PELABELAN *GRACEFUL* DARI GRAF TANGGA, GRAF GABUNGAN m BUAH GRAF TANGGA DAN GRAF HASIL KALI KARTESIUS $P_m \times P_n$

S K R I P S I

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

Moch. Toriqul Huda

NIM. 981810101068

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
JULI, 2002

MOTTO

Jadilah Engkau Pemaaf dan Suruhlah Orang Mengerjakan yang Ma"ruf, serta Berpalinglah dari pada Orang-orang yang bodoh.

Dan jika Kamu Ditimpa Godaan Syaitan, maka Berlindunglah Kepada Allah.

[Al-Qur"an Surat ke-7 : 199-200]

Gelap Tak Dapat Dikendalikan Gelap, Hanya Terang yang Dapat Melakukannya.
Benci Tak Bisa Dikendalikan Benci, Hanya Cinta yang Bisa Melakukannya.

[Martin Luther King]

PERSEMBAHAN

Penulis mempersembahkan skripsi untuk:

- Abah Faisol (di Surga), Umi' Loet (jasa dan do'amu sebagai nafasku)
- Mas Abdus, Ning Kaji, Mas Kaji, Lia & Fiqih (do'a dan kasih sayangnya)
- Keluarga di Malang & Jeng I'in (kritik dan kesetiaan)
- Almamater dan Kemajuan Ilmu Pengetahuan

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Januari 2002 sampai dengan bulan Juni 2002 di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Juli 2002 Moch. Toriqul Huda

ABSTRAK

Moch.Toriqul Huda, NIM. 981810101068, Juli 2002, judul: **'Pelabelan *Graceful* dari Graf Tangga, Graf Gabungan *m* Buah Graf Tangga dan Graf Hasil Kali Kartesius P_m x P_n'**

Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

DPU: Drs. Kusno, DEA, Ph.D

DPA: Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si

Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan *graceful* adalah fungsi satu-satu : $\lambda : V(G) \to \{0,1,2,3,\ldots,|E(G)|\}$ sedemikian hingga $\lambda(e) = \lambda(uv) = |\lambda(u) - \lambda(v)|$ berbeda semua untuk setiap $u, v \in V(G)$. Sebuah graf G disebut graf *graceful* jika setiap titik dan sisi di graf G dapat diberi label menurut aturan pelabelan *graceful*. Permasalahan yang akan dikaji dalam skripsi ini adalah untuk mendapatkan perumusan pelabelan *graceful* pada graf sederhana dan hingga terutama graf tangga, graf gabungan m buah graf tangga dan graf hasil kali kartesius $P_m \times P_n$. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa graf tangga, graf gabungan m buah graf tangga dan graf hasil kali kartesius P_m x P_n adalah graf *graceful* dengan pelabelan *graceful* yang tidak tunggal.

Kata kunci: pelabelan graf, pelabelan *graceful*, pelabelan komplemen, graf tangga, graf gabungan m buah graf tangga dan graf hasil kali kartesius P_m x P_n.

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : Sabtu

Tanggal : 24 AUG 2002

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji,

Ketua	Sekretaris
Drs. Kusno, DEA, Ph.D	Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si
NIP. 131 592 357	NIP. 132 258 180
Anggota I	Anggota II
Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si	Kosala Dwija Purnomo, S.Si
NIP. 132 257 933	NIP. 132 206 019

Mengesahkan,

Dekan FMIPA Univ. Jember

Ir. Sumadi, MS

NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena penulis telah diberikan kesempatan dan kekuatan untuk menyelesaikan skripsi yang berjudul **'Pelabelan *Graceful* pada Graf Tangga, Graf Gabungan *m* Buah Graf Tangga dan Graf Hasil Kali Kartesius P_m x P_n'** ini.

Penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada semua pihak yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, yaitu kepada yang terhormat:

1. Bapak Ir. Sumadi, MS selaku Dekan FMIPA Universitas Jember
2. Bapak Drs. Kusno, DEA, Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember dan Dosen Pembimbing Utama yang telah memberikan arahan serta saran
3. Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan dan arahan
4. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si dan Ibu Agustina, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik serta masukan
5. Teman-teman seperjuangan Matematika '98
6. Semua pihak yang dengan sukarela membantu penulis

Saran serta kritik yang sifatnya membangun dari pembaca sangat penulis harapkan sehingga dapat memberi konstribusi berarti bagi kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang teori graf.

Jember, Juli 2002 | Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf dalam teori graf adalah pemberian nilai pada titik, sisi atau titik dan sisi. Pelabelan graf sudah banyak dikaji mulai tahun 60-an. Seperti *valuasi-* β yang diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967 [5]. Sejak saat itu, sekitar 250 tulisan mengenai pelabelan banyak bermunculan.

Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan *graceful* pada graf G merupakan pemberian nilai pada titik-titiknya dengan bilangan bulat positif $\{0, 1, 2, 3, ..., |E(G)|\}$ sedemikian hingga sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang menempel pada sisi tersebut. Sebuah graf G disebut *graf graceful* jika setiap titik dan sisi pada graf G dapat diberi label menurut aturan pelabelan graceful. Dalam hal ini, beberapa pelabelan *graceful* untuk kelas-kelas graf tertentu telah ditunjukkan seperti pada graf lintasan P_n, graf pohon T_n dengan $n \leq 16$ dan graf sikel C_n dengan $n \equiv 0$ atau $3 \pmod 4$ [4]. Karena itu penulis tertarik untuk menginvestigasi pelabelan *graceful* pada kelas-kelas graf yang lain, yaitu:

1. *Graf hasil kali kartesius* dari G_1 dan G_2 yaitu graf $G = G_1 \times G_2$.
2. *Graf tangga* L_n, yaitu graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan P_n dan lintasan P_2.
3. *Gabungan m buah graf tangga* mL_n, yaitu graf tak terhubung yang terdiri dari m komponen dimana setiap komponennya adalah graf tangga L_n.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan diajukan dalam penulisan skripsi adalah menyelidiki apakah sebuah graf sederhana dan hingga terutama kelas graf tangga (*ladder*), graf gabungan m buah graf tangga dan graf hasil kali kartesius G_1 x G_2 khususnya jika $G_1=P_m$ dan $G_2=P_n$ adalah graf *graceful*.

1.3 Tujuan

Mendapatkan perumusan pelabelan graceful dari graf tangga (*ladder*), graf gabungan m buah graf tangga dan graf hasil kali kartesius P_m x P_n.

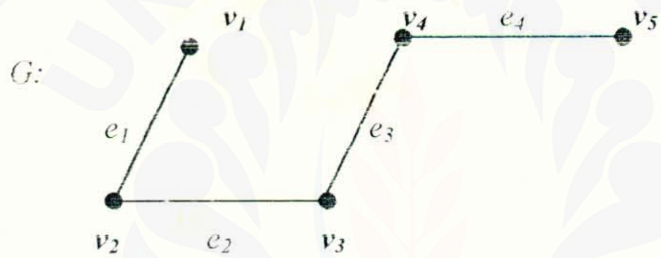
1.4 Manfaat

Manfaat dari pelabelan *graceful* diantaranya yang berkenaan dengan masalah pengkodean, misalnya pembacaan kode sinar-X, sistem alamat pada jaringan komunikasi dan pendesainan sirkuit [5].

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan ($V(G)$, $E(G)$) dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut *titik* (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u,v) dari titik-titik u,v di $V(G)$ yang disebut *sisi* (*edge*). Selanjutnya sisi $e = (u,v)$ pada graf G ditulis $e = uv$. Sebagai contoh, Gambar 2.1 adalah graf tak berarah dengan himpunan titik $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$ yaitu pasangan tak terurut dari $\{ v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5 \}$.



Gambar 2.1 Graf G dengan 5 Titik dan 4 Sisi

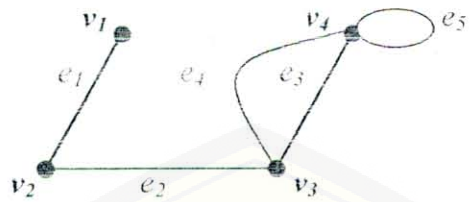
2.2 Konsep Dasar

Definisi dan notasi dalam teori graf yang diperlukan dalam penulisan skripsi ini akan dijelaskan di subbab berikutnya. Notasi dan definisi yang dijelaskan berkaitan dengan graf yang dikaji dalam skripsi ini, yaitu graf yang tergolong graf sederhana. Semua definisi diambil dari buku *Graph &Digraph* [1], kecuali jika disebutkan sumber yang lainnya.

Banyaknya titik di graf G disebut *order n* dari graf G yaitu $n = |V|$. Graf dengan order hingga dinamakan *graf hingga*. Sebagai contoh, Gambar 2.1 adalah graf berorder 5.

Loop dalam suatu graf terjadi apabila suatu titik v dihubungkan dengan dirinya sendiri atau $e = vv$. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edges*). Gambar 2.2

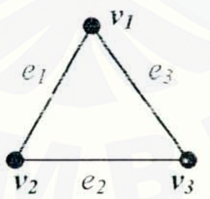
menunjukkan e_5 adalah loop dan e_3, e_4 adalah sisi rangkap. Graf G dikatakan *graf sederhana* apabila tidak memuat loop dan sisi rangkap, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.2 Graf dengan Loop dan Sisi Rangkap

Dua titik u dan v di graf G dikatakan *tetangga* (*adjacent*) apabila ada sisi e yang menghubungkan titik u dan v. Sisi e pada graf G dikatakan *menempel* (*incident*) dengan kedua titik yang dihubungkan. Dalam Gambar 2.1 titik-titik yang bertetangga adalah v_1 dengan v_2, v_2 dengan v_3, v_3 dengan v_4, v_4 dengan v_5 sedangkan sisi e_1 menempel dengan v_1 dan v_2, sisi e_2 menempel dengan v_2 dan v_3, sisi e_3 menempel dengan v_3 dan v_4 serta sisi e_4 menempel dengan v_4 dan v_5.

Derajat (*degree*) suatu titik v di graf G adalah banyaknya sisi yang menempel dengan titik v, yang dinotasikan dengan *deg* (v). Jika dalam graf G setiap titiknya mempunyai derajat yang sama, maka graf G disebut *graf reguler*. Contoh pada Gambar 2.3 menunjukkan graf reguler.

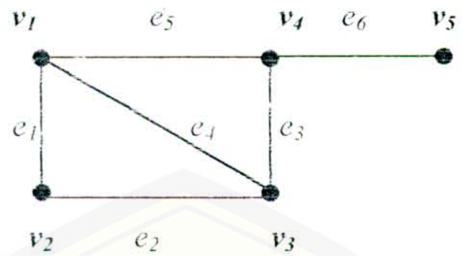


Gambar 2.3 Graf Reguler

Jalan (*walk*) pada graf G dinotasikan $W(G)$ adalah barisan hingga yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana unsur-unsurnya saling bergantian antara titik dan sisi, sedemikian hingga v_iv_{i+1} adalah sisi di G untuk setiap $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, yaitu :

$$W(G) = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n \qquad \text{dengan } n \geq 0$$

Jika dijalan W (G) berlaku $v_0 = v_n$ maka W (G) disebut *jalan tertutup* dan dikatakan *jalan terbuka* jika $v_0 \neq v_n$.

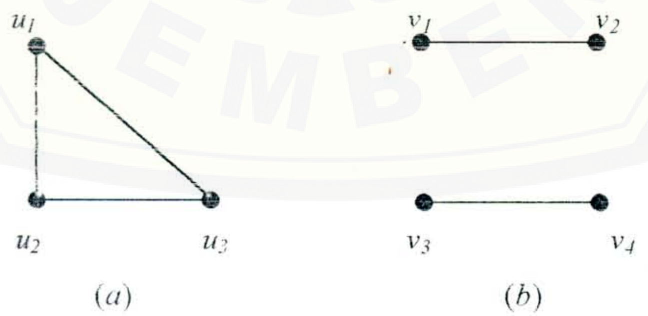


Gambar 2.4 Gambar untuk Mengilustrasikan Jalan (walk)

Sebuah jalan dikatakan *lintasan* (*path*) jika semua titiknya berbeda sedangkan jika setiap sisinya yang berbeda maka jalan tersebut dinamakan *jejak* (*trail*). *Sikel* (*cycle*) didefinisikan sebagai suatu lintasan yang tertutup. Sebagai contoh pada Gambar 2.4, v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_4-v_1-e_5-v_4-e_6-v_5 adalah jalan terbuka, v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_4-v_1 adalah jalan tertutup, v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_6-v_5 adalah lintasan, v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_4-v_1-e_5-v_4-e_3-v_3 adalah jejak dan v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_5-v_1 adalah sikel.

2.3 Graf Terhubung (Connected Graph)

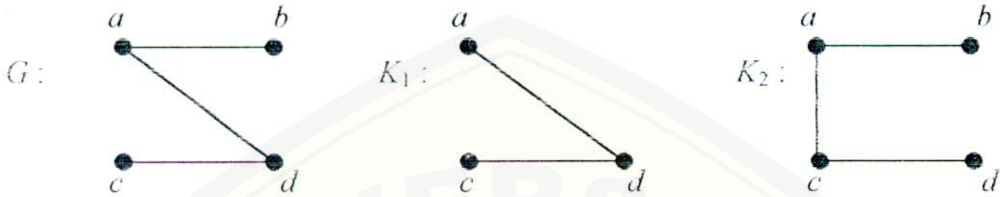
Graf G dikatakan *terhubung* (*connected*) jika setiap dua titik u,v di G, terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Graf G dikatakan *graf tak terhubung* (*disconnected*) jika ada dua titik di G yang tidak mempunyai lintasan.



Gambar 2.5(a) Graf Terhubung dan 2.5(b) Graf Tak Terhubung

Gambar 2.5(a) adalah graf terhubung dan Gambar 2.5(b) adalah graf tak terhubung.

Graf K dikatakan *subgraf* dari graf G jika semua titik di K dan semua sisi di K adalah titik dan sisi di G, yang artinya $V(K) \subseteq V(G)$ dan $E(K) \subseteq E(G)$. Sebagai contoh pada Gambar 2.6, K_1 adalah subgraf dari G tetapi K_2 bukan subgraf G karena ada sisi ac di $E(K_2)$ yang bukan sisi di $E(G)$.



Gambar 2.6 Graf dan Subgrafnya

Kompenen dari graf G adalah subgraf terhubung maksimum dari G. Jadi graf terhubung mempunyai paling banyak satu komponen sedangkan graf tak terhubung paling sedikit mempunyai dua komponen. Contoh, pada Gambar 2.5(a) menunjukkan graf terhubung dan Gambar 2.5(b) menunjukkan graf tak terhubung dengan dua komponen.

2.4 Operasi pada Graf

Operasi dalam teori graf yang diperlukan dalam penulisan skripsi ini, diantaranya *gabungan graf* dan *hasil kali kartesius dua graf*. Misal G_1 dan G_2 adalah graf saling asing yang artinya $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$ dan $E(G_1) \cap E(G_2) = \phi$.

2.4.1 Gabungan Graf

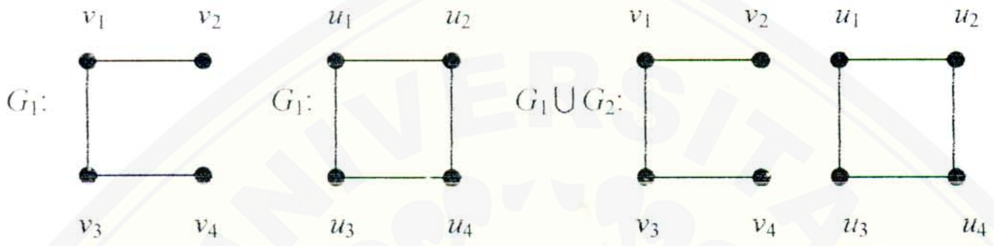
Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik :

$$V(G) = V(G_1) \bigcup V(G_2)$$

dan himpunan sisi :

$$E(G) = E(G_1) \bigcup E(G_2).$$

Untuk gabungan m buah graf terhubung dinotasikan sebagai graf $\bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Jika pada gabungan m buah graf memenuhi kondisi $G_1=G_2=G_3=...=G_m=G$ maka graf $\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ akan dinotasikan dengan mG, yaitu graf tak terhubung dengan m komponen. Contoh gabungan dua graf ditunjukkan pada Gambar 2.7.



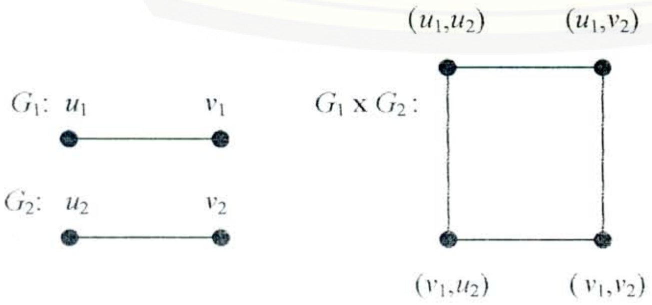
Gambar 2.7 Gabungan Dua Graf

2.4.2 Hasil Kali Kartesius Dua Graf

Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G_1 x G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V=\{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$ dimana titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) bertetangga di $G_1 \times G_2$ jika:

[$u_1 = v_1$ dan u_2 tetangga v_2] atau [$u_2 = v_2$ dan u_1 tetangga v_1].

Untuk memberikan gambaran tentang hasil kali kartesius dari dua graf lintasan G_1 dan G_2, yaitu $G_1 \times G_2$ ditunjukkan oleh Gambar 2.8.



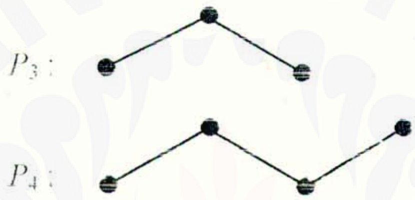
Gambar 2.8. Graf Hasil Kali Kartesius $G_1 \times G_2$

2.5 Kelas-Kelas Graf

Kelas-kelas graf yang diperlukan dalam penulisan skripsi ini, diantaranya adalah graf *lintasan* (*path*), graf *sikel* (*cycel*), graf *tangga* (*ladder*), *graf gabungan m buah graf tangga* mL_n dan graf *hasil kali kartesius* $P_m \times P_n$.

2.5.1 Graf Lintasan (Path)

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan yang terdiri dari n titik dinotasikan sebagai P_n. Contoh graf lintasan P_3 dan P_4 diberikan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf Lintasan P_3 dan P_4

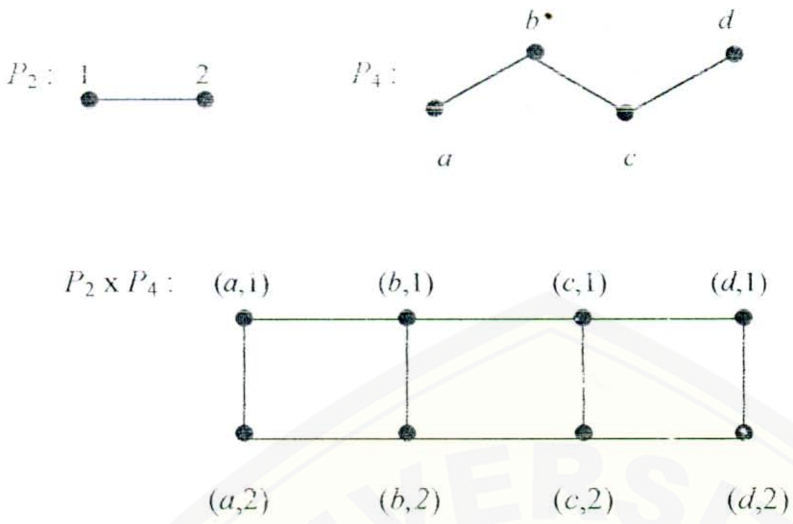
2.5.2 Graf Sikel (Cycle)

Graf yang terdiri dari satu sikel disebut *graf sikel*, dinotasikan C_n yang berarti graf sikel dengan n titik. Gambar 2.10 menunjukkan graf sikel C_5 dan C_6.

Gambar. 2.10 Graf Sikel C_5 dan C_6

2.5.3 Graf Tangga (Ladder)

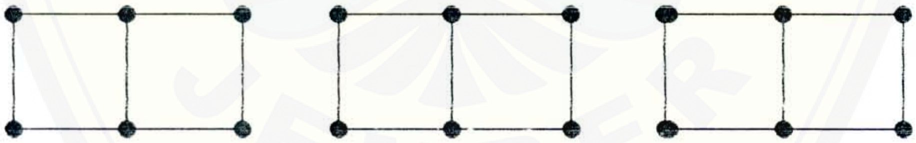
Graf tangga (*ladder*) adalah graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_n, yaitu $P_2 \times P_n$. Jadi banyaknya titik pada graf tangga adalah $2n$. Untuk pembahasan selanjutnya graf tangga $P_2 \times P_n$ akan dinotasikan dengan L_n. Sebagai contoh, Gambar 2.11 adalah graf tangga $L_4 = P_2 \times P_4$.



Gambar 2.11 Graf Tangga L_4

2.5.4 Graf Gabungan *m* Buah Graf Tangga

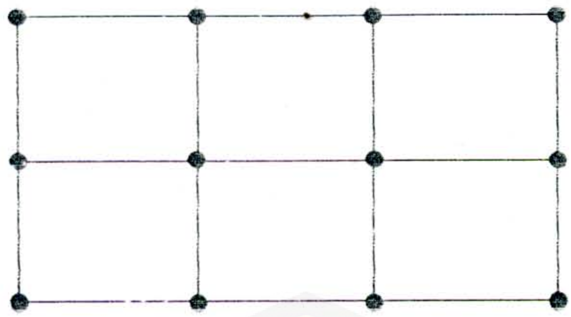
Graf gabungan m buah graf tangga L_n dinotasikan mL_n adalah graf tak terhubung yang terdiri dari m buah komponen, dimana setiap komponennya adalah graf tangga L_n. Sebagai contoh, gabungan tiga buah graf tangga L_3, yaitu $3L_3$ ditunjukkan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Gabungan Tiga Buah Graf Tangga L_3

2.5.5 Graf Hasil Kali Kartesius P_m x P_n

Graf hasil kali kartesius $P_m \times P_n$ adalah graf yang mempunyai mn titik , yang terdiri dari m baris titik. Contoh graf hasil kali kartesius $P_3 \times P_4$ ditunjukkan pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Graf Hasil Kali Kartesius P_3 x P_4

2.6 Pemetaan

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut *fungsi pemetaan* dari himpunan A ke himpunan B. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B diberi notasi f, yaitu:

$$f : A \rightarrow B$$

Selanjutnya himpunan A kita sebut sebagai *daerah asal* (*domain*) dari f dan himpunan B disebut *daerah kawan* (*kodomain*) dari f.

Fungsi satu-satu (*injektif*) adalah pemetaan dimana setiap elemen dari daerah hasil mempunyai prapeta tepat satu dari daerah asal. Dengan kata lain tidak ada dua elemen yang berlainan dalam daerah asal yang mempunyai peta yang sama dalam daerah kawan.. Hal ini dapat dituliskan secara matematika sebagai berikut :

Pemetaan $f : A \rightarrow B$, injektif $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Contoh, misal N adalah himpunan bilangan asli dan pemetaannya $f : N \rightarrow N$ didefinisikan oleh $f\,(x) = 2x + 1, \forall x \in N$. Pemetaan ini injektif karena jika $x, y \in N$ sedemikian hingga $f(x) = f(y)$, yaitu $2x+1 = 2y+1$ maka $x = y$.

2.7 Pelabelan Graf

Pelabelan pada graf G adalah pemberian nilai pada titik atau sisi di G. Pelabelan graf sudah dikenal dan dikaji sejak tahun 60-an. Pada tahun 1967 Rosa menyebutkan fungsi λ adalah *valuasi-* β pada graf G jika λ adalah fungsi satu-satu dari himpunan titik di G ke himpunan bilangan bulat $\{0, 1, 2, \ldots, |E(G)|\}$ sedemikian hingga, setiap sisi uv di G mendapat label $|\lambda(u) - \lambda(v)|$ yang berbeda semua. Selanjutnya pada tahun 1972 Golomb menamakan *valuasi-* β sebagai *pelabelan graceful* [5].

2.8 Pelabelan Graceful

Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. *Pelabelan Graceful* adalah *fungsi satu-satu* :

$$\lambda : V(G) \rightarrow \{0,1,2,3,\ldots,|E(G)|\} \text{ sedemikian hingga}$$

$$\lambda(e) = \lambda(uv) = |\lambda u) - \lambda(v)| \text{ berbeda semua untuk setiap } u, v \in V(G).$$

Sebuah graf G disebut *graf graceful* jika setiap titik dan sisi di graf G dapat diberi label menurut aturan pelabelan *graceful*. Pelabelan *graceful* untuk graf sikel diberikan oleh Rosa. Rosa membuktikan bahwa untuk graf sikel C_n adalah *graceful* jika dan hanya jika $n \equiv 0$ atau $3 \pmod 4$ [5] yang diberikan pada sifat 2.1 dan 2.2 sebagai berikut:

Sifat 2.1 Graf sikel C_n untuk $n \equiv 0 \pmod 4$ adalah graf *graceful* [5].

Bukti : Titik v_i, untuk setiap $1 \le i \le n$, dari graf C_n diberi label sebagai berikut :

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ n+1-\dfrac{i}{2} & \text{untuk } i \text{ genap, } i \le \dfrac{n}{2} \\ n-\dfrac{i}{2} & \text{untuk } i \text{ genap, } i > \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

dan pelabelan sisinya adalah $\lambda(e)=\lambda(v_i v_{i+1})=|\lambda(v_i)-\lambda(v_{i+1})|$ berbeda semua untuk setiap $v\in V(G)$. □

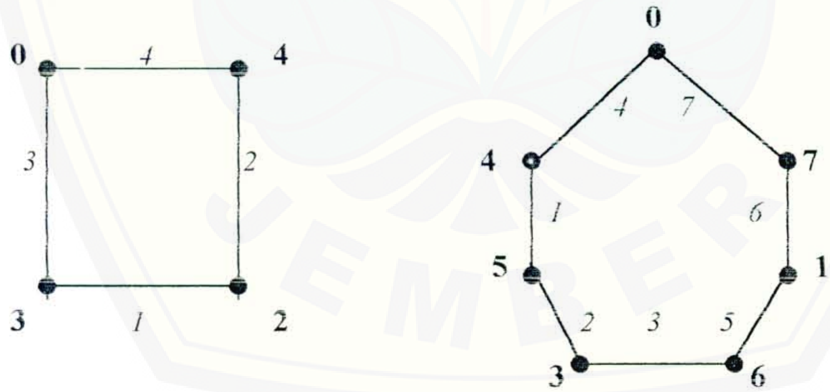
Sifat 2.2 Graf sikel C_n untuk $n\equiv 3 \pmod 4$ adalah graf *graceful* [5].

Bukti: Titik v_i, untuk setiap $1\le i\le n$, dari graf C_n diberi label sebagai berikut :

$$\lambda(v_i)=\begin{cases} n+1-\dfrac{i}{2} & \text{untuk } i \text{ genap} \\ \dfrac{i-1}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil, } i\le \dfrac{n-1}{2} \\ \dfrac{i+1}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil, } i> \dfrac{n-1}{2} \end{cases}$$

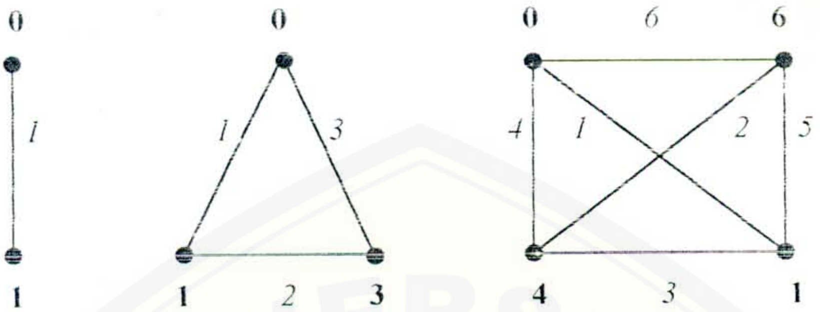
dan pelabelan sisinya adalah $\lambda(e)=\lambda(v_i v_{i+1})=|\lambda(v_i)-\lambda(v_{i+1})|$ berbeda semua untuk setiap $v\in V(G)$. □

Contoh pelabelan *graceful* pada graf *sikel* menurut sifat 2.1 dan 2.2 ditunjukkan pada Gambar 2.15.



Gambar 2.14 Pelabelan Graceful untuk Graf Sikel Menurut Sifat 2.1 dan 2.2

Golomb [1] menyebutkan bahwa graf *komplit* K_n adalah *graceful* untuk n=2, 3 ,4 seperti yang diberikan pada Gambar 2.15.



Gambar 2.15 Pelabelan *Graceful* pada Graf K_2, K_3 dan K_4

Sedangkan untuk graf komplit K_n dengan $n \geq 5$ tidak *graceful*, seperti yang ditunjukkan pada sifat 2.3.

Sifat 2.3 Graf Komplit K_n adalah tidak *graceful* untuk $n \geq 5$ [5].

Bukti : Misal graf komplit K_n mempunyai n titik dan q sisi

Titik-titik dari graf K_n diberi label {0, 1, 2, 3,..., q}. Label 0 dan q dibutuhkan untuk memberi label titik-titiknya sehingga didapat sisi yang mendapat label q. Sekarang kita mempunyai titik yang mendapat label 0 dan q. Selanjutnya kita menginginkan sisi yang terlabeli q -1. Untuk itu satu titik dari graf K_n harus diberi label 1 atau q-1 misal kita pilih 1 untuk melabeli titik tersebut, sehingga diperoleh sisi-sisi yang mendapat label q, q-1 dan 1.

Sekarang kita mempunyai titik-titik yang terlabeli 0, 1 dan q.

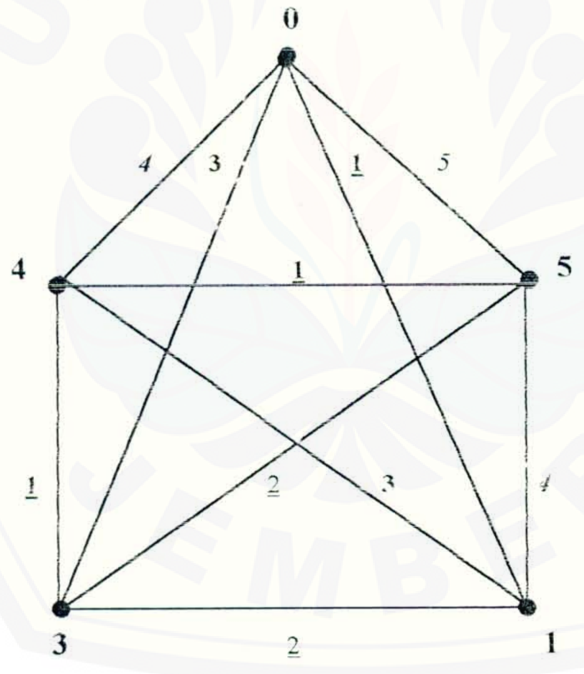
Untuk mendapatkan sisi yang terlabeli q-2, harus mempunyai titik-titik yang terlabeli 0, q-2, atau 1, q-1 atau 2, q. Jika kita pilih nilai q-1 atau 2 maka akan ada dua sisi yang mendapat label sama, sehingga kita pilih nilai q-2 dan diperoleh sisi-sisi yang mendapat label q, q-1, q-2, q-3, 2 dan 1.

Sekarang kita mempunyai titik-titik yang mendapat label 0, 1, q-2 dan q.

Untuk mendapatkan sisi yang terlabeli q-4 kita harus mempunyai titik-titik dengan label 0, q-4 atau 2, q-2 atau 3, q-1 atau 4, q. Setiap kita memilih pasangan label titik ini, kita akan selalu mendapatkan minimal dua sisi dengan label sama. Sehingga graf K_n dengan $n = 5$ tidak *graceful*.

Hal ini membuktikan bahwa graf K_n dengan $n \geq 5$ tidak *graceful* sebab dengan bertambahnya satu titik maka akan ada penambahan beberapa sisi dengan label yang sama. □

Sebagai contoh, Gambar 2.16 menunjukkan graf K_5 yang tidak bisa diberi label menurut aturan pelabelan *graceful* karena ada beberapa sisi yang mendapat label sama, yaitu tiga sisi mendapat label **1**, dua sisi mendapat label 2, dua sisi mendapat label **3** dan dua sisi mendapat label ***4***.



Gambar 2.16 Graf K_5 yang Tidak Bisa Dilabeli Menurut Aturan Pelabelan *Graceful*

Tanpa menunjukkan hasil pelabelannya Erdos [5] menyebutkan beberapa graf tidak *graceful*. Dilain pihak Rosa [5] menyebutkan tiga alasan mengapa sebuah graf G tidak bisa dilabeli menurut aturan pelabelan graceful, yaitu:

1. G mempunyai 'banyak titik dan tidak cukup sisi', yaitu ketika kita memberi label untuk titiknya tidak cukup bilangan untuk memberi label titik dimana pelabelan titiknya diberi label dari bilangan 0 sampai dengan banyaknya sisi . Contoh pada gabungan dua buah graf bintang seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.17 dimana jumlah titik pada gabungan dua graf bintang adalah 8 sedangkan bilangan yang tersedia untuk melabeli titik-titiknya berjumlah 7 sedemikian hingga ada satu titik yang tidak terlabeli.

Gambar 2.17 Graf yang Mempunyai Banyak Titik dan Tidak Cukup Sisi

2. G mempunyai 'terlalu banyak sisi', yaitu ketika kita memberi label untuk titiknya akan ada sisi yang mempunyai label ganda. Contoh pada graf komplit K_5 yang ditunjukkan pada Gambar 2.16.

3. G mempunyai 'keseimbangan yang salah', yaitu ketika kita memberi label untuk titiknya akan ada sisi yang mempunyai label ganda seperti pada graf sikel C_n dengan $n \equiv 1$ atau 2 (mod 4). Contoh ditunjukkan oleh Ganbar 2.18. Dimana ada dua sisi yang mempunyai label 2.

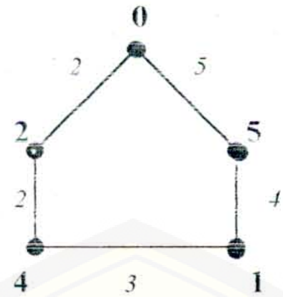
Tanpa menunjukkan hasil pelabelannya Erdos [5] menyebutkan beberapa graf tidak *graceful*. Dilain pihak Rosa [5] menyebutkan tiga alasan mengapa sebuah graf G tidak bisa dilabeli menurut aturan pelabelan graceful, yaitu:

1. G mempunyai 'banyak titik dan tidak cukup sisi', yaitu ketika kita memberi label untuk titiknya tidak cukup bilangan untuk memberi label titik dimana pelabelan titiknya diberi label dari bilangan 0 sampai dengan banyaknya sisi . Contoh pada gabungan dua buah graf bintang seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.17 dimana jumlah titik pada gabungan dua graf bintang adalah 8 sedangkan bilangan yang tersedia untuk melabeli titik-titiknya berjumlah 7 sedemikian hingga ada satu titik yang tidak terlabeli.

Gambar 2.17 Graf yang Mempunyai Banyak Titik dan Tidak Cukup Sisi

2. G mempunyai 'terlalu banyak sisi', yaitu ketika kita memberi label untuk titiknya akan ada sisi yang mempunyai label ganda. Contoh pada graf komplit K_5 yang ditunjukkan pada Gambar 2.16.

3. G mempunyai 'keseimbangan yang salah', yaitu ketika kita memberi label untuk titiknya akan ada sisi yang mempunyai label ganda seperti pada graf sikel C_n dengan $n \equiv 1$ atau 2 (mod 4). Contoh ditunjukkan oleh Ganbar 2.18. Dimana ada dua sisi yang mempunyai label 2.



Gambar 2.18 Graf Sikel C_5 yang Mempunyai Keseimbangan Salah

2.9 Pelabelan Komplemen

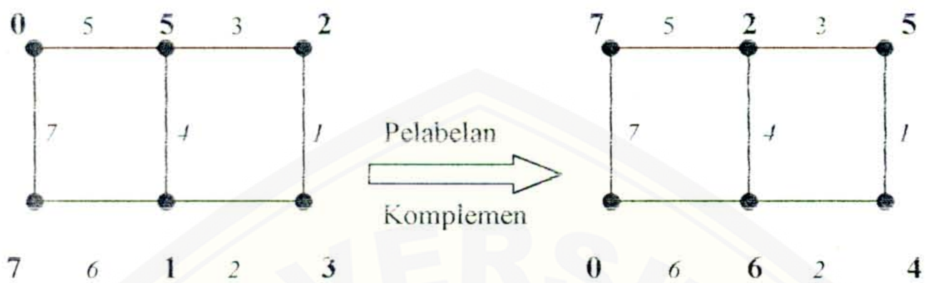
Misal graf G adalah graf *graceful* dengan pelabelan λ. Misal titik-titiknya dilabeli kembali menurut aturan $|E(G)| - \lambda(v)$ untuk setiap titik v di G. Pemberian label kembali dengan aturan $|E(G)| - \lambda(v)$ ini kita beri nama pelabelan λ' untuk setiap titik di G akan berbeda dengan pelabelan λ dan $0 \leq \lambda'(v) \leq |E(G)|$. Karena pelabelan λ merupakan fungsi satu-satu dari himpunan titik di G ke $\{0, 1, 2, \ldots, |E(G)|\}$ maka pelabelan λ' juga merupakan fungsi satu-satu dari himpunan titik di G ke $\{0, 1, 2, \ldots, |E(G)|\}$.

Pelabelan λ' untuk sisi-sisi di graf G dijelaskan sebagai berikut:

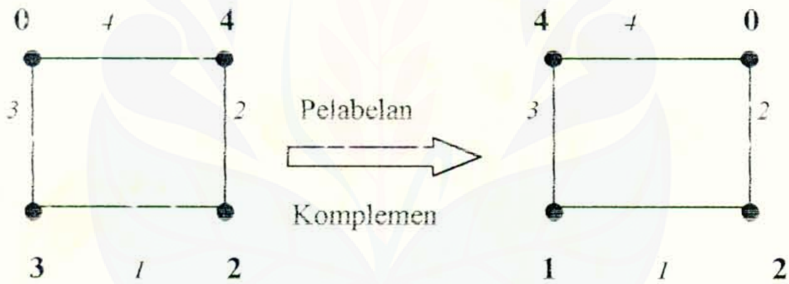
$$\begin{aligned}
\lambda'(e) = \lambda'(uv) &= |\lambda'(u) - \lambda'(v)| \\
&= |(|E(G)| - \lambda(u)) - (|E(G)| - \lambda(v))| \\
&= |\lambda(u) - \lambda(v)| \\
&= \lambda(uv) = \lambda(e).
\end{aligned}$$

Jadi pelabelan λ' untuk setiap sisi di G sama dengan pelabelan λ. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pelabelan λ' adalah pelabelan *graceful*. Pelabelan λ' ini disebut pelabelan *komplemen* dari pelabelan *graceful* (atau disebut pelabelan komplemen saja).

Contoh pelabelan komplemen dari graf L_3 dan C_4 ditunjukkan pada Gambar 2.19 dan 2.20



Gambar 2.19 Pelabelan *Graceful* dari Graf L_3 dan Pelabelan Komplemennya



Gambar 2.20 Pelabelan *Graceful* dari Graf C_4 dan Pelabelan Komplemennya

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan yang telah dikerjakan pada penulisan skripsi ini adalah :

1. Graf tangga L_n yang diperoleh dari hasil kali kartesius P_2 x P_n adalah graf *graceful*.
2. Graf gabungan m buah graf tangga mL_n adalah graf *graceful*.
3. Graf hasil kali kartesius P_m x P_n adalah graf *graceful*.

Pelabelan *graceful* pada setiap kelas graf yang dikaji adaiah tidak tunggal, minimal ada dua, yaitu pelabelan yang didefinisikan untuk membuktikan setiap sifat dan pelabelan komplemennya.

4.2 Saran

Permasalahan dalam pelabelan *graceful* masih terbuka bagi peneliti yang lain, misalnya menginvestigasi perumusan pelabelan *graceful* untuk graf C_nxP_n dan C_nxC_m.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chaytrand G. and Lesniak L, 1996, *Graphs & Digraphs, 3rd edition*, Chapman and Hall.

[2] Kreyszig, E, 1998, *Advanced Engineering Mathematics, 6th edition,* Jhon Wiley and Sons.

[3] Grimaldi R.P, 1999, *Discrete and Combinatorical Mathematics 4th edition,* Addison Wesley Longman, Inc.

[4] G.S.Bloom and S.W.Golomb, 1978, *Numbered Complete Graph, Unusual Rulers and Assorted Applications, in Theory and Application of Graphs in Math,* 642, Springer-Verlag, New York.

[5] Slamin, 1997, *Graph Labellings,* The University of Newcastle Callghan NSW 2308, Australia.

[6] Weisstein. E. W, 1999, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC press, Inc.