EKSENTRIK DIGRAF
PADA GRAF LINTASAN, GRAF SIKEL DAN GRAF LENGKAP

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Persyaratan Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

Widya Ekashanti Marmanita

NIM. 971810101010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

Juni 2002

Motto

"Menjelujur dari ilmu samudranya
adalah manusia terbaik di alam dunia dan akhirat."

(Ciri Quthb)

"Allah yang dituju (untuk meminta hajat)."

(QS. Al- Ikhlaas: 2)

"Sesungguhnya disamping kesukaran ada kemudahan."

(QS. Al- Insyirah: 5)

"Kebenaran itu dari Tuhanmu,
maka jangan engkau termasuk orang-orang yang bimbang."

(QS. Ali Imron: 60)

"Kebencian adalah rasa cinta yang berlebihan."

Persembahan

Skripsi ini kupersembahkan kepada

- *Kedua orang tuaku, Bapak Soemarman, BSc dan Ibu Laksmi Dachlandien, terima kasih atas cucuran keringat, limpahan do'a dan kasih sayang yang selalu diberikan dalam membimbing dan membesarkanku.*
- *Papi (alm) dan Ibu', kalian adalah orang tua kedua untukku. Dan juga buat Mbah Kung (alm) dan Mbah Uti di Jogja.*
- *Adikku Anto Dwisatryo tersayang, cepat lulus ya ...*
- *Mas Yoyok, terima kasih atas pengorbanan dan bantuannya yang sangat besar dalam penyelesaian skripsi ini, dan dhi' Nita dengan seluruh keluarganya.*
- *Seluruh keluarga besarku tanpa terkecuali, yang tidak bisa kusebutkan satu persatu.*
- *Hermin, Yusna, Annie dan Wuri, terima kasih atas persahabatan yang telah kalian berikan dan semoga selalu terjalin sampai kapanpun.*
- *Teman-temanku yang tergabung dalam marga '**GRAPH**' selamat berjuang 'n sukses yo ... .*
- *Teman-teman angkatan '97 khususnya jurusan Matematika, terima kasih atas kekompakannya selama ini, semoga tetap terjaga.*
- *Almamater-ku tercinta Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.*

DEKLARASI

Dari penelitian yang telah dilakukan mulai Nopember 2001 sampai dengan Juni 2002, maka bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Juni 2002

Widya Ekashanti Marmanita

ABSTRAK

Widya Ekashanti Marmanita, Juni 2002, judul: "***Eksentrik Digraf dari Graf Lintasan, Graf Sikel dan Graf Lengkap***"

Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember

DPU : Drs. Kusno, DEA, Ph. D
DPA : Kristiana Wijaya, S. Si, M. Si

Jarak (*distance*) antara titik u dan v di graf G, dinotasikan dengan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G. Jika tidak ada lintasan dari u ke v, maka $d(u,v) = \infty$. *Eksentrisitas* titik v di graf G, dinotasikan $e(v)$, adalah jarak terjauh dari v ke setiap titik di G. Titik v adalah *titik eksentrik* dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(v, u) = e(u)$. *Eksentrik digraf pada graf* $ED(G)$ didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan G atau $V(ED(G)) = V(G)$ dimana arc menghubungkan titik u ke v, jika v adalah titik eksentrik dari u. Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mendapatkan eksentrik digraf pada graf *path* (*lintasan*), graf *cycle* (*sikel*) dan graf *complete* (*lengkap*). Hasil dari penelitian yang telah dilakukan didapatkan bahwa: eksentrik digraf pada graf lintasan dibedakan menjadi dua, yaitu graf lintasan dengan jumlah titik n ganjil, eksentrik digrafnya $ED(P_n)$ berupa digraf *tripartit*, sedangkan graf lintasan dengan jumlah titik n genap, eksentrik digrafnya $ED(P_n)$ berupa digraf *bipartit*. Eksentrik digraf pada graf Sikel juga dibedakan menjadi dua, yaitu graf sikel dengan jumlah titik n ganjil, eksentrik digrafnya $ED(C_n)$ berupa digraf sikel dengan arc simetrik yang jarak setiap arcnya $\frac{n-1}{2}$ sedangkan graf sikel dengan jumlah titik n genap, eksentrik digrafnya $ED(C_n)$ berupa gabungan $\frac{n}{2}$ digraf lintasan dengan arc simetrik. Selanjutnya eksentrik digraf dari graf lengkap $ED(K_n)$ didapatkan digraf lengkap dengan arc simetrik.

Kata kunci: jarak, eksentrisitas, titik eksentrik, eksentrik digraf, graf lintasan, graf sikel, graf lengkap, digraf tripartit dan digraf bipartit.

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas MIPA Universitas Jember pada:

Hari : Kamis

Tanggal : 27 JUN 2002

Tempat : Fakultas MIPA Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,	Sekretaris,
(Drs. Kusno, DEA, Ph.D.)	(Kristiana. W., S.Si, M.Si.)
NIP. 131 592 357	NIP. 132 258 180
Anggota 1,	Anggota 2,
(Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.)	(Kiswara Agung, S.Si.)
NIP. 132 048 321	NIP. 132 207 813

Mengesahkan

Dekan Fakultas MIPA

Universitas Jember,

(Ir. Sumadi, M.S.)

NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena atas genangan rahmat dan samudra ilmu yang telah dilimpahkan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skipsi dengan judul **"Eksentrik Digraf pada Graf Path (Lintasan), Graf Cycle (Sikel) dan Graf Complete (Lengkap)"**.

Penulis menyadari, bahwa dalam penyusunan sampai terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Karenanya penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. **Bpk. Ir. Sumadi, M.S.**, selaku Dekan Fakultas MIPA universitas Jember.
2. **Bpk. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.**, selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dosen Pembimbing Utama, atas bimbingan dan saran-sarannya dalam penyusunan skripsi ini.
3. **Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si.**, selaku Dosen Pembimbing anggota, atas bimbingan dan saran-sarannya dalam penyusunan skripsi ini.
4. **Bpk. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.**, selaku Dosen Penguji Skripsi, atas segala pertanyaan dan masukan-masukannya.
5. **Bpk. Kiswara Agung. S., S.Si.**, selaku Dosen Penguji Skripsi, atas segala pertanyaan dan masukan-masukannya.
6. **Almamater Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember** beserta seluruh staf yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Jember.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis sadar, bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karenanya penulis siap menerima saran dan kritik yang sifatnya membangun. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan pada umumnya dan matematika pada khususnya. Amien … .

Jember, 20 Juni 2002

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

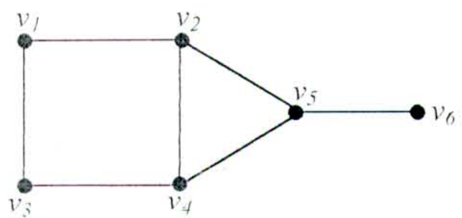
Teori graf merupakan salah satu bidang matematika, yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Kö nisberg. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai Teori graf.

Salah satu topik menarik dalam teori graf adalah *eksentris digraf pada graf*, *ED* (G), yang diperkenalkan pertama kali oleh Fred Buckley (Boland, J.,1999).

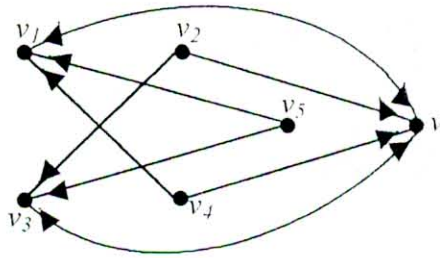
Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. *Jarak* dari u ke v di G, dinotasikan d(u,v), adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v. Jika tidak ada lintasan titik u dan v, maka $d(u,v) = \infty$. *Eksentrisitas* titik v dalam graf G, dinotasikan $e(v)$, adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v ke setiap titik di G. Titik u adalah *titik eksentrik* dari v jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari v atau $d(u, v) = e(v)$.

Eksentris digraf pada graf, *ED* (G), didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan G, $V(ED\,(G)) = V(G)$, dimana *arc* (sisi yang mempunyai arah) menghubungkan titik u ke v, jika v adalah titik eksentrik dari u. Contoh graf dan eksentrik digrafnya diberikan pada gambar 1.1.

Buckley menyimpulkan bahwa hampir setiap graf G, eksentrik digrafnya adalah $ED\,(G) = (\overline{G})^*$, dimana $(\overline{G})^*$ adalah komplemen dari G yang setiap sisinya diganti dengan arc simetrik.



G



ED(*G*)

Gambar 1.1 graf dan eksentrik digrafnya

Boland (1999) memperkenalkan *eksentris digraf pada digraf*, *ED* (*D*). Teori ini terinspirasi dari penelitian yang dilakukan oleh Buckley. Tetapi graf yang dikaji adalah graf berarah (digraf) dengan himpunan titik dan arc. Titik u menyatakan arc yang dapat dicapai dari v dalam digraf D jika terdapat lintasan berarah dari v ke u.

Eksentrisitas titik v dalam digraf D, dinotasikan $e(v)$, adalah jarak dari v ke titik terjauh dari v. *Eksentris digraf pada digraf*, *ED* (*D*), didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan G, $V(ED\ (G)) = V(G)$, dimana *arc* menghubungkan titik v ke u, jika dan hanya jika u adalah titik eksentrik dari v.

1.2 Masalah

Permasalahan yang kita bahas dalam skripsi ini adalah eksentrik digraf pada kelas-kelas graf, khususnya graf path (lintasan), graf cycle (sikel) dan graf complete (lengkap).

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini graf yang dikaji adalah graf sederhana dan graf hingga. Dimana graf sederhana adalah graf yang tidak memuat loop dan sisi rangkap (multiple edges). Loop adalah sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya

sendiri. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut dinamakan sisi rangkap. Sedangkan graf hingga didefinisikan sebagai graf yang mempunyai order terbatas. Order didefinisikan sebagai banyaknya titik yang ada dalam graf.

1.4 Tujuan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mendapatkan eksentrik digraf dari graf lintasan, graf sikel dan graf lengkap.

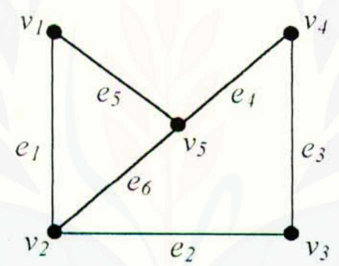
1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah dapat menentukan maksimal lintasan terpendek dari suatu titik ke titik yang lain. Hal ini dapat diaplikasikan dalam sistem saluran air PDAM, sistem aliran listrik PLN dan sebagainya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf dan Digraf

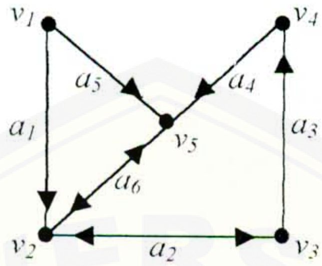
Graf tak berarah (*Undirected Graph*) G didefinisikan sebagai pasangan himpunan ($V(G)$, $E(G)$) dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut (u,v) dari titik titik u,v di V yang disebut *sisi* (*edge*). Selanjutnya sisi $e = (u,v)$ dalam graf G akan ditulis dengan $e = uv$ dan graf tak berarah G akan disebut dengan *graf* G saja. Sebagai contoh graf G diberikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G dengan 5 titik dan 6 sisi

Graf G pada Gambar 2.1 adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ yaitu pasangan tak terurut dari $\{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_5, v_5 v_1, v_5 v_2\}$.

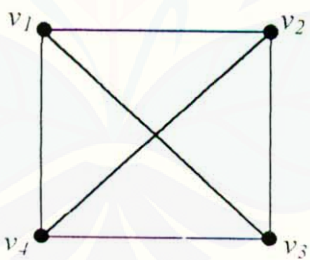
Digraf (*Graf berarah Directed Graph*) D adalah pasangan himpunan ($V(D)$, $A(D)$) dimana $V(D)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan $A(D)$ adalah himpunan dari pasangan terurut (uv), yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik u,v di V yang disebut *arc*. Arc yang menghubungkan titik u ke titik v dan titik v ke titik u dinamakan *arc simetrik*, yang dinotasikan dengan $\overleftrightarrow{a} = \overleftrightarrow{uv}$. Contoh digraf D diberikan pada Gambar 2.2, dengan himpunan titik $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan arc $A(D) = \{a_1, \overleftrightarrow{a_2}, a_3, a_4, a_5, \overleftrightarrow{a_6}\}$ yaitu pasangan terurut dari $\{v_1v_2, \overleftrightarrow{v_2v_3}, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5, \overleftrightarrow{v_5v_2}\}$.



Gambar 2.2 Digraf D dengan 5 titik dan 6 sisi

2.2 Definisi dan Notasi

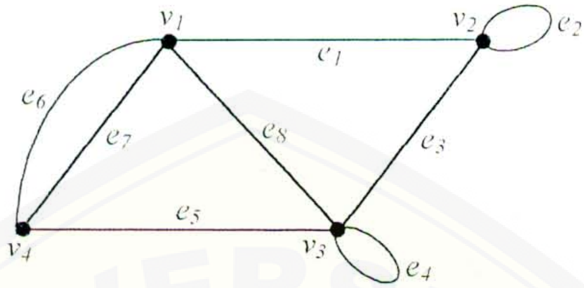
Order n dari graf G adalah banyaknya titik yang ada di G yaitu n. Graf yang mempunyai order terbatas dinamakan *graf hingga*. Sebagai contoh Gambar 2.3 adalah graf order 4.



Gambar 2.3 Graf G order 4

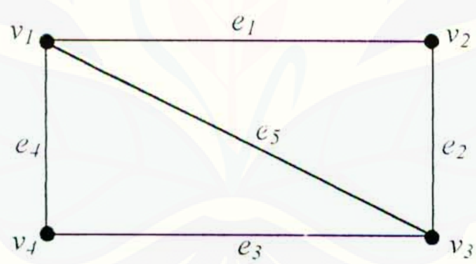
Dalam suatu graf G, apabila suatu titik v dihubungkan dengan dirinya sendiri atau $e = vv$, maka sisi e dinamakan *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edges*). Graf yang tidak memuat loop dan sisi rangkap dinamakan *graf sederhana* (*simple graf*). Pada skripsi ini, graf yang dikaji adalah graf sederhana dan graf hingga.

Contoh graf yang memuat loop dan sisi rangkap diberikan pada Gambar 2.4, dimana e_2 dan e_4 adalah loop, sedangkan sisi e_6 e_7 adalah sisi rangkap.



Gambar 2.4 Graf dengan loop dan sisi rangkap

Jika dua titik v_1 dan v_2 di graf G dihubungkan oleh suatu sisi e, maka titik v_1 dan v_2 dikatakan *adjacent* (*tetangga*) dan sisi e *insiden* dengan kedua titik yang dihubungkan.



Gambar 2.5 Graf untuk mengilustrasikan adjacent dan insiden

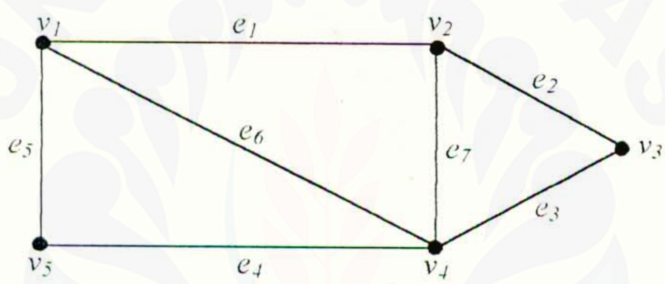
Pada Gambar 2.5, titik-titik yang *adjacent* adalah v_1 dan v_2, v_2 dan v_3, v_3 dan v_4, v_4 dan v_1, v_1 dan v_3, sedangkan sisi e_1 *insiden* dengan v_1 dan v_2, e_2 *insiden* dengan v_2 dan v_3, e_3 *insiden* dengan v_3 dan v_4, e_4 *insiden* dengan v_4 dan v_1, dan e_5 *insiden* dengan v_1 dan v_3.

Derajat (degree) dari titik v adalah jumlah sisi yang *berinsiden* dengan titik v, dinotasikan dengan *deg* (v). Misalkan pada gambar 2.5, $deg\ (v_1) = deg\ (v_3) = 3$ dan $deg\ (v_2) = deg\ (v_4) = 2$. Jika setiap titik dalam suatu graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan *graf reguler*.

Sebuah *jalan* (*walk*) W pada graf G adalah barisan berhingga yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu:

$$W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \qquad (n \geq 0)$$

dimana suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G, untuk $1 \leq i \leq n-1$. Jalan dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$ dan terbuka jika $v_0 \neq v_n$. Suatu jalan yang barisan titik-titiknya tidak ada pengulangan dinamakan *lintasan* (*path*), tetapi jika yang berbeda adalah sisi-sisinya, maka jalan tersebut disebut *jejak* (*trail*). *Sikel* (*cycle*) didefinisikan sebagai jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Dengan kata lain, sikel adalah suatu lintasan yang tertutup.

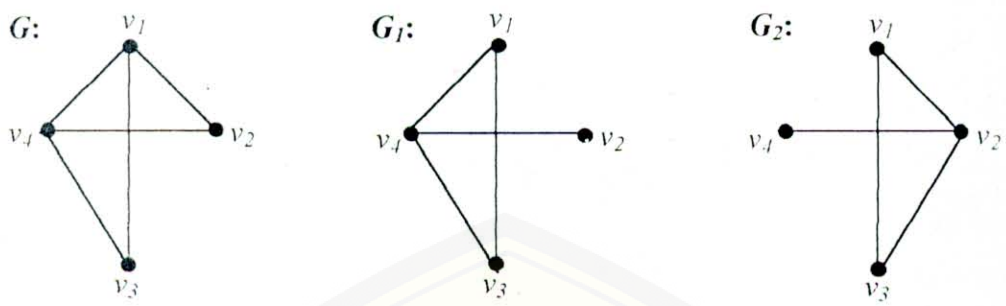


Gambar 2.6 Graf untuk mengilustrasikan jalan

Barisan $v_1, e_1, v_2, e_7, v_4, e_6, v_1, e_5, v_5, e_4, v_4, e_3, v_3$ dari Gambar 2.6 adalah jalan, barisan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$ adalah lintasan, barisan $v_1, e_1, v_2, e_7, v_4, e_6, v_1, e_5, v_5, e_4, v_4, e_3, v_3$ adalah jejak dan barisan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1$ adalah sikel.

2.3 Graf Terhubung dan Komplemen Graf

Graf H dikatakan *subgraf* dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G. Dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Pada Gambar 2.7, G_1 adalah subgraf dari G tetapi G_2 bukan subgraf dari G karena ada sisi $v_2 v_3$ di G_2 yang bukan merupakan elemen dari $E(G)$.



Gambar 2.7 Graf dan subgraf

Jika setiap pasang titik di graf G ada lintasannya, maka G dinamakan *terhubung (connected)*. *Komponen* dari graf adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Jadi, setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen. Sedangkan untuk graf tak terhubung, memiliki sedikitnya dua komponen. Gambar 2.8 adalah contoh untuk graf terhubung dan graf tak terhubung.

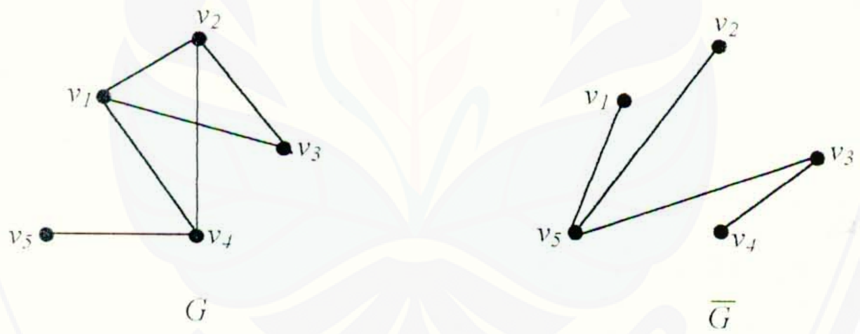
Gambar 2.8 Graf terhubung dan graf tak terhubung

Misalkan ada dua graf G_1 dan G_2, dimana himpunan titik $V(G_1)$ dan himpunan titik $V(G_2)$ saling asing, begitu juga himpunan sisi $E(G_1)$ dan himpunan sisi $E(G_2)$. Gabungan dari G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan *sisi* $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Sebagai contoh graf gabungan diberikan pada Gambar 2.9.

Gambar 2.9 Gabungan graf

Komplemen dari Graf G, dinotasikan dengan $\overline{G}$, adalah graf dengan himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G, dengan kata lain $V(G) = V(\overline{G})$, dan titik u,v di $\overline{G}$ adalah adjacent jika dan hanya jika titik u,v di G tidak adjacent. Contoh graf dan komplemennya dapat dilihat pada Gambar 2.10.



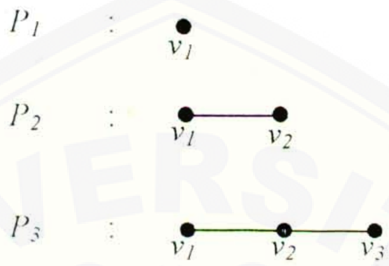
Gambar 2.10 Graf dan komplemennya $\overline{G}$

2.4 Kelas-kelas Graf

Graf terbagi dalam beberapa kelas. Pada skripsi ini, kelas graf yang kita kaji adalah graf path (lintasan), graf cycle (sikel) dan graf complete (lengkap).

2.4.1 Graf Path (lintasan)

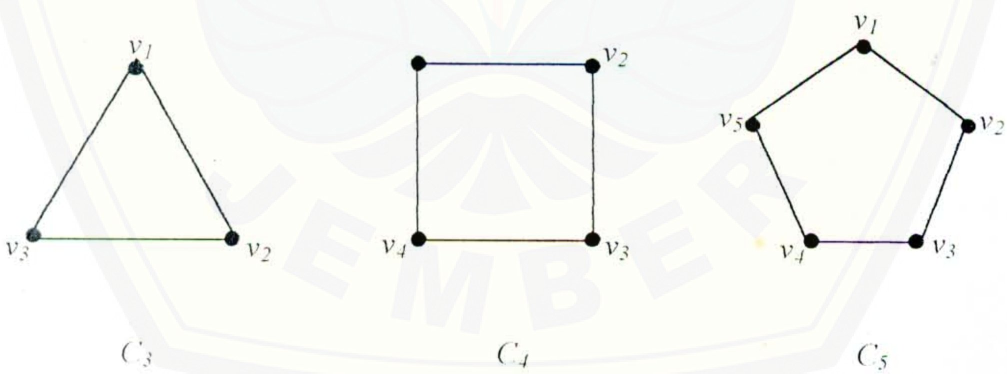
Graf path (lintasan) ialah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik, dinotasikan dengan P_n. Beberapa contoh dari graf lintasan, diberikan pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Graf lintasan

2.4.2 Graf cycle (sikel)

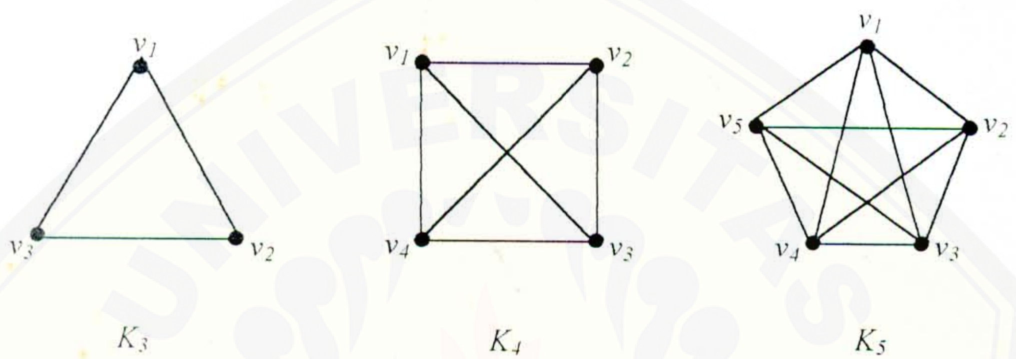
Graf cycle (sikel) ialah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dengan n titik, dinotasikan dengan C_n. Pada graf sikel, jumlah titiknya minimal 3. Gambar 2.12 adalah contoh dari graf sikel.



Gambar 2.12 Graf sikel

2.4.3 Graf Complete (lengkap)

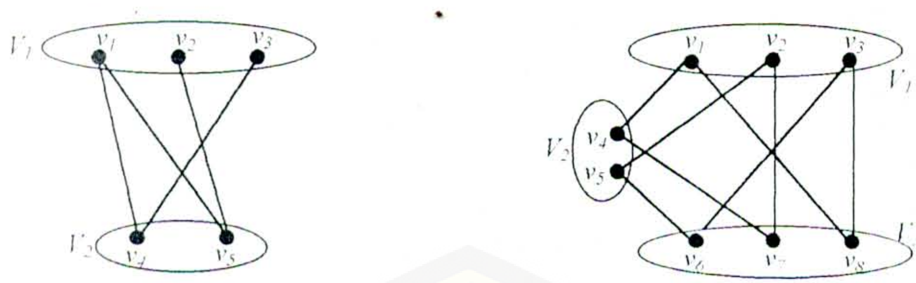
Graf complete (*lengkap*) didefinisikan sebagai graf dimana setiap dua titik berbeda di G dihubungkan dengan sisi. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Beberapa contoh dari graf lengkap, diberikan pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Graf lengkap

2.4.4 Graf *n* - partit

Graf *n- partit* didefinisikan sebagai graf dimana himpunan titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi n himpunan titik, yaitu $V_1(G)$, $V_2(G)$, …, $V_n(G)$. Sisi-sisi pada graf n-partit terhubung dari titik-titik pada $V_i(G)$ ke titik-titik pada himpunan titik selain $V_i(G)$ atau $\overline{V_i(G)}$, dimana $\overline{V_i(G)}$ adalah komplemen dari $V_i(G)$. Untuk $n = 2$, dinamakan *graf bipartit*. Jika $|V_1| = k$ dan $|V_2| = l$, maka graf bipartit tersebut dinotasikan dengan $B_{k,l}$. Sedangkan untuk $n = 3$, dinamakan *graf tripatit*, yang dinotasikan dengan $T_{k,l,m}$. Contoh graf *bipartit* dan graf *tripartit* dapat dilihat pada Gambar 2.14



$B_{3,2}$ $T_{3,2,3}$

Gambar 2.14 Graf bipartit dan graf tripartit

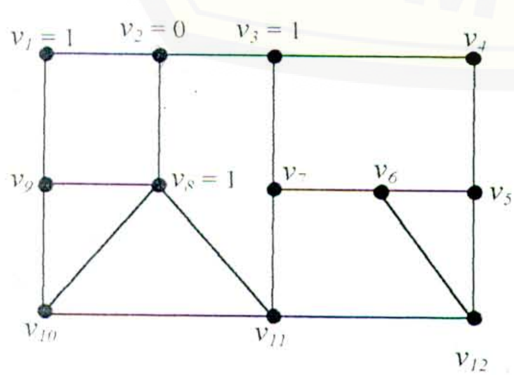
2.5 Algoritma BFS (Breadth First Search) Moore

Algoritma *BFS* (*Breadth First Search*) *Moore* adalah algoritma yang digunakan untuk mendapatkan lintasan terpendek. Algoritma ini digunakan bila semua sisi mempunyai panjang 1. Adapun algoritmanya dapat ditulis sebagai berikut:

$[G = (V(G), E(G)), u, v]$

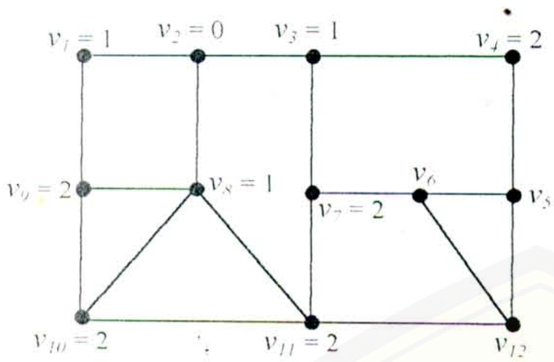
1. Ambil titik awal pada graf G, misal u, dan beri label 0
2. Cari semua titik yang *adjacent* dengan u dan beri label 1
3. Cari semua titik yang *adjacent* dengan 1 dan beri label 2, demikian seterusnya sampai titik yang dimaksud pada graf G, misal v, mendapat label
4. Selanjutnya penelusuran langkah mundur menghasilkan lintasan terpendek, yaitu k (= label titik v), $k - 1$, $k - 2$, ..., 0.

Contoh penggunaan algoritma *BFS Moore* untuk mencari lintasan terpendek dari titik v_2 ke titik v_{13} diberikan pada Gambar 2.15.



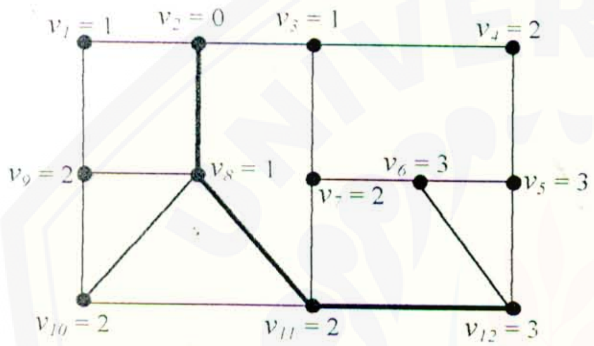
Keterangan:

- Beri label $v_2 = 0$
- Titik-titik yang *adjacent* dengan v_2 (= v_1, v_3, v_8), diberi label 1.



Keterangan:

- Titik-titik yang *adjacent* dengan v_1 (= v_9), v_3 (= v_4, v_7) dan v_8 (= v_9, v_{10}, v_{11}), diberi label 2



Keterangan:

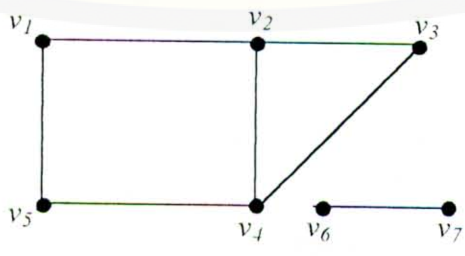
- Titik-titik yang *adjacent* dengan v_9 (= v_{10}), v_4 (= v_5), v_7 (= v_6, v_{11}), v_{10} (=v_9, v_{11}) dan v_{11} (= v_7, v_{12}) diberi label 3. Karena titik v_9, v_{10}, v_{11} dan v_7 sudah berlabel, maka hanya titik v_5, v_6 dan v_{12} yang diberi label 3.

Gambar 2.15 Graf untuk mengilustrasikan algoritma BFS Moore

Selanjutnya penelusuran langkah mundur menghasilkan lintasan terpendek, yaitu: 3 (v_{12}), 2 (v_{11}), 1 (v_8), 0 (v_2). Jadi lintasan terpendek dari titik v_2 ke v_{12} adalah v_2, v_8, v_{11} dan v_{12}.

2.6 Eksentrisitas

Jarak (*distance*) antara titik u dan v di graf G, dinotasikan dengan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka $d(u,v) = \infty$.



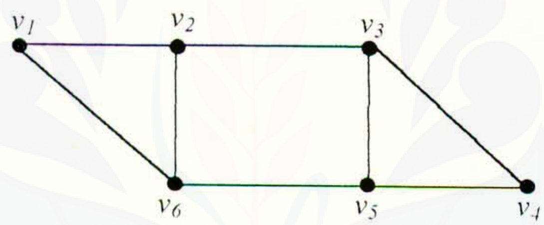
Gambar 2.16 Graf untuk mengilustrasikan jarak

Pada Gambar 2.15, $d(v_1, v_3) = d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_2, v_6) = \infty$.

Eksentrisitas titik v di graf G, dinotasikan $e(v)$, adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v ke setiap titik di G, dengan kata lain:

$$e(v) = \max \{ d(v, u) \mid u \in V(G) \}.$$

Titik v adalah *titik eksentrik* dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(v, u) = e(u)$. *Radius* pada graf G, dinotasikan dengan $rad(G)$, adalah eksentrisitas minimum dari G. Sedangkan *diameter* pada graf G, dinotasikan dengan *diam* (G), didefinisikan sebagai eksentrisitas maksimum dari G. Sebuah titik pada G, dinamakan *titik sentral* jika eksentrisitasnya adalah sama dengan rad (G), dengan kata lain $e(u)$ = rad (G). *Center* dari graf G adalah subgraf pada G yang terbentuk dari titik sentral yang saling dihubungkan.



Gambar 2.17 Graf untuk mengilustrasikan eksentrisitas

Dari graf G pada Gambar 2.17:

$e(v_1) = 3$ dengan titik eksentrik v_4;

$e(v_2) = 2$ dengan titik eksentrik v_4 dan v_5;

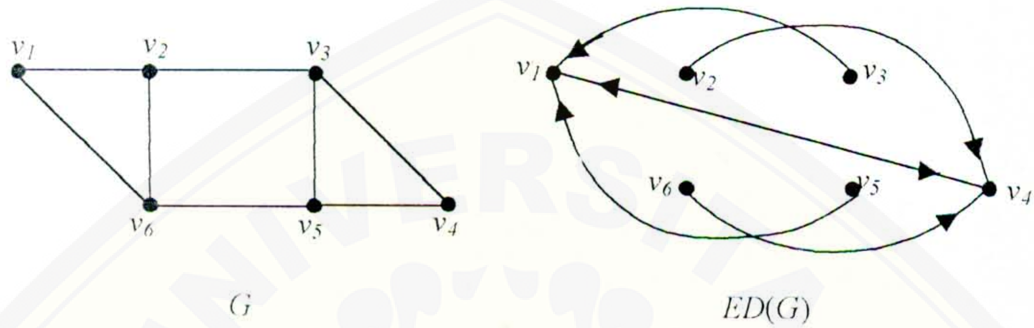
$e(v_3) = 2$ dengan titik eksentrik v_1 dan v_6;

$e(v_4) = 3$ dengan titik eksentrik v_1;

$e(v_5) = 2$ dengan titik eksentrik v_1 dan v_2;

$e(v_6) = 2$ dengan titik eksentrik v_3 dan v_4.

Setelah titik eksentrik dari setiap titik v di G didapatkan, maka antara titik v dengan titik eksentriknya dihubungkan oleh arc. Graf yang dihasilkan dinamakan *eksentrik digraf dari graf G*, $ED(G)$, yang didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan G atau $V(ED(G)) = V(G)$ dimana arc menghubungkan titik u ke v, jika v adalah titik eksentrik dari u. Contoh graf dengan eksentrik digrafnya diberikan pada gambar 2.18. Eksentrik digraf dari graf lintasan, graf sikel dan graf lengkap akan dibahas secara lengkap pada BAB III.



Gambar 2.18 Graf G dan eksentrik digrafnya

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan yang dapat diambil mengenai eksentrik digraf pada graf lintasan, graf sikel dan graf lengkap adalah sebagai berikut:

1. Eksentrik digraf pada graf lintasan $ED(P_n)$ dibedakan menjadi dua, yaitu:
   a. Untuk jumlah titik n ganjil, eksentrik digraf pada graf lintasan $ED(P_n)$ adalah digraf tripartit $T_{1,\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}$ dengan himpunan titik $V_1 = \{v_{\frac{n+1}{2}}\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{n-1}{2}}\}$ dan $V_3 = \{v_{\frac{n+3}{2}}, v_{\frac{n+5}{2}}, \ldots, v_n\}$.
   b. Untuk jumlah titik n genap, eksentrik digraf pada graf lintasan $ED(P_n)$ adalah digraf bipartit $B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ dengan himpunan titik $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{n}{2}}\}$dan $V_2 = \{v_{\frac{n+2}{2}}, v_{\frac{n+4}{2}}, \ldots, v_n\}$.
2. Eksentrik digraf pada graf sikel $ED(C_n)$ dibedakan menjadi dua, yaitu:
   a. Untuk jumlah titik n ganjil, eksentrik digraf pada graf sikel $ED(C_n)$ adalah digraf sikel $\overleftrightarrow{C_n}$ yang setiap arcnya adalah arc simetrik yang berjarak $\frac{n-1}{2}$.
   b. Untuk jumlah titik n genap, eksentrik digraf pada graf sikel $ED(C_n)$ adalah gabungan $\frac{n}{2}$ digraf lintasan dengan 2 titik $\bigcup_{i=1}^{n/2} \overleftrightarrow{P_2}$, dimana arcnya adalah arc simetrik.
3. Eksentrik digraf dari graf lengkap $ED(K_n)$ adalah digraf lengkap $\overleftrightarrow{K_n}$ yang setiap arcnya adalah simetrik.

4.2 Saran

Penelitian mengenai eksentrik digraf masih dapat dikembangkan pada graf-graf yang lain, misalnya pada graf berbobot, baik yang berarah maupun yang tidak berarah.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boland, J. and Miller, M., 1999, *Ecentric Digraph of Digraph*, preprint

[2] Chartrand, G. and Lesniak, L., 1996, *Graph and Digraph*, 3rd, Chapman & Hill

[3] Chartrand, G. and Oellermann, O., 1993, *Apllied and Algorithmic Graph Theory*, Mc. Graw-Hill, Inc., United States of America, America

[4] Grimaldi, R. P., 1999, *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison Wesley Longman, Inc., United States of America, America

[5] Kreyszig, E., 1988, *Advanted Engineering Mathematics*, 6th edition, John Wiley & Sons, Inc

[6] Liu, C. L., 1995, *Dasar-dasar Matematika Diskrit*, Edisi Kedua, PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

[7] Matausek, J. and Nesetril, J., 1998, *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford University Press, Inc., New York

[8] Shaffer, C. A., 1997, *Data Structure and Algorithm Analysis*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Prentice-Hall, Inc.