



PERANCANGAN OBYEK - OBYEK INDUSTRI DENGAN BENDA-BENDA PUTAR

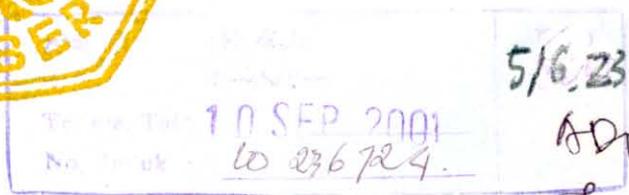
SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

Johan Wahyuadi Adiwijaya

NIM. 971810101090



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

JULI, 2001

Motto:

“ Allah tidak membebani sesuatu, melainkan sesuai dengan kemampuannya. ”

(Q.S. Al – Baqoroh: 286)

“ Sesungguhnya di samping kesulitan ada kemudahan ”.

(Q.S. Al – Insyiroh: 6)

“ Mukmin yang kuat lebih baik dan lebih dicintai oleh Allah daripada mukmin yang lemah ”.

(H.R. Muslim)

“ Apapun yang bisa dipikirkan dan diyakini oleh manusia pasti bisa dicapai ”.

(Napoleon Hill)

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

- 📁 Tuhanku yang Ahad,**
- 📁 Agama dan Bangsaku,**
- 📁 Ayahanda Ibunda Tercinta yang telah melahirkanku dan mendidikku dengan kasih sayang,**
- 📁 Saudara-saudaraku Mbak Karlin, Mas Alim, Mbak Rin, dan Adikku Nelly yang manis dengan sepenuh hati selalu mendukung perjuanganku,**
- 📁 Sahabat-sahabatku semua, dan**
- 📁 Almamaterku yang tak pernah terlupakan.**

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Februari 2001 sampai dengan bulan Juli 2001 di Jurusan Matematika FMIPA UNEJ. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Juli 2001

Johan Wahyudi A.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Johan Wahyudi A.', written over the printed name.

ABSTRAK

Perancangan benda-benda industri yang berbentuk simetris dalam hal khusus berupa benda putar memerlukan perlakuan tersendiri dalam pengoperasiannya. Untuk itu tulisan ini membahas masalah perancangan fabrikasi benda putar satu sumbu beserta algoritma pengawetan volume dari transformasi benda putar tersebut.

Hasil penelitian dapat disimpulkan, secara umum perancangan benda putar dapat dilakukan melalui, pertama, menentukan sumbu putar dari sumbu simetri obyek yang akan dirancang. Kedua, mencacah obyek secara melintang dan membujur sehingga diperoleh kumpulan kurva-kurva generatris benda putar. Akhirnya, memutar kurva-kurva generatris tersebut pada sumbu putarnya. Jika benda putar tersebut memiliki ketebalan ε , maka perlakuannya dapat dilakukan dengan menggeser kurva generatris ke arah interior/eksterior searah normal kurva sejauh ε . Sedangkan transformasi pengawetan volume dapat dilakukan dengan prinsip Cavalieri melalui proses pencacahan obyek secara melintang. Selanjutnya, menstransformasi setiap potongan bidang yang diperoleh dari interseksi antara obyek dan bidang ke dalam bentuk lain dengan luas yang ekuivalen serta melalui proses aproksimasi.

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : Sabtu

Tanggal : 21 JUL 2001

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji

Ketua,



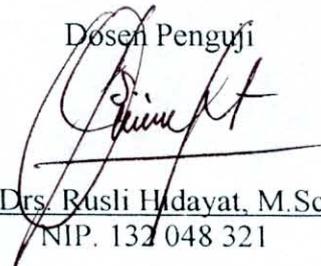
Kusno, DEA, Ph.D.
NIP. 131 592 357

Sekretaris,



Firdaus Ubaidillah, S.Si.
NIP. 132 213 838

Dosen Penguji



Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP. 132 048 321



Mengesahkan
Dekan FMIPA UNEJ



Ir. Sumadi, M.S.
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah *Subhanahu wata'ala* karena penulis telah diberi kekuatan untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Drs. Kusno, DEA, Ph.D. sebagai Dosen Pembimbing Utama dan Firdaus Ubaidillah, S.Si. sebagai Dosen Pembimbing Anggota yang dengan penuh kesabaran telah membimbing penulis mulai dari penentuan topik sampai dengan bentuk laporan ini.

Banyak pihak yang telah memberi kontribusi dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu. Penulis ucapkan terima kasih kepada Kiswara Agung, S.Si. yang telah memberikan ijin penggunaan fasilitas Laboratorium Komputer. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada para teknisi yang telah membantu selama penyusunan laporan ini. Kepada rekan-rekan seangkatan saya ucapkan terima kasih atas segala bantuannya.

Akhirnya penulis berharap skripsi ini dapat memberi kontribusi terhadap kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang ilmu geometri.

Jember, Juni 2001

Penulis,

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Halaman Motto	ii
Halaman Persembahan	iii
Halaman Deklarasi	iv
Halaman Abstrak	v
Halaman Pengesahan	vi
Halaman Kata Pengantar	vii
Halaman Daftar Isi	viii
Halaman Daftar Tabel	x
Halaman Daftar Gambar	xi
BAB I. Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	2
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat	3
BAB II. Tinjauan Pustaka	4
2.1 Definisi dan Prosedur Membangkitkan Benda Putar	4
2.1.1 Pengertian Benda Putar	4
2.1.2 Prosedur Membangkitkan Benda Putar	6
2.2 Benda-Benda Putar Klasik	7
2.3 Hitung Analitik Benda-Benda Putar	12
2.3.1 Volume Benda Putar	12
2.3.2 Prinsip Cavalieri tentang Ekuivalensi Volume	15
2.3.3 Luas Permukaan Benda Putar	18
2.4 Strategi Pemecahan Masalah	19

BAB III. Hasil dan Pembahasan	20
3.1 Prosedur Umum Konstruksi Benda Putar	20
3.1.1 Kasus Generatris Bentuk Poligon	20
3.1.2 Kasus Generatris Bentuk Kurva	21
3.1.3 Aplikasi Teknik Konstruksi	21
3.2 Prosedur Umum Konstruksi Benda Putar dengan Ketebalan ϵ	25
3.2.1 Kasus Generatris Bentuk Poligon	26
3.2.2 Kasus Generatris Bentuk Kurva	27
3.2.3 Aplikasi Konstruksi	28
3.3 Transformasi Bentuk Benda Putar dengan Pengawetan Volume	33
BAB IV. Kesimpulan dan Saran	37
Daftar Pustaka	
Lampiran-lampiran	

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 1: Hasil Perhitungan Metode Beda Hingga Newton	32

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1: Masalah Konstruksi Benda Putar	2
Gambar 2: Masalah Konstruksi Benda Putar dengan Ketebalan ϵ	2
Gambar 3: Masalah Transformasi Pengawetan Volume Benda Putar	3
Gambar 4: Benda Putar dan Bagian-bagiannya	4
Gambar 5: Contoh Benda Putar	5
Gambar 6: Proses Membangkitkan Benda Putar	6
Gambar 7: Pembangkitan Benda Putar dengan Sumbu Putar Tidak Memotong Kurva atau Poligon	6
Gambar 8: Silinder Sirkuler Tegak	8
Gambar 9: Kerucut Sirkuler Tegak	9
Gambar 10: Benda Solid Bola dan Bagian-Bagiannya	10
Gambar 11: Sketsa Perumusan Bola	11
Gambar 12: Volume Benda Putar dengan Metode Cakram	13
Gambar 13: Volume Benda Putar dengan Metode Cincin	14
Gambar 14: Volume Benda Putar dengan Metode Kulit Tabung	15
Gambar 15: Penerapan Prinsip Pengawetan Luas di Bidang	16
Gambar 16: Prinsip Cavalieri di Ruang	17
Gambar 17: Prinsip Cavalieri pada Limas Segitiga dan Segiempat	17
Gambar 18: Prinsip Cavalieri pada Tiga Buah Tabung Berbeda	17
Gambar 19: Luas Permukaan Benda Putar	18
Gambar 20: Prosedur Konstruksi Benda Putar Poligon	22
Gambar 21: Prosedur Konstruksi Benda Putar Kurva	23
Gambar 22: Contoh-Contoh Aplikasi <i>Programming</i>	25
Gambar 23: Prosedur Konstruksi Benda Putar Poligon dengan Ketebalan ϵ	26
Gambar 24: Prosedur Konstruksi Benda Putar Kurva dengan Ketebalan ϵ	27

Gambar 25: Konstruksi Ketebalan ϵ pada Sampel Generatris Poligon	30
Gambar 26: Grafik Interpolasi Metode Beda Hingga Maju Newton	33
Gambar 27: Transformasi Pengawetan Volume dengan $N = 6$	33
Gambar 28: Poligon yang Dimuluskan	34

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam modelisasi benda-benda industri pada umumnya dilakukan dengan dua cara. Pertama, konstruksi dengan menggunakan kurva dan permukaan, kedua, konstruksi dengan menggunakan benda-benda solid, antara lain polihedron dan benda-benda geometri solid standar lain yang berkarakter lengkung seperti halnya bola, kerucut dan tabung. Cara yang pertama banyak digunakan untuk konstruksi obyek-obyek teknologi tinggi seperti halnya mobil dan pesawat, sedangkan cara kedua ini banyak dimanfaatkan dalam perancangan komponen benda-benda teknik dan peralatan rumah tangga.

Benda-benda industri yang dibangun melalui benda solid, dapat beragam sifat-sifat geometrisnya, dari permukaan sederhana yang berbentuk bidang sampai yang berpermukaan kompleks berbentuk lengkungan. Dalam membangun model benda yang berpermukaan solid dapat dilakukan melalui beberapa titik yang mendefinisikan secara geometris permukaan benda tersebut. Sedangkan benda yang berpermukaan kompleks, umumnya diperlukan beberapa pendekatan teknik konstruksi untuk merealisasikannya. Oleh karena itu untuk merancang benda-benda industri yang berpermukaan kompleks, kita perlu melakukan studi geometris yang lebih detail dari permukaannya, misalnya kesimetrian benda, kekontinyuan dari permukaan yang mendefinisikannya, dan lain sebagainya.

Perancangan benda-benda industri yang simetris memiliki daya tarik tersendiri dalam studi modelisasi, alasannya antara lain:

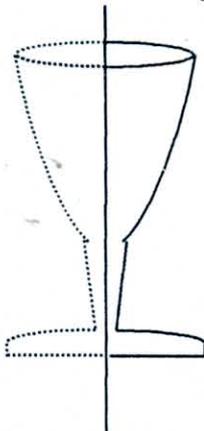
- a. Penampilan bentuk luar yang didapat umumnya sangat indah.
- b. Menawarkan banyak cara dalam pendesainannya.
- c. Produk yang dihasilkan banyak diminati oleh konsumen sebab biasanya lebih unik dan bervariasi.

Pada umumnya, bagian-bagian dari benda industri yang simetris dapat berupa potongan-potongan benda putar. Namun karena setiap benda dan potongannya memiliki beragam sumbu putar, ketebalan atau volume yang berbeda, maka untuk merancang benda-benda tersebut diperlukan perlakuan yang berbeda pula. Untuk itu, dalam tulisan ini kita tertarik untuk mempelajari konstruksi benda putar, merancang benda putar dengan ketebalan ε dan transformasi pengawetan volume.

1.2 Permasalahan

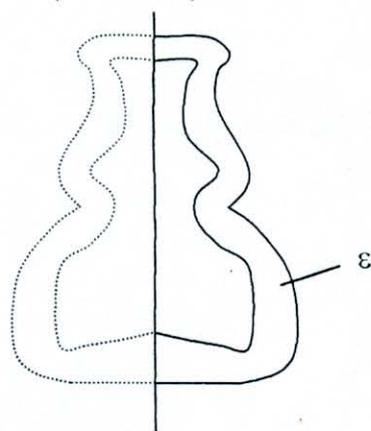
Jika diketahui sebuah sumbu putar g dan beberapa kurva c_i atau poligon p_i yang tidak memotong g di bidang, maka persoalan yang harus dipecahkan adalah mencari metode penyajian benda-benda geometris yang menghasilkan model-model sebagai berikut:

1. Bagaimana merancang fabrikasi obyek berkarakter benda putar (Gambar 1).
2. Bagaimana merancang konstruksi obyek benda putar dengan ketebalan ε (Gambar 2).
3. Bagaimana mentransformasi bentuk obyek benda putar dengan mempertahankan volumenya agar modelnya bervariasi (Gambar 3).



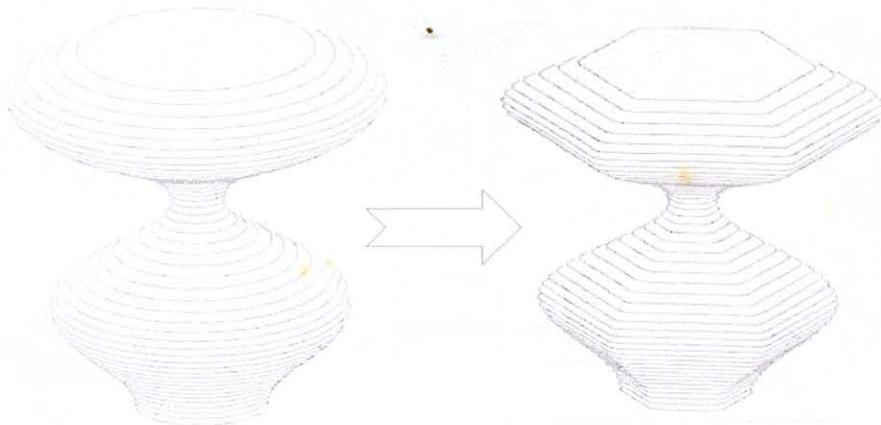
Gambar 1

Masalah Konstruksi Benda Putar.



Gambar 2

Masalah Konstruksi Benda Putar dengan Ketebalan ε .



Gambar 3

Masalah Transformasi Pengawetan Volume Benda Putar.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan prosedur efektif guna merancang obyek-obyek benda putar.
2. Menemukan metode efektif untuk merancang benda putar dengan ketebalan ε .
3. Mendapatkan cara efektif mentransformasikan benda putar dengan volume tetap.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian adalah:

1. Dapat merancang fabrikasi obyek-obyek berkarakter benda putar, misalnya: barang pecah belah, furniture, aksesoris, dan lain-lain.
2. Dapat merancang obyek berkarakter benda putar dengan ketebalan ε .
3. Dapat mentransformasi bentuk obyek berkarakter benda putar dalam bentuk lain dengan mempertahankan volumenya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

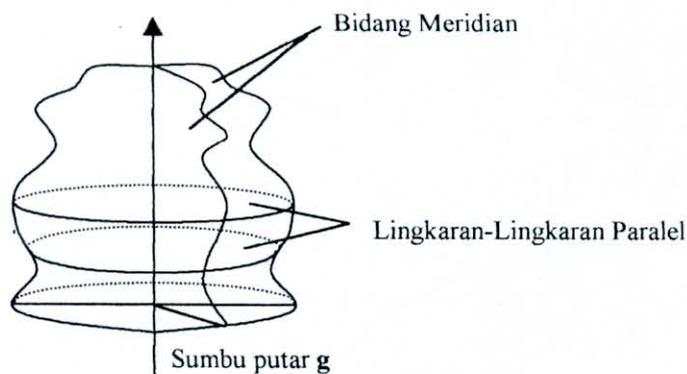
2.1 Definisi dan Prosedur Membangkitkan Benda Putar

2.1.1 Pengertian Benda Putar

Dalam cabang ilmu geometri ruang, banyak diperkenalkan benda-benda geometri solid. Benda-benda tersebut antara lain: prisma, limas, parallel-epipedum, silinder, kerucut, dan bola. Dari contoh benda-benda geometri tersebut: silinder, kerucut, dan bola termasuk benda putar. Pada bagian ini selanjutnya akan kita definisikan pengertian tentang benda-benda putar beserta prosedur untuk membangkitkannya.

DEFINISI 1: *Permukaan Putar* adalah suatu permukaan yang dibangkitkan oleh kurva bidang C (sebagai generatrix) diputar mengitari sebuah sumbu g yang disebut sebagai *sumbu putar* (Kusno, 2000: 41).

DEFINISI 2: *Benda Putar* adalah semua benda ruang tertutup (solid) yang dibatasi seluruhnya oleh *permukaan putar*.



Gambar 4: Benda Putar dan Bagian-Bagiannya

Bagian bidang-bidang yang melalui sumbu putar dan dibatasi permukaan putar disebut *bidang meridian* atau dengan istilah *penampang-penampang meridian*.

Semua penampang meridian tersebut adalah saling kongruen, karena batas-batasnya adalah sumbu putar dan segmen garis atau kurva yang sama. Sedangkan *lingkaran-lingkaran paralel* atau *bidang-bidang paralel* permukaan putar adalah perpotongan antara bidang-bidang sejajar yang tegak lurus sumbu putar dengan permukaan putar.

Setiap titik pada garis atau kurva yang diputar terhadap sumbu putarnya akan membentuk lingkaran yang terletak pada bidang paralel. Dalam ekspresi analitik, bila sumbu putarnya merupakan sumbu koordinat (Suryadi, 1986: 97):

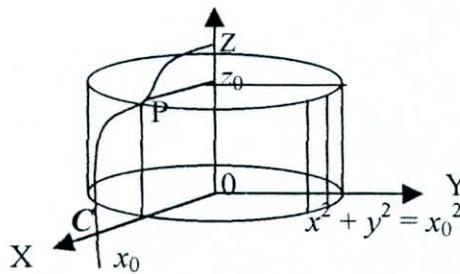
misalkan $C: \left. \begin{matrix} f(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Garis lengkung yang diputar dengan sumbu putar} \\ \text{sumbu } z. \end{matrix}$

Ambil $P(x_0, y_0, z_0)$ pada C , terpenuhi $\left. \begin{matrix} f(x_0, y_0) = 0 \\ y_0 = 0 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(1)$

P terletak pada lingkaran yang persamaannya dapat diambil sebagai perpotongan silinder dan bidang $\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 = x_0^2 \\ z = z_0 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(2)$

Pelenyapan x_0, y_0, z_0 dari (1) dan (2) menghasilkan permukaan putar:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \dots\dots\dots (3)$$



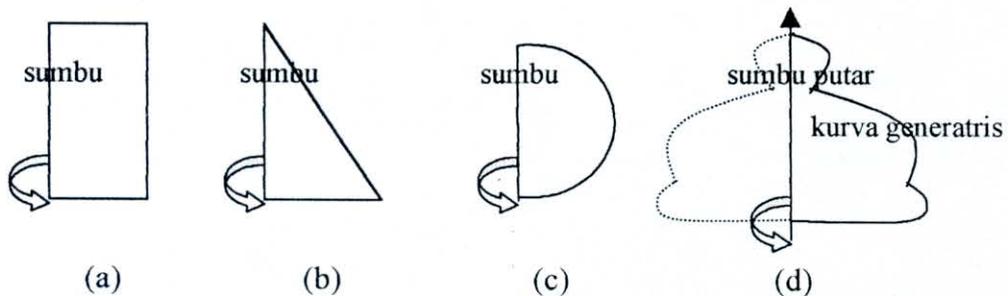
Gambar 5: Contoh Benda Putar

2.1.2 Prosedur Membangkitkan Benda Putar

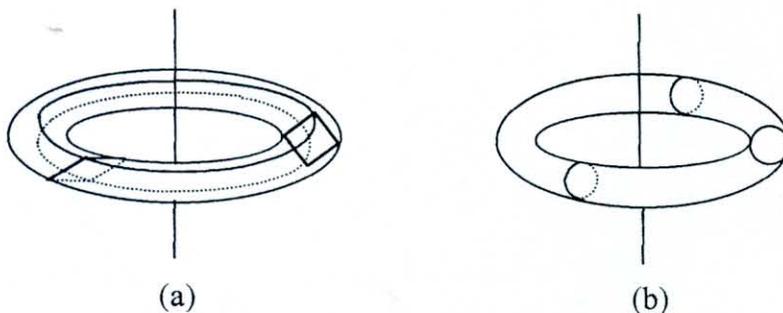
Untuk membangkitkan benda putar, kita dapat menggunakan poligon atau kurva. Adapun prosedurnya sebagai berikut:

a. Poligon Segi- n

Pembangkitan benda putar oleh poligon segi n dapat dilakukan dengan memutar poligon tersebut melalui salah satu sisinya sebagai sumbu putar g . Misalnya persegi panjang jika diputar pada salah satu sisinya akan membentuk benda putar silinder sirkuler tegak (Gambar 6a). Bidang segitiga siku-siku diputar melalui salah satu sisinya yang saling tegak lurus akan membentuk kerucut sirkuler tegak (Gambar 6b). Belah ketupat diputar mengelilingi sumbu g pada bidang tersebut dengan tidak memotong sumbu putarnya akan membentuk cincin solid segi empat (Gambar 7a).



Gambar 6: Proses Membangkitkan Benda Putar



Gambar 7: Pembangkitan Benda Putar dengan Sumbu Putar Tidak Memotong Kurva atau Poligon

b. Kurva Bidang

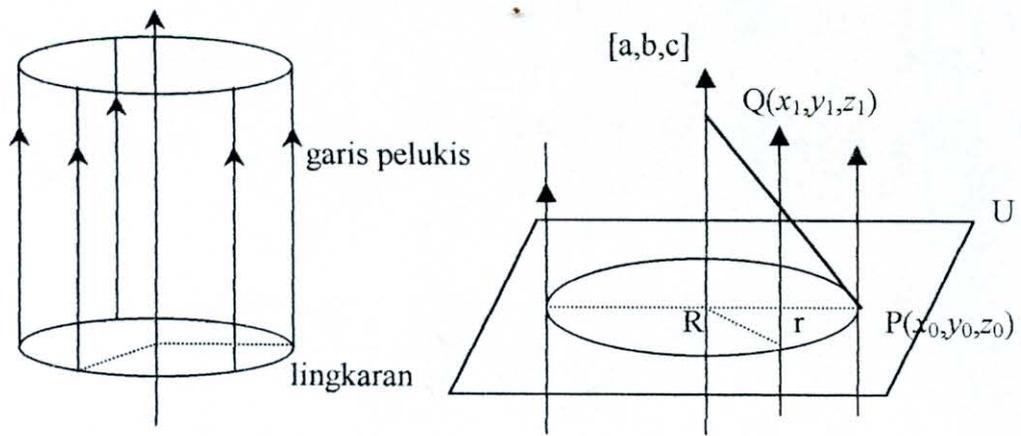
Untuk membangkitkan benda putar dengan kurva bidang dapat dilakukan dengan tahapan berikut. Pertama, tetapkan sumbu putar g . Kemudian pilihlah kurva bidang C dengan syarat tidak memotong sumbu putarnya. Selanjutnya putarlah kurva bidang tersebut mengelilingi sumbu putarnya sehingga didapatkan benda putar yang diminta. Sebagai contoh setengah lingkaran diputar pada diameternya sebagai sumbu g akan membentuk bola (Gambar 6c), atau lingkaran diputar mengelilingi sebuah garis sebagai sumbu g pada bidang lingkaran itu yang tidak memotongnya akan diperoleh sebuah *torus* (Gambar 7b). Begitu pula elips yang diputar pada salah satu sumbu mayor atau minornya akan membentuk elipsoida, atau jika sumbu putarnya diketahui tidak memotong kurva akan membentuk cincin elips atau torus elips (Edwin J. Purcell, 1987: 321).

2.2 Benda-Benda Putar Klasik

Berdasarkan definisi umum benda-benda putar yang dibangkitkan oleh poligon P maupun kurva bidang C , tentunya akan didapat banyak sekali bentuk-bentuk benda putar. Karena alasan aplikasi industri, selanjutnya kita tertarik untuk membahas benda-benda putar klasik berikut ini:

a. Silinder Sirkuler Tegak

Silinder sirkuler (lingkaran) tegak merupakan salah satu benda putar klasik yang terjadi bila garis lurus yang sejajar sumbu putar diputar terhadap sumbunya. Jarak dari dua garis sejajar tersebut merupakan jari-jari silinder. Jadi dalam kedudukan geometris, silinder lingkaran tegak merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah garis tertentu.



Gambar 8 : Silinder Sirkuler Tegak

Pandang silinder sirkuler tegak dengan jari-jari r dan sumbu putar \mathbf{g}
 $[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda [a, b, c]$. Ambil $P(x_0, y_0, z_0)$ pada silinder, maka persamaan
 bidang paralel U yang melalui P adalah $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Jarak
 $Q(x_1, y_1, z_1)$ ke U adalah:

$$QR = \left| \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Sedangkan $QP = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$.

Dari segitiga PQR , diperoleh hubungan $QP^2 - QR^2 = r^2$, sehingga

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \frac{\{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)\}^2}{a^2 + b^2 + c^2} = r^2$$

Apabila titik $P(x_0, y_0, z_0)$ diputar terhadap \mathbf{g} , diperoleh:

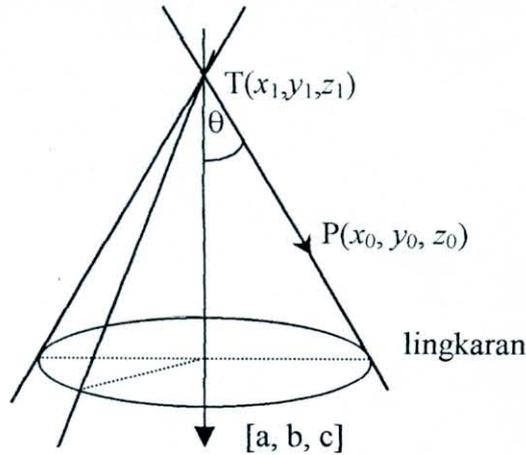
$$\left. \begin{aligned} &\{a^2 + b^2 + c^2\} \{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\} - \\ &\{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)\}^2 = (a^2 + b^2 + c^2)r^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Bentuk (4) adalah persamaan silinder sirkuler tegak yang diminta.

b. Kerucut Sirkuler Tegak

Bentuk benda putar klasik yang lain adalah kerucut sirkuler (lingkaran) tegak. Benda putar ini terjadi apabila sebuah garis lurus ℓ memotong sumbu putar g serta membentuk sudut potong konstan θ diputar terhadap g .

Suatu kerucut dengan puncak $T(x_1, y_1, z_1)$, arah sumbu putar $[a, b, c]$, dan sudut potong θ , persamaannya dapat dihitung sebagai berikut.



Gambar 9 : Kerucut Sirkuler Tegak

Ambil titik $P(x_0, y_0, z_0)$ pada kerucut dengan arah $TP = [x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1]$.

Sedangkan $\cos \theta = \{TP \cdot [a, b, c] / |TP| \cdot |[a, b, c]|\}$

$$= \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Apabila titik $P(x_0, y_0, z_0)$ diputar terhadap sumbu putar g , maka diperoleh:

$$\left. \begin{aligned} \{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)\}^2 = \\ (a^2 + b^2 + c^2)\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\} \cos^2 \theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

AKIBAT:

1. Jika puncak kerucut $(0,0,0)$, persamaan (5) menjadi:

$$(ax + by + cz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \theta.$$

2. Jika puncaknya $(0,0,0)$ dan sumbu putarnya sumbu z (arah $[0,0,1]$), persamaan (5) menjadi:

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \theta$$

atau

$$(x^2 + y^2) \cos^2 \theta = z^2(1 - \cos^2 \theta)$$

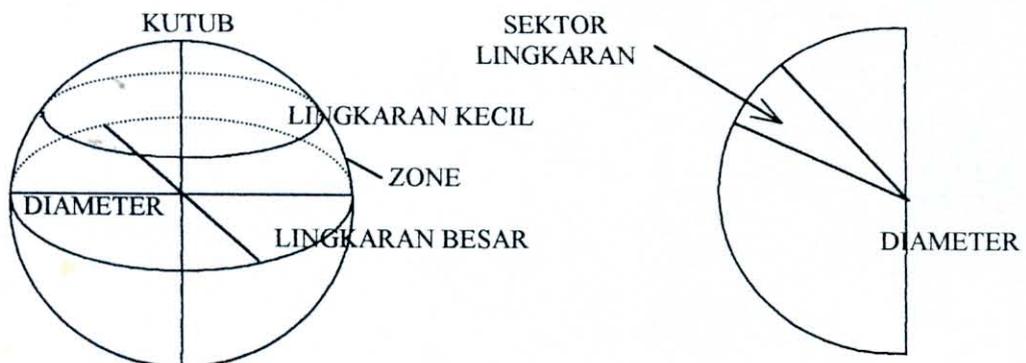
atau

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta.$$

c. Bola

Bola merupakan salah satu bentuk benda putar yang unik. Secara umum bola didefinisikan sebagai benda ruang tertutup (solid) yang semua titik-titiknya berjarak sama terhadap titik tertentu dalam ruang tertutup tersebut. Titik tertentu ini selanjutnya disebut *titik pusat bola*.

Interior bola adalah bagian ruangan yang tertutup dari bola. *Jari-jari bola* adalah segmen yang ditarik dari pusat bola ke permukaan bola. *Diameter bola* adalah segmen yang ditarik melalui dua titik pada bola melalui pusat bola.

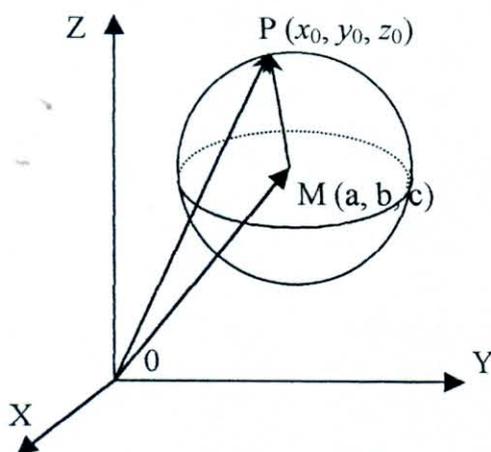


Gambar 10: Benda Solid Bola dan Bagian-bagiannya

Lingkaran besar bola adalah lingkaran yang ditentukan oleh perpotongan antara bidang dengan bola melalui titik pusat bola. *Lingkaran kecil bola* adalah lingkaran yang didapat dari perpotongan antara bidang yang tidak melalui pusat bola dengan permukaan bola. Sedangkan *sumbu lingkaran* dari bola adalah diameter bola yang tegak lurus terhadap bidang lingkaran tersebut. *Kutub lingkaran* dari bola adalah titik ujung-titik ujung dari sumbu lingkaran bola. *Sektor bola* adalah sektor lingkaran dari bola yang diputar terhadap diameter bola di luar sektor lingkaran tersebut. Lingkaran-lingkaran paralel bola dapat diperoleh dari perpotongan antara bidang-bidang paralel tersebut yang dinamakan *zone*. Selanjutnya, tinggi zone ditentukan oleh jarak antara dua bidang paralel yang membatasinya.

Sifat-sifat bola dapat dianalogkan dengan lingkaran. Misalnya, dalam hal bola menyinggung bidang, bola dalam (luar) polihedron, relasi titik di luar bola terhadap bola dan lainnya, dapat diekivalenkan dengan pembahasan masalah lingkaran menyinggung garis, lingkaran dalam (luar) poligon dan relasi titik di luar lingkaran terhadap lingkaran.

Permukaan bola merupakan tempat kedudukan titik-titik ujung vektor di dalam ruang yang titik awalnya tertentu dan panjang vektornya konstan. Titik awal tersebut disebut titik pusat dan panjang yang konstan disebut jari-jari bola.



Gambar 11: Sketsa Perumusan Bola

Misalkan, bola dengan pusat $M(a, b, c)$ dan jari-jari r . Ambil titik $P(x_0, y_0, z_0)$ pada bola, maka $MP = OP - OM = [x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c]$. Panjang MP diketahui sama dengan r , berarti $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$. Apabila titik $P(x_0, y_0, z_0)$ pada setengah lingkaran diputar terhadap diameternya, maka diperoleh persamaan bola $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. Sehingga persamaan bola yang pusatnya di $(0, 0, 0)$ berjari-jari r adalah $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Secara umum persamaan bola dituliskan sebagai:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

dalam hal ini pusat $M = (-1/2 A, -1/2 B, -1/2 C)$

dan jari-jari $r = \sqrt{1/4 A^2 + 1/4 B^2 + 1/4 C^2 - D}$.

2.3 Hitung Analitik Benda-Benda Putar

2.3.1 Volume Benda Putar

a. Metode Cakram

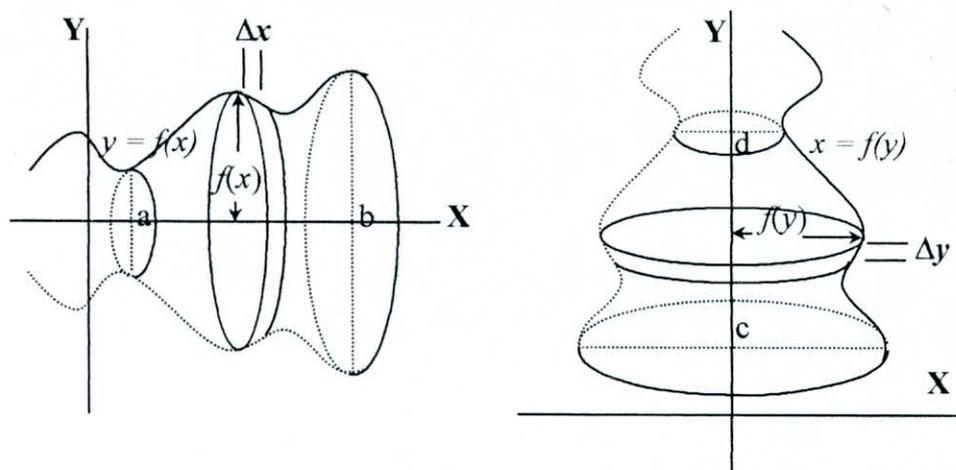
Metode cakram merupakan salah satu cara mencari volume benda putar dimana jalur pemutarannya membentuk sebuah cakram. Misalkan suatu daerah \mathcal{R} dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ pada selang $[a, b]$ dan diputar mengelilingi sumbu x . Dalam metode ini volume benda tersebut dapat diaproksimasi dengan volume sebuah tabung dengan tinggi Δx , yaitu $\Delta V \approx \pi(f(x))^2 \Delta x$. Jika diintegrasikan diperoleh:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad \dots\dots\dots (7a)$$

Apabila sumbu putarnya pada sumbu y , maka bentuk definisi jari-jari benda tersebut harus diubah dalam fungsi y yaitu $x = f(y)$, mengakibatkan perubahan tingginya disesuaikan dalam fungsi y pula (dy). Sehingga rumus volume menjadi:

$$V = \int_c^d \pi(f(y))^2 dy, \quad \dots\dots\dots (7b)$$

dimana c dan d adalah batas interval pada sumbu y .



Gambar 12: Volume Benda Putar dengan Metode Cakram

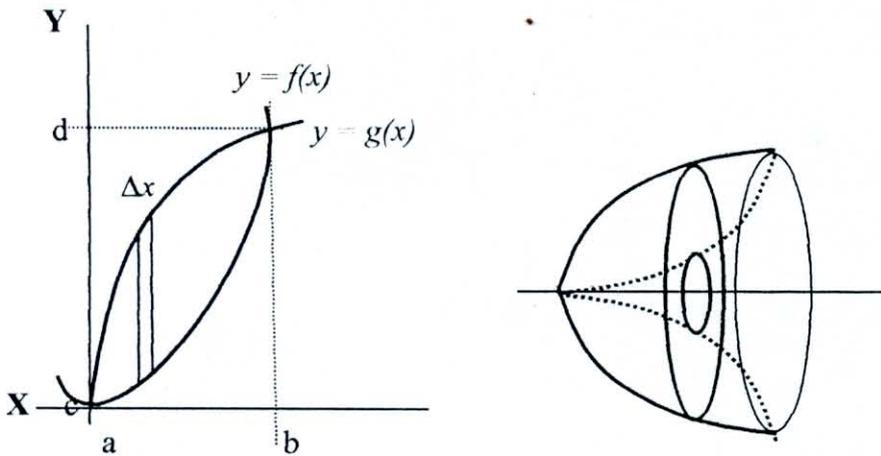
b. Metode Cincin

Metode ini biasanya digunakan pada benda putar yang daerah putarnya dibatasi oleh dua kurva yang berbeda, sehingga partisi benda putar yang terjadi berupa cakram berlubang (cincin). Misalnya suatu benda putar dimana daerah \mathcal{R} dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $a \leq x \leq b$, maka volume benda putar tersebut ditentukan sebagai:

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] \Delta x \\ V &= \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (8a)$$

Perumusan tersebut analog juga untuk sumbu putar pada sumbu y dimana rumus volume benda putar yang diberikan merupakan fungsi dalam variabel y dengan $c \leq x \leq d$, yaitu:

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \pi \left[(f(y))^2 - (g(y))^2 \right] \Delta y \\ V &= \int_c^d \pi \left[(f(y))^2 - (g(y))^2 \right] dy \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (8b)$$



Gambar 13: Volume Benda Putar dengan Metode Cincin

c. Metode Kulit Tabung

Dalam aplikasi, hitung analitik metode kulit tabung lebih mudah digunakan daripada metode cakram maupun metode cincin. Prinsip dasar hitung volume ini dapat digunakan sebagai berikut. Pandanglah kulit tabung yang sangat tipis. Apabila kita memotong dan membebernya ke bidang, maka didapat balok tipis dengan volume $V = 2\pi r h \Delta r$ dengan keliling (sebagai panjang) $2\pi r$, tinggi h dan tebal Δr . Jika proses ini dilakukan untuk kulit-kulit tabung yang lain pada tabung tersebut, maka didapat volume-volume kulit tabung sebagai:

$$\Delta V_i \approx 2\pi x_i f(x_i) \Delta x_i$$

dan apabila dijumlahkan didapat

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx, \dots\dots\dots (9a)$$

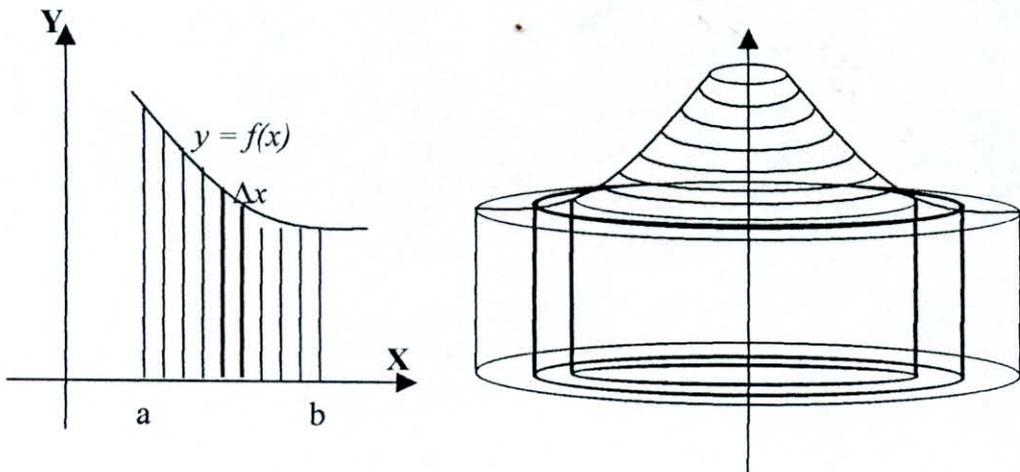
untuk sumbu putar adalah sumbu y (vertikal).

Sedangkan untuk sumbu putar x analog dengan rumus di atas yaitu:

$$\Delta V_i \approx 2\pi y_i f(y_i) \Delta y_i$$

dan jika dijumlahkan didapat

$$V = 2\pi \int_c^d y f(y) dy \dots\dots\dots (9b)$$



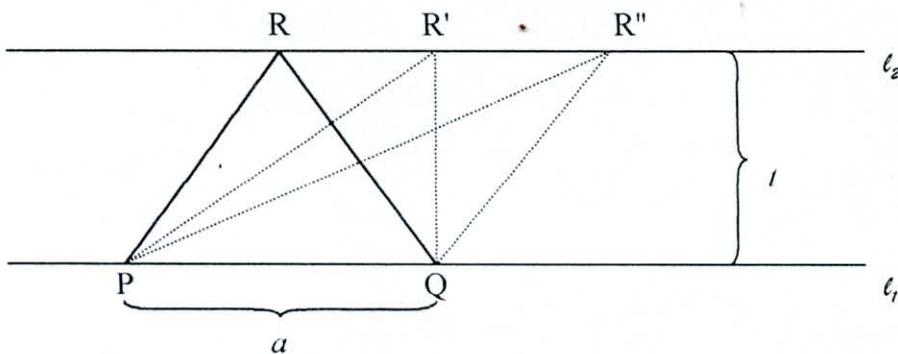
Gambar 14: Volume Benda Putar dengan Metode Kulit Tabung

2.3.2 Prinsip Cavalieri tentang Ekuivalensi Volume

a. Ekuivalensi Luas

Sebelum membahas prinsip Cavalieri, pada bagian ini kita perkenalkan terlebih dahulu tentang **ekivalensi luas**, khususnya mengenai bangun segitiga. Secara garis besar ekivalensi luas segitiga dapat diperoleh sebagai berikut.

Misalnya diberikan dua buah garis $\ell_1 \parallel \ell_2$. Dua buah titik tertentu P dan Q ditetapkan pada ℓ_1 sebagai titik-titik tetap. Kemudian dipilih titik R pada garis ℓ_2 . Maka penetapan titik ketiga sebarang yang lain seperti R' dan R'' di ℓ_2 akan memberikan luasan segitiga $PQR = \text{luas segitiga } PQR' = \text{luas segitiga } PQR''$ (lihat Gambar 15). Karena tinggi t untuk segitiga PQR, PQR', dan PQR'' adalah sama (merupakan jarak kedua garis sejajar), maka luas semua bentuk segitiga tersebut sama yaitu $L = \frac{1}{2} a \cdot t = \frac{1}{2} \overline{PQ} \cdot t$ dengan a sebagai alas segitiga. Sebaliknya, jika titik R tetap dan segmen garis PQ digeser sepanjang ℓ_1 , maka luas segitiga tersebut akan sama. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa semua bentuk segitiga yang mempunyai alas dan tinggi yang sama akan mempunyai luasan yang sama pula. Prinsip ekivalensi luas ini dapat diterapkan untuk semua poligon segiempat, segilima dan segi- n yang lain. Hal ini dikarenakan poligon-poligon tersebut dapat dipartisi menjadi beberapa segitiga.



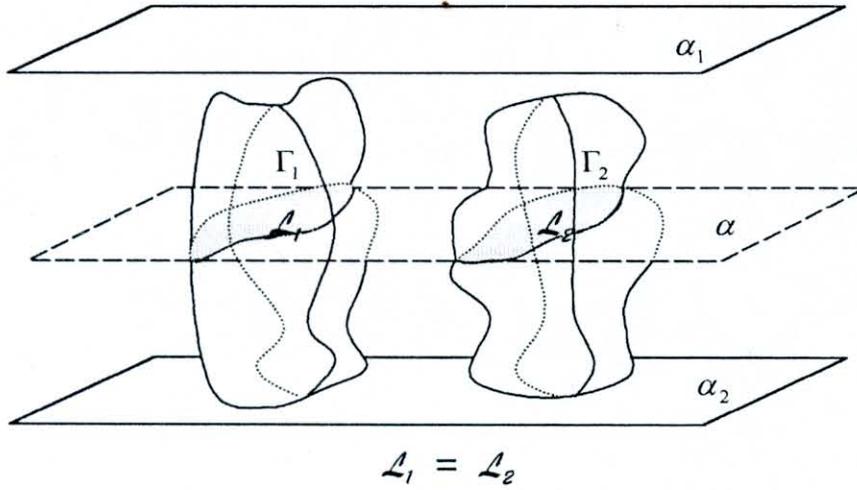
Gambar 15: Penerapan Prinsip Pengawetan Luas di Bidang

b. Prinsip Cavalieri

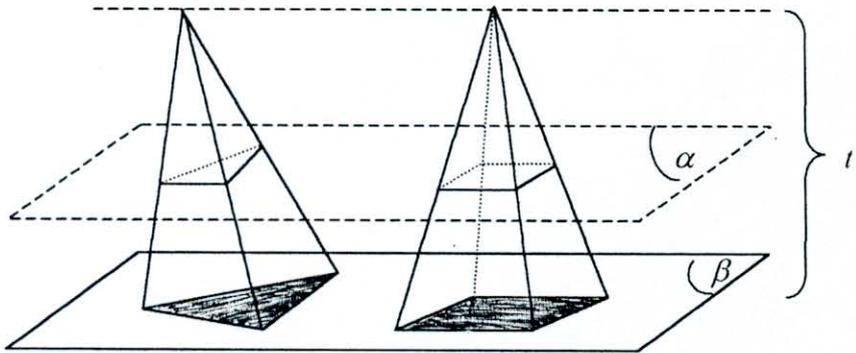
Prinsip Cavalieri tentang ekivalensi volume didasarkan pada pemikiran berikut ini. misal dua benda Γ_1 dan Γ_2 terletak di antara dua bidang $\alpha_1 // \alpha_2$. Jika sebarang bidang α memotong Γ_1 dan Γ_2 dan mendapatkan luas $\mathcal{L}_1 = \alpha \cap \Gamma_1$ identik dengan $\mathcal{L}_2 = \alpha \cap \Gamma_2$, maka Γ_1 dan Γ_2 volumenya sama (lihat Gambar 16).

Sebagai contoh, dua buah benda solid limas segitiga dan limas segiempat dengan alas terletak pada bidang α . Jika kedua benda tersebut dipancang oleh sebarang bidang β sejajar α , maka volume kedua benda terpancung tersebut akan sama jika luas semua jejak pancung bidang β tersebut sama (lihat Gambar 17).

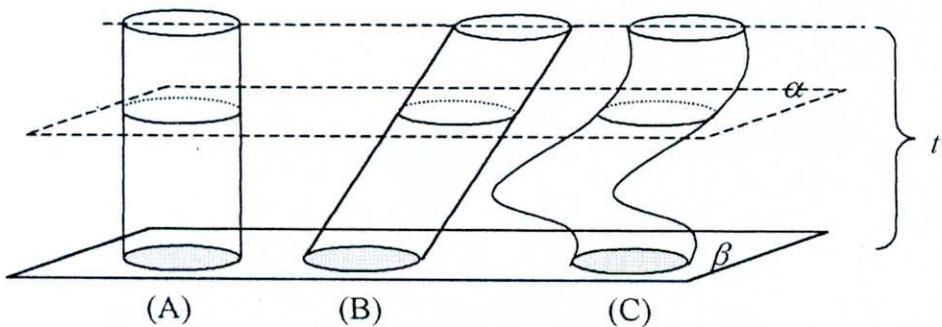
Hal yang sama dapat juga terjadi pada tiga buah tabung dengan bentuk berbeda dengan alas terletak pada bidang α . Volume tabung A, B dan C yang dipancang sebarang bidang β sejajar α akan sama jika semua jejak pancung bidang β untuk setiap luas jejak pancung bidang β sama (lihat Gambar 18). Pada contoh terakhir ini dapat diilustrasikan sebagai tumpukan koin/uang logam yang disusun dengan variasi ketiga model penyusunan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa jika dua benda atau lebih dipancang dengan sebarang bidang β sejajar α dan luas semua jejak pancung tersebut sama, maka volume benda-benda tersebut sama.



Gambar 16: Prinsip Cavalieri di Ruang



Gambar 17: Prinsip Cavalieri pada Limas Segitiga dan Segiempat

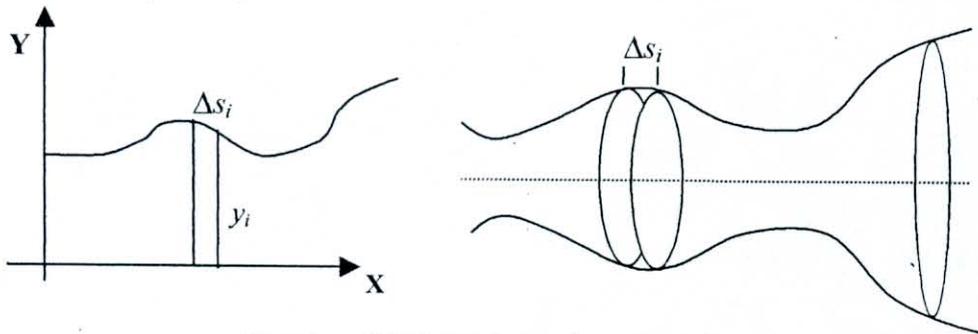


Gambar 18: Prinsip Cavalieri pada Tiga Buah Tabung Berbeda

2.3.3 Luas Permukaan Benda Putar

Penggunaan konsep integral lain dalam kalkulus berkenaan dengan benda putar adalah menghitung luas permukaan putar. Luasan pada permukaan putar didasarkan pada pencarian luas kerucut terpancung. Jika tinggi kerucut terpancung l , jari-jari lingkaran alas bawah r_1 dan jari-jari lingkaran alas atas r_2 , maka perumusan luas kerucut terpancung dinyatakan sebagai:

$$A = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) l = 2\pi \bar{r} \times l$$



Gambar 19: Luas Permukaan Benda Putar

Berdasarkan rumus ini, misalkan suatu benda putar diperoleh dari pemutaran pada sumbu x dengan interval $[a, b]$ dan jari-jari ke- i adalah y_i , serta permukaan bagiannya adalah Δs_i , maka luasan benda putar tersebut dapat dihamperi dengan luas kerucut terpancung, yaitu $2\pi y_i \Delta s_i$. Dengan pendekatan limit diperoleh:

$$A = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi y_i \Delta s_i = \int_a^b 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad \dots\dots\dots (10a)$$

Begitu pula dengan pemutaran pada sumbu y luasan A dinyatakan sebagai :

$$A = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi x_i \Delta s_i = \int_c^d 2\pi x ds = 2\pi \int_c^d f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy. \quad \dots\dots\dots (10b)$$

Apabila persamaan kurva yang bersangkutan diketahui dalam bentuk parametrik $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$, maka rumus di atas menjadi:

$$A = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt. \quad \dots\dots\dots (10c)$$

2.4 Strategi Pemecahan Masalah

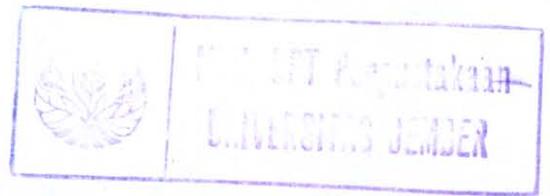
Setelah mempelajari konsep dan prinsip-prinsip benda-benda putar, yakni definisi, sifat-sifat geometri, hitung volume, luas dan ekivalensi volumenya, maka kita dapat menentukan solusi masalah penelitian sebagai berikut.

Pertama, untuk merancang model obyek yang berkarakter benda putar satu sumbu, solusinya dapat dijelaskan secara berurut sebagai berikut. Pertama kita tetapkan sumbu putar g sebagai sumbu simetri obyek. Kemudian kurva benda putar C diperoleh dengan mencacah benda tersebut sehingga dapat ditentukan kurva c_1, c_2, \dots, c_n . Selanjutnya merekonstruksi benda tersebut dengan cara memutar kurva c_i pada sumbu putar g sedemikian hingga didapatkan model rancangan yang diminta.

Masalah kedua, untuk merancang obyek yang berkarakter benda putar satu sumbu dengan ketebalan ε , maka solusi perancangannya sama dengan yang pertama. Sedangkan untuk menentukan bentuk ketebalan obyek tersebut perlu diberikan kurva-kurva bidang yang lain sesuai model. Kurva-kurva tersebut diletakkan pada interior atau ekterior kurva bidang sebelumnya. Tentunya disyaratkan, kurva bidang interiornya tidak berpotongan atau bersinggungan dengan kurva eksteriornya, atau sebaliknya. Artinya, tidak ada satu titik pun yang tempat kedudukannya dimiliki oleh kedua kurva tersebut.

Masalah ketiga, untuk mengubah desain model obyek benda putar yang mempertahankan volumenya adalah dengan menerapkan prinsip Cavalieri pengawetan volume. Prosedurnya adalah dengan mentrasformasi bidang-bidang paralel obyek benda putar yang berbentuk lingkaran dalam bentuk poligon aproksimasi segi N yang dimuluskan bagian sudutnya. Proses ini dilakukan dengan memancang benda putar Γ_1 dan benda lain Γ_2 dengan sebarang bidang α sejajar bidang paralelnya. Dengan prinsip Cavalieri, semua luasan jejak-jejak pancungan bidang α terhadap kedua benda adalah sama. Karena semua luasan jejak-jejak pancungan tersebut sama, maka volume kedua benda tersebut sama.

Untuk validasi prosedur-prosedur solusi tersebut, dijelaskan pada BAB III.



BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan dapat kita simpulkan bahwa:

1. Untuk merancang suatu obyek yang berkarakter benda putar generatris poligon dan kurva perlu mengikuti langkah-langkah:
 - a) Menentukan sumbu putar g dari sumbu simetri obyek.
 - b) Mencacah benda putar secara membujur dan melintang sehingga didapatkan kurva generatris c_1, c_2, \dots, c_n .
 - c) Merekonstruksi benda putar dengan memutar kurva generatris yang didapatkan pada sumbu putar g sehingga diperoleh model yang diminta.
2. Dalam merancang benda putar dengan ketebalan ϵ perlu mengikuti langkah (1.a) dan (1.b) pada prosedur di atas. Selanjutnya mengikuti langkah berikut:
 - a) Menentukan segmen-segmen kurva interior/eksterior kurva C' melalui pergeseran $C' = \epsilon C$ dengan arah normal masing-masing, sehingga setiap segmen dari C berlaku: $c_1' \parallel c_1, c_2' \parallel c_2, \dots, c_n' \parallel c_n$.
 - b) Menentukan titik potong ujung kurva-kurva berurutan c'_i dengan c'_{i+1} melalui uji interseksi normal c_i dan c_{i+1} sehingga titik tersebut merupakan titik pusat lingkaran berjari-jari ϵ menyinggung kedua segmen kurva.
 - c) Merekonstruksi benda putar tersebut dengan memutar kurva C dan C' terhadap sumbu putar g sehingga diperoleh model yang diminta.
3. Transformasi benda putar dengan mempertahankan volume dapat dilakukan dengan menggunakan aplikasi prinsip Cavalieri. Hal ini dapat dilakukan dengan mengaproksimasi bidang-bidang paralel benda putar yang berbentuk lingkaran ke bentuk poligon segi N yang ekuivalen dan dimuluskan bagian sudutnya. Pendekatan kesamaan volume tersebut akan semakin tepat jika kita mengambil bilangan N besar dan sudut α kecil.

4.2 Saran

Prosedur umum konstruksi benda putar ini dapat digunakan untuk memecahkan beberapa masalah dalam perancangan khususnya dalam fabrikasi, misalnya fabrikasi barang-barang pecah belah, furniture, aksesoris, dan lain-lain. Dalam tulisan ini juga dikemukakan masalah modifikasi model dengan pengawetan volume. Hal ini berkaitan dengan kegiatan pemasaran barang agar penjualannya terus berkembang dan bergairah.

Di samping itu, prosedur yang ditawarkan di atas dapat dikembangkan pada perancangan obyek yang lebih rumit dan kompleks seperti halnya masalah-masalah konstruksi benda putar banyak sumbu dan penggabungan dari beberapa benda putar.

DAFTAR PUSTAKA

- Aumann, G. 1992. " Two Algorithms for Volume-Preserving Approximations of Surface of Revolution ". Dalam *computer-aided design*. Vol. 24 No. 12. Desember 1992. Halaman 651 – 657.
- Ayres, F.Jr. 1972. *Theory and Problem of Calculus 2nd Edition*. New York: McGraw-Hill Inc.
- Bahri, S. 1997. *AutoCAD 3 Dimensi*. Jakarta: Dinastindo.
- Chapra, S.C. 1996. *Metode Numerik*. Jakarta: Erlangga.
- D. Suryadi H. S. 1986. *Teori dan Soal Ilmu Analitik Ruang*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Dafik. 1999. *Metoda Numerik I*, Jember: Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Jember.
- Gerald, C.F. 1999. *Applied Numerical Analysis*. Massachusetts: Addison Wesley Longman Inc.
- Kusno. 2000. *Geometri Analitik Ruang*. Jember: Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Jember.
- Mathworks Team. 1996. *Using MATLAB Ver. 5*. Natick: Mathworks Inc.
- Monagan, M.B. 1998. *Maple V Rel. 5.0 Programming Guide*. Canada: Waterloo Maple Inc.
- Purcell, E.J. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Rawuh. 1981. *Permulaan Geometri Deferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Robert, J.T.B. 1945. *Coordinate Solid Geometry*. London: MCMILLAN & Co. Ltd.
- Soemartojo, N. 1992. *Analisa Vektor*. Jakarta: Erlangga.
- Spiegel, M.R. 1994. *Analisis Vektor*. Jakarta: Erlangga.
- Sukirman. 1994. *Geometri Analitik Ruang*. Jakarta: Depdikbud Universitas Terbuka.

Lampiran-lampiran

Lampiran 1

```
> # ` PROGRAM MEMBANGKITKAN BENDA PUTAR `
> # Kurva generatris
> c1:=x->3*x:
> c2:=x->-x+8:
> c3:=x->3*x-8:
> c4:=x->-x+4:
> # Looping menentukan jari-jari dan ketinggian
> for i from 2 by 0.2 to 3 do print(i,c1(i)) od;
      2, 6
      2.2, 6.6
      2.4, 7.2
      2.6, 7.8
      2.8, 8.4
      3.0, 9.0
> for j from 2 by 0.4 to 4 do print(j,c2(j)) od;
      2, 6
      2.4, 5.6
      2.8, 5.2
      3.2, 4.8
      3.6, 4.4
      4.0, 4.0
> for k from 3 by 0.2 to 4 do print(k,c3(k)) od;
      3, 1
      3.2, 1.6
      3.4, 2.2
      3.6, 2.8
      3.8, 3.4
      4.0, 4.0
> for l from 3 by 0.2 to 4 do print(l,c4(l)) od;
      3, 1
      3.2, .8
      3.4, .6
      3.6, .4
      3.8, .2
      4.0, 0
```

```

> # Rekonstruksi Benda Putar
> with(plots):
> pi1:=plots[spacecurve]([2*cos(t), 2*sin(t), 6], t=0..2*Pi):
> pi2:=plots[spacecurve]([2.2*cos(t), 2.2*sin(t), 6.6], t=0..2*Pi):
> pi3:=plots[spacecurve]([2.4*cos(t), 2.4*sin(t), 7.2], t=0..2*Pi):
> pi4:=plots[spacecurve]([2.6*cos(t), 2.6*sin(t), 7.8], t=0..2*Pi):
> pi5:=plots[spacecurve]([2.8*cos(t), 2.8*sin(t), 8.4], t=0..2*Pi):
> pi6:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 9], t=0..2*Pi):
> g1:={pi1,pi2,pi3,pi4,pi5,pi6}:
> pj1:=plots[spacecurve]([2*cos(t), 2*sin(t), 6], t=0..2*Pi):
> pj2:=plots[spacecurve]([2.4*cos(t), 2.4*sin(t), 5.6], t=0..2*Pi):
> pj3:=plots[spacecurve]([2.8*cos(t), 2.8*sin(t), 5.2], t=0..2*Pi):
> pj4:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 4.8], t=0..2*Pi):
> pj5:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 4.4], t=0..2*Pi):
> pj6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 4], t=0..2*Pi):
> g2:={pj1,pj2,pj3,pj4,pj5,pj6}:
> pk1:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 1], t=0..2*Pi):
> pk2:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 1.6], t=0..2*Pi):
> pk3:=plots[spacecurve]([3.4*cos(t), 3.4*sin(t), 2.2], t=0..2*Pi):
> pk4:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 2.8], t=0..2*Pi):
> pk5:=plots[spacecurve]([3.8*cos(t), 3.8*sin(t), 3.4], t=0..2*Pi):
> pk6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 4], t=0..2*Pi):
> g3:={pk1,pk2,pk3,pk4,pk5,pk6}:
> pl1:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 1], t=0..2*Pi):
> pl2:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 0.8], t=0..2*Pi):
> pl3:=plots[spacecurve]([3.4*cos(t), 3.4*sin(t), 0.6], t=0..2*Pi):
> pl4:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 0.4], t=0..2*Pi):
> pl5:=plots[spacecurve]([3.8*cos(t), 3.8*sin(t), 0.2], t=0..2*Pi):
> pl6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 0], t=0..2*Pi):
> g4:={pl1,pl2,pl3,pl4,pl5,pl6}:
> # Gambar semua kurva
> display(g1,g2,g3,g4);

```

Lampiran 2

```
# ' PROGRAM KONSTRUKSI KETEBALAN EPSILON '  
# Kurva generatris awal  
> c1:=x->3*x;  
c1 := x -> 3 x  
> c2:=x->-x+8;  
c2 := x -> -x + 8  
> c3:=x->3*x-8;  
c3 := x -> 3 x - 8  
> c4:=x->-x+4;  
c4 := x -> -x + 4  
> # Looping mencari jari-jari dan ketinggian generatris awal  
> for i from 2 by 0.2 to 3 do print(i,c1(i)) od;  
2, 6  
2.2, 6.6  
2.4, 7.2  
2.6, 7.8  
2.8, 8.4  
3.0, 9.0  
> for j from 2 by 0.4 to 4 do print(j,c2(j)) od;  
2, 6  
2.4, 5.6  
2.8, 5.2  
3.2, 4.8  
3.6, 4.4  
4.0, 4.0  
> for k from 3 by 0.2 to 4 do print(k,c3(k)) od;  
3, 1  
3.2, 1.6  
3.4, 2.2  
3.6, 2.8  
3.8, 3.4  
4.0, 4.0  
> for l from 3 by 0.2 to 4 do print(l,c4(l)) od;  
3, 1  
3.2, .8
```

```
3.4, .6
3.6, .4
3.8, .2
4.0, 0
```

```
> # Kurva bayangan (untuk ketebalan)
```

```
> b1:=x->3*x-8/sqrt(10);
```

```
1
b1 := x -> 3 x - 8 -----
                        sqrt(10)
```

```
> b2:=x->-x+(8+sqrt(2));
```

```
b2 := x -> -x + 8 + sqrt(2)
```

```
> b3:=x->3*x-(8+8/sqrt(10));
```

```
1
b3 := x -> 3 x - 8 - 8 -----
                        sqrt(10)
```

```
> b4:=x->-x+6;
```

```
b4 := x -> -x + 6
```

```
> # Looping jari-jari dan ketinggian untuk ketebalan
```

```
> for m from 2 by 0.2 to 3 do print(m,b1(m)) od;
```

```
2, 6 - 8/10 sqrt(10)
2.2, 6.6 - 8/10 sqrt(10)
2.4, 7.2 - 8/10 sqrt(10)
2.6, 7.8 - 8/10 sqrt(10)
2.8, 8.4 - 8/10 sqrt(10)
3.0, 9.0 - 8/10 sqrt(10)
```

```
> for n from 2 by 0.4 to 4 do print(n,b2(n)) od;
```

```
2, 6 + sqrt(2)
2.4, 5.6 + sqrt(2)
2.8, 5.2 + sqrt(2)
3.2, 4.8 + sqrt(2)
3.6, 4.4 + sqrt(2)
4.0, 4.0 + sqrt(2)
```

```
> for p from 3 by 0.2 to 4 do print(p,b3(p)) od;
```

```
3, 1 - 8/10 sqrt(10)
3.2, 1.6 - 8/10 sqrt(10)
3.4, 2.2 - 8/10 sqrt(10)
3.6, 2.8 - 8/10 sqrt(10)
3.8, 3.4 - 8/10 sqrt(10)
4.0, 4.0 - 8/10 sqrt(10)
```

```

> for q from 3 by 0.2 to 4 do print(q,b4(q)) od;
      3, 3
      3.2, 2.8
      3.4, 2.6
      3.6, 2.4
      3.8, 2.2
      4.0, 2.0

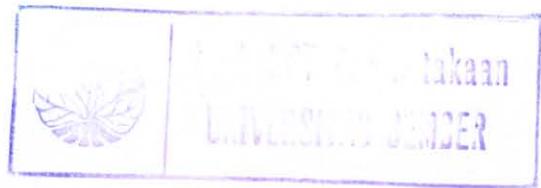
> # Konstruksi Ketebalan Epsilon
> with(plots):
> # Gambar Kurva awal
> pi1:=plots[spacecurve]([2*cos(t), 2*sin(t), 6],t=0..Pi):
> pi2:=plots[spacecurve]([2.2*cos(t), 2.2*sin(t), 6.6],t=0..Pi):
> pi3:=plots[spacecurve]([2.4*cos(t), 2.4*sin(t), 7.2],t=0..Pi):
> pi4:=plots[spacecurve]([2.6*cos(t), 2.6*sin(t), 7.8],t=0..Pi):
> pi5:=plots[spacecurve]([2.8*cos(t), 2.8*sin(t), 8.4],t=0..Pi):
> pi6:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 9],t=0..Pi):
> g1:={pi1,pi2,pi3,pi4,pi5,pi6}:
> pj1:=plots[spacecurve]([2*cos(t), 2*sin(t), 6],t=0..Pi):
> pj2:=plots[spacecurve]([2.4*cos(t), 2.4*sin(t), 5.6],t=0..Pi):
> pj3:=plots[spacecurve]([2.8*cos(t), 2.8*sin(t), 5.2],t=0..Pi):
> pj4:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 4.8],t=0..Pi):
> pj5:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 4.4],t=0..Pi):
> pj6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 4],t=0..Pi):
> g2:={pj1,pj2,pj3,pj4,pj5,pj6}:
> pk1:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 1],t=0..Pi):
> pk2:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 1.6],t=0..Pi):
> pk3:=plots[spacecurve]([3.4*cos(t), 3.4*sin(t), 2.2],t=0..Pi):
> pk4:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 2.8],t=0..Pi):
> pk5:=plots[spacecurve]([3.8*cos(t), 3.8*sin(t), 3.4],t=0..Pi):
> pk6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 4],t=0..Pi):
> g3:={pk1,pk2,pk3,pk4,pk5,pk6}:
> pl1:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 1],t=0..Pi):
> pl2:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 0.8],t=0..Pi):
> pl3:=plots[spacecurve]([3.4*cos(t), 3.4*sin(t), 0.6],t=0..Pi):
> pl4:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 0.4],t=0..Pi):
> pl5:=plots[spacecurve]([3.8*cos(t), 3.8*sin(t), 0.2],t=0..Pi):
> pl6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 0],t=0..Pi):
> g4:={pl1,pl2,pl3,pl4,pl5,pl6}:

```

```

> # Gambar kurva bayangan
> pm1:=plots[spacecurve]([2*cos(t), 2*sin(t), 6-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pm2:=plots[spacecurve]([2.2*cos(t),2.2*sin(t),6.6-8/5*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pm3:=plots[spacecurve]([2.4*cos(t),2.4*sin(t),7.2-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pm4:=plots[spacecurve]([2.6*cos(t),2.6*sin(t),7.8-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pm5:=plots[spacecurve]([2.8*cos(t),2.8*sin(t),8.4-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pm6:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 9-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> bg1:={pm1,pm2,pm3,pm4,pm5,pm6}:
> pn1:=plots[spacecurve]([2*cos(t), 2*sin(t), 6+sqrt(2)],t=0..Pi):
> pn2:=plots[spacecurve]([2.4*cos(t), 2.4*sin(t), 5.6+sqrt(2)],t=0..Pi):
> pn3:=plots[spacecurve]([2.8*cos(t), 2.8*sin(t), 5.2+sqrt(2)],t=0..Pi):
> pn4:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 4.8+sqrt(2)],t=0..Pi):
> pn5:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 4.4+sqrt(2)],t=0..Pi):
> pn6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 4+sqrt(2)],t=0..Pi):
> bg2:={pn1,pn2,pn3,pn4,pn5,pn6}:
> pp1:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 1-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pp2:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t),3.2*sin(t),1.6-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pp3:=plots[spacecurve]([3.4*cos(t),3.4*sin(t),2.2-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pp4:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t),3.6*sin(t),2.8-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pp5:=plots[spacecurve]([3.8*cos(t),3.8*sin(t),3.4-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> pp6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 4-8/10*sqrt(10)],t=0..Pi):
> bg3:={pp1,pp2,pp3,pp4,pp5,pp6}:
> pq1:=plots[spacecurve]([3*cos(t), 3*sin(t), 3],t=0..Pi):
> pq2:=plots[spacecurve]([3.2*cos(t), 3.2*sin(t), 2.8],t=0..Pi):
> pq3:=plots[spacecurve]([3.4*cos(t), 3.4*sin(t), 2.6],t=0..Pi):
> pq4:=plots[spacecurve]([3.6*cos(t), 3.6*sin(t), 2.4],t=0..Pi):
> pq5:=plots[spacecurve]([3.8*cos(t), 3.8*sin(t), 2.2],t=0..Pi):
> pq6:=plots[spacecurve]([4*cos(t), 4*sin(t), 2.0],t=0..Pi):
> bg4:={pq1,pq2,pq3,pq4,pq5,pq6}:
> # Gambar semua kurva
> display(g1,g2,g3,g4,bg1,bg2,bg3,bg4);

```



Lampiran 3

```
% Program Interpolasi Metode Beda Hingga Maju Newton (NFDD)
% -----

% Kurva generatrix awal
x=0:0.1:4;
y=x.^2; % persamaan parabola
plot(x,y)
hold on % memelihara grafik

% Target kurva bayangan
% A=[0 2.154701 2.970143 3.970143 4.992278];
% B=[-1 0.42265 3.757464 8.835601 15.87597];

% Grafik interpolasi dengan numerik
x=0:0.1:5;
p=-1+0.660254.*(x+1)+1.1546.*(x+1).*(x-0.42265)+...
    (-0.16537).*(x+1).*(x-0.42265).*(x-3.757464)+...
    (-0.068055).*(x+1).*(x-0.42265).*(x-3.757464).*(x-8.835601);
plot(x,p,'r').

axis([0 8 0 20]);
grid % menampilkan grid
title('"' Interpolations of NFDD Methods"')
xlabel('X a x i s')
ylabel('Y a x i s')
gtext('Curve y = x^2')
gtext('Approximation Curve')
```