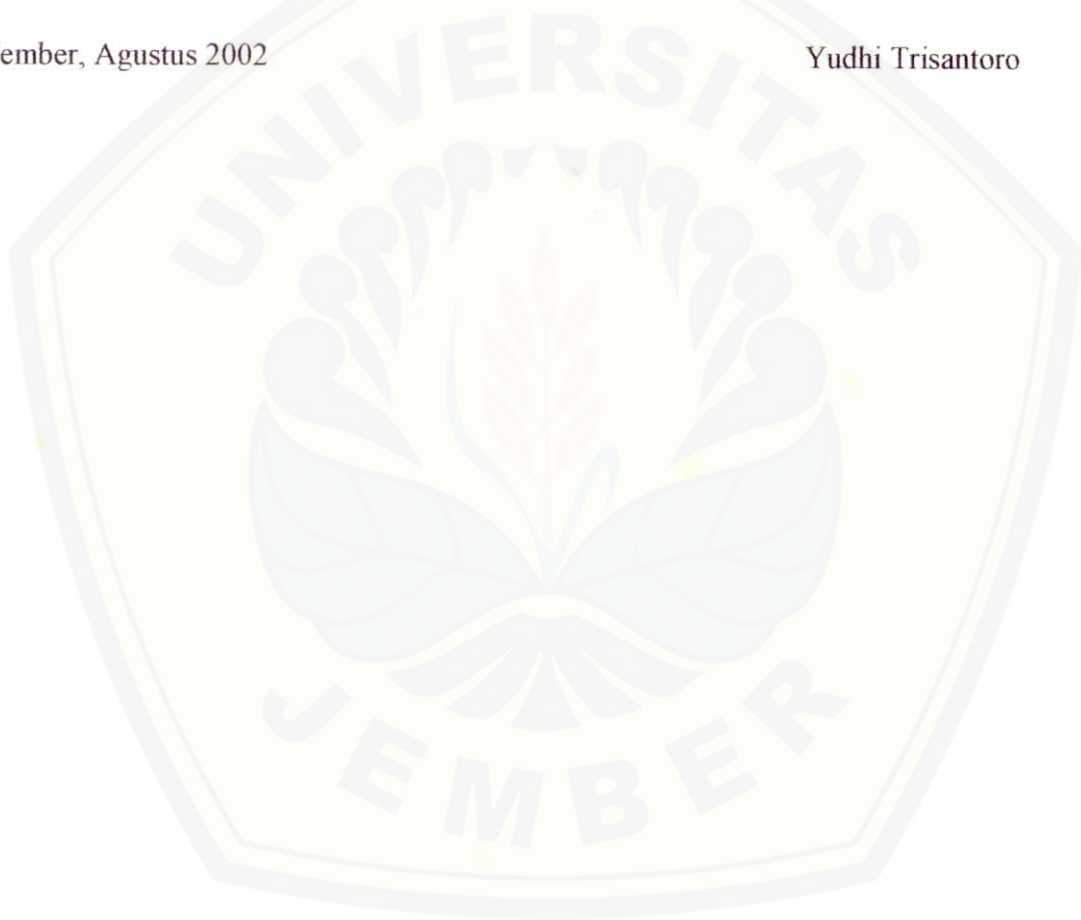
- 1. Yang kuhormati, kucintai dan kusayangi Ayahanda Sumiran dan Ibunda Rusmiati*
- 2. Yang kuhormati dan kusayangi Kakakku-kakakku Ari Daryono dan Puqah Dwi Riyanto*
- 3. Yang kucintai dan kusayangi Dinda Titik Suhartatik*
- 4. Kemajuan Ilmu Pengetahuan dan Almamaterku tercinta, Universitas Jember*

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Nopember 2001 sampai dengan bulan Agustus 2002. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Agustus 2002

Yudhi Trisantoro



ABSTRAK

Yudhi Trisantoro, NIM. 971810101042, Agustus 2002, judul : “*Model Perpindahan Panas pada Benda-benda Ellipsoida*”.

Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

DPU : Drs. Rusli Hidayat, MSc

DPA : Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si

Dalam pengolahan produk makanan yang berbentuk ellipsoida, diperlukan model matematika untuk optimasi. Sementara, saat ini belum ada model matematika untuk menyelesaikannya. Sehingga dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana memodelkan perpindahan panas pada benda-benda yang berbentuk ellipsoida dengan pendekatan persamaan panas pada bola. Model perpindahan panas dari benda-benda yang berbentuk ellipsoida baik yang homogen dengan sifat-sifat fisik (konduktivitas panas λ , panas spesifik C , dan kepadatan massa ρ) yang sama, maupun ellipsoida non homogen dengan sifat-sifat fisik berbeda dibangun dengan pendekatan perpindahan panas pada bola dengan jari-jari masing-masing panjang sumbu ellipsoida (a , b , dan c), sehingga ada tiga bola semu dalam ellipsoida tersebut. Dengan menganggap bahwa panas mengalir atau merambat secara kontinu dalam suatu proses sehingga lapisan-lapisan yang mempunyai nilai λ berbeda atau dua lapisan yang berbeda sifat fisiknya dapat dipandang sebagai sistem dengan λ konstan yang dihubungkan oleh suatu syarat batas pada antar muka (*interface boundary condition*). Hasilnya adalah berupa tiga persamaan panas pada bola dengan jari-jari panjang sumbu ellipsoida (x , y , dan z) dengan dua syarat batas, yaitu syarat batas di pusat dan syarat batas luar pada ellipsoida yang homogen. Sedangkan pada ellipsoida non homogen ada tiga syarat batas, yaitu syarat batas di pusat, syarat batas luar dan syarat batas *interface*. Cara menyelesaikan persamaan panas yang diperoleh adalah dengan cara diskritisasi dengan Metode- θ , sehingga didapat persamaan matrik yang nantinya digunakan dalam perhitungan komputer dengan bahasa pemrograman Matlab. Bila dibandingkan dengan hasil eksperimen dan hasil perhitungan sebelumnya, dengan temperatur lingkungan yang sama yaitu 130°C dan tekanan 3 bar, pada sterilisasi buah kelapa sawit, ternyata dengan model yang kita dapat lebih efisien sekitar 25 menit, dimana 15 menit untuk sterilisasi dan 10 menit untuk mencapai tekanan 3 bar.

Kata kunci : perpindahan panas, pemodelan, konduksi, sistem *spherik*, ellipsoida, diskritisasi.

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada :

Hari : Kamis

Tanggal : 19 SEP 2018

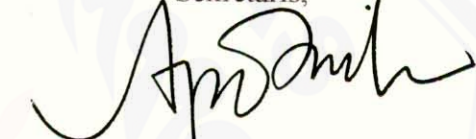
Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,


(Drs. Rusli Hidayat, MSc)
NIP. 132 048 321

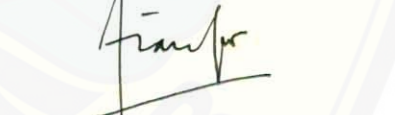
Sekretaris,


(Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si)
NIP. 132 257 933

Anggota 1,



(Kosala Dwidja Purnomo, S.Si)
NIP. 132 206 019

Anggota 2,


(Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si)
NIP. 132 258 180

Mengesahkan,
Dekan Fakultas MIPA
Universitas Jember




(Ir. Sumadi, MS)
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim.

Alhamdulillahirobil' alamin.

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat, barokah, hidayah, dan inayah-Nya, sehingga skripsi ini dapat penulis selesaikan. Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar kesarjanaan Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis telah banyak mendapatkan bantuan dan dorongan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada :

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, MSc, selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah memberikan bimbingannya kepada penulis sehingga karya tulis ilmiah ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Ibu Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingannya kepada penulis sehingga karya tulis ilmiah ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si dan Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si, selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan sehingga karya tulis ilmiah ini dapat terselesaikan dengan baik.
4. Bapak Kusno, DEA, PhD, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
5. Bapak Ir. Sumadi MS, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
6. Seluruh Dosen dan Civitas Akademika di lingkungan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, khususnya Jurusan Matematika.

7. Kedua Orangtuaku dan Kakak-kakakku serta seluruh keluargaku yang telah banyak memberikan dorongan moril dan materiil kepada penulis.
8. Dinda Titik, terima kasih atas dorongan semangat, do'a dan kesabarannya.
9. Reza di Bandung, terima kasih bukunya.
10. Teman-temanku : Adi, Bahrul, Toriq, Rosy, Teti dan "Adik-adikku": Dian, Rina, Dewi, Urip, Silvi terima kasih dukungan semangatnya.
11. Teman-teman angkatan '97 yang telah bersama-sama merasakan "nikmatnya" kuliah di Jurusan Matematika, serta semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah yang setimpal.

Mengingat keterbatasan waktu, biaya, fasilitas serta pengetahuan yang ada, maka penulis menyadari adanya kekurangan dan kelemahan pada penulisan karya ilmiah ini. Karena itu kritik dan saran yang konstruktif sangat penulis harapkan demi kesempurnaan skripsi ini.

Selanjutnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberi kontribusi terhadap kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang ilmu Matematika Terapan dan memberikan manfaat bagi kita semua.

Jember, Agustus 2002

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN MOTTO	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN DEKLARASI	iv
ABSTRAK	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	1
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Manfaat Penelitian	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Hukum Fourier untuk Transfer Panas	3
2.2 Ellipsoida	6
2.3 Persamaan Panas pada Bola	7
2.4 Syarat Awal dan Syarat Batas pada Bola	
2.4.1 Syarat Awal	10
2.4.2 Syarat Batas	
A. Syarat Batas Pusat (<i>Center</i> <i>Boundary Condition</i>)	10

B.	Syarat Batas <i>Interface</i> (<i>Interface Boundary Condition</i>)	10
C.	Syarat Batas Luar (<i>Outer Boundary Condition</i>)	12
2.5	Metode Numerik	13
2.5.1	Skema Eksplisit	14
2.5.2	Skema Implisit	16
2.5.3	Skema Crank-Nicholson	17
2.5.4	Skema Metode- θ	18
BAB III	HASIL DAN PEMBAHASAN	
3.1	Pendekatan Persamaan Panas pada Ellipsoida dengan Persamaan Panas pada Bola	20
3.2	Bentuk Beda Hingga	22
3.2.1	Diskritisasi Syarat Batas pada Bola	23
3.2.2	Diskritisasi <i>Interior Grid-Point</i>	24
3.2.3	Diskritisasi Syarat Batas <i>Interface</i> pada Bola	
A.	Skema Implisit	25
B.	Skema Eksplisit	26
C.	Skema Metode- θ	26
3.2.4	Diskritisasi Syarat Batas Luar pada Bola	27
3.3	Model Diskrit dan Persamaan Matrik	
3.3.1	Model Diskrit	27
3.3.2	Persamaan Matrik	30
3.4	Perhitungan Komputer	36
3.5	Validasi	
3.5.1	Perbandingan dengan Hasil Eksperimen	44
3.5.2	Perbandingan dengan Hasil Perhitungan Sebelumnya	45

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan	46
4.2 Saran	48

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN



DAFTAR TABEL

Tabel 1	Tabel Persamaan Differensial Parsial Persamaan Panas dalam Bola Semu	21
Tabel 2	Distribusi Temperatur (5 menit).....	37
Tabel 3	Distribusi Temperatur (10 menit).....	37
Tabel 4	Distribusi Temperatur (15 menit).....	38
Tabel 5	Distribusi Temperatur (20 menit).....	38
Tabel 6	Distribusi Temperatur (25 menit).....	38
Tabel 7	Distribusi Temperatur (30 menit).....	39
Tabel 8	Distribusi Temperatur (35 menit).....	39
Tabel 9	Distribusi Temperatur (40 menit).....	39
Tabel 10	Distribusi Temperatur (45 menit).....	40
Tabel 11	Distribusi Temperatur (50 menit)	40

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1	Konduksi Panas Melewati Dinding dengan Ketebalan Δx dan Luas Daerah A	3
Gambar 2	Konduksi Panas pada Dinding Ganda	4
Gambar 3	Konduksi Panas pada Dinding dengan Ketebalan $2\Delta x$ dan Daerah A	4
Gambar 4	Sketsa yang Melukiskan Perjanjian tentang Tanda untuk Aliran Panas Konduksi	6
Gambar 5	Ellipsoida	6
Gambar 6	Sistem Koordinat Bola	7
Gambar 7	Panas Merambat Secara Simetri Antara r_1 dan r_2	9
Gambar 8	Skema dari Syarat Batas di Pusat	10
Gambar 9	Ilustrasi tentang Aliran Panas pada <i>Interface</i>	11
Gambar 10	Skema tentang Perpindahan Panas pada Permukaan Luar	12
Gambar 11	Bidang Hitungan Penyelesaian Numerik.....	14
Gambar 12	Skema Metode Eksplisit.....	15
Gambar 13	Skema Metode Implisit	17
Gambar 14	Skema Metode - θ	19
Gambar 15	Grafik Profil Temperatur dalam Proses Sterilisasi pada 130°C pada Sumbu x	43
Gambar 16	Grafik Profil Temperatur dalam Proses Sterilisasi pada 130°C pada Sumbu y	43
Gambar 17	Grafik Profil Temperatur dalam Proses Sterilisasi pada 130°C pada Sumbu z	44

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1	Konduksi Panas Melewati Dinding dengan Ketebalan Δx dan Luas Daerah A	3
Gambar 2	Konduksi Panas pada Dinding Ganda	4
Gambar 3	Konduksi Panas pada Dinding dengan Ketebalan $2\Delta x$ dan Daerah A	4
Gambar 4	Sketsa yang Melukiskan Perjanjian tentang Tanda untuk Aliran Panas Konduksi	6
Gambar 5	Ellipsoida.....	6
Gambar 6	Sistem Koordinat Bola	7
Gambar 7	Panas Merambat Secara Simetri Antara r_1 dan r_2	9
Gambar 8	Skema dari Syarat Batas di Pusat	10
Gambar 9	Ilustrasi tentang Aliran Panas pada <i>Interface</i>	11
Gambar 10	Skema tentang Perpindahan Panas pada Permukaan Luar	12
Gambar 11	Bidang Hitungan Penyelesaian Numerik.....	14
Gambar 12	Skema Metode Eksplisit.....	15
Gambar 13	Skema Metode Implisit	17
Gambar 14	Skema Metode - θ	19
Gambar 15	Grafik Profil Temperatur dalam Proses Sterilisasi pada 130°C pada Sumbu x	43
Gambar 16	Grafik Profil Temperatur dalam Proses Sterilisasi pada 130°C pada Sumbu y	43
Gambar 17	Grafik Profil Temperatur dalam Proses Sterilisasi pada 130°C pada Sumbu z	44

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam *food processing* dan pengolahan produk pertanian pasca panen, seperti pengawetan dan pengeringan makanan yang menggunakan temperatur tinggi, diperlukan model matematika untuk pemrosesannya sehingga dapat dilakukan pengendalian sistem melalui model tersebut untuk tujuan optimasi ([5]). Produk-produk makanan yang berbentuk ellipsoida banyak kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik yang lapisannya mempunyai sifat fisik homogen atau sama, seperti kedelai, maupun yang lapisannya mempunyai sifat fisik non homogen atau berbeda (*multilayer*) seperti telur.

Saat ini belum ada model untuk menyelesaikan permasalahan perpindahan panas pada produk-produk makanan maupun benda-benda yang berbentuk ellipsoida, yang ada adalah penyelesaian untuk benda-benda yang berbentuk kubus, tabung, dan bola. Sehingga untuk menyelesaikan permasalahan perpindahan panas pada ellipsoida, kita menggunakan pendekatan atau aproksimasi dari penyelesaian yang sudah ada tersebut.

Bola merupakan bentuk khusus ellipsoida dengan panjang sumbu mayor dan minor yang sama. Sehingga pada penelitian ini akan dibahas bagaimana memodelkan perpindahan panas pada benda-benda yang berbentuk ellipsoida dengan pendekatan persamaan panas pada bola.

1.2 Perumusan Masalah

Karena sampai saat ini hanya ada penyelesaian perpindahan panas dari benda yang berbentuk bola, maka masalah yang akan dicari solusinya adalah :



Bagaimana memodelkan proses perpindahan panas pada benda-benda yang berbentuk ellipsoida dengan pendekatan perpindahan panas pada bola ?

Dalam penelitian ini panas yang diberikan adalah seragam.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk memodelkan perpindahan panas pada benda-benda yang berbentuk ellipsoida baik yang mempunyai sifat fisik homogen maupun yang non homogen (*multilayer*).

1.4 Manfaat Penelitian

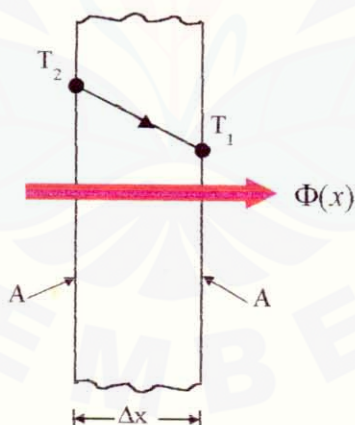
Dengan diperolehnya model perpindahan panas pada benda-benda ellipsoida, maka model ini akan dapat digunakan untuk mengevaluasi atau mengontrol proses pengeringan produk makanan yang berbentuk ellipsoida, khususnya produk yang membutuhkan temperatur kritis.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum kita bahas bagaimana mencari model matematika dari perpindahan panas pada benda-benda yang berbentuk ellipsoida, kita memerlukan beberapa definisi dan konsep berikut :

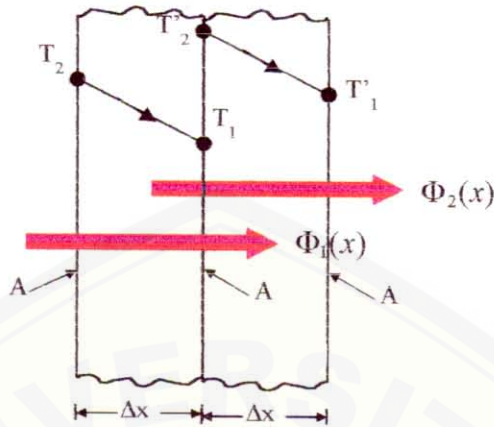
2.1 Hukum Fourier untuk Transfer Panas

Misal perpindahan panas dengan cara konduksi, dalam keadaan *steady*, melewati dinding dengan ketebalan $\Delta x = L$ dan luas permukaan A , seperti terlihat pada Gambar 1. Perubahan temperatur yang melewati dinding adalah $\Delta T = T_2 - T_1$ ([2]). Pengertian *steady* adalah bila laju aliran panas dalam suatu sistem tidak berubah dengan waktu, yaitu laju tersebut konstan, maka suhu di titik manapun tidak berubah ([5]).



Gambar 1. Konduksi Panas Melewati Dinding dengan Ketebalan Δx dan Luas Daerah A

Jika perubahan temperatur ΔT yang melewati dinding atau daerah A dengan arah perpindahan panas normal adalah ganda, seperti pada Gambar 2, maka laju konduksi panas $\Phi(x)$ menembus dinding adalah dua kalinya.

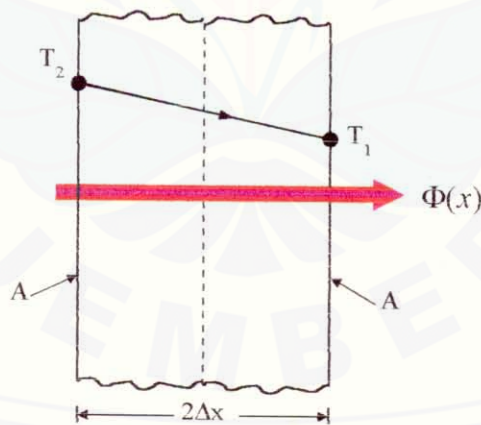


Gambar 2. Konduksi Panas pada Dinding Ganda

Atau secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\Phi(x)_{\text{Total}} = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$$

Tetapi laju konduksi panas $\Phi(x)$ adalah setengahnya jika ketebalan dinding $\Delta x = L$ dua kalinya.



Gambar 3. Konduksi Panas pada Dinding dengan Ketebalan $2\Delta x$ dan Daerah A

Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$\Phi(x)_{\text{Total}} = \frac{\Phi(x)}{2}$$

Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa laju konduksi panas yang melewati permukaan bidang berbanding lurus linier dengan perubahan temperatur yang melewati lapisan dan daerah perpindahan panas, tetapi berbanding terbalik dengan ketebalan dinding.

$$\text{Laju Konduksi Panas} \approx \frac{(\text{Luas Daerah})(\text{Perubahan Temperatur})}{\text{Ketebalan Dinding}}$$

atau

$$\Phi(x) = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

dimana λ adalah konduktivitas thermal, yang diukur dari kemampuan material untuk menghantarkan panas. Dengan pendekatan $\Delta x \rightarrow 0$, persamaan di atas berubah menjadi :

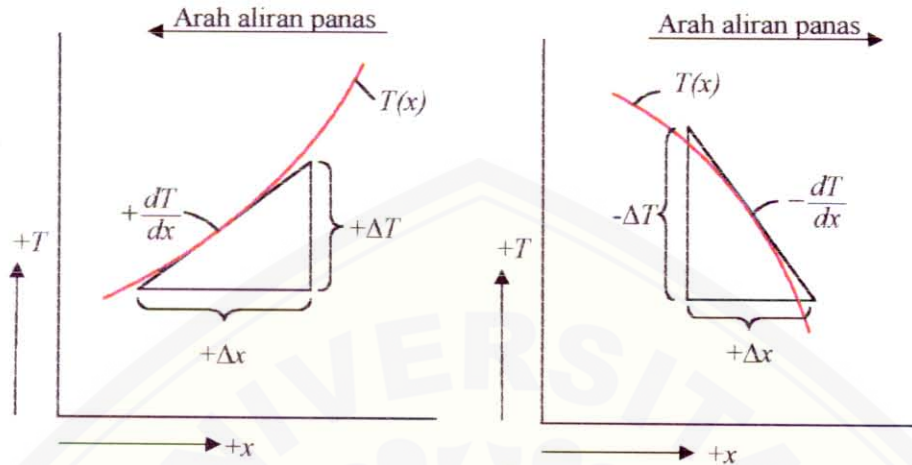
$$\Phi(x) = \lambda A \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

Disini $\frac{dT}{dx}$ adalah gradien temperatur. Hubungan di atas menunjukkan bahwa laju konduksi panas berbanding lurus terhadap gradien temperatur dalam arah itu ([2]). Kita tetapkan bahwa arah naiknya jarak x adalah aliran panas positif. Mengingat hukum kedua termodinamika bahwa panas akan mengalir secara otomatis dari titik yang bersuhu lebih tinggi ke titik yang bersuhu lebih rendah, maka aliran panas akan menjadi positif bila gradien suhu negatif (Gambar 4) ([5]).

Oleh sebab itu tanda negatif ditambahkan dalam persamaan (2.1) untuk membuat perpindahan panas dalam arah x positif menghasilkan nilai akhir yang positif. Sehingga persamaan (2.1) menjadi :

$$\Phi(x) = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) disebut *Hukum Fourier untuk transfer panas*, setelah J. Fourier yang mengekspresikan pertama kali dalam teks perpindahan panasnya pada tahun 1822 ([2]).



Gambar 4. Sketsa yang Melukiskan Perjanjian tentang Tanda untuk Aliran Panas Konduksi

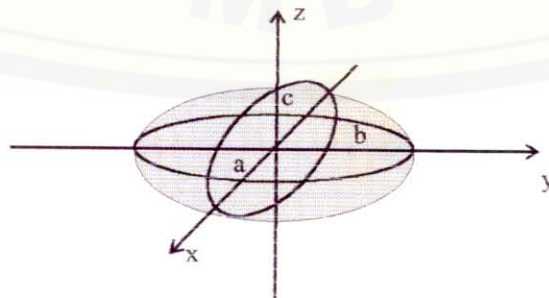
2.2 Ellipsoida

Ellipsoida adalah bangun pada ruang dimensi tiga yang proyeksi pada ketiga bidang koordinatnya adalah ellips, demikian juga proyeksi pada bidang yang sejajar terhadap bidang-bidang koordinat ([9]).

Persamaan ellipsoida dalam bentuk analitik dapat disajikan sebagai berikut :

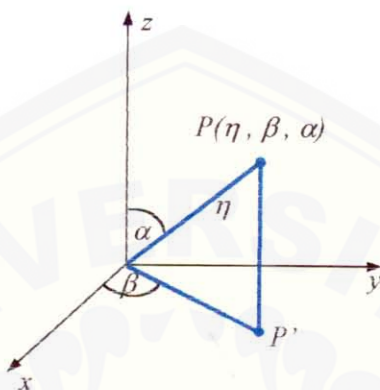
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.3)$$

Persamaan di atas merupakan persamaan ellipsoida dengan titik pusat 0 dan sumbu-sumbunya berimpit dengan sumbu-sumbu koordinat, seperti terlihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Ellipsoida

Banyak permasalahan konduksi panas yang lebih mudah dikerjakan dalam sistem koordinat silinder atau koordinat bola ([5]). Adapun sistem koordinat bola diilustrasikan untuk titik P dalam Gambar 6 berikut :



Gambar 6. Sistem Koordinat Bola

Kita dapat mentransformasi persamaan (2.3) dalam koordinat bola dengan menggunakan hubungan antara sistem koordinat bola dengan koordinat kartesius :

$$x = \eta \sin \alpha \cos \beta; \quad y = \eta \sin \alpha \sin \beta; \quad z = \eta \cos \alpha$$

$$\eta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \eta \geq 0; \quad 0 \leq \alpha \leq \pi; \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi$$

Sehingga persamaan ellipsoidal dalam koordinat bola adalah :

$$\frac{\eta^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\eta^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{b^2} + \frac{\eta^2 \cos^2 \alpha}{c^2} = 1 \quad (2.4)$$

2.3 Persamaan Panas pada Bola

Pada suatu benda, panas akan merambat dari tempat yang bersuhu tinggi ke tempat yang bersuhu rendah. Dengan kata lain panas merambat searah dengan penurunan temperatur. Demikian juga pada benda yang berbentuk *spherik* (bola), panas akan mengalir dari yang bersuhu tinggi ke yang bersuhu rendah secara simetri, yaitu lurus mengarah ke titik tengah bola.

Misal temperatur $T(r, \theta, \phi, t)$ adalah temperatur dalam benda *spherik* yang dinyatakan dalam tiga dimensi r , θ , dan ϕ yang berubah terhadap waktu t . Temperatur

T merambat secara simetri, sehingga T tidak bergantung pada sudut θ dan ϕ , tetapi hanya bergantung pada posisi radius r . Sehingga $T = T(r,t)$ menyatakan temperatur dan $\Phi = \Phi(r)$ menyatakan fluks panas (*heat flux*), yaitu panas yang melalui suatu permukaan per satuan luas (m^2) per satuan waktu (*detik*).

Misalkan potongan dari suatu bola antara posisi r_1 dan r_2 seperti diperlihatkan pada Gambar 7, panas yang masuk melalui bola bagian dalam dengan radius r_1 dan luas daerah $4\pi r_1^2$ adalah $4\pi r_1^2 \cdot \Phi(r_1)$ dan panas yang keluar melalui radius r_2 dengan luas daerah $4\pi r_2^2$ adalah $4\pi r_2^2 \cdot \Phi(r_2)$. Sehingga panas yang masuk ke lapisan antara r_1 dan r_2 adalah panas yang masuk dikurangi dengan panas yang keluar, atau secara aljabar dapat ditulis sebagai berikut :

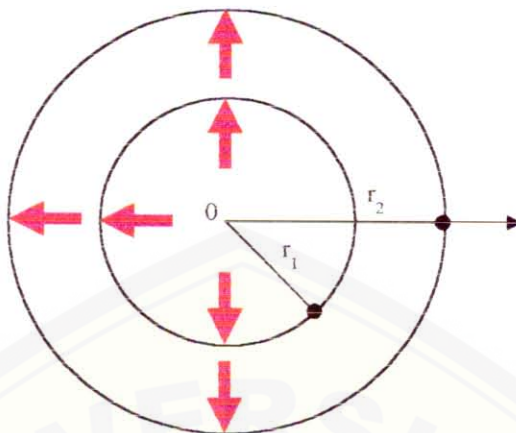
$$4\pi r_1^2 \cdot \Phi(r_1) - 4\pi r_2^2 \cdot \Phi(r_2)$$

Dengan menaikkan T dengan cara menaikkan ΔT dalam lapisan, maka $\Delta H = C \cdot \rho \cdot V \cdot \Delta T$, dimana C adalah panas spesifik, ρ adalah kepadatan massa, V adalah volume $\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3\right)$, ΔH adalah perubahan panas dalam lapisan dan ΔT adalah perubahan temperatur. Hubungan antara perubahan panas per unit waktu terhadap perubahan temperatur per unit waktu adalah :

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = C \cdot \rho \left(\frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3 \right) \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Dengan mengambil nilai limit $\Delta t \rightarrow 0$, panas yang dikandung dalam lapisan per detik, diperoleh :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C \cdot \rho \left(\frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3 \right) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.5)$$

Gambar 7. Panas Merambat Secara Simetri Antara r_1 dan r_2

Keseimbangan panas dalam sistem dapat dinyatakan sebagai :

$$4\pi r_1^2 \cdot \Phi(r_1) - 4\pi r_2^2 \cdot \Phi(r_2) = C \cdot \rho \left(\frac{4}{3} \pi r_2^3 - \frac{4}{3} \pi r_1^3 \right) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.6)$$

atau

$$\frac{[4\pi r^2 \cdot \Phi(r)]_{r=r_2} - [4\pi r^2 \cdot \Phi(r)]_{r=r_1}}{r_2 - r_1} = \frac{C \cdot \rho \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3) \frac{\partial T}{\partial t}}{r_2 - r_1} \quad (2.7)$$

Selanjutnya dengan mengambil nilai $r_2 - r_1 = \Delta r \rightarrow 0$, diperoleh $r_2 = r_1 = r$ dan $(r_2^2 + r_1 \cdot r_2 + r_1^2) = 3r^2$. Dengan menggunakan hukum Fourier tentang perpindahan panas, fluks panas $\Phi(r)$ atau panas yang merambat per unit area dan per unit waktu pada suatu titik dalam sebuah medium adalah berbanding lurus dengan gradien temperatur di titik tersebut, yaitu :

$$\Phi(r) = -\lambda A \frac{dT}{dr}$$

Substitusikan nilai-nilai di atas ke persamaan (2.7), kita peroleh persamaan differensial parsial dari persamaan dalam sistem *spherik* sebagai berikut :

$$C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.8)$$

2.4 Syarat Awal dan Syarat Batas pada Bola

2.4.1 Syarat Awal

Syarat awal atau kondisi awal didefinisikan dengan menuliskan distribusi temperatur yang diketahui melewati bola pada waktu nol. Dan dituliskan sebagai fungsi dari r ([11]) :

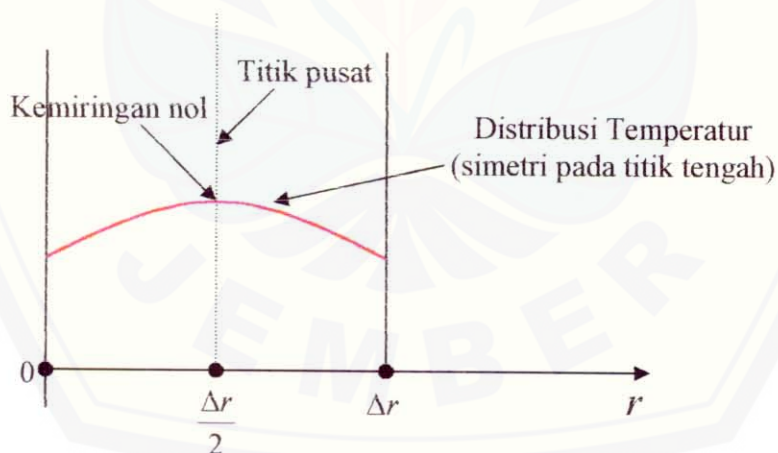
$$T(r, t = 0)$$

2.4.2 Syarat Batas

A. Syarat Batas Pusat (*Center Boundary Condition*)

Substraksi atau pengurangan antara fluks masuk dan fluks keluar di pusat bola adalah nol, karena tidak ada fluks masuk maupun fluks keluar pada $r = 0$ (lihat Gambar 8), sehingga gradien temperaturnya juga nol.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (2.9)$$



Gambar 8. Skema dari Syarat Batas di Pusat

B. Syarat Batas Interface (*Interface Boundary Condition*)

Dalam proses perpindahan panas, panas akan mengalir secara kontinu sehingga lapisan (*layer*) dengan konduktivitas panas yang berbeda dapat dipandang

sebagai suatu sistem dengan nilai konduktivitas panas yang konstan dimana diantara dua lapisan yang berbeda diberikan syarat batas *interface*.

Misalkan *interface* antara dua titik grid $r - p$ dan $r + q$ seperti yang terlihat pada Gambar 9. Dengan menggunakan prinsip keseimbangan panas pada *interface* yakni :

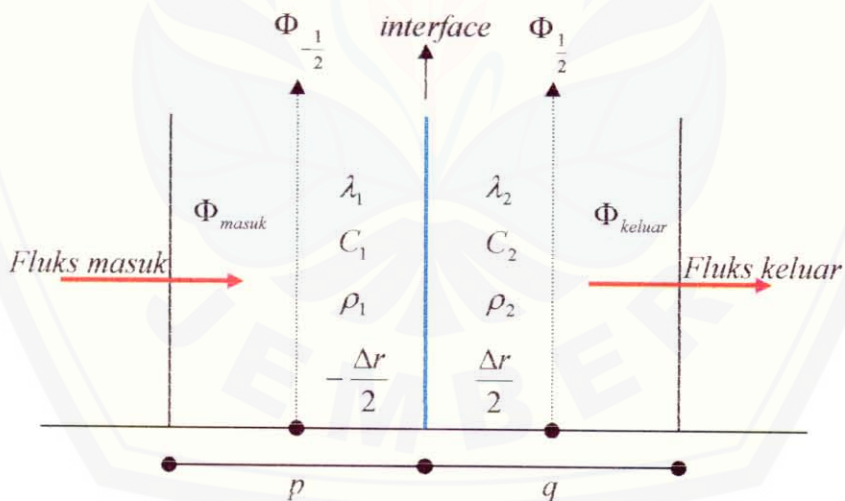
$$\Phi_{\text{masuk}} - \Phi_{\text{keluar}} = \text{perubahan muatan panas pada layer } \frac{\partial}{\partial t} (\text{kandungan panas dalam layer})$$

dimana

$$\Phi_{\text{masuk}} - \Phi_{\text{keluar}} = 4\pi(r-p)^2 \cdot \Phi(r-p) - 4\pi(r+q)^2 \cdot \Phi(r+q)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\text{kandungan panas dalam layer}) = & \rho_1 \cdot C_1 \cdot \frac{4}{3} \pi (r^3 - (r-p)^3) \frac{\partial T}{\partial t} + \\ & \rho_2 \cdot C_2 \cdot \frac{4}{3} \pi ((r+q)^3 - r^3) \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$



Gambar 9. Ilustrasi tentang Aliran Panas pada *Interface*

Dengan mengambil nilai $(p \equiv q) \rightarrow 0$ dan prinsip keseimbangan panas (*heat balance*), yaitu fluks masuk = fluks keluar, maka pengurangan antara fluks masuk dan fluks keluar menghasilkan :

$$8\pi.p \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda.r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 4\pi.p.r^2 (\rho_1.C_1 + \rho_2.C_2) \frac{\partial T}{\partial t}$$

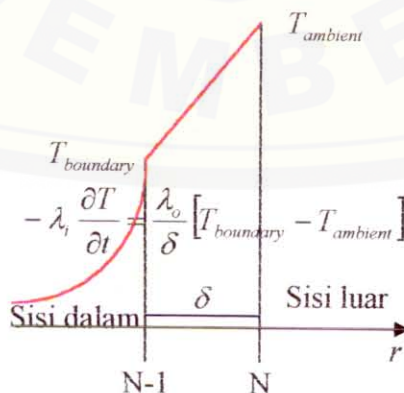
atau

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda.r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\rho_1.C_1 + \rho_2.C_2}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.10}$$

C. Syarat Batas Luar (*Outer Boundary Condition*)

Dalam proses perpindahan panas, bagian yang paling luar akan mengadakan kontak langsung terhadap sumber panas. Bagian yang paling luar disebut sebagai batas luar dan panas dari luar disebut temperatur lingkungan ($T_{ambient}$). Misalkan pada permukaan benda yang berbentuk bola terdapat suatu lapisan yang tipis (*film*) dengan ketebalan δ . Jika indeks i menyatakan bagian dalam dan indeks o bagian luar, maka dengan menggunakan prinsip keseimbangan panas dimana fluks masuk sama dengan fluks keluar, dimana fluks masuk adalah hasil kali antara konduktivitas panas dari luar dengan selisih temperatur lingkungan ($T_{ambient}$) dan temperatur pada syarat batas ($T_{boundary}$) dibagi dengan ketebalan lapisan tipis (*film*) yang merupakan gradien temperatur di permukaan (lihat Gambar 10). Secara matematik dirumuskan dalam persamaan (2.11) berikut ini ([10]):

$$\lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \right\}_{boundary} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{ambient} - T_{boundary} \} \tag{2.11}$$



Gambar 10. Skema tentang Perpindahan Panas pada Permukaan Luar

2.5 Metode Numerik

Dalam dekade terakhir ini, banyak sekali penyelesaian analitis dari soal-soal perpindahan kalor konduksi yang terkumpul dalam literatur. Namun demikian dalam banyak situasi praktis, kita dihadapkan pada syarat-syarat atau kondisi batas dan geometri yang sedemikian rupa sehingga penyelesaian analitis untuk itu tidak bisa dilakukan, ataupun bisa tetapi sangat kompleks, sehingga evaluasi dengan angka-angka sangat sulit. Untuk situasi yang demikian, pendekatan yang paling baik adalah didasarkan atas teknik-teknik beda hingga (*finite-difference technique*) ([4]).

Misal diberikan persamaan :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; 0 < x < L; 0 < t \quad (2.12)$$

dimana T adalah temperatur, K adalah konduktivitas, sedang t dan x adalah waktu dan jarak. Untuk mengaproksimasi persamaan (2.12) dengan beda hingga, dibuat garis paralel pada sumbu x dan t yang membentuk *grid* atau *mesh* (seperti terlihat dalam Gambar 11). Kita akan menulis Δx dan Δt untuk jarak garis.

$$(x_j = j\Delta x, t_n = n\Delta t), j = 0, 1, \dots, J; n = 0, 1, 2, \dots$$

dimana $\Delta x = \frac{L}{J}$, yang disebut titik jaringan (*grid point / mesh point*) ([7]).

Bentuk turunan pertama dan kedua terhadap waktu dan ruang adalah :

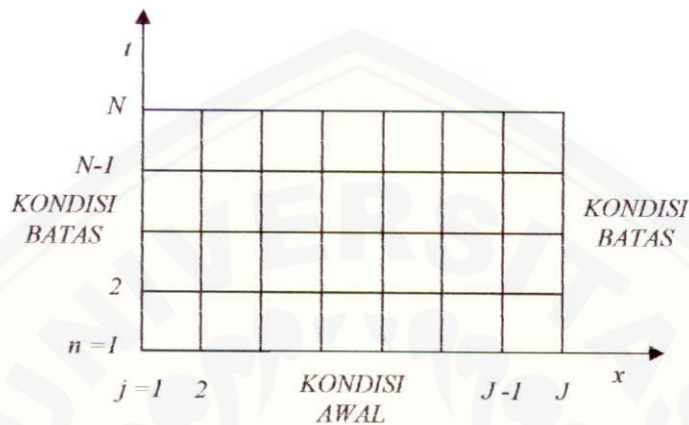
$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.14)$$

Dalam bentuk beda hingga di atas, superskrip n dan $n+1$ menunjukkan nilai T pada waktu n dan $n+1$. Penulisan n sebagai superskrip, menunjukkan waktu, untuk membedakan dengan subskrip untuk j yang menunjukkan notasi ruang ([1]).

Kita akan mengaproksimasi solusi pada titik jaringan (*mesh points*) dengan menunjukkan bahwa nilai aproksimasi adalah :

$$T_j^n = T(x_j, t_n) \tag{2.15}$$



Gambar 11. Bidang Hitungan Penyelesaian Numerik

Ada empat tipe metode (skema) dasar untuk menyelesaikan persamaan (2.12), yaitu :

1. Skema Eksplisit
2. Skema Implisit
3. Skema Crank-Nicholson
4. Skema Metode- θ

2.5.1 Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel waktu $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui (Gambar 12). Dengan menggunakan skema seperti yang ditunjukkan pada Gambar 12, fungsi $T(x,t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut :

$$T(x,t) = T_j^n$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2}$$

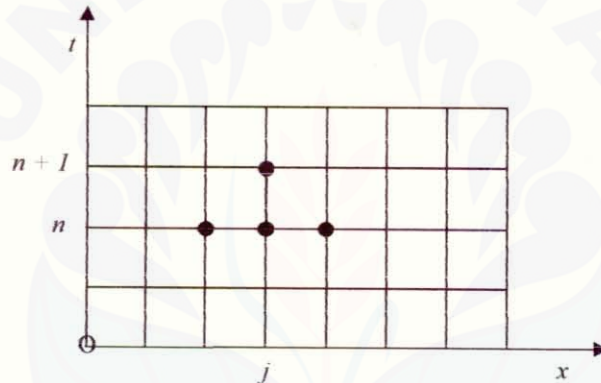
sehingga persamaan (2.12) dapat ditulis :

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = K_j \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2}$$

atau

$$T_j^{n+1} = T_j^n + K_j \nu (T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \tag{2.16}$$

dimana $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$



Gambar 12. Skema Metode Eksplisit

Persamaan (2.16) dengan kondisi batas yang diketahui memungkinkan untuk menghitung T_j^{n+1} , dari nilai awal dan nilai batas :

$$T_j^0 = T^0(x_j); j = 1, 2, \dots, J-1$$

$$T_0^n = T_J^n = 0; n = 0, 1, 2, \dots$$

Kondisi perhitungan pada metode eksplisit akan stabil jika $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Skema eksplisit memberikan hasil yang baik apabila langkah waktu Δt yang cukup kecil. Apabila Δt besar, penyelesaian dari persamaan (2.16) menjadi tidak stabil. Keterbatasan ini menyebabkan metode eksplisit kurang disukai, karena diperlukan waktu hitungan yang lebih lama ([1]).

2.5.2 Skema Implisit

Sedangkan dalam skema implisit, ruas kanan persamaan (2.12) tersebut ditulis pada waktu $n+1$, dimana nilainya belum diketahui. Gambar 13 menunjukkan jaringan titik simpul dari skema implisit. Dengan menggunakan skema tersebut, fungsi $T(x,t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut ini :

$$T(x,t) = T_j^n \text{ atau } T(x,t) = T_j^{n+1}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Dengan menggunakan skema di atas, persamaan (2.12) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga :

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = K_j \frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{2.17}$$

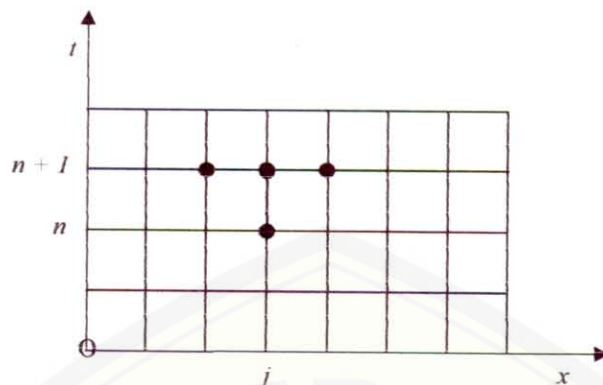
$$\frac{1}{\Delta t} T_j^{n+1} - \frac{K_j}{\Delta x^2} T_{j-1}^{n+1} + \frac{2K_j}{\Delta x^2} T_j^{n+1} - \frac{K_j}{\Delta x^2} T_{j+1}^{n+1} = \frac{T_j^n}{\Delta t}$$

$$-\frac{K_j}{\Delta x^2} T_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2K_j}{\Delta x^2} \right) T_j^{n+1} - \frac{K_j}{\Delta x^2} T_{j+1}^{n+1} = \frac{T_j^n}{\Delta t}$$

$$-vK_j T_{j-1}^{n+1} + (1 + 2vK_j) T_j^{n+1} - vK_j T_{j+1}^{n+1} = T_j^n \tag{2.18}$$

dimana $v = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Dengan memberikan nilai $j = 1, 2, \dots, (J-1)$, kita peroleh persamaan linier $J-1$ yang dapat diselesaikan dengan metode matrik.



Gambar 13. Skema Metode Implisit

Penyelesaian dengan menggunakan skema implisit lebih sulit dibandingkan dengan skema eksplisit. Kelebihan dari skema implisit adalah stabil tanpa syarat, langkah waktu Δt dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan ketidakstabilan. Pembatasan Δt hanya untuk menjaga kesalahan pemotongan (*truncation error*) dalam batas-batas yang dapat diterima.

2.5.3 Skema Crank-Nicholson

Metode Crank-Nicholson adalah teknik yang membuat order aproksimasi beda hingga menjadi sama ([9]). Dalam skema eksplisit, ruas kanan dari persamaan (2.12) ditulis pada waktu n . Dalam skema implisit, ruas kanan dari persamaan tersebut ditulis untuk waktu $n+1$. Dalam kedua skema tersebut differensial terhadap waktu ditulis seperti dalam persamaan (2.13). Yang berarti differensial terpusat terhadap waktu $\frac{n+1}{2}$. Skema Crank-Nicholson menulis ruas kanan dari persamaan (2.12) pada waktu $\frac{n+1}{2}$ yang merupakan nilai rerata dari skema eksplisit dan implisit.

Turunan kedua fungsi terhadap x adalah :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

Dengan menggunakan skema di atas persamaan (2.12) dapat ditulis :

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = K_j \left(\frac{1}{2} \frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.19)$$

Suku kedua ruas kanan dari persamaan di atas telah diketahui. Terlihat bahwa persamaan di atas adalah persamaan implisit ([1]).

2.5.4 Skema Metode- θ

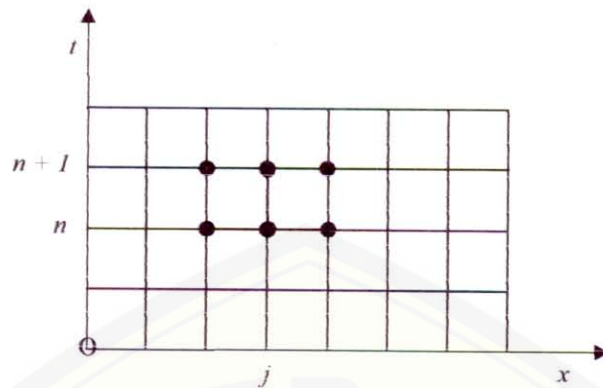
Dalam skema Crank-Nicholson, kita artikan aproksimasi beda hingga pada derivatif waktu sebagai beda pusat pada titik tengah interval waktu. Dalam Metode- θ , kita membuat pernyataan lebih umum dengan mengartikan aproksimasi ini untuk penerapan pada beberapa titik yang lain dalam interval waktu ([3]).

Sekarang kita anggap dua metode beda hingga, yang mana berbeda hanya dalam satu aproksimasi kedua jarak derivatif dengan tiga titik pada level waktu yang lama, yaitu t_n , dan yang lainnya menggunakan tiga titik pada level waktu yang baru, t_{n+1} . Secara umum aproksimasi dengan metode- θ menggunakan keenam titik ini. Ini dapat dianggap bahwa kita mengambil rata-rata terbobot (*weighted*) pada dua formula. Bila waktu beda (*difference*) pada sisi kiri sama, kita dapatkan skema enam titik (Gambar 14).

Skema metode- θ dapat dituliskan sebagai berikut ;

$$\begin{aligned} \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} &= \theta \left(\frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \\ T_j^{n+1} - T_j^n &= \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\theta (T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}) + (1 - \theta) (T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \right] \\ T_j^{n+1} &= T_j^n + \nu \left[\theta (T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}) + (1 - \theta) (T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \right] \quad (2.20) \end{aligned}$$

dimana $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$



Gambar 14. Skema Metode- θ

Kestabilan metode- θ dapat dinyatakan sebagai berikut ([6]):

- (a) $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, stabil jika dan hanya jika $v \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}$
- (b) $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, stabil untuk semua nilai v

Kelebihan dari skema ini adalah untuk nilai Δx tertentu kesalahan pemotongan pada suku dalam Δt adalah lebih kecil daripada dalam skema eksplisit dan implisit ([1]).

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan bahwa model perpindahan panas pada benda-benda ellipsoidal dengan pendekatan persamaan panas pada bola adalah sebagai berikut :

1. Untuk ellipsoidal yang mempunyai sifat fisik homogen :

a. Untuk jari-jari $x = a$:

$$C.\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda.x^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \text{ dengan syarat batas :}$$

$$\text{i) } \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \text{ (syarat batas di pusat)}$$

$$\text{ii) } \lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\}_{\text{boundary}} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{\text{ambient}} - T_{\text{boundary}} \} \text{ (syarat batas luar)}$$

b. Untuk jari-jari $y = b$:

$$C.\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda.y^2 \frac{\partial T}{\partial y} \right), \text{ dengan syarat batas :}$$

$$\text{i) } \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \text{ (syarat batas di pusat)}$$

$$\text{ii) } \lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} \right\}_{\text{boundary}} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{\text{ambient}} - T_{\text{boundary}} \} \text{ (syarat batas luar)}$$

c. Untuk jari-jari $z = c$:

$$C.\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda.z^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right), \text{ dengan syarat batas :}$$



$$i) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \text{ (syarat batas di pusat)}$$

$$ii) \lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial z} \right\}_{boundary} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{ambient} - T_{boundary} \} \text{ (syarat batas luar)}$$

2. Untuk ellipsoida yang mempunyai sifat fisik non homogen (*multilayer*) :

a. Untuk jari-jari $x = a$:

$$C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot x^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \text{ dengan syarat batas :}$$

$$i) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \text{ (syarat batas di pusat)}$$

$$ii) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot x^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{C_1 \cdot \rho_1 + C_2 \cdot \rho_2}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ (syarat batas interface)}$$

$$iii) \lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\}_{boundary} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{ambient} - T_{boundary} \} \text{ (syarat batas luar)}$$

b. Untuk jari-jari $y = b$:

$$C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot y^2 \frac{\partial T}{\partial y} \right), \text{ dengan syarat batas :}$$

$$i) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \text{ (syarat batas di pusat)}$$

$$ii) \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot y^2 \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{C_1 \cdot \rho_1 + C_2 \cdot \rho_2}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ (syarat batas interface)}$$

$$iii) \lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} \right\}_{boundary} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{ambient} - T_{boundary} \} \text{ (syarat batas luar)}$$

c. Untuk jari-jari $z = c$:

$$C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot z^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right), \text{ dengan syarat batas :}$$

$$\text{i) } \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \text{ (syarat batas di pusat)}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot z^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{C_1 \cdot \rho_1 + C_2 \cdot \rho_2}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ (syarat batas interface)}$$

$$\text{iii) } \lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial z} \right\}_{\text{boundary}} = \frac{\lambda_o}{\delta} \left\{ T_{\text{ambient}} - T_{\text{boundary}} \right\} \text{ (syarat batas luar)}$$

Persamaan yang kita peroleh hanya dapat digunakan untuk mengetahui proses perpindahan panas pada sumbu-sumbu ellipsoida. Sedangkan untuk mengetahui bagaimana penyelesaian perpindahan panas pada titik yang lain adalah dengan cara :

1. Mengetahui koordinat titik
2. Cari jarak titik ke pusat dengan rumus $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. Lihat dimana r berada. Jika terletak di dalam bola dengan jari-jari x (sumbu terpendek), untuk meminimalisasi *error*, maka penyelesaiannya menggunakan persamaan panas pada bola dengan jari-jari x . Dan bila terletak di luar bola dengan jari-jari x dan di dalam bola dengan jari-jari z , maka penyelesaiannya menggunakan persamaan panas pada bola dengan jari-jari z . Demikian juga jika terletak di luar bola dengan jari-jari x dan z dan di dalam bola dengan jari-jari y (sumbu terpanjang), maka penyelesaiannya menggunakan persamaan panas pada bola dengan jari-jari y .

4.2 Saran

Di dalam memodelkan, asumsi dan aproksimasi harus dibuat. Tentu saja tidak mungkin memperoleh model yang sangat sempurna. Namun demikian dengan model yang diperoleh dapat kita jadikan bahan pertimbangan dalam memprediksi hasil eksperimen. Selain itu juga masih terbuka untuk mengembangkan model pada ellipsoida non homogen (*multilayer*) yang lapisan dalamnya berupa bola.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bambang T. (1996), *Metode Numerik*, Beta Offset Yogyakarta.
- [2] Çengel Y.A. (1998), *Heat Transfer: A Practical Approach*, Mc Graw-Hill.
- [3] Gerald C. F. And Wheatly P. O. (1999), *Applied Numerical Analysis* (Sixth Edition), Addison Wesley Longman Inc.
- [4] Holman J. P., E. Jasjfi (1993), *Perpindahan Kalor* (Edisi Keenam), Penerbit Erlangga Jakarta.
- [5] Kreith F., Arko Priyono (1997), *Prinsip-Prinsip Perpindahan Panas* (Edisi Ketiga), Penerbit Erlangga Jakarta.
- [6] Masitah H. and A. Hashim, (1990), *Determination of the Spesifik Heat of Oil Palm Fruit Bunch*, The Planter, Kuala Lumpur, vol. 66, p. 155 – 166.
- [7] Morton K.W. and Mayers D.F. (1994), *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press.
- [8] O. O. Babatunde & G. A. Makanjuola, (1998), *Effect of Sterilization on Fruit Recovery in Oil Palm Fruit Processing*, J. Agri. Engng. Res., vol. 41, p. 3- 5.
- [9] Purcell E.J, I Nyoman S. dkk. (1994), *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2* (Edisi Keempat), Penerbit Erlangga Jakarta.
- [10] Rusli H. (2001), *Model-model Perpindahan Panas Benda-benda Sperik Multilayer*, Majalah Matematika dan Statistika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, Vol. 1. No. 2. April. Hal. 73 – 79.
- [11] Rusli H. (2002), *Modelling Palm Fruit Sterilization in Batch Unit Process*, Natural Jurnal Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya Malang, Vol. 6. Januari. Hal. 142 – 149.
- [12] Sivasothy K., Ma A. N., Maycock J. H. and Koichiro Y., (1993), *Combined Sterization-Stripping Process*, Palm Oil Research Institute of Malaysia (PORIM), vol 19, p. 20, 21, 25 – 29.

```

% PROGRAM PERPINDAHAN PANAS PADA BENDA-BENDA ELLIPSOIDA
% =====
% Persamaan Panas dengan Tiga Lapisan (Layer) yang Berbeda
dan Dua Interface
% Lapisan 1: lambda1, rho1, C1
% Lapisan 2: lambda2, rho2, C2
% Lapisan 3: lambda3, rho3, C3
% =====
clear
clg
% Konduktivitas Thermal pada Masing-Masing Lapisan (W/m^2 C):
% -----
lambda1 = input('Masukkan Konduktivitas Thermal pada Lapisan 1
(lambda1) = ');
lambda2 = input('Masukkan Konduktivitas Thermal pada Lapisan 2
(lambda2) = ');
lambda3 = input('Masukkan Konduktivitas Thermal pada Lapisan 3
(lambda3) = ');
theta = 0.75; % Crank Nicholson parameter

% Panas Spesifik pada Masing-Masing Lapisan (J/(g C)):
% -----
C1 = input('Masukkan Panas Spesifik pada Lapisan 1
(C1) (J/kg.C) = ');
C2 = input('Masukkan Panas Spesifik pada Lapisan 2
(C2) (J/kg.C) = ');
C3 = input('Masukkan Panas Spesifik pada Lapisan 3
(C3) (J/kg.C) = ');

% Kepadatan Massa pada Masing-Masing Lapisan (kg/m^3):
% -----
rho1 = input('Masukkan Kepadatan Massa pada Lapisan 1
(rho1) (kg/m^3) = ');
rho2 = input('Masukkan Kepadatan Massa pada Lapisan 2
(rho2) (kg/m^3) = ');
rho3 = input('Masukkan Kepadatan Massa pada Lapisan 3
(rho3) (kg/m^3) = ');

% Jumlah Grid Points pada Masing-Masing Lapisan:
% -----
N1 = input('Masukkan Jumlah Grid-points dalam Lapisan 1 (N1)
= ');
N2 = input('Masukkan Jumlah Grid-points dalam Lapisan 2 (N2)
= ');
N3 = input('Masukkan Jumlah Grid-points dalam Lapisan 3 (N3)
= ');

```

```

% Panjang Sumbu Mayor pada Masing-masing Sumbu Koordinat :
% -----
a = input ('Masukkan Panjang Ellipsoida pada Sumbu x (a) dalam
cm = ');
b = input ('Masukkan Panjang Ellipsoida pada Sumbu y (b) dalam
cm = ');
c = input ('Masukkan Panjang Ellipsoida pada Sumbu z (c) dalam
cm = ');

% Koordinat Titik(x,y,z) :
% -----
x1 = input ('Masukkan Koordinat Titik x = ');
y1 = input ('Masukkan Koordinat Titik y = ');
z1 = input ('Masukkan Koordinat Titik z = ');

% Temperatur Lingkungan (C):
% -----
Tambient = input ('Masukkan Besar Temperatur Lingkungan
(Tambient) = ');

r = sqrt(x1^2+y1^2+z1^2);

Nx = N1 + N2 + N3; % N adalah jumlah grid point
dalam semua lapisan
mu = 0.1678; % Konduktivitas Thermal pada
Lapisan Film
delta = 1E-12; % Ketebalan Lapisan Film
deltax = (a*0.01)/Nx;
alpa = mu/(lambda3*delta);

if r < a
% =====
% Persamaan Differensial Perpindahan Panas pada Bola 1 pada
Sumbu x
% =====
fprintf('\n Tlama(Celcius)
')
fprintf('\n deltat -----')
fprintf('\n (menit) Tc1(x) Tc2(x) Tc3(x)')
fprintf('\n-----')

for iter = 0:5:55
deltat = iter;
v = deltat/(deltax^2);

```

```

%          Inisialisasi Matriks
% -----
A      = zeros (Nx+1, Nx+1);
B      = zeros (Nx+1, Nx+1);
Tlama = zeros (Nx+1, 1);
Tbaru = zeros (Nx+1, 1);
rhs    = zeros (Nx+1, 1);

%          Syarat awal
% -----
for I = 1:Nx+1
    Tlama(I) = 25;
end

%          Syarat Batas pada x = 0
% -----
A1 = 1 + 6*lambda1*v*theta/(C1*rhol);
A2 = - 6*lambda1*v*theta/(C1*rhol);
B1 = 1 - 6*lambda1*v*(1 - theta)/(C1*rhol);
B2 = 6*lambda1*v*(1 - theta)/(C1*rhol);

%          Syarat Batas pada Batas Luar
% -----
Gamma1 = - theta/deltax;
Gamma2 = (alpha + 1/deltax)*theta;
Gamma3 = (1 - theta)/deltax;
Gamma4 = -(alpha + 1/deltax)*(1 - theta);
A(1,1) = A1;
A(1,2) = A2;
B(1,1) = B1;
B(1,2) = B2;
A(Nx+1, Nx) = Gamma1;
A(Nx+1, Nx+1) = Gamma2;
B(Nx+1, Nx) = Gamma3;
B(Nx+1, Nx+1) = Gamma4;

% Lapisan 1
% =====
for J = 2:N1
    x=(J-1)*deltax;
    delay1 = C1*rhol*(x^2 + deltax^2/12); % Denominator
dalam lapisan 1
    alfa1(J) = - v*lambda1*theta*(x - deltax/2)^2/delay1;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda1*theta*2*(x^2 +
(deltax)^2/4)/delay1;
    alfa3(J) = - v*lambda1*theta*(x + deltax/2)^2/delay1;

```



```

        beta1(J) = v*lambda1*(1 - theta)*(x -
deltax/2)^2/delay1;
        beta2(J) = 1 - v*lambda1*(1 - theta)*2*(x^2 +
(deltax)^2/4)/delay1;
        beta3(J) = v*lambda1*(1 - theta)*(x +
deltax/2)^2/delay1;
        A(J,J-1) = alfa1(J);
        A(J,J)   = alfa2(J);
        A(J,J+1) = alfa3(J);
        B(J,J-1) = beta1(J);
        B(J,J)   = beta2(J);
        B(J,J+1) = beta3(J);
    end;

% Lapisan 2
% =====
for J = N1+2:N1+N2
    x=(J-1)*deltax;
    delay2 = C2*rho2*(x^2 + deltax^2/12); % Denominator
dalam lapisan 2
    alfa1(J) = - v*lambda2*theta*(x - deltax/2)^2/delay2;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda2*theta*2*(x^2 +
(deltax)^2/4)/delay2;
    alfa3(J) = - v*lambda2*theta*(x + deltax/2)^2/delay2;
    beta1(J) = v*lambda2*(1 - theta)*(x -
deltax/2)^2/delay2;
    beta2(J) = 1 - v*lambda2*(1 - theta)*2*(x^2 +
(deltax)^2/4)/delay2;
    beta3(J) = v*lambda2*(1 - theta)*(x +
deltax/2)^2/delay2;
    A(J,J-1) = alfa1(J);
    A(J,J)   = alfa2(J);
    A(J,J+1) = alfa3(J);
    B(J,J-1) = beta1(J);
    B(J,J)   = beta2(J);
    B(J,J+1) = beta3(J);
end

% Lapisan 3
% =====
for J = N1+N2+2:Nx
    x=(J-1)*deltax;
    delay3 = C3*rho3*(x^2 + deltax^2/12); % Denominator
dalam lapisan 3
    alfa1(J) = - v*lambda3*theta*(x - deltax/2)^2/delay3;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda3*theta*2*(x^2 +

```

```

(deltax)^2/4)/delay3;
    alfa3(J) = - v*lambda3*theta*(x + deltax/2)^2/delay3;
    beta1(J) = v*lambda3*(1-theta)*(x - deltax/2)^2/delay3;
    beta2(J) = 1 - v*lambda3*(1 - theta)*2*(x^2 +
(deltax)^2/4)/delay3;
    beta3(J) = v*lambda3*(1 - theta)*(x +
deltax/2)^2/delay3;
    A(J,J-1) = alfa1(J);
    A(J,J) = alfa2(J);
    A(J,J+1) = alfa3(J);
    B(J,J-1) = beta1(J);
    B(J,J) = beta2(J);
    B(J,J+1) = beta3(J);
end

% Interface Pertama
% =====
J = N1+1;
alfa1(J) = - theta*lambda1;
alfa2(J) = theta*(lambda1 + lambda2);
alfa3(J) = - theta*lambda2;
beta1(J) = theta*lambda1;
beta2(J) = - theta*(lambda1 + lambda2);
beta3(J) = theta*lambda2;
A(J,J-1) = alfa1(J);
A(J,J) = alfa2(J);
A(J,J+1) = alfa3(J);
B(J,J-1) = beta1(J);
B(J,J) = beta2(J);
B(J,J+1) = beta3(J);

% Interface Kedua
% =====
J = N1 + N2 + 1;
alfa1(J) = - theta*lambda2;
alfa2(J) = theta*(lambda2 + lambda3);
alfa3(J) = - theta*lambda3;
beta1(J) = theta*lambda2;
beta2(J) = - theta*(lambda2 + lambda3);
beta3(J) = theta*lambda3;
A(J,J-1) = alfa1(J);
A(J,J) = alfa2(J);
A(J,J+1) = alfa3(J);
B(J,J-1) = beta1(J);
B(J,J) = beta2(J);
B(J,J+1) = beta3(J);
A;

```

```

for it=1:60
    rhs = B*Tlama;
    rhs(Nx+1) = rhs(Nx+1) + alpa*Tambient;
    Tbaru      = A\rhs;
    Tlama      = Tbaru;
end
% Mencetak Nilai Nilai T saat delta t :
% =====
fprintf('\n %8.0f',deltat)
fprintf('\n %25.2f',Tlama(1))
fprintf('\n %37.2f',Tlama((0.5*Nx)+1))
fprintf('\n %50.2f',Tlama((0.8*Nx)+1))

size_Tlama = size(Tlama,1);
for i=1:size_Tlama,
    x_array(i) = (i-1)/(size_Tlama-1);
end;
plot(x_array(1:size_Tlama), Tlama);
hold on;
end

hold off;
xlabel('x');
ylabel('Temperatur');

else
if r <= c
% =====
% Persamaan Differensial Perpindahan Panas pada Bola 3 pada
Sumbu z
% =====
fprintf('\n
                                Tlama(Celcius) - ')
fprintf('\n      deltat      -----')
fprintf('\n      (menit)      Tc1(z)      Tc2(z)      Tc3(z) ')
fprintf('\n-----')

for iter = 0:5:55
    deltax = deltax;
    Nz     = (Nx*c)/a;
    deltat = iter;
    v      = deltat/(deltax^2);

%           Inisialisasi Matriks
% -----
A      = zeros(Nz+1,Nz+1);
B      = zeros(Nz+1,Nz+1);
Tlama = zeros(Nz+1,1);

```

```

Tbaru = zeros(Nz+1,1);
rhs    = zeros(Nz+1,1);

%                               Syarat awal
% -----
for I = 1:Nz+1
    Tlama(I) = 25;
end

%                               Syarat Batas pada y = 0
% -----
A1 = 1 + 6*lambda1*v*theta/(C1*rhol);
A2 = - 6*lambda1*v*theta/(C1*rhol);
B1 = 1 - 6*lambda1*v*(1 - theta)/(C1*rhol);
B2 = 6*lambda1*v*(1 - theta)/(C1*rhol);

%                               Syarat Batas pada Batas Luar
% -----
Gamma1 = - theta/deltaz;
Gamma2 = (alpha + 1/deltaz)*theta;
Gamma3 = (1 - theta)/deltaz;
Gamma4 = -(alpha + 1/deltaz)*(1 - theta);
A(1,1) = A1;
A(1,2) = A2;
B(1,1) = B1;
B(1,2) = B2;
A(Nz+1,Nz) = Gamma1;
A(Nz+1,Nz+1) = Gamma2;
B(Nz+1,Nz) = Gamma3;
B(Nz+1,Nz+1) = Gamma4;

% Lapisan 1
% =====
for J = 2:N1
    z=(J-1)*deltaz;
    delay1 = C1*rhol*(z^2 + deltaz^2/12); % Denominator
dalam lapisan 1
    alfa1(J) = - v*lambda1*theta*(z - deltaz/2)^2/delay1;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda1*theta*2*(z^2 +
(deltaz)^2/4)/delay1;
    alfa3(J) = - v*lambda1*theta*(z + deltaz/2)^2/delay1;
    beta1(J) = v*lambda1*(1 - theta)*(z -
deltaz/2)^2/delay1;
    beta2(J) = 1 - v*lambda1*(1 - theta)*2*(z^2 +
(deltaz)^2/4)/delay1;
    beta3(J) = v*lambda1*(1 - theta)*(z +

```

```

deltaz/2)^2/delay1;
    A(J,J-1) = alfa1(J);
    A(J,J)   = alfa2(J);
    A(J,J+1) = alfa3(J);
    B(J,J-1) = beta1(J);
    B(J,J)   = beta2(J);
    B(J,J+1) = beta3(J);
end

% Lapisan 2
% =====
for J = N1+2:N1+N2
    z=(J-1)*deltaz;
    delay2 = C2*rho2*(z^2 + deltaz^2/12); % Denominator
dalam lapisan 2
    alfa1(J) = - v*lambda2*theta*(z - deltaz/2)^2/delay2;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda2*theta*2*(z^2 +
(deltaz)^2/4)/delay2;
    alfa3(J) = - v*lambda2*theta*(z + deltaz/2)^2/delay2;
    beta1(J) = v*lambda2*(1 - theta)*(z -
deltaz/2)^2/delay2;
    beta2(J) = 1 - v*lambda2*(1 - theta)*2*(z^2 +
(deltaz)^2/4)/delay2;
    beta3(J) = v*lambda2*(1 - theta)*(z +
deltaz/2)^2/delay2;
    A(J,J-1) = alfa1(J);
    A(J,J)   = alfa2(J);
    A(J,J+1) = alfa3(J);
    B(J,J-1) = beta1(J);
    B(J,J)   = beta2(J);
    B(J,J+1) = beta3(J);
end

% Lapisan 3
% =====
for J = N1+N2+2:Nz
    z=(J-1)*deltaz;
    delay3 = C3*rho3*(z^2 + deltaz^2/12);% Denominator
dalam lapisan 3
    alfa1(J) = - v*lambda3*theta*(z - deltaz/2)^2/delay3;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda3*theta*2*(z^2 +
(deltaz)^2/4)/delay3;
    alfa3(J) = - v*lambda3*theta*(z + deltaz/2)^2/delay3;
    beta1(J) = v*lambda3*(1-theta)*(z - deltaz/2)^2/delay3;
    beta2(J) = 1 - v*lambda3*(1 - theta)*2*(z^2 +

```

```

(deltaz)^2/4)/delay3;
    beta3(J) = v*lambda3*(1 - theta)*(z +
deltaz/2)^2/delay3;
    A(J, J-1) = alfa1(J);
    A(J, J)   = alfa2(J);
    A(J, J+1) = alfa3(J);
    B(J, J-1) = betal(J);
    B(J, J)   = beta2(J);
    B(J, J+1) = beta3(J);
end

% Interface Pertama
% =====
J = N1+1;
alfa1(J) = - theta*lambda1;
alfa2(J) =  theta*(lambda1 + lambda2);
alfa3(J) = - theta*lambda2;
betal(J)  =  theta*lambda1;
beta2(J) = - theta*(lambda1 + lambda2);
beta3(J) =  theta*lambda2;
A(J, J-1) = alfa1(J);
A(J, J)   = alfa2(J);
A(J, J+1) = alfa3(J);
B(J, J-1) = betal(J);
B(J, J)   = beta2(J);
B(J, J+1) = beta3(J);

% Interface Kedua
% =====
J = N1 + N2 + 1;
alfa1(J) = - theta*lambda2;
alfa2(J) =  theta*(lambda2 + lambda3);
alfa3(J) = - theta*lambda3;
betal(J)  =  theta*lambda2;
beta2(J) = - theta*(lambda2 + lambda3);
beta3(J) =  theta*lambda3;
A(J, J-1) = alfa1(J);
A(J, J)   = alfa2(J);
A(J, J+1) = alfa3(J);
B(J, J-1) = betal(J);
B(J, J)   = beta2(J);
B(J, J+1) = beta3(J);
A;

for it=1:60
    rhs = B*Tlama;
    rhs(Nz+1) = rhs(Nz+1) + alpa*Tambient;

```

```

    Tbaru      = A\rhs;
    Tlama      = Tbaru;
end

% Mencetak Nilai Nilai T saat delta t :
% =====
fprintf('\n %8.0f',deltat)
fprintf('\n %25.2f',Tlama(1))
fprintf('\n %37.2f',Tlama((0.5*Nz)+1))
fprintf('\n %50.2f',Tlama((0.8*Nz)+1))

size_Tlama=size(Tlama,1);
for i=1:size_Tlama,
    x_array(i) = (i-1)/(size_Tlama-1);
end
plot(x_array(1:size_Tlama), Tlama);
hold on;
end

hold off;
xlabel('z');
ylabel('Temperature');

else
if r <= b
% =====
% Persamaan Differensial Perpindahan Panas pada Bola 2 pada
Sumbu y
% =====
fprintf('\n
                                Tlama(Celcius)      ')
fprintf('\n      deltat      -----')
fprintf('\n      (menit)      Tc1(y)      Tc2(y)      Tc3(y)  ')
fprintf('\n-----')

for iter = 0:5:55
    deltax = deltax;
    deltat = iter;
    v      = deltat/(deltax^2);
    Ny     = (Nx*b)/a;

%           Inisialisasi Matriks
% -----
A      = zeros(Ny+1,Ny+1);
B      = zeros(Ny+1,Ny+1);
Tlama = zeros(Ny+1,1);
Tbaru = zeros(Ny+1,1);
rhs    = zeros(Ny+1,1);

```

```

%                               Syarat awal
% -----
for I = 1:Ny+1
    Tlama(I) = 25;
end

%                               Syarat Batas pada y = 0
% -----
A1 = 1 + 6*lambda1*v*theta/(C1*rho1);
A2 = - 6*lambda1*v*theta/(C1*rho1);
B1 = 1 - 6*lambda1*v*(1 - theta)/(C1*rho1);
B2 = 6*lambda1*v*(1 - theta)/(C1*rho1);

%                               Syarat Batas pada Batas Luar
% -----
Gamma1 = - theta/deltay;
Gamma2 = (alpha + 1/deltay)*theta;
Gamma3 = (1 - theta)/deltay;
Gamma4 = -(alpha + 1/deltay)*(1 - theta);
A(Ny+1, Ny) = Gamma1;
A(Ny+1, Ny+1) = Gamma2;
B(Ny+1, Ny) = Gamma3;
B(Ny+1, Ny+1) = Gamma4;

% Lapisan 1
% =====
for J = 2:N1
    y=(J-1)*deltay;
    delay1 = C1*rho1*(y^2 + deltax^2/12); % Denominator
dalam lapisan 1
    alfa1(J) = - v*lambda1*theta*(y - deltax/2)^2/delay1;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda1*theta*2*(y^2 +
(deltax)^2/4)/delay1;
    alfa3(J) = - v*lambda1*theta*(y + deltax/2)^2/delay1;
    beta1(J) = v*lambda1*(1 - theta)*(y -
deltax/2)^2/delay1;
    beta2(J) = 1 - v*lambda1*(1 - theta)*2*(y^2 +
(deltax)^2/4)/delay1;
    beta3(J) = v*lambda1*(1 - theta)*(y +
deltax/2)^2/delay1;
    A(J, J-1) = alfa1(J);
    A(J, J) = alfa2(J);
    A(J, J+1) = alfa3(J);

```



```

    B(J,J-1) = beta1(J);
    B(J,J)   = beta2(J);
    B(J,J+1) = beta3(J);
end

% Lapisan 2
% =====
for J = N1+2:N1+N2
    y=(J-1)*deltay;
    delay2 = C2*rho2*(y^2 + deltay^2/12); % Denominator
dalam lapisan 2
    alfa1(J) = - v*lambda2*theta*(y - deltay/2)^2/delay2;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda2*theta*2*(y^2 +
(deltay)^2/4)/delay2;
    alfa3(J) = - v*lambda2*theta*(y + deltay/2)^2/delay2;
    beta1(J) = v*lambda2*(1 - theta)*(y -
deltay/2)^2/delay2;
    beta2(J) = 1 - v*lambda2*(1 - theta)*2*(y^2 +
(deltay)^2/4)/delay2;
    beta3(J) = v*lambda2*(1 - theta)*(y +
deltay/2)^2/delay2;
    A(J,J-1) = alfa1(J);
    A(J,J)   = alfa2(J);
    A(J,J+1) = alfa3(J);
    B(J,J-1) = beta1(J);
    B(J,J)   = beta2(J);
    B(J,J+1) = beta3(J);
end

% Lapisan 3
% =====
for J = N1+N2+2:Ny
    y=(J-1)*deltay;
    delay3 = C3*rho3*(y^2 + deltay^2/12); % Denominator
dalam lapisan 3
    alfa1(J) = - v*lambda3*theta*(y - deltay/2)^2/delay3;
    alfa2(J) = 1 + v*lambda3*theta*2*(y^2 +
(deltay)^2/4)/delay3;
    alfa3(J) = - v*lambda3*theta*(y + deltay/2)^2/delay3;
    beta1(J) = v*lambda3*(1-theta)*(y - deltay/2)^2/delay3;
    beta2(J) = 1 - v*lambda3*(1 - theta)*2*(y^2 +
(deltay)^2/4)/delay3;
    beta3(J) = v*lambda3*(1 - theta)*(y +
deltay/2)^2/delay3;
    A(J,J-1) = alfa1(J);
    A(J,J)   = alfa2(J);
    A(J,J+1) = alfa3(J);

```

```

    B(J, J-1) = beta1(J);
    B(J, J)   = beta2(J);
    B(J, J+1) = beta3(J);
end

% Interface Pertama
% =====
J = N1+1;
alfal(J) = - theta*lambda1;
alfa2(J) =  theta*(lambda1 + lambda2);
alfa3(J) = - theta*lambda2;
beta1(J) =  theta*lambda1;
beta2(J) = - theta*(lambda1 + lambda2);
beta3(J) =  theta*lambda2;
A(J, J-1) =  alfa1(J);
A(J, J)   =  alfa2(J);
A(J, J+1) =  alfa3(J);
B(J, J-1) =  beta1(J);
B(J, J)   =  beta2(J);
B(J, J+1) =  beta3(J);

% Interface Kedua
% =====
J = N1 + N2 + 1;
alfal(J) = - theta*lambda2;
alfa2(J) =  theta*(lambda2 + lambda3);
alfa3(J) = - theta*lambda3;
beta1(J) =  theta*lambda2;
beta2(J) = - theta*(lambda2 + lambda3);
beta3(J) =  theta*lambda3;
A(J, J-1) =  alfa1(J);
A(J, J)   =  alfa2(J);
A(J, J+1) =  alfa3(J);
B(J, J-1) =  beta1(J);
B(J, J)   =  beta2(J);
B(J, J+1) =  beta3(J);
A;

for it=1:60
    rhs      = B*Tlama;
    rhs(Ny+1) = rhs(Ny+1) + alpa*Tambient;
    Tbaru    = A\rhs;
    Tlama    = Tbaru;
end

```

```
% Mencetak Nilai Nilai T saat delta t :  
% =====  
fprintf('\n %8.0f',deltat)  
fprintf('\n %25.2f',Tlama(1))  
fprintf('\n %37.2f',Tlama((0.5*Ny)+1))  
fprintf('\n %50.2f',Tlama((0.8*Ny)+1))  
  
size_Tlama=size(Tlama,1);  
for i=1:size_Tlama,  
    x_array(i) = (i-1)/(size_Tlama-1);  
end  
plot(x_array(1:size_Tlama), Tlama);  
hold on;  
end  
  
hold off;  
xlabel('y');  
ylabel('Temperature');  
  
else  
fprintf('Koordinat (x,y,z) Berada Di Luar Ellipsoida')  
end  
end  
end
```

