



RANCANG BANGUN TABUNG
DALAM
KUBUS SATUAN

S K R I P S I



Oleh :

Soltan Bahtiar

NIM. 971810101078

Asal	: Madrasah	5 S16.352 BAH r e.18
Terima Tanggal	: 23 JAN 2007	
No. Indek	: 0137	

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

DESEMBER 2001

**Rancang Bangun Tabung
dalam
Kubus Satuan**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

Soltan Bahtiar
NIM. 971810101078



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

Desember, 2001

Motto :

*“ Sesungguhnya manusia itu diciptakan dalam bentuk
sebaik-baik makhluk ”.*

(Q.S. AT – Tiin: 286)

*“ Sesungguhnya balasan yang besar itu sebanding dengan
bahaya yang besar juga ... ”.*

(Zubdatul Waa'izdiina)

“ Wujudkan cita-citamu dengan bangun dan bekerja ”.

(Suprayitno)

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

- ☉ Allah SWT yang telah menjagaku dan Muhammad SAW yang telah membimbingku,
- ☉ Kedua orang tua dan semua guru-guruku,
- ☉ Saudara-saudaraku, adikku Sofyan yang nakal supaya jangan terus merepotkan orang tua, Mas Sis, Mas Pri, Mbak Siti, Bu Cik, Nova, Om Nono, dan kesemua saudara-saudaraku yang tidak dapat aku sebutkan satu persatu.
- ☉ Sahabat-Sahabat karibku. Edi, Heru dan Wuri, serta expecially for Yanti. Semoga persahabatan kita tetap utuh selamanya.
- ☉ Teman-teman Najatul Khoir. Mas Nanang, Supriyanto, Sofyan, Gogon, Kasbun dan semuanya. For Eva, tolong cepat pulang.
- ☉ Hartono, Cak Edi, Junaedi, Wawan, Coro dan Hamid. Simpan gable dan reminya yang rapi.
- ☉ Anak-anak HMJ Matematika, Adi, Holifield, Widi, Rosyid dan Jati maafkan aku atas kejadian-kejadian dulu sewaktu di HMJ.
- ☉ Crew-crew Fakultas MiPA, Hasan, Syaiful, Sam, Edi, dan Pak Dadang terima kasih atas bantuannya.
- ☉ Sobat-sobatku di rental "Science Computer", Johan dan Rininya semoga rukun-rukun saja selalu, Priyo, Dadang, Momo, Adji, Adam, Fafan, Agus dan Beni. Jaga selalu kekompakan.
- ☉ Suryanto, Yoyok, Sugeng, Fahmi, Syafi', Joe Karjo, Dwi Sawi, Polo dan Pa'i, kapan kita ngopi, main P.S dan nonton bola lagi ?.
- ☉ Rekan-rekan mahasiswa UNEJ khususnya F.MIPA Jurusan Matematika. Widya, Ani, Hermin, Bahrul, Yusna serta teman-temanku semua yang tidak dapat kami sebutkan satu persatu. Thank's for all guys, dan
- ☉ Almamaterku yang tak pernah terlupakan.

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan April 2001 sampai dengan bulan Nopember 2001 di Jurusan Matematika FMIPA UNEJ. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Desember 2001

Soltan Bahtiar.

ABSTRAK

Perancangan benda-benda industri yang berbentuk tabung khususnya model-model sambungan tabung memerlukan perlakuan tersendiri dalam pengkonstruksiannya. Untuk itu tulisan ini membahas masalah perancangan fabrikasi model-model sambungan tabung khususnya yang berbentuk L, berbentuk T, berbentuk + (plus) dengan asumsi bahwa tabung-tabung tersebut berdiameter sama dan letaknya dalam posisi vertikal dan horizontal.

Hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa secara umum perancangan model-model sambungan tabung tersebut diatas dapat dilakukan melalui, penentuan kurva-kurva perpotongan antara tabung dengan bidang, mendeteksi letak dan bentuk kurva-kurva batas dari ujung-ujung tabung dan merekonstruksi kurva-kurva batas dari langkah kedua dengan menggunakan metode interpolasi linier dua kurva. Akhirnya, dengan menggunakan metode transformasi titik, kita gabungkan hasil langkah ketiga tersebut sehingga didapatkan model sambungan tabung yang diharapkan.


HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:


Hari : Kamis
Tanggal : 24 JAN 2002
Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji


Ketua,


Kusno, DEA, Ph.D.
NIP. 131 592 357


Dosen Penguji I,


Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP. 132 048 321

Sekretaris,


Kosala Dwidja P., S.Si.
NIP. 132 206 019


Dosen Penguji II,


Agustina P., M.Si
NIP. 132 257 933

Mengesahkan

Dekan FMIPA UNEJ




Sumadi, M.S.
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah *Subhanahu wata'ala* karena penulis telah diberi kekuatan untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Bapak Drs. Kusno, DEA, Ph.D. sebagai Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kosala Dwidja P., S.Si. sebagai Dosen Pembimbing Anggota yang dengan penuh kesabaran telah membimbing penulis mulai dari penentuan topik sampai dengan bentuk laporan ini.

Banyak pihak yang telah memberi kontribusi dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu. Penulis ucapkan terima kasih kepada Bapak Kiswara Agung, S.Si. yang telah memberikan ijin penggunaan fasilitas Laboratorium Komputer. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada para teknisi yang telah membantu selama penyusunan laporan ini. Kepada rekan-rekan seangkatan saya ucapkan terima kasih atas segala bantuannya.

Akhirnya penulis berharap skripsi ini dapat memberi kontribusi terhadap kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang ilmu geometri.

Jember, Desember 2001

Penulis,

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Halaman Motto	ii
Halaman Persembahan	iii
Halaman Deklarasi	iv
Halaman Abstrak	v
Halaman Pengesahan	vi
Halaman Kata Pengantar	vii
Halaman Daftar Isi	viii
Halaman Daftar Tabel	x
Halaman Daftar Gambar	xi
BAB I. Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	1
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Manfaat Penelitian	2
BAB II. Tinjauan Pustaka	3
2.1 Bangun Tabung	3
2.1.1 Tabung Tegak	3
2.1.2 Tabung Lengkung	6
2.2 Transformasi Titik di R^3	7
2.2.1 Translasi (Pergeseran)	7
2.2.2 Rotasi (Perputaran)	8
2.2.3 Dilatasi (Penskalaan)	9
2.2.4 Refleksi (Pencerminan)	10

2.3 Relasi-relasi Geometri di R^3	13
2.3.1 Jarak antara Titik dan Bidang	13
2.3.2 Garis	14
2.3.3 Jarak antara Dua Garis	16
2.3.4 Jarak antara Dua Tabung	18
2.3.5 Kurva Irisan antara Tabung dan Bidang	18
2.4 Konstruksi Permukaan dari Dua Kurva	21
2.5 Kurva Irisan antara Dua Permukaan Parametrik	22
2.6 Strategi Pemecahan Masalah	24
BAB III. Hasil dan Pembahasan	26
3.1 Prosedur Umum Model Sambungan Tabung Bentuk Huruf L	26
3.1.1 Teknik Torus	26
3.1.2 Teknik Konstruksi Kurva Perpotongan Antara Tabung dan Bidang	28
3.2 Prosedur Umum Model Sambungan Tabung Bentuk Huruf T	30
3.3 Prosedur Umum Model Sambungan Tabung Bentuk +	34
BAB IV. Kesimpulan dan Saran	40
4.1 Kesimpulan	40
4.2 Saran	41

Daftar Pustaka

Lampiran

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel-1: Matrik-matrik Transformasi di \mathbb{R}^3	12

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar-1: Model-model Sambungan Tabung dalam Kubus Satuan	1
Gambar-2: Permukaan Garis	3
Gambar-3: Permukaan Silinder	4
Gambar-4: Silinder Sirkuler Tegak	4
Gambar-5: Tabung Sebagai Hasil Perputaran Persegi Panjang	5
Gambar-6: Tabung dengan Pusat Sumbu Z.....	6
Gambar-7: Torus.....	6
Gambar-8: Ilustrasi Rotasi Pada Sistem Koordianat Tangan Kiri	8
Gambar-9: Refleksi terhadap Bidang $x = 0$	10
Gambar-10: Jarak antara Titik dan Bidang	13
Gambar-11: Ilustrasi Persamaan Garis	14
Gambar-12: Perpotongan Tabung dan Bidang	18
Gambar-13: Kurva Perpotongan antara Tabung dan Bidang	19
Gambar-14: Perpotongan Tabung dan Bidang dengan $C = 0$	20
Gambar-15: Pendeteksian Tidak Adanya Perpotongan antara Tabung dan Bidang	21
Gambar-16: Konstruksi Permukaan dari Dua Kurva	22
Gambar-17: Ilustrasi Kurva Irisan Dua Permukaan Parametrik	22
Gambar-18: Model Sambungan Tabung Menggunakan Teknik Torus	27
Gambar-19: Model Sambungan Tabung Bentuk L (Lancip)	28
Gambar-20: Proses Penyambungan Tabung Bentuk L (Lancip)	29
Gambar-21: Model Sambungan Tabung Bentuk T.....	30
Gambar-22: Proses Penyambungan Tabung Bentuk T.....	31
Gambar-23: Model Sambungan Tabung Bentuk +.....	33
Gambar-24: Proses Penyambungan Tabung Bentuk +	34

Gambar-25: Rangkaian Pipa Menggunakan Empat Model Sambungan 35
Gambar-26: Jarak 2 (dua) Tabung 36

BAB I

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

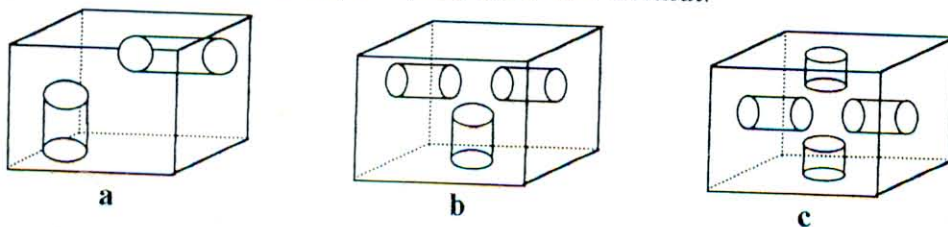
Objek-objek industri berbentuk tabung sering dijumpai pada rangkaian pipa-pipa saluran air, kilang minyak, mobil, pesawat dan sebagainya. Pada rangkaian tersebut, terdapat banyak hal yang menarik untuk dikaji, diantaranya adalah konstruksi model-model sambungan tabung. Pemilihan model-model sambungan tabung atau pipa-pipa yang sesuai dapat menggerakkan aliran zat-zat yang masuk ke tempat yang diinginkan. Oleh karena itu, dalam mengkonstruksi atau merancang sistem saluran dengan tabung atau pipa diperlukan adanya pemilihan model sambungan yang sesuai.

Konstruksi model-model sambungan tabung melibatkan aspek geometris dan aspek ekonomis. Aspek geometris membahas perancangan model yang nantinya akan direalisasikan ke dalam bentuk yang sebenarnya. Sedangkan aspek ekonomis antara lain berkenaan dengan proses fabrikasi maupun waktu pakai dari objek yang dirancang.

Dalam penelitian ini, kita tertarik pada aspek pertama (aspek geometris) dengan masalah yang terbatas pada ruangan kubus satuan. Untuk jelasnya, masalah tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut.

1.2 Perumusan Masalah

Misal dalam kubus satuan diberikan n tabung homogen berdiameter d dengan posisi horizontal dan vertikal seperti pada Gambar-1 berikut:



Gambar-1: Model-Model Sambungan Tabung dalam Kubus Satuan

Masalah yang perlu dicari solusinya adalah:

1. Mencari teknik menyambung tabung dalam bentuk huruf L (Gambar-1a)
2. Mencari teknik menyambung tabung dalam bentuk huruf T (Gambar-1b)
3. Mencari teknik menyambung tabung dalam bentuk + (Gambar-1c)
4. Mencari jarak antara dua tabung dalam kubus satuan

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan model-model sambungan tabung dan teknik-teknik menyambung tabung dalam kubus satuan.
2. Mendapatkan jarak dua tabung di kubus satuan, guna mendeteksi dapatnya menempatkan tabung lain yang terletak diantara kedua tabung tersebut.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian adalah:

1. Dapat merancang fabrikasi obyek-obyek berkarakter bangun tabung.
2. Dapat mengoptimalkan hasil perancangan fabrikasi obyek-obyek berkarakter bangun tabung.

BAB II

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bangun Tabung

2.1.1 Tabung Tegak

Pengertian tabung dapat ditinjau dari beberapa pendekatan, antara lain geometri klasik dan geometri analitik. Berikut didefinisikan tabung sebagai hasil pergeseran garis dan anggota benda putar.

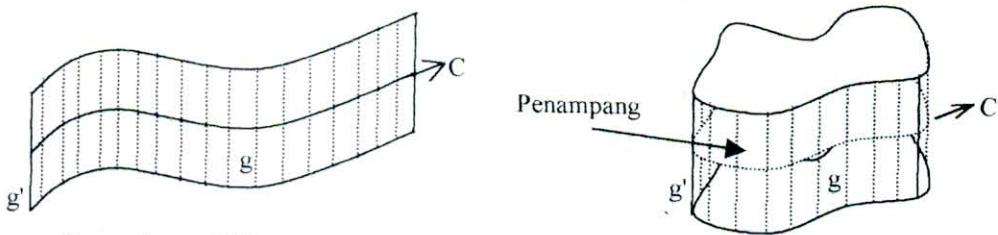
Beberapa obyek geometri dapat dibangkitkan oleh sebuah garis, diantaranya adalah kerucut, bola dan tabung. Sebelum mendefinisikan obyek geometri khusus **tabung** terlebih dahulu kita berikan beberapa definisi berikut.

DEFINISI 1 : *permukaan garis* adalah permukaan yang dibangkitkan oleh sebarang garis g yang bergerak (bergeser) dan menyinggung sepanjang kurva C . Garis g disebut *generatrix* (*garis pembangkit* atau *garis pelukis*) dari kurva C yang disebut *kurva direktris* (*kurva arah*).



Gambar-2 : Permukaan Garis

DEFINISI 2 : *permukaan silinder* adalah permukaan yang dibangkitkan oleh sebarang garis g yang bergerak (bergeser) dan melalui sepanjang kurva C dan selama pergerakannya garis g tersebut selalu sejajar terhadap garis yang diketahui g' .



a. Permukaan Silinder Terbuka

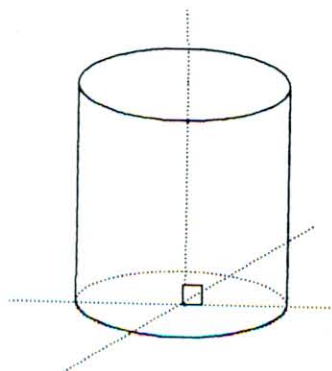
b. Permukaan Silinder tertutup

Gambar-3 : Permukaan Silinder

DEFINISI 3 : *silinder* adalah benda ruang tertutup (solid) yang dibatasi oleh permukaan silinder tertutup berpenampang konveks dan dua bagian bidang sejajar sebagai alas.

Permukaan silinder tertutup tersebut disebut sebagai permukaan tegak (lateral), permukaan lengkung atau selimut silinder. Sedangkan silinder sendiri mempunyai beberapa jenis, antara lain silinder tegak dan silinder miring. Silinder tegak adalah silinder yang generatisnya (permukaan tegaknya) tegak lurus terhadap alas dan silinder miring adalah silinder yang generatisnya miring terhadap alas.

DEFINISI 4 : *silinder sirkuler tegak* adalah silinder tegak yang kedua alasnya berbentuk lingkaran. Selanjutnya silinder sirkuler tegak ini disebut dengan **tabung tegak** atau secara umum disebut tabung.



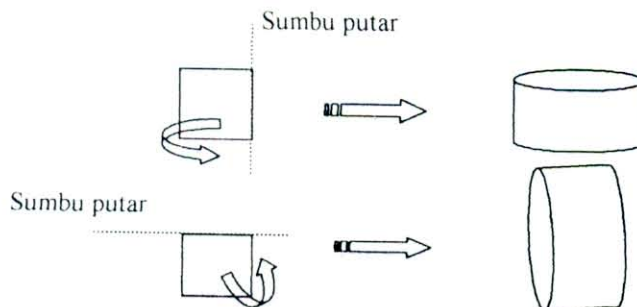
Gambar-4 : Silinder Sirkuler Tegak

Selain itu didefinisikan tabung dari pengertian anggota keluarga benda-benda putar. Untuk itu, terlebih dahulu kita berikan pengertian *permukaan putar* berikut.

DEFINISI 5 : *permukaan putar* adalah suatu permukaan yang dibangkitkan oleh kurva bidang C (sebagai generatrix) diputar mengitari sumbu g yang disebut sebagai sumbu putar.

DEFINISI 6 : *benda putar* adalah benda ruang tertutup (solid) yang dibatasi seluruhnya oleh permukaan putar.

DEFINISI 7 : *tabung* adalah benda putar yang dibangkitkan oleh kurva bidang berbentuk persegi panjang yang diputar pada salah satu sisinya sebagai sumbu.

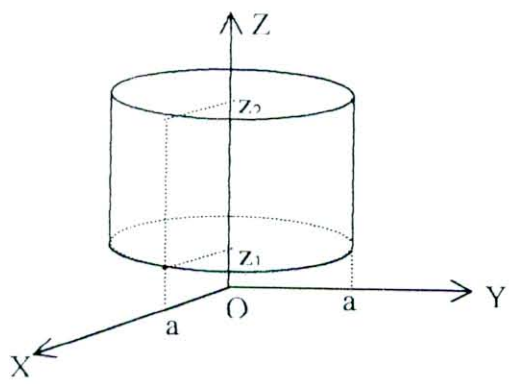


Gambar-5 : Tabung sebagai hasil perputaran persegi panjang

Dalam bentuk analitik, persamaan permukaan tabung dengan pusat sumbu Z (gambar-6) dapat disajikan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(u) \\ y &= a \sin(u) \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

dimana $-\pi \leq u \leq \pi$, $z_1 \leq z \leq z_2$ sebagai parameter dan $a \in \mathfrak{R}$ konstanta real.

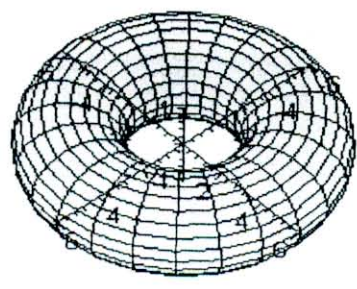


Gambar-6: Tabung dengan pusat sumbu Z

2.1.2 Tabung Lengkung

Tabung Lengkung dapat dibangkitkan oleh lingkaran yang digeser secara tegak lurus terhadap kurva C sebagai sumbunya. Tabung lengkung ini memiliki beberapa jenis, antara lain adalah tabung lengkung terbuka dan tabung lengkung tertutup. Tabung lengkung terbuka untuk kurva C terbuka, sedangkan tabung lengkung tertutup untuk kurva C tertutup.

DEFINISI 8: *torus* adalah tabung lengkung tertutup dengan kurva C berbentuk lingkaran.



Gambar-7: Torus

Dalam bentuk analitik, persamaan torus dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} x &= (a + b \cos(u)) \cos v \\ y &= (a + b \cos(u)) \sin v \\ z &= b \sin v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2).$$

dimana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $0 < u, v \leq 2\pi$ (Kusno, 2001).

2.2 Transformasi Titik di R^3

Transformasi titik T pada ruang R^n ke R^m adalah perpasangan yang memetakan titik $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$ atau dalam bentuk vektor $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$, ke titik lain di R^m yang dinyatakan dalam bentuk $T(\mathbf{x})$. Jika T berupa transformasi linier maka T harus memenuhi sifat-sifat berikut untuk semua vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^n$ dan skalar $\lambda_1, \lambda_2 \in R$:

$$\left. \begin{aligned} T(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) &= \lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{x}_2) \\ T(\lambda_1 \mathbf{x}_1) &= \lambda_1 T(\mathbf{x}_1); T(\lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_2 T(\mathbf{x}_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Jika kita menggunakan notasi matriks untuk vektor di R^m dari R^n , maka kita dapat mendefinisikan sebuah fungsi $T : R^n \rightarrow R^m$ dengan $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, dimana A adalah matriks $m \times n$ sebagai matriks transformasi. Misalkan \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah matriks $n \times 1$ dan k adalah sebuah skalar, maka berlaku:

$$\left. \begin{aligned} A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \\ A(k\mathbf{u}) &= k(A\mathbf{u}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Dengan demikian setiap transformasi linier dari R^n ke R^m adalah transformasi matriks, karena persamaan (3) ekuivalen dengan (4) (G.Hadley, 1992).

Untuk selanjutnya, kita akan mempelajari transformasi dari R^3 ke R^3 dalam bentuk transformasi afin. Transformasi ini terdiri dari translasi, rotasi (perputaran), delatasi (penskalaan) dan refleksi (pencerminan).

2.2.1 Translasi (Pergeseran)

Sebagai elemen dasar, setiap titik di R^3 ditentukan oleh tiga referensi, yaitu ke arah sumbu x , ke arah sumbu y dan ke arah sumbu z . Sehingga, sebarang titik Q dinyatakan sebagai (X_q, Y_q, Z_q) dalam bentuk koordinat dan $\langle X_q, Y_q, Z_q \rangle$ dalam bentuk vektor.

Translasi adalah perpindahan kedudukan sebarang titik dengan penambahan besaran pada arah sumbu x , y dan z . Secara umum, translasi dapat dinyatakan oleh persamaan $Q = TP + K$, dimana P adalah posisi titik awal, Q adalah posisi titik setelah ditranslasi, T adalah matrik identitas dan K menunjukkan besarnya pergeseran ke arah sumbu x , y dan z . Hasil translasi dapat dinyatakan sebagai:

$$(X_q, Y_q, Z_q) = (X_p + K_x, Y_p + K_y, Z_p + K_z)$$

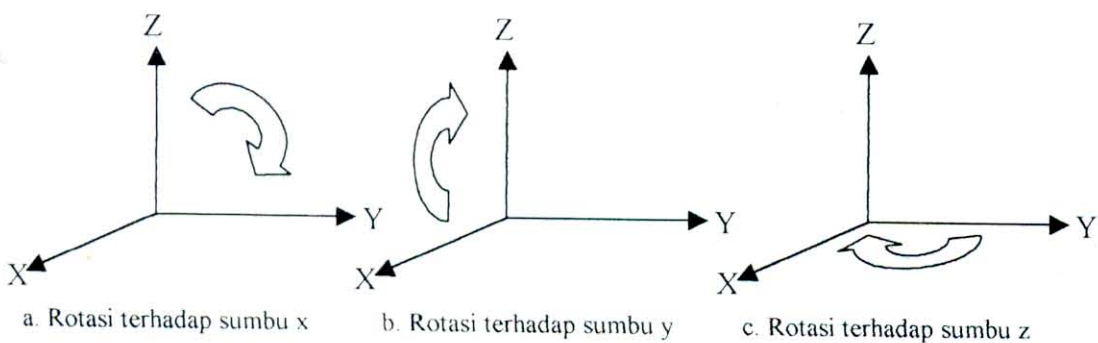
Dalam bentuk matriks, notasi diatas dapat dituliskan sebagai:

$$[X_q \ Y_q \ Z_q]^T = \begin{matrix} A_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5).$$

Matriks A_1 adalah matriks koefisien yang bersesuaian dengan transformasi translasi. Translasi bersifat mempertahankan bentuk dan ukuran obyek,

2.2.2 Rotasi (Perputaran)

Rotasi di R^3 dapat dilakukan dengan memilih salah satu sumbu koordinat sebagai sumbu putar. Dalam R^3 dikenal dua sistem koordinat, yaitu sistem koordinat tangan kanan dan sistem koordinat tangan kiri. Pada sistem koordinat tangan kiri, rotasi bersudut positif dinyatakan sebagai searah dengan arah putaran jarum jam. Sedangkan, pada sistem koordinat tangan kanan, rotasi bersudut positif dinyatakan sebagai berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam. Sistem koordinat tangan kiri diilustrasikan pada gambar-8 berikut.



Gambar-8: Ilustrasi Rotasi pada Sistem Koordinat Tangan Kiri

Apabila θ menunjukkan besarnya sudut rotasi dengan titik pangkal rotasi $O(0,0,0)$, maka rotasi terhadap masing-masing sumbu dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

Rotasi terhadap sumbu x:

$$[X_q \ Y_q \ Z_q]^T = \overset{B_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6).$$

Rotasi terhadap sumbu y:

$$[X_q \ Y_q \ Z_q]^T = \overset{B_2}{\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7).$$

Rotasi terhadap sumbu z:

$$[X_q \ Y_q \ Z_q]^T = \overset{B_3}{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8).$$

Dalam hal ini, matriks B_1 , B_2 dan B_3 adalah matriks koefisien yang bersesuaian dengan transformasi rotasi. Rotasi ini memiliki sifat yang sama dengan translasi.

2.2.3 Delatasi (Penskalaan)

Delatasi adalah proses memperbesar atau memperkecil suatu obyek. Delatasi ini dapat dilakukan terhadap sumbu X saja, sumbu Y, sumbu Z saja atau kombinasi dari ketiga-tiganya. Secara umum, delatasi dapat dinyatakan dalam persamaan: $Q = SP$, dimana Q adalah posisi titik setelah didelatasi, S adalah matriks transformasi dan P adalah posisi titik awal. Hasil delatasi dapat dinyatakan sebagai:

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = (S_x P_x, S_y P_y, S_z P_z),$$

dimana $S_x, S_y, S_z \in \mathbb{R}$ dan S_x, S_y, S_z tidak boleh bernilai 0 dan 1.

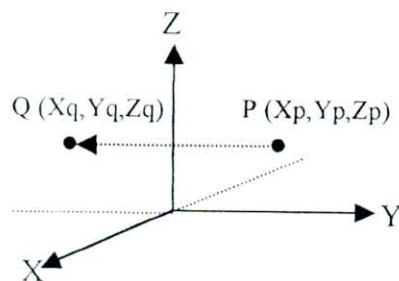
Dalam bentuk matriks, notasi diatas dapat dituliskan:

$$C_1 \begin{bmatrix} X_q & Y_q & Z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots(9).$$

Matriks C_1 adalah matriks koefisien yang bersesuaian dengan transformasi delatasi. Untuk $0 < S_x, S_y$ dan $S_z < 1$ obyek yang didelatasi akan diperkecil dari bentuk semula, sedangkan untuk S_x, S_y dan $S_z > 1$ maka obyek yang didelatasi akan diperbesar dari bentuk semula. Obyek sebelum dan sesudah didelatasi memiliki sifat-sifat yang sebangun.

2.2.4 Refleksi (Pencerminan)

Refleksi terhadap bidang melalui titik awal adalah transformasi yang memetakan setiap titik di R^3 ke dalam bayangan cerminnya terhadap bidang tersebut. Dalam hal ini, kita akan membahas refleksi terhadap bidang-bidang $x = 0, y = 0$ dan $z = 0$. Misalkan $T: R^3 \rightarrow R^3$ transformasi yang memetakan masing-masing titik ke dalam bayangan simetriknya terhadap bidang $x = 0$.



Gambar-9: Refleksi terhadap Bidang $x = 0$

Adapun matriks transformasinya dapat ditentukan sebagai berikut:

$$T(e_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(e_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(e_3) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan $T(e_1)$, $T(e_2)$ dan $T(e_3)$ maka kita akan dapatkan matriks transformasinya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

- persamaan refleksi yang melalui titik awal P (P_x, P_y, P_z) terhadap bidang $x = 0$ dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$[X_q \ Y_q \ Z_q]^T = \begin{matrix} D_1 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10).$$

Dengan cara serupa, kita akan dapatkan:

- Persamaan refleksi dalam bentuk matriks terhadap bidang $y = 0$ sebagai berikut:

$$[X_q \ Y_q \ Z_q]^T = \begin{matrix} D_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11).$$

- Persamaan refleksi dalam bentuk matriks terhadap bidang $z = 0$ sebagai berikut:

$$[X_q \ Y_q \ Z_q]^T = \begin{matrix} D_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12).$$

Dalam hal ini, matriks D_1 , D_2 dan D_3 adalah matriks koefisien yang bersesuaian dengan transformasi refleksi terhadap bidang-bidang $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$. Obyek sebelum dan sesudah direfleksikan memiliki jarak yang sama terhadap bidang refleksi. Refleksi ini memiliki sifat-sifat yang sama dengan translasi.

Untuk jelasnya, kita perhatikan Tabel-1 berikut:

Tabel-1. Matriks-Matriks Transformasi di R^3

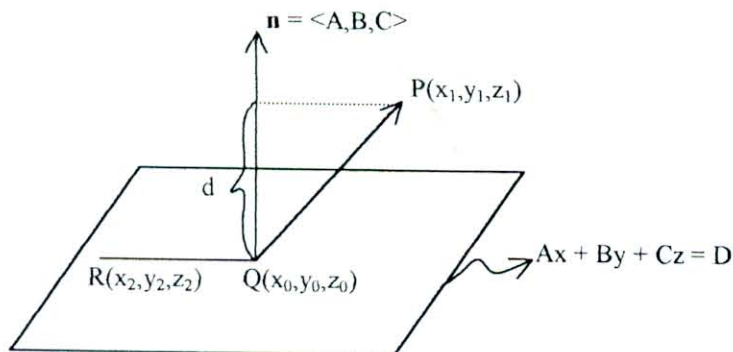
Transformasi Afın	Matriks Transformasi	Keterangan
1. Translasi	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}$	$K_x, K_y, K_z \in R$ Adalah besarnya arah translasi
2. Rotasi		θ menunjukkan besarnya sudut rotasi, dimana: $0 \leq \theta \leq 2\pi$
• Rotasi terhadap sumbu X	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	
• Rotasi terhadap sumbu Y	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$	
• Rotasi terhadap sumbu Z	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
3. Delatasi	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$	$S_x, S_y, S_z \in R$ menunjukkan besar dan arah delatasi
4. Refleksi		
• Refleksi terhadap bidang $x = 0$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
• Refleksi terhadap bidang $y = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
• Refleksi terhadap bidang $z = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	

2.3 Relasi-relasi Geometri di \mathbb{R}^3

Pada bagian ini dibahas tentang relasi-relasi geometri, khususnya jarak antara titik, garis, bidang dan jarak antara dua tabung di \mathbb{R}^3 . Disamping itu, kita akan membahas interseksi antara tabung dan bidang.

2.3.1 Jarak antara Titik dan Bidang

Jarak antara titik ke bidang dapat diilustrasikan oleh gambar-10 berikut:



Gambar-10: Jarak antara Titik dan Bidang

Jika d adalah jarak titik $P(x_1, y_1, z_1)$ ke bidang $Ax + By + Cz = D$, maka d sama dengan proyeksi vektor \vec{QP} pada \mathbf{n} .

$$\begin{aligned} d &= \left| \vec{QP} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| \\ &= \left| \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle \cdot \frac{\langle A, B, C \rangle}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \\ &= \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \\ &= \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \end{aligned}$$

Karena titik $Q(x_0, y_0, z_0)$ terletak pada bidang $Ax + By + Cz = D$, maka:

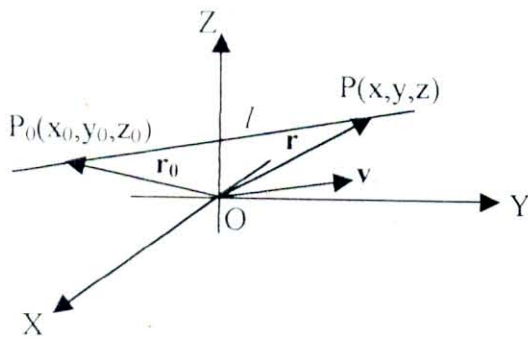
$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$, sehingga bentuk tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \dots\dots\dots(13).$$

Persamaan (11) merupakan jarak titik $P(x_1, y_1, z_1)$ terhadap bidang $Ax + By + Cz = D$.

2.3.2 Garis

a). Persamaan Garis



Gambar-11: Ilustrasi Persamaan Garis

Misalkan pada gambar-11, l berupa garis yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan sejajar v . Ambil titik lain $P(x, y, z)$ pada garis l , maka $\mathbf{P_0P} \parallel v$ dan $\mathbf{P_0P} = t v$ dengan $t \neq 0, t \in \mathbf{R}$. Jika vektor-vektor posisi untuk titik P_0 dan P terhadap O adalah $\mathbf{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ dan $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, maka $\mathbf{P_0P}$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r_0} &= \mathbf{P_0P} \\ \mathbf{r} - \mathbf{r_0} &= t v \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r_0} + t v \end{aligned}$$

Karena itu sebarang titik P pada garis l memenuhi persamaan tersebut. Jadi persamaan garis l yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan sejajar vektor $v = \langle a, b, c \rangle$ adalah:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t v \dots\dots\dots(14).$$

persamaan (14) disebut persamaan vektor garis l .

Karena $\mathbf{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ dan $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, maka persamaan (14) dapat ditulis :

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

$$x = x_0 + ta ; y = y_0 + tb ; z = z_0 + tc \dots\dots\dots(15).$$

persamaan (15) disebut persamaan parametrik (kanonik) dari garis l . Selanjutnya, dengan mengeliminasi nilai t pada persamaan (15), maka diperoleh

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \dots\dots\dots(16).$$

Persamaan (14) disebut persamaan simetrik dari garis l dengan vektor arah sama dengan $\langle a, b, c \rangle$ yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (Sukirman, 1994).

b). Kedudukan Dua Garis di \mathbb{R}^3

Jika terdapat dua garis di \mathbb{R}^3 , maka terdapat beberapa kemungkinan diantara kedua garis tersebut, yaitu berpotongan, sejajar, berimpit dan bersilangan. Misal vektor arah dari dua garis lurus g_1 dan g_2 berturut-turut adalah $\mathbf{m}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ dan $\mathbf{m}_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$, maka:

- a) garis g_1 dan g_2 akan berpotongan jika $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{m}_2$ dan kedua garis tersebut terletak dalam satu bidang
- b) garis g_1 dan g_2 akan sejajar jika $\mathbf{m}_1 = t \mathbf{m}_2$, dengan $t \in \mathbb{R}$ dan $\overrightarrow{PQ} \neq t \mathbf{m}_1$ untuk sebarang P dan Q masing-masing terletak di g_1 dan g_2
- c) garis g_1 dan g_2 akan berimpit jika $\mathbf{m}_1 = t \mathbf{m}_2$, dengan $t \in \mathbb{R}$ dan $\overrightarrow{PQ} = t \mathbf{m}_1$ untuk sebarang P dan Q masing-masing terletak di g_1 dan g_2
- d) garis g_1 dan g_2 akan bersilangan apabila $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{m}_2$ dan kedua garis tersebut tidak terletak dalam satu bidang.

2.3.3 Jarak antara Dua Garis

a). Jarak Dua Garis Sejajar

Apabila terdapat dua garis yang sejajar g_1 dan g_2 di R^3 , maka jaraknya dapat kita tentukan dengan prosedur berikut:

- Memilih sebarang titik P pada g_1 .
- Membuat bidang rata W melalui titik P dan tegak lurus g_1 , yang dengan sendirinya juga tegak lurus g_2
- menentukan titik Q yang merupakan titik tembus g_2 pada W
- Panjang PQ adalah jarak g_1 terhadap g_2

Untuk lebih jelasnya, kita akan menerapkan prosedur tersebut dalam menentukan jarak antara garis $g_1: (x - 2) / 2 = y / 3 = (z - 2) / 1$ terhadap garis $g_2: x / 2 = (y - 4) / 3 = (z - 8) / 1$. Jelas $g_1 \parallel g_2$, karena vektor arah g_1 sama dengan vektor arah g_2 . Pertama, kita memilih titik P(2,0,2) yang terletak pada g_1 . Kemudian, kita menentukan persamaan bidang W yang melalui P dan tegak lurus g_1 sebagai berikut:

$$W: 2(x - 2) + 3(y - 0) + (z - 2) = 0$$

$$2x + 3y + z - 6 = 0 \dots\dots\dots (17).$$

Selanjutnya, kita menentukan titik Q (titik tembus g_2 pada W). Persamaan garis g_2 dalam bentuk parametrik sebagai berikut:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = 8 + t \end{array} \right\} \dots\dots\dots (18).$$

Titik Q didapat dengan mensubstitusikan (18) ke (17) sebagai berikut:

$$2(2t) + 3(4+3t) + (8+t) - 6 = 0$$

$$t = -1$$

maka Q(-2,1,7). Jadi jarak g_1 terhadap g_2 adalah:

$$PQ = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 0)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{42}$$

b). Jarak Dua Garis Bersilangan

Apabila terdapat dua garis yang bersilangan g_1 dan g_2 di R^3 , maka jaraknya dapat kita tentukan dengan prosedur berikut:

- Menentukan bidang W yang melalui g_1 dan sejajar g_2
- Memilih sebarang titik P pada g_2 .
- Menentukan jarak P ke bidang W yang merupakan jarak g_1 terhadap g_2 .

Untuk lebih jelasnya, kita akan menerapkan prosedur tersebut dalam menentukan jarak antara garis $g_1: x = y = 0$ terhadap garis $g_2: x = -y + 1 = -z$. Dalam hal ini, kedua garis tersebut saling bersilangan. Pertama, kita menentukan bidang W yang melalui g_1 dan sejajar g_2 sebagai berikut:

Normal bidang W merupakan hasil perkalian (cross product) antara vektor arah g_1 dan g_2 sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

maka persamaan bidang $W: x + y - D = 0$. Dengan mensubstitusikan titik $S(0,0,0)$ pada g_1 ke persamaan bidang W , maka didapat nilai D sebesar 0. Jadi persamaan bidang $W: x + y = 0$. Kemudian, kita memilih titik $P(0,1,0)$ yang terletak pada g_2 . Jadi, jarak antara garis g_1 terhadap g_2 dapat diwakili oleh jarak titik P terhadap bidang W sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c). Jarak Dua Garis Berimpit atau Berpotongan

Apabila terdapat dua garis g_1 dan g_2 di R^3 yang berimpit atau berpotongan, maka jaraknya sama dengan nol (D. Suryadi, 1986).

2.3.4 Jarak antara Dua Tabung

Jarak antara dua tabung dapat diwakili oleh jarak antara kedua sumbu tabung dikurangi jumlah jari-jari tabung satu dan tabung dua. Atau secara matematis dapat dituliskan : $d_t = d_s - (r_1 + r_2)$,

dimana d_t = jarak antara dua tabung

d_s = jarak antara kedua sumbu tabung

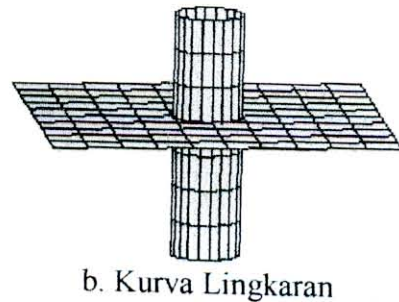
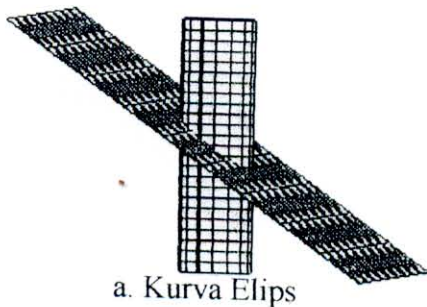
r_1 = jari-jari tabung satu

r_2 = jari-jari tabung dua.

Karena sumbu tabung merupakan sebuah garis, maka jarak antara kedua sumbu tabung sama dengan jarak antara dua garis. Untuk mengetahui jarak antara dua garis ini diperlukan informasi dasar mengenai jarak sebuah titik terhadap bidang.

2.3.5 Kurva Irisan antara Tabung dan Bidang

Kurva irisan antara tabung dan bidang dapat berupa kurva: elips atau lingkaran. Hal ini dapat diilustrasikan dalam gambar berikut:



Gambar-12: Perpotongan Tabung dan Bidang

Diketahui persamaan tabung dengan pusat OZ dapat dituliskan seperti bentuk (1) sebagai berikut:

$$x = a \cos(u)$$

$$y = a \sin(u)$$

$z = z$, dimana $-\pi \leq u \leq \pi$, $z_1 \leq z \leq z_2$ sebagai parameter dan $a \in \mathbb{R}$ konstanta real.

Sedangkan persamaan bidang secara umum adalah: $Ax + By + Cz = D$. Untuk bidang yang tidak sejajar dengan sumbu z , persamaan bidang tersebut dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$Ax + By + Cz = D$, atau

$z = [D - (Ax + By)] / C$ (19)

dimana $C \neq 0$.

Dari persamaan (1) dan (19) didapat kurva perpotongan antara tabung dan bidang pada domain:

$x = a \cos \alpha$

$y = a \sin \alpha$, terjadi pada ketinggian:

$z = [D - (A a \cos \alpha + B a \sin \alpha)] / C$, dimana $C \neq 0$.

Jika:

- Nilai $x = y = 0$ pada persamaan (19), maka kurva perpotongannya berbentuk lingkaran.
- Nilai $x \neq 0$ atau $y \neq 0$ pada persamaan (19), maka kurva perpotongannya berbentuk elips.

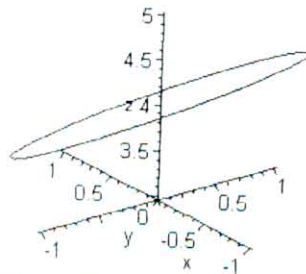
Untuk lebih jelasnya, Gambar-13 berikut merupakan perpotongan antara tabung:

$x = \cos(u)$

$y = \sin(u)$

$z = z$ dimana $-\pi \leq u \leq \pi$ dan $0 \leq z \leq 5$

terhadap bidang: $y + z = 4$



Gambar-13: Kurva Perpotongan antara Tabung dan Bidang.

Namun demikian terjadi beberapa kasus yang perlu dievaluasi sebagai berikut:

a) Kurva perpotongan tabung dan bidang dengan $C = 0$.

Tabung dengan persamaan (1) yang dipotong oleh bidang yang sejajar sumbu z ($C=0$) menghasilkan garis. Dari persamaan (1) dan persamaan (19) didapat:

$$A \cos(u) + B \sin(u) = D \dots\dots\dots(20).$$

Dengan menyelesaikan persamaan (20) diperoleh:

$$u_1 = k_1\pi \text{ atau } k_2 = n_2\pi \dots\dots\dots(21),$$

dimana: konstanta $k_1, k_2 \in \mathfrak{R}$.

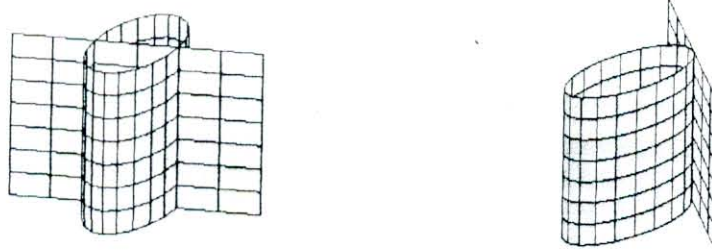
Substitusi persamaan (20) ke persamaan (1) didapat persamaan garis:

$$x = a \cos(k_1\pi) \qquad x = a \cos(k_2\pi)$$

$$y = a \sin(k_1\pi) \qquad \text{atau} \qquad y = a \sin(k_2\pi)$$

$$z = z \qquad z = z$$

Apabila $k_1 = k_2$, maka kurva perpotongannya berupa satu garis (bidang menyinggung tabung).



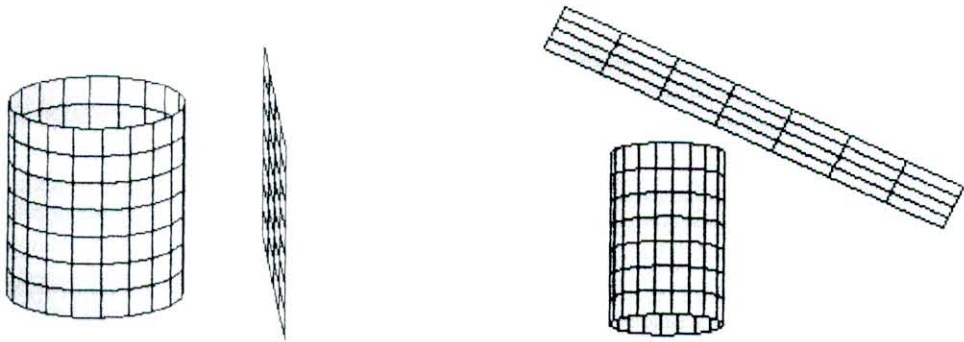
Gambar-14: Perpotongan Tabung dan Bidang dengan $C = 0$.

b) Tidak adanya perpotongan antara tabung dan bidang.

- Tabung dengan persamaan (1) dan bidang dengan persamaan (19) untuk $C=0$ tidak akan berpotongan apabila nilai $a < |S|$ dimana $|S|$ adalah jarak antara sumbu z terhadap bidang tersebut. $|S|$ dapat diwakili oleh jarak titik $(0,0,0)$ ke bidang $Ax + By = D$.

$$|S| = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Tabung dengan persamaan (1) dan bidang dengan persamaan (19) untuk $C \neq 0$, tidak akan berpotongan apabila z pada persamaan (19) $\notin z=[z_1, z_2]$ pada persamaan (1).



Gambar-15: Pendeteksian Tidak Adanya Perpotongan antara Tabung dan Bidang.

2.4 Konstruksi Permukaan dari Dua Kurva

Pandanglah dua kurva ruang yang berbeda $\mathbf{c}_1(u)$ dan $\mathbf{c}_2(u)$, maka kita dapat definisikan suatu permukaan (garis) dari interpolasi $(\mathbf{c}_1(u), \mathbf{c}_2(u))$ sebagai berikut:

$$\mathbf{S}(t, u) = \mathbf{c}_1(u) \cdot (1-t) + \mathbf{c}_2(u) \cdot t \quad \dots \dots \dots (22),$$

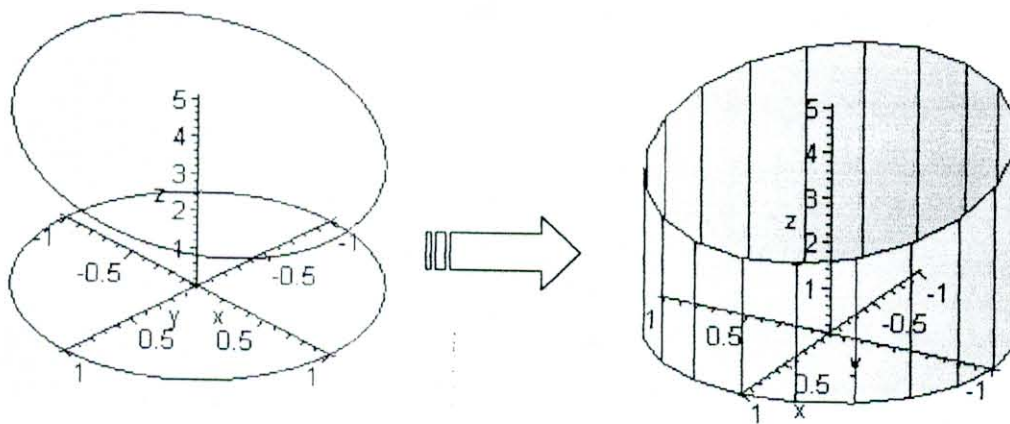
dimana $t \in \mathbb{R}$ merupakan parameter yang besarnya $t_1 < t < t_2$. Untuk lebih jelasnya, kita berikan contoh permukaan (garis) $\mathbf{S}(t, u)$ yang dibangun dari kurva $\mathbf{c}_1(u) = \cos(u) \mathbf{i} + \sin(u) \mathbf{j} + (4 - \sin(u)) \mathbf{k}$ dan $\mathbf{c}_2(u) = \cos(u) \mathbf{i} + \sin(u) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$.

$$\mathbf{S}(t, u) = \langle \cos(u) + \sin(u) + (4 - \sin(u)) \rangle \cdot (1-t) + \langle \cos(u) + \sin(u) + 0 \rangle \cdot t$$

dengan memberikan nilai parameter $0 \leq t \leq 1$, maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t, u) = & \langle \cos(u) \cdot (1-t) + \sin(u) \cdot (1-t) + (4 - \sin(u)) \cdot (1-t) \rangle \cdot (1-t) + \\ & \langle \cos(u) \cdot (t) + \sin(u) \cdot (t) + 0 \cdot (t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t, u) = & \langle [\cos(u) \cdot (1-t) + \cos(u) \cdot (t)], [\sin(u) \cdot (1-t) + \sin(u) \cdot (t)], \\ & [(4 - \sin(u)) \cdot (1-t)] \rangle \end{aligned}$$



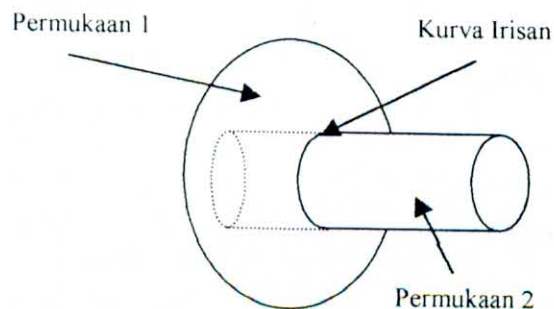
Gambar-16: Konstruksi Permukaan dari Dua Kurva

2.5 Kurva Irisan dari Dua Permukaan Parametrik

Untuk menentukan bentuk kurva yang diperoleh dari irisan dua permukaan, Malek-Yeah (1995) memperkenalkan algoritma irisan dua permukaan parametrik empat tahap berikut:

1. Menyajikan kedua permukaan dalam bentuk parametrik.

Permukaan 1 disajikan dalam $x^1(u,v)$ dengan kendala: $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$ dan permukaan 2 berbentuk $x^2(s,t)$ dengan kendala: $s_1 \leq s \leq s_2$, $t_1 \leq t \leq t_2$ dimana (u,v) dan (s,t) masing-masing adalah koordinat parametrik yang independen (bebas).



Gambar-17: Ilustrasi kurva irisan dari dua permukaan parametrik.

2. Menetapkan bentuk ketidaksamaan kendala parameter baru.

Bentuk ketidaksamaan kendala diubah dalam: $q_1^{\min} \leq q \leq q_2^{\max}$ dengan memisalkan λ_i sebagai berikut: $q_i = a_i + b_i \sin \lambda_i$ dimana $a_i = \frac{(q_i^{\max} + q_i^{\min})}{2}$ dan

$$b_i = \frac{(q_i^{\max} - q_i^{\min})}{2}$$

3. Menentukan titik awal.

Metode untuk menentukan titik awal q^* pada kurva interseksi dapat dilakukan dengan menetapkan nilai penduga awal g^l yang terletak pada salah satu permukaan. Selanjutnya, menentukan solusi dari sistem tujuh persamaan nonlinear dengan delapan variabel sebagai fungsi kendala $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ berikut:

$$H(q) = \begin{bmatrix} x^1(u, v) - x^2(s, t) \\ u - \left[\frac{(u_1 + u_2)}{2} - \frac{(u_2 - u_1)}{2} \sin(\lambda_1) \right] \\ v - \left[\frac{(v_1 + v_2)}{2} - \frac{(v_2 - v_1)}{2} \sin(\lambda_2) \right] \\ s - \left[\frac{(s_1 + s_2)}{2} - \frac{(s_2 - s_1)}{2} \sin(\lambda_3) \right] \\ t - \left[\frac{(t_1 + t_2)}{2} - \frac{(t_2 - t_1)}{2} \sin(\lambda_4) \right] \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

dengan $\mathbf{q} = \{ u \ v \ s \ t \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \}$. Malek-Yeah (1995) menggunakan metode Moore Penrose Pseudo-Invers untuk menyelesaikan persamaan tersebut.

4. Mencari lintasan kurva interseksi antara dua permukaan.

Setelah titik awal ditemukan, maka serangkaian titik-titik yang terletak pada kurva irisan dari dua permukaan parametrik dapat ditentukan dengan menggunakan proses iterasi hitung arah tangen.

Dalam metode ini, langkah (3) memberikan solusi yang tidak unik, sehingga cukup rumit perhitungannya. Sedangkan pada langkah (4), kita banyak mengalami kesulitan apabila terjadi hal-hal berikut:

- Titik percabangan dalam $x_1(u,v)$ atau $x_2(s,t)$.
- Daerah interseksinya sangat kecil.
- Generatris antara dua kurva sama.

Oleh sebab itu, kita tertarik mencari penyelesaian lain guna menyelesaikan masalah penelitian ini.

2.6 Strategi Pemecahan Masalah

Dengan menggunakan konsep-konsep mengenai bangun tabung, transformasi titik di R^3 , relasi-relasi geometri di R^3 , kurva perpotongan tabung dan bidang serta rekonstruksi dari dua kurva, maka kita dapat menentukan solusi dari permasalahan-permasalahan yang terdapat pada Bab I.

Masalah pertama, yaitu mencari teknik menyambung tabung dalam bentuk huruf L (Gambar-1a) yang mana dapat dilakukan melalui analisa bentuk sambungannya. Jika sambungannya berbentuk lengkung maka kita gunakan potongan torus untuk menyambungannya, jika sambungannya berbentuk lancip maka kita gunakan teknik rekonstruksi dari kurva-kurva perpotongan antara tabung dan bidang.

Masalah kedua, yaitu mencari teknik menyambung tabung dalam bentuk huruf T (Gambar-1b) yang mana dapat dilakukan dengan mencari kurva-kurva perpotongan antara tabung dan bidang dari sudut 45° . Kemudian, kurva-kurva perpotongan tersebut direkonstruksi menjadi suatu permukaan. Selanjutnya, dengan menggunakan teknik rotasi dan refleksi, maka kita dapatkan penyelesaian dari permasalahan tersebut.

Masalah ketiga, yaitu mencari teknik menyambung tabung dalam bentuk + (Gambar-1c) yang mana dapat diselesaikan melalui teknik transformasi dari penyelesaian permasalahan kedua.

Masalah keempat, yaitu mencari jarak antara dua tabung yang mana dapat diselesaikan melalui pendeteksian posisi kesejajaran letak kedudukan kedua tabung tersebut dan ketegak lurusan di R^3 .

Untuk lebih jelasnya, prosedur untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan tersebut diatas dijelaskan pada Bab III.

BAB III

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan untuk tabung homogen dengan posisi horizontal dan vertikal dapat kita simpulkan bahwa:

1. Perancangan model sambungan tabung bentuk huruf L dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: teknik torus dan konstruksi kurva perpotongan antara tabung dan bidang. Prosedur penggunaan teknik torus dapat dilakukan, pertama, mendeteksi jari-jari lingkaran dari ujung-ujung tabung (L_1 dan L_2) yang berdekatan. Kedua, membatasi parameter torus dan menentukan nilai-nilai konstanta a dan b pada persamaan (2). Kemudian, mengkonstruksi torus dari L_1 ke L_2 . Sedangkan teknik konstruksi kurva perpotongan antara tabung dan bidang dilakukan sebagai berikut. Pertama, memotong masing-masing ujung tabung bersudut potong 45° . Kedua, mendeteksi kurva-kurva batas pada ujung tabung. Ketiga, mengkonstruksi permukaan tabung dari langkah kedua, kemudian menggabungkannya.
2. Perancangan model sambungan tabung bentuk huruf T dapat dilakukan dengan teknik penyambungan konstruksi kurva perpotongan antara tabung dan bidang. Dalam hal ini, sebelum dua tabung tersebut digabungkan, masing-masing tabung tegak dan mendatar harus dipotong terlebih dahulu oleh dua bidang dengan sudut potong 45° .
3. Perancangan Model Sambungan Tabung berbentuk + (plus) dilakukan dengan cara memotong masing-masing tabung pada salah satu ujung-ujungnya dengan bersudut potong 45° , kemudian menggabungkannya.
4. Jarak antara dua tabung homogen dapat ditentukan dengan mengurangi jarak antara kedua sumbu tabung tersebut dengan jumlah jari-jari kedua tabung.

4.2 Saran

Prosedur umum perancangan model-model sambungan tabung bentuk L, bentuk T maupun bentuk + dapat digunakan untuk memecahkan beberapa masalah konstruksi sistem jaringan pipa, khususnya dalam posisi vertikal dan horizontal. Selain prosedur tersebut, kita mungkin dapat mengembangkan perancangan obyek-obyek berbentuk tabung yang lebih rumit dan kompleks seperti halnya konstruksi model-model sambungan tabung yang non homogen dengan letak tabung dalam berbagai kemiringan tertentu. Oleh sebab itu, penelitian tentang perancangan jaringan tabung/pipa dalam kondisi non homogen dan kemiringan tertentu sangat terbuka untuk memperoleh penyelesaian masalah tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abdul-Malek K and H. J. Yeah. 1995. *Determining intersection curves between surfaces of two solids*. Iowa City, IA 52242, USA: Department of Mechanical Engineering and Center for Computer Aided Design.
- Anton, H. 1988. *Aljabar Linier Elementer Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- D. Suryadi H. S. 1986. *Teori dan Soal Ilmu Analitik Ruang*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Hadley, G. 1992. *Aljabar Linier Edisi Revisi*. Jakarta: Erlangga.
- Kusno. 2001. *Geometri Analitik Ruang*. Jember: Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Jember.
- Monagan, M.B. 1998. *Maple V Rel. 5.0 Progamming Guide*. Canada: Waterloo Maple Inc.
- Sukirman. 1994. *Geometri Analitik Ruang*. Jakarta: Depdikbud Universitas Terbuka.

LAMPIRAN

Lampiran

Program Model-Model Sambungan Tabung Menggunakan Maple V Release:

1. Model Sambungan Bentuk Huruf L

a. Teknik Torus

with(plots):

```
> plot3d([(cos(u)+1)*cos(v),(cos(u)+1)*sin(v),sin(u)],u=-Pi..Pi,v=0..Pi/2);
```

b. Teknik Kontruksi Kurva Perpotongan Antara Tabung dan Bidang

with(plots):

```
n:=20:
```

```
> h1:=[seq([seq([cos((i/n)*2*Pi)*(1-j),-sin((i/n)*2*Pi)*(1-j),(sin((i/n)*2*Pi))*(1-j)],i=0..20)],j=0..1)];
```

```
> h2:=[seq([seq([cos((i/n)*2*Pi)*j,2*j,(sin((i/n)*2*Pi))*j],i=0..20)],j=0..1)];
```

```
> h:=h1+h2:
```

```
> v1:=[seq([seq([cos((i/n)*2*Pi)*(1-j),(sin((i/n)*2*Pi))*(1-j),-sin((i/n)*2*Pi)*(1-j)],i=0..20)],j=0..1)];
```

```
> v2:=[seq([seq([cos((i/n)*2*Pi)*j,sin((i/n)*2*Pi)*j,-2*j],i=0..20)],j=0..1)];
```

```
> v:=v1+v2:
```

```
> surfdata({h,v},axes=frame,labels=[x,y,z]);
```

2. Model Sambungan Tabung Bentuk Huruf T

with(plots):

```
n:=10:
```

```
> T1:=[seq([seq([cos((i/n)*Pi)*(1-j),sin((i/n)*Pi)*(1-j),-2],i=0..10)],j=0..1)];
```

```
> T2:=[seq([seq([cos((i/n)*Pi)*j,sin((i/n)*Pi)*j,(2-sin((i/n)*Pi))*j],i=0..10)],j=0..1)];
```

```
> T:=T1+T2:
```

```
> T3:=[seq([seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),sin((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),-2],i=0..10)],j=0..1)];
```

```
> T4:=[seq([seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*j,sin((i/n)*(-1*Pi))*j,(2+sin((i/n)*(-1*Pi))*j],i=0..10)],j=0..1)];
```

```

> A:=T3+T4:
> w1 :=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),-sin((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),(sin((i/n)*(-1*Pi)))*(1-j)],i=0..10)],j=0..1)]:
> w2:=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*j,2*j,(sin((i/n)*(-1*Pi)))*j],i=0..10)],j=0..1)]:
> w:=w1+w2:
> w3 :=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),sin((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),(sin((i/n)*(-1*Pi)))*(1-j)],i=0..10)],j=0..1)]:
> w4:=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*j,-2*j,(sin((i/n)*(-1*Pi)))*j],i=0..10)],j=0..1)]:
> E:=w3+w4:
> h:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*j,2*j,(sin((i/n)*Pi))*j],i=0..10)],j=0..1)]:
> h1:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*(1-j),-2*(1-j),(sin((i/n)*Pi))*(1-j)],i=0..10)],j=0..1)]:
> ht:=h+h1:
> surfdata({T,A,w,E,ht},axes=frame);

```

3. Model Sambungan Bentuk +

```

> with(plots):
> n:=10:
> T1:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*(1-j),sin((i/n)*Pi)*(1-j),0],i=0..10)],j=0..1)]:
> T2:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*j,sin((i/n)*Pi)*j,(4-sin((i/n)*Pi))*j],i=0..10)],j=0..1)]:
> T:=T1+T2:
> T3:=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),sin((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),0],i=0..10)],j=0..1)]:
> T4:=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*j,sin((i/n)*(-1*Pi))*j,(4+sin((i/n)*(-1*Pi)))*j],i=0..10)],j=0..1)]:
> A:=T3+T4:
> surfdata({T,A},axes=frame, labels=[x,y,z]);
> w1 :=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),-sin((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),(sin((i/n)*(-1*Pi))+4)*(1-j)],i=0..10)],j=0..1)]:
> w2:=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*j,2*j,(sin((i/n)*(-1*Pi))+4)*j],i=0..10)],j=0..1)]:
> w:=w1+w2:

```



```
> w3 :=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),sin((i/n)*(-1*Pi))*(1-j),(sin((i/n)*(-1*Pi))+4)*(1-j)],i=0..10)],j=0..1)];
> w4:=[seq([ seq([cos((i/n)*(-1*Pi))*j,-2*j,(sin((i/n)*(-1*Pi))+4)*j],i=0..10)],j=0..1)];
> E:=w3+w4:
> s1 :=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*(1-j),sin((i/n)*Pi)*(1-j),(sin((i/n)*Pi)+4)*(1-j)],i=0..10)],j=0..1)];
> s2:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*j,2*j,(sin((i/n)*Pi)+4)*j],i=0..10)],j=0..1)];
> s:=s1+s2:
> g1:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*(1-j),-sin((i/n)*Pi)*(1-j),(sin((i/n)*Pi)+4)*(1-j)],i=0..10)],j=0..1)];
> g2:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*j,-2*j,(sin((i/n)*Pi)+4)*j],i=0..10)],j=0..1)];
> g:=g1+g2:
> b :=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*(1-j),sin((i/n)*Pi)*(1-j),6],i=0..10)],j=0..1)];
> b1:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*j,sin((i/n)*Pi)*j,-(2-sin((i/n)*Pi))*j],i=0..10)],j=0..1)];
> tb:=b+b1:
> ab :=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*(1-j),-sin((i/n)*Pi)*(1-j),6],i=0..10)],j=0..1)];
> ab1:=[seq([ seq([cos((i/n)*Pi)*j,-sin((i/n)*Pi)*j,-(2-sin((i/n)*Pi))*j],i=0..10)],j=0..1)];
> abg:=ab+ab1:
> surfdata( {T,A,w,E,s,g,tb,abg},axes=frame, labels=[x,y,z]);
```