



**PENGEMBANGAN *STREAM CHIPER* DENGAN
PELABELAN SUPER ANTIMAGIC TOTAL
COVERING DARI GRAF EKSPONENSIAL *FACE*
GRAF *WHEEL* DAN GRAF STAR**

SKRIPSI

oleh

NUR HOLIS

NIM 120210101122

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2016



**PENGEMBANGAN *STREAM CHIPER* DENGAN
PELABELAN SUPER ANTIMAGIC TOTAL
COVERING DARI GRAF EKSPONENSIAL *FACE*
GRAF *WHEEL* DAN GRAF STAR**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

oleh

NUR HOLIS

NIM 120210101122

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, ku-persembahkan sebuah kebahagiaan dalam hidupku, teriring rasa terima kasihku yang mendalam kepada:

1. Allah SWT, yang telah memberikan nikmat, Ridho, dan Rahmat-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik;
2. Ibu tercinta Marwati dan Bapak Rafik yang senantiasa memberikan dorongan, semangat, kasih sayang, dan do'a yang tak pernah putus dalam mengiringi meraih impian;
3. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., dan Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsi ini;
4. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Semua guru dari SD Tempurejo 1, MTs Baitul Hikmah Jember, SMA Negeri 1 Jenggawah, dan Dosen Program Studi Pendidikan Matematika UNEJ yang telah mendidik dengan penuh kesabaran;
6. Teman-teman seperjuangan (CGANT): Ifa, Siska, Farah, Desy, Irma, Sinta, Mita, Tanti dan Novri dan pecinta graf lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga;
7. Teman-teman seperjuangan Ahmah Riyan, Magita Danang, Loviga Deni P, Adnan Aziz N. Serta seluruh mahasiswa Pendidikan Matematika Unej khususnya angkatan 2012 yang selalu memberi motivasi dan semangat;
8. Keluarga besar Mathematic Student Club (MSC), terutama teman seperjuangan angkatan 2012 yang selalu mengisi tawaku dan pengalaman berharga;
9. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;

MOTTO

"Jika engkau masuk waktu sore, janganlah menunggu pagi, dan jika engkau masuk waktu pagi, janganlah menunggu sore, pergunakanlah kesempatan pada masa sehatmu untuk masa sakitmu, dan masa hidupmu untuk matimu"

(HR. Al-Bukhari)

"Sesuatu mungkin mau mendatangi mereka yang mau menunggu, namun hanya didapatkan oleh mereka yang semangat mengejarnya."

(Abraham Lincoln)

"Jangan mudah terguncang oleh kritikan, jadilah orang yang teguh pendirian, dan sadarilah bahwa kritikan itu akan mengangkat harga diri Anda setara dengan kritikan tersebut."

(Syeikh al-Qarni)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : NUR HOLIS

NIM : 120210101122

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pengembangan *Stream Cipher* dengan Pelabelan Super *Antimagic Total Covering* dari Graf Eksponensial *Face Wheel* dan Graf Star adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember,

Yang menyatakan,

NUR HOLIS

NIM. 120210101122

HALAMAN PENGANTAR

PENGEMBANGAN *STREAM CHIPER* DENGAN PELABELAN
SUPER ANTIMAGIC TOTAL COVERING DARI GRAF
EKSPONENSIAL *FACE* GRAF *WHEEL* DAN GRAF STAR

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana Strata Satu Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa : NUR HOLIS
NIM : 110210101012
Jurusan : Pendidikan MIPA
Program Studi : Pendidikan Matematika
Angkatan Tahun : 2012
Daerah Asal : Jember
Tempat, Tanggal Lahir : Jember, 2 Mei 1993

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof.Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 19680802 199303 1 004

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
NIP. 19700307 199512 2 001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Pengembangan *Stream Cipher* dengan Pelabelan Super *Antimagic Total Covering* dari Graf Eksponensial *Face Wheel* dan Graf Star telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Kamis

Tanggal : 08 Desember 2016

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

NIP.19680802 199303 1 004

Anggota I,

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.

NIP.19700307 199512 2 001

Anggota 2,

Prof. Drs. Slamini, M,Comp.Sc., Ph.D

NIP.19670420 199201 1 001

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

NIP.19820529 200912 1 003

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

NIP.19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Pengembangan *Stream Chiper* dengan Pelabelan Super *Antimagic Total Covering* dari Graf Eksponensial *Face Wheel* W_n dan Graf star $W_n^{[S_m]}$; Nur Holis, 120210101122; 2016: 64 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Graf merupakan salah salah kajian dalam matematika diskrit yang digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan bulat positif yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering (*SHATC*), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda.

Salah satu jenis graf yang belum diketahui pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic adalah graf yang di hasil operasi eksponensial *face* graf *wheel* dan graf star yang dinotasikan dengan $G = W_n^{[S_m]}$. Graf eksponensial *face* graf *wheel* dan sebarang graf $L G = W_n^{[L]}$ memiliki himpunan titik $V_1 = C$, $V_2 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j\}$, $V_3 = \bigcup_{j=1}^n \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq m\}$ dan sisi $E_1 = \bigcup_{j=1}^n \{Cx_j\}$, $E_2 = \bigcup_{j=1}^{n-1} \{x_j x_{j+1}\} \cup \{x_1 x_n\}$, $E_3 = \bigcup_{j=1}^n \{e_{l,j}, 1 \leq l \leq r\}$. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf yang hasilkan operasi eksponensial *face* graf *wheel* dan graf star memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering yang kemudian digunakan untuk mengembangkan *chipertext stream chiper* serta kaitannya dengan keterampilan berpikir tinggi berdasarkan Taksonomi Bloom yang telah di revisi.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik. Langkah yang dilakukan terlebih dahulu pada penelitian ini adalah menentukan nilai beda (d), selanjutnya nilai beda (d) tersebut diterapkan dalam super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total covering pada eksponensial graf *wheel* dan graf star. Hasil penelitian ini berupa lemma dan teorema baru mengenai *SHATC* pada graf

eksponensial *face* graf *wheel* W_n dan graf star $G = W_n^{[S_m]}$. Kemudian dihasilkan dua lemma, satu teorema dan langkah-langkah menghasilkan *chipertext stream* *chipertext*.

1. **Lema 4.2.1** Misal m dan n bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk $j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i,j) = \begin{cases} \{m(n-j) + 2; i = 2\} \\ \{i + (j-1)m; 1 \leq i \leq m\} \end{cases}$$

Membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_1 = m^2 - 2m$;

2. **Lema 4.2.2** Misal m dan n bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk $j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i,j) = \begin{cases} \{2 + (j-1)m; i = 2\} \\ \{m(n-j) + i; 1 \leq i \leq m\} \end{cases}$$

Membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_2 = -(m^2 - 2m)$

3. **Teorema 4.3.1** Misalkan m, n, r adalah bilangan bulat dengan $m, r \geq 2, n \geq 3, n$ bilangan ganjil maka graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf star $G = W_n^{[S_m]}$ mempunyai Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering dengan nilai $a = 5n + 7 + m_1(-\frac{1}{2}m_1 + n + 2\frac{1}{2}) + m_2(m_2n - n + \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2}) + \sum_{c=2}^8 m_c(n \sum_{t=1}^{c-1} m_t + n + 1) + \frac{n}{2}(m_3^2 + m_3) + \frac{n}{2}(m_4^2 - m_4) + \frac{m_5}{2}(2m_5n - n + 1) + \frac{m_6}{4}(2m_6n - n + 3) + \frac{1}{2}(m_7 - m_7^2) + \frac{m_8}{2}(2m_8n + m_8 + 1) + \frac{1}{2}(3r_1 - r_1^2) + r_1(mn + 3n + 1) + r_2(r_2n - n + \frac{r_2}{2} - \frac{1}{2}) + \sum_{c=2}^8 r_c(n \sum_{t=1}^{c-1} r_t + mn + 3n + 1) + \frac{n}{2}(r_3^2 + r_3) + \frac{n}{2}(r_4^2 - r_4) + \frac{r_5}{2}(2r_5n - n + 1) + \frac{r_6}{4}(2r_6n - n + 3) + \frac{1}{2}(r_7 - r_7^2) + \frac{r_8}{2}(2r_8n + r_8 + 1)$ dan $d = (3 + m_1^2 - 2m_1 - m_2^2 - 2m_2 - m_3 + m_4 + \frac{m_5}{2} - \frac{m_6}{2} + m_7^2 - m_8^2 + r_1^2 - 2r_1 - r_2 - 2r_2 - r_3 + r_4 + \frac{r_5}{2} - \frac{r_6}{2} + r_7^2j + r_8^2)j$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pengembangan *Stream Cipher* dengan Pelabelan Super *Antimagic Total Covering* dari Graf Eksponensial *Face Wheel* dan Graf Star $W_n^{[S_m]}$. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Matematika Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing dan memberikan ilmunya
6. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
7. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
8. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2016

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGAJUAN	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMBANG	xv
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Kebaharuan dari penelitian	6
2 TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Terminologi Dasar Graf	7
2.2 Graf Khusus	11
2.3 Operasi Graf	13
2.4 Partisi dengan Menetapkan Beda d	15
2.5 Pelabelan Graf	19
2.6 Aplikasi Graf	22
2.7 Hasil Pelabelan Selimut Graf $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic	26
2.8 Berpikir Tingkat Tinggi	26
3 METODE PENELITIAN	29

3.1	Jenis Penelitian	29
3.2	Definisi Operasional	29
3.2.1	pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total	29
3.2.2	Graf eksponensial <i>face wheel</i> W_n dan graf S_m	30
3.3	Teknik Penelitian	31
3.4	Observasi	33
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	34
4.1	Kardinalitas dan Batas Atas Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering eksponensial <i>face wheel</i> W_n dan graf S_m	34
4.2	Pengembangan Partisi dan Variasi Nilai Beda	36
4.3	Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering pada eksponensial <i>face wheel</i> W_n dan graf star S_m	37
4.4	Pengembangan <i>Chipertext</i> dengan Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total pada Eksponensial <i>Face</i>	42
4.4.1	Metode Eliminasi	42
4.4.2	Metode <i>Stream Chiper</i>	45
4.5	Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total pada eksponensial <i>face whell</i> dan sebarang graf L $W_n^{[L]}$ dan pengembangan <i>Chipertext</i>	51
4.5.1	Tahapan Mengingat	51
4.5.2	Tahapan Memahami	52
4.5.3	Tahapan Menerapkan	52
4.5.4	Tahapan Menganalisis	53
4.5.5	Tahapan mengevaluasi	57
4.5.6	Tahapan Mencipta	58
4.6	Hasil dan Pembahasan	58
5	KESIMPULAN DAN SARAN	61
5.1	Kesimpulan	61
5.2	Saran	63
	DAFTAR PUSTAKA	64

DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf reguler dan non reguler	8
2.2	Graf secara umum	9
2.3	Graf dan beberapa subgrafnya	10
2.4	G_1 dan G_2 yang isomorfis	11
2.5	Graf lengkap	11
2.6	Graf lingkaran	12
2.7	G_1 graf roda (W_3) dan G_2 graf roda (W_6)	12
2.8	Graf bintang (S_6)	13
2.9	Graf <i>caterpillar</i>	13
2.10	Graf kipas (F_3)	14
2.11	eksponensial <i>face</i> W_3 dan C_6	14
2.12	eksponensial <i>face</i> W_3 dan C_6	15
2.13	(a) Pelabelan titik, (b) Pelabelan sisi, (c) Pelabelan total	19
2.14	Alur Kerja Kriptografi	23
2.15	(a) Tahapan Taksonomi Bloom yang belum direvisi dan (b) Tahapan Taksonomi Bloom yang telah direvisi	27
3.1	Eksponensial <i>face</i> Graf <i>wheel</i> $W_n^{[S_m]}$	30
3.2	Diagram Alir Penelitian	32
3.3	Eksponensial <i>face</i> graf <i>wheel</i> dan S_m beserta pelabelannya	33
4.1	Super (723,4)- H -antimagic total labeling covering	40
4.2	Super (861,4)- H -antimagic total labeling covering	41
4.3	Diagram pohon $W_3^{[S_{10}]}$	44
4.4	Diagram pohon $W_3^{[S_{10}]}$	47

DAFTAR TABEL

2.1	Tabel Kode ASCII	24
2.2	Proses enkripsi dengan kunci aliran hasil Partisi graf	25
2.3	Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic.	26
4.1	Aturan Julius Caesar	42
4.2	Pengembangan <i>chipertext</i> dari super $(723,4)$ - \mathcal{H} antimagic total covering graf $G = W_3^{[C_{17}]}$	44
4.3	Tabel Kode ASCII	46
4.4	Proses enkripsi <i>plaintext</i> dengan <i>stream chiper</i>	49
4.5	Prose deskripsi <i>chipertex</i> dengan <i>stream chiper</i>	50

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$ V(G) = p_G$	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) = q_G$	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$\mathcal{H}AVC$	=	\mathcal{H} <i>antimagic vertex covering</i> atau pelabelan titik \mathcal{H} antimagic selimut
$\mathcal{S}HAVC$	=	Super \mathcal{H} <i>antimagic vertex covering</i> atau (a,d) - \mathcal{H} antimagic total selimut
$\mathcal{S}EATL$	=	<i>Super edge antimagic total labeling</i> atau pelabelan total super- (a,d) -sisi antimagic
d	=	Nilai beda barisan bobot sisi pada $\mathcal{S}EATL$
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada $\mathcal{S}EATL$
W_n	=	Graf <i>wheel</i> berorder n
S_m	=	Graf star yang dioperasikan dengan graf <i>wheel</i>
$W_n^{[S_m]}$	=	Notasi eksponensial <i>face</i> graf <i>wheel</i> dan graf star
C	=	Merupakan titik pusat pada graf $W_n^{[S_m]}$
x_j	=	Titik ke- j pada graf $W_n^{[S_m]}$
$x_{i,j}$	=	Titik ke- i dalam komponen ke- j pada graf $W_n^{[S_m]}$
$x_j x_{j+1}$	=	Sisi dari titik ke- x_j ke- x_{j+1} pada graf $W_n^{[S_m]}$
$x_1 x_n$	=	Sisi dari titik ke- x_1 ke titik x_n pada graf $W_n^{[S_m]}$
Cx_j	=	Sisi dari titik ke- x_j ke titik pusat C pada graf $W_n^{[S_m]}$
$e_{l,j}$	=	Sisi ke- l dalam komponen ke- j pada graf $W_n^{[S_m]}$
m	=	Banyak titik pada graf star
n	=	Banyak <i>expand</i> pada graf dasar pada graf $W_n^{[S_m]}$
r	=	Banyaknya sisi pada graf star

\cup	= Mengabungkan lebih dari satu himpunan
\oplus	= Menjumlahkan setiap anggota partisi dengan bilangan real
W	= Bobot total selimut graf $W_n^{[S_m]}$
$f(V_1)$	= Fungsi bijektif pelabelan titik pusat pada graf $W_n^{[S_m]}$
$f(V_2)$	= Fungsi bijektif pelabelan titik ke- x_j pada graf $W_n^{[L]}$
$f(V_3)$	= Fungsi bijektif pelabelan titik ke- x_i, j graf $W_n^{[S_m]}$
$f(E_1)$	= Fungsi bijektif pelabelan sisi $x_j x_{j+1}$ graf $W_n^{[S_m]}$
$f(E_2)$	= Fungsi bijektif pelabelan sisi Cx_j pada graf $W_n^{[S_m]}$
$f(E_3)$	= Fungsi bijektif pelabelan sisi $e_{i,j}$ graf $W_n^{[S_m]}$
$\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j)$	= Fungsi suatu partisi yang memiliki n kolom dan m baris dan beda d untuk antar jumlah anggota pada partisi ke- j
$\sum \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j)$	= Jumlah setiap anggota pada partisi ke- j
c_i	= <i>Chipertext</i>
p_i	= <i>plaintext</i>
s_i	= <i>keystream</i>

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Seiring berkembangnya teknologi dan ilmu pengetahuan serta munculnya problematika dunia modern semakin kompleks dalam kehidupan sehari-hari. Munculnya problematika mendorong manusia untuk menemukan solusi yang tepat untuk memecahkan problematika tersebut. Oleh karena itu diperlukan Ilmu pengetahuan yang mampu memecahkan problematika tersebut. Matematika merupakan ilmu dasar yang mempunyai peranan penting dalam pengembangan ilmu-ilmu dasar (*basic science*) lainnya dan ilmu terapan. Matematika menjadi alat bantu dalam perkembangan ilmu pengetahuan di dunia. Matematika memegang peran penting di berbagai bidang khususnya di bidang teknologi informasi dan komunikasi. Berkembangnya teknologi informasi dan komunikasi tidak lepas tidak terlepas dari adanya matematika. Sebagai contoh penggunaan alur logika matematika sebagai dasar pemrograman, struktur data, basis data.

Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, antara lain matematika murni, matematika komputasi, matematika diskrit, matematika statistik, dan lain sebagainya. Salah satu cabang matematika yang menarik untuk dikaji lebih lanjut adalah matematika diskrit. Teori graf adalah salah satu cabang ilmu dari matematika diskrit. Penemu graf pertama kali oleh L. Euler matematikawan asal Swiss pada tahun 1736 yang diawali dengan pemecahan masalah jembatan Konigsberg.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pemanfaatan pelabelan graf hingga saat ini banyak digunakan pada bidang sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar dan penyimpanan data komputer. Sebuah graf $G = (V, E, F)$ adalah graf planar terhubung tanpa *loop* dan sisi ganda, dimana $V(G)$, $E(G)$, dan $F(G)$ adalah himpunan titik, himpunan sisi dan himpunan wajah. Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Berdasarkan elemen-elemen yang

dilabeli, pelabelan graf dibagi menjadi pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), pelabelan wajah (*face labeling*) dan pelabelan wajah total (*face total labeling*). Kemudian berkembang menjadi pelabelan *graceful*, pelabelan ajaib (*magic*), pelabelan anti ajaib (*antimagic*) dan lain-lain.

Pelabelan antimagic salah satu jenis pelabelan pada graf. Pelabelan antimagic merupakan pengembangan dari pelabelan magic yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (dalam Martin Baca dan M.Miller,2008). Hartsfield dan Ringel mendefinisikan bahwa suatu graf G yang memiliki verteks sebanyak $v_g = |V| = |V(G)|$ dan *edge* sebanyak $e_G = |E| = |E(G)|$ disebut antimagic jika masing-masing *edge* dilabeli dengan $1, 2, 3, \dots, e_G$, sehingga bobot verteksnya saling berbeda. Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total \mathcal{H} -magic dengan menggunakan konsep selimut- \mathcal{H} . Suatu selimut dari G adalah $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf \mathcal{H}_i , untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, \mathcal{H}_i isomorfik dengan suatu subgraf \mathcal{H} , maka \mathcal{H} dikatakan suatu selimut- \mathcal{H} dari G .

Salah satu penelitian tentang pelabelan total selimut pernah dilakukan oleh Azizah (2016), tentang pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada *triangular cycle ladder*. Azizah mengembangkan suatu pelabelan selimut \mathcal{H} anti ajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlah yang merupakan deret aritmatika $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(t-1)d\}$, dengan a, d adalah bilangan positif dan t adalah jumlah semua selimut yang isomorfis dengan H . Azizah melakukan penelitian pada graf *triangular cycle ladder* (TCL_n) memiliki pelabelan selimut $(a, d) - F_4$ antimagic super untuk $d = \{0, 1, 2, 3, \dots, 57\}$.

Suatu graf dapat dioperasi dengan graf lainnya yang terdiri *Amalgamasi*, *Shackle*, *Crown Product* ($G \odot H$) dan Eksponensial. Operasi *eksponensial* meliputi *eksponensial* titik, *eksponensial* sisi dan *eksponensial face*, *eksponensial face* Graf merupakan operasi graf yang diperoleh dengan menambahkan graf lain H setiap *face* pada graf dasar G . Operasi *eksponensial face* Graf pada penelitian ini adalah graf *wheel* W_n dan graf S_m . Pelabelan Graf yang dihasilkan dari operasi eksponen-

sial *face* graf *wheel* (W_n) belum diketahui. Penelitian pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total *covering* pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m sebelumnya belum ada sehingga menarik untuk diteliti.

Kriptologi (*cryptologi*) adalah studi tentang sistem, yang disebut kriptosistem (*cryptosystem*), untuk komunikasi yang aman (Baugh:181). Sebagai contoh dalam pengiriman informasi penting untuk penerima dengan melalui saluran komunikasi. Untuk mencegah penyadapan pesan yang akan dikirim diperlukan tingkat keamanan yang lebih baik dalam bidang pengiriman pesan atau informasi. Sebuah kriptosistem kriptografi pengirim mengubah pesan sebelum mengirimkan sehingga, diharapkan penerima yang berhak yang bisa menyusun ulang pesan yang asli (yakni, pesan yang belum diubah). Ada dua jenis algoritma kriptografi simetris saat ini, yaitu *block cipher* dan *stream cipher*. *Stream Cipher* disebut juga dengan sandi aliran. *Stream cipher* banyak digunakan pada bidang telekomunikasi di internet dan telepon seluler. Keuntungan dari *stream cipher* adalah tidak dibatasi oleh panjang plaintexts. Penelitian pengembangan pelabelan selimut total pada graf eksponensial *face* graf *wheel* untuk membentuk *ciphertext* dengan *Stream Cipher* belum ada. Sehingga pengembangan kriptosistem *Stream Cipher* dengan Pelabelan selimut dan dikaitkan dengan terciptanya keterampilan berpikir tingkat tinggi menarik peneliti untuk memngembangkan penelitian tersebut.

Berpikir melibatkan kegiatan memanipulasi dan menstranformasi informasi dalam memori. Berpikir merupakan hal utama yang dilakukan ketika berhadapan dengan pemasalahan untuk mendapatkan pemecahan. *Higher order thinking skills* (HOTS) adalah kegiatan berpikir yang melibatkan level kognitif hirarki tinggi dari taksonomi berpikir Bloom yang terdiri enam level. Penggunaan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan total selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada eksponensial *face* graf *wheel* (W_n) untuk mengetahui hubungan tahapan taksonomi bloom pada proses menemukan lema, teorema, dan algoritmanya. Oleh karena itu berpikir tingkat tinggi dapat membantu kita dalam memecahkan masalah yang sulit untuk diselesaikan.

Penelitian ini mengkaji keterkaitan antara menciptakan teorema dari pela-

belan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total selimut pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m dengan *higher order thinking skills* (HOTS) serta pengembangan *stream chipertext* pada kalimat . Sehingga penelitian ini berjudul ”**Pengembangan *Stream Chiper* dengan Pelabelan Super *Antimagic Total Covering* dari Graf Eksponensial *Face Wheel* W_n dan Graf Star S_m ”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. berapa batas atas pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m ?
2. bagaimana pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada graf eksponensial *face wheel* W_n graf star S_m ?
3. bagaimana pengembangan kriptosystem *stream chiper* dengan menggunakan pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m ?
4. bagaimana hubungan antara pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m dalam mengasah keterampilan tingkat tinggi?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada :

1. graf sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai *loop* dan sisi ganda (paralel) dan bukan merupakan graf berarah(*directed graph*);
2. graf yang dilabeli merupakan hasil operasi eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m yang dinotasikan $W_n^{[S_m]}$;

3. *stream chiper* yang akan dikembangkan berupa kalimat yang terdiri dari 128 karakter yang terdapat dalam tabel ASCII (*American Standart Code for Irformation Intercange*) yang terdiri dari angka, huruf A-Z dan Tanda baca dikembangkan dalam penelitian ini;
4. menggunakan Taksonomi bloom yang telah direvisi oleh L. A. Krathwohl.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mengetahui batas atas pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m ;
2. menganalisis pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic pada graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m ;
3. mengembangkan *stream chipertext* dengan pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf star ;
4. mengetahui keterkaitan proses menemukan pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m dalam mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

1. menambah pengetahuan baru tentang pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic pada eksponensial graf dari eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m ;
2. menambah pengetahuan baru tentang eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m ;
3. menambah pengetahuan baru tentang *chipertext* serta mengubah *plaintext* menjadi *chipertext*;

4. menambah motivasi pada peneliti lain untuk meneliti tentang pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic pada eksponensial *face* graf dari graf jenis lain;
5. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah.

1.6 Kebaharuan dari penelitian

1. Graf yang digunakan adalah graf *wheel* sebagai graf dasar dan dioperasikan dengan sebarang graf.
2. Operasi yang digunakan adalah eksponensial *face*
3. Pada penelitian sebelumnya teknik yang digunakan dalam pelabelan menggunakan teknik pendeteksian pola sementara pada penelitian ini menggunakan teknik partisi.
4. *Chipertext* yang dihasilkan dari metode *stream chiper one-time pad* (OTP)

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Kajian graf merupakan pokok bahasan yang usianya tua namun peranannya dalam kehidupan sehari-hari banyak sampai saat ini, Slamini (2009:11) menyatakan Graf sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Graf) *Sebuah graf G adalah pasangan dua himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $\{u, v\}$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi.*

Sebuah graf G dengan $V(G)$ dan $E(G)$ berturut-turut adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari G . Himpunan titik-titik pada graf dinyatakan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sedangkan himpunan sisi yang menghubungkan titik u dan titik v dapat dinyatakan dengan pasangan $\{u, v\}$ atau dinyatakan dengan lambang $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (Munir, 2012:356). Berdasarkan definisi 2.1 menyatakan bahwa V tidak boleh kosong tetapi E boleh kosong. Jadi, graf dimungkinkan harus mempunyai satu titik dan tidak mempunyai satu sisi. Graf yang hanya mempunyai satu titik saja tanpa mempunyai sisi disebut dengan graf trivial.

Sebuah graf sederhana jika tidak terdapat *loop* dan sisi ganda. Sebuah graf memungkinkan mengandung sisi yang berbentuk $\{u, u\}$ yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *loop*. Sisi yang menghubungkan sepasang titik yang sama lebih dari satu disebut sisi ganda. Sebuah sisi $\{u, v\}$ lebih sederhana dengan notasi uv . Sehubungan dengan itu Slamini(2009:12) juga memberikan definisi yang berkaitan dengan graf, antara lain :

Sebuah graf $G = (V, E, F)$ adalah graf planar terhubung tanpa *loop* dan sisi ganda, dimana $V(G)$, $E(G)$, dan $F(G)$ adalah himpunan titik, himpunan sisi dan himpunan wajah. Order dari sebuah graf G adalah banyaknya titik pada G . Order dari sebuah graf G adalah jumlah titik pada G yang dinotasikan dengan $|V(G)|=p$.

Jumlah sisi dari suatu graf G sering disebut dengan *size* atau dinotasikan dengan $|E(G)|=q$. Jumlah wajah dari suatu graf G sering disebut *face* yang notasikan dengan $s = |F(G)|$. sebuah graf yang memiliki *order* $p = |V(G)|$, *size* $q = |E(G)|$ dan *face* $s = |F(G)|$ disebut sebuah graf (p, q, s) .

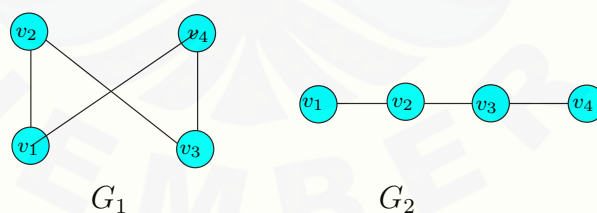
Definisi 2.3 (Bertetangga) Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v

Jika e adalah sebuah sisi pada graf G yang menghubungkan titik u dan v maka titik u dan v disebut *adjacent* serta titik u dan v *incident* dari sisi e .

Definisi 2.4 (Bersisian) Untuk sembarang sisi $e = \{u, v\}$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v .

Definisi 2.5 (Derajat) Derajat suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

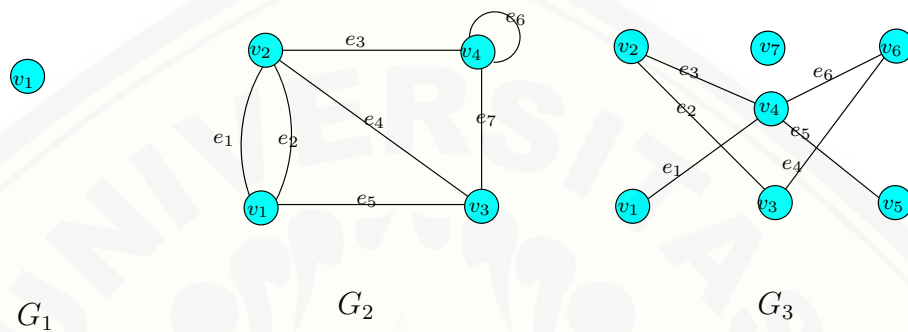
Jika setiap titik memiliki derajat yang sama maka graf G disebut graf reguler n , jika tidak maka graf tersebut dikatakan non-reguler (Chartrand, 2012:38). Sebuah graf dikatakan non trivial paling sedikit terdiri dua titik yang saling terhubung oleh sebuah sisi. Titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengan titik tersebut dikatakan titik terpencil (*isolated vertex*). Pada gambar 2.1 menunjukkan graf reguler, non-reguler.



Gambar 2.1 Graf reguler dan non reguler

Graf pada gambar 2.2 order dari masing-masing graf G_1, G_2 dan G_3 adalah 1, 4 dan 7. Pada G_1 hanya terdiri satu titik saja $V(G_1) = \{u_1\}$ tanpa se-

buah sisi $E(G_1) = \{\}$ atau dengan kata lain G_1 merupakan graf trivial. pada graf G_2 himpunan titik $V(G_2) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. graf G_2 memiliki sisi ganda yaitu e_1 dan e_2 dan sebuah loop yaitu e_6 . Pada G_3 memuat himpunan titik $V(G_3) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ dan himpunan sisi $E(G_3) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ dan terdapat satu titik terpen-cil (*isolated vertex*) yaitu u_7 . Pada graf G_2 titik v_1 bertetangga dengan u_1, u_2, v_2 ; dan titik u_2 berisian dengan sisi e_3, e_4 , dan e_6 .

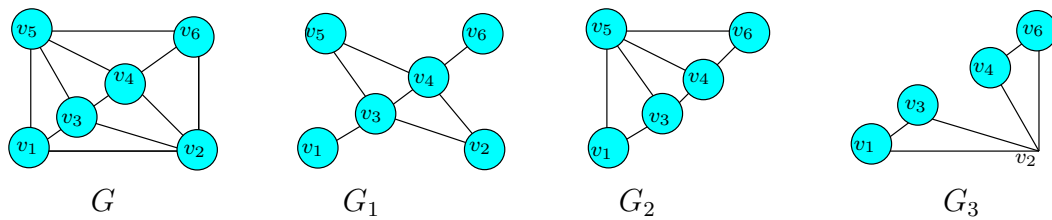


Gambar 2.2 Graf secara umum

Definisi 2.7 (Subgraf) Sebuah graf H disebut subgraf dari G jika setiap titik dari H merupakan titik dari G , dan setiap sisi dari H merupakan sisi dari G , dengan kata lain, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Hasfield dan Ringel, 1994:20)

Dafik (2011:6) menyatakan bahwa sebuah subgraf H adalah sebuah *spanning subgraf* dari G jika H mengandung semua titik dari graf G atau $V(H) = V(G)$. misalkan U merupakan subhimpunan dari $V(G)$. Subgraf terinduksi $G(U)$ adalah sebuah subgraf dari G yang terdiri dari himpunan titik U bersama dengan semua sisi uv pada G $u, v \in U$. Sebagai contoh gambar 2.3 G_1 merupakan *spanning subgraph* dari G , G_2 merupakan subgraf terinduksi dari G , dan G_3 merupakan subgraf tetapi bukan subgraf terinduksi karena titik $v_3, v_4 \in V(G)$ tetapi sisi v_3v_4 tidak ada pada G_3 , diketahui $v_3v_4 \in E(G)$

Definisi 2.8 (Walk) *walk* adalah suatu barisan titik dan sisi yang bergantian $u_0, e_1, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n$ bergantian titik dan sisi.



Gambar 2.3 Graf dan beberapa subgrafnya

Jalan (*Walk*) dapat juga dinotasikan dengan u_1, u_2, \dots, u_n . Suatu jalan memiliki panjang jalan yakni banyaknya sisi pada jalan tersebut. Suatu jalan bisa dikatakan tertutup jika $u_0 = u_n$

Definisi 2.9 (Lintasan) *Lintasan adalah jalan yang setiap titik $u_1 - u_n$ berbeda*

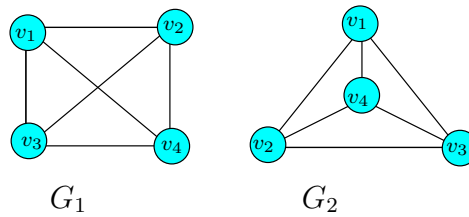
Definisi 2.10 (Cycle) *cycle adalah lintasan yang tertutup .*

Sebuah graf G disebut terhubung jika untuk sembarang dua titik yang berbeda u dan v dari G terdapat sebuah lintasan antara u dan v . Graf yang terhubung disebut (*connected*) dan tak terhubung disebut (*disconnected*). Subgraf terhubung yang maksimal dari G disebut komponen terhubung atau dengan kata lain disebut komponen dari G . Graf yang terhubung mengandung paling sedikit dua komponen.

Graf dikatakan isomorfis jika kedua graf menunjukkan bentuk yang sama. Suatu graf hanya berbeda dalam hal melabeli titik dan sisinya saja. Isomorfis secara matematis didefinisikan dengan contoh berikut : Graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. G' dengan himpunan titik $V(G')$ dan himpunan sisi $E(G')$. Graf G isomorfis dengan graf G' jika dan hanya jika ada korespondensi satu-satu

- $f : V(G) \rightarrow V(G')$
- $f : E(G) \rightarrow E(G')$

pada gambar 2.4 dua graf G_1 dan G_2 adalah graf yang saling isomorfis karena terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan sisi-sisi antara keduanya. Pelabelan kedua graf berbeda karena sebuah graf dapat digambarkan dengan banya cara.

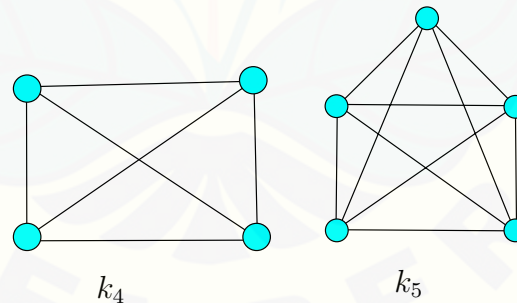
Gambar 2.4 G_1 dan G_2 yang isomorfis

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan (tidak isomorfis dengan graf lainnya) dan karakteristik bentuk khusus (dapat diperluas sampai order n dan simetris) dalam Azizah (2015:9). Pada graf khusus yang belum populer memiliki karakteristik graf khusus. Berikut ini beberapa contoh graf khusus.

1. Graf lengkap (*complete Graph*)

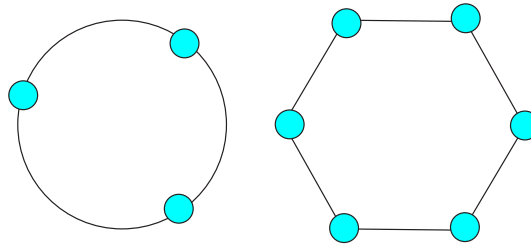
Graf lengkap merupakan graf yang derajat setiap simpulnya sama atau dengan kata lain setiap titik mempunyai sisi ke semua ke titik yang lain. Derajat setiap titik pada graf lengkap $n - 1$ Graf lengkap n buah titik dinotasikan dengan K_n . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Gambar 2.5 adalah contoh graf lengkap.



Gambar 2.5 Graf lengkap

2. Graf Lingkaran (*cycle Graph*)

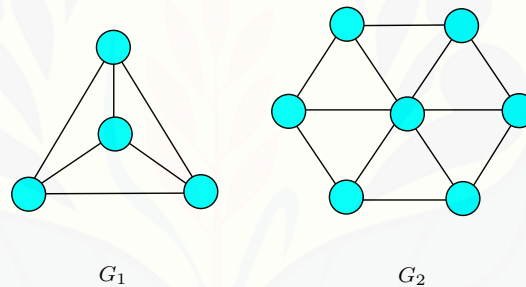
Graf lingkaran adalah graf yang setiap titik memiliki derajat dua. Banyak titik pada graf lingkaran $n \geq 3$. Gambar 2.6 adalah contoh graf lingkaran



Gambar 2.6 Graf lingkaran

3. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Slamin (2001) menjelaskan graf roda yang dinotasikan dengan W_n adalah sebuah graf yang memuat n siklus dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di n siklus. Sehingga graf roda W_n terdiri dari $n + 1$ titik yaitu : $c, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan $2n$ sisi, yaitu $cx_i, 1 \leq i \leq n, x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1$ dan $x_n x_1$. Graf pada Gambar 2.7 adalah contoh graf roda dengan 4 titik atau W_3 dan graf roda dengan 7 titik atau W_6 .

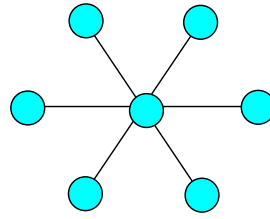
Gambar 2.7 G_1 graf roda (W_3) dan G_2 graf roda (W_6)

4. Graf Bintang (*Star Graph*)

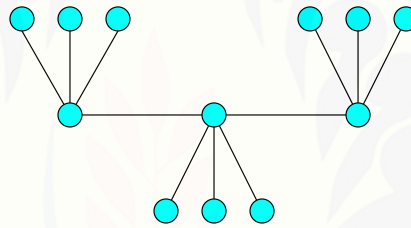
Graf bintang dinotasikan dengan S_n adalah sebuah graf yang terdiri dari n sisi dan $n + 1$ titik, dimana satu titik sebagai titik pusat, yaitu titik yang berderajat n (Wijaya, 2000). Graf pada Gambar 2.8 adalah contoh graf bintang dengan 7 titik atau S_6 .

5. Graf *Caterpillar*

Graf *caterpillar* diperoleh graf *path* dengan bergelantungan daun dari titik *path*. Graf *caterpillar* bisa dianggap sebagai barisan dari graf bintang $S_1 \cup$

Gambar 2.8 Graf bintang (S_6)

$S_2 \cup \dots, S_r$ dimana S_i adalah graf bintang dengan pusat C_i dan n_i daun, $i = 1, 2, 3, \dots, r$. Graf caterpillar dinotasikan dengan $S_1 \cup S_2 \cup \dots, S_r$, dimana himpunan titik $V(S_1 \cup S_2 \cup \dots, S_r) = \{c_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} \{x_i^j : 1 \leq j \leq n_i - 1\} \cup \{x_1^j : 1 \leq j \leq n_1 - 1\} \cup \{x_r^j : 1 \leq j \leq n_r\}$ dan himpunan sisi $ES_1 \cup S_2 \cup \dots, S_r = \{c_i c_{i+1} : 1 \leq i \leq r\} \cup \bigcup_{i=2}^{r-1} \{c_i x_i^j : 2 \leq j \leq n_i - 1\} \cup \{c_1 x_1^j : 1 \leq j \leq n_1 - 1\} \cup \{c_r x_r^j : 2 \leq j \leq n_r\}$

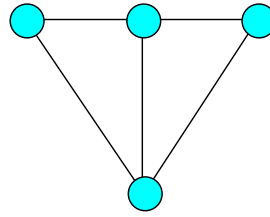
Gambar 2.9 Graf *caterpillar*

6. Graf Kipas (*Fan Graph*)

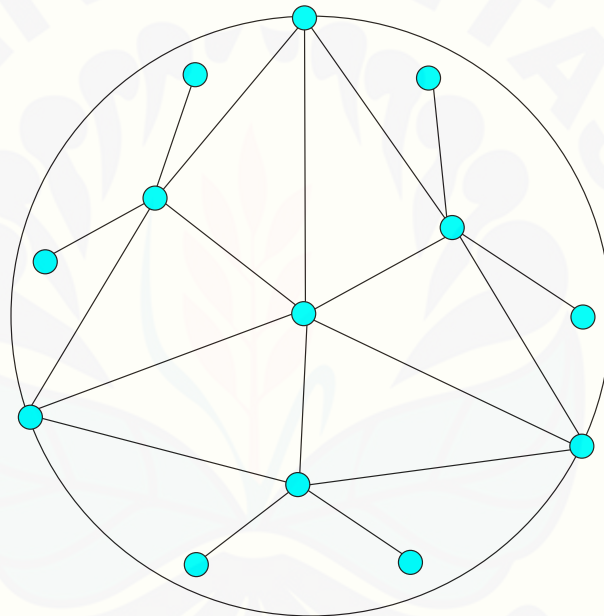
Graf kipas dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 2$, adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n pada suatu titik yang disebut pusat. Jadi, F_n terdiri dari $n+1$ titik, yaitu $c, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dengan c merupakan titik pusat, dan $2n-1$ sisi, yaitu $cx_i, 1 \leq i \leq n, x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$. Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.10.

2.3 Operasi Graf

Suatu graf dapat dioperasi dengan graf lainnya yang terdiri *Amalgamasi*, *Shackle*, *Crown Product* ($G \odot H$) dan Eksponensial. Misal diberikan graf G_1 dan graf G_2 maka Graf eksponensial adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf G_1 dengan mengganti semua sisi dari graf G_1 dengan graf G_2 , dinotasikan dengan

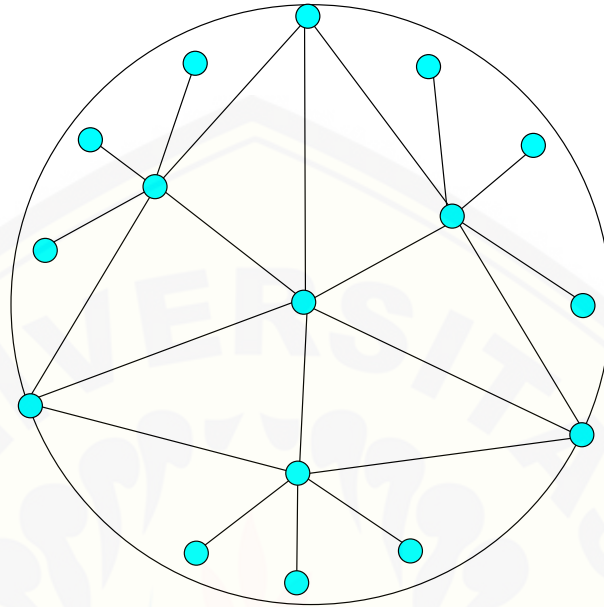
Gambar 2.10 Graf kipas (F_3)

$G_1^{G_2}$. Misal graf G_1 dengan titik $|V(G_1)| = p_1$ dan sisi $|E(G_1)| = q_1$, serta graf G_2 dengan titik $|V(G_2)| = p_2$ dan sisi $|E(G_2)| = q_2$. Maka graf eksponensial $G_1^{G_2}$ mempunyai titik $p = |V(G)| = p_2q_1 + p_1$ dan sisi $p = |E(G)| = q_1(q_2 + 1)$ (Solehah, 2016). Pada penelitian membahas mengenai graf yang diperoleh dari

Gambar 2.11 eksponensial *face* W_3 dan C_6

operasi eksponensial *face* graf *wheel* dan graf sebarang graf L , Misal diberikan graf W_n dan graf G_2 maka graf eksponensial *face* adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf W_n dengan menyatukan titik berurutan G_2 dengan titik-titik di *face* graf W_n , sehingga notasi graf yang dihasilkan adalah $W_n^{[G_2]}$. Contoh operasi graf eksponensial *face* dapat dilihat pada Gambar 2.11 yaitu graf eksponensial *face* graf W_3 dan graf

S_5 dan pada gambar 2.12 merupakan eksponensial face graf W_3 dan graf S_6 . Graf yang diperoleh dari eksponensial *face* graf W_n dan S_m dapat di *expand* sebanyak n dan m .



Gambar 2.12 eksponensial *face* W_3 dan C_6

2.4 Partisi dengan Menetapkan Beda d

Misalkan n, c, d , dan k adalah bilangan bulat positif dimana d dan c boleh nol "0". Kita menganggap $\mathcal{P}_{c,d}^n(k)$ dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, cn\}$ dalam n kolom dan c baris dengan $n \geq 2$, sedemikian hingga beda antara jumlah bilangan pada c baris ke $k=1, 2, 3, \dots, n$ adalah konstan d . Diberikan $\sum \mathcal{P}_{c,d}^n(k)$ adalah jumlah bilangan pada $\mathcal{P}_{c,d}^n(k)$. Jika terdapat partisi dengan beda d maka pasti ada partisi dengan beda- d . Notasi $\mathcal{P}_{c,d}^n(k) \oplus b$ diartikan untuk setiap bilangan pada $\mathcal{P}_{c,d}^n(k)$ ditambahkan dengan b (Baca dkk, 2013). Bentuk umum partisi apabila dinyatakan dalam bentuk matriks adalah

$$\mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c-1)n+1 & (c-1)n+2 & \cdots & cn \end{pmatrix}$$

Terdapat beberapa partisi yang sudah ditemukan oleh Azizah (2016) diantaranya menghasilkan $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$ dengan $d = m$, $d = m^2$, $d = \frac{m}{2}$ dan Agustin (2016) $d = -m$, $d = -m^2$, $d = \frac{-m}{2}$ untuk yang disajikan dalam Lemma. Adapun Lemma tersebut adalah sebagai berikut:

◇ **Lema 2.4.1.** *Diberikan n and m adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \{(i-1)n + k, 1 \leq i \leq m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_1 = m$*

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ maka $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \{\frac{m^2n-nm}{2} + mk\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \{\frac{m^2n-nm}{2} + m, \frac{m^2n-nm}{2} + 2m, \dots, \frac{m^2n-nm}{2} + (n-1)m, \frac{m^2n-nm}{2} + nm\}$. Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_1 = m$. □

◇ **Lema 2.4.2.** *Diberikan n and m adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \{(k-1)m + i, 1 \leq i \leq m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_2 = m^2$.*

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ maka $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \{\frac{(m-m^2)}{2} + m^2k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \{\frac{(m-m^2)}{2} + m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + 2m^2, \dots, \frac{(m-m^2)}{2} + (n-1)m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + nm^2\}$. Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_2 = m^2$. □

◇ **Lema 2.4.3.** *Diberikan n and m adalah bilangan bulat positif dengan variasi*

nilai beda. Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \begin{cases} \{(i-1)n + \frac{k+1}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{\frac{k-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{k+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{(i-1)n + \frac{k}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_3 = \frac{m}{2}$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ maka $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \{\frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \{\frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + m, \dots, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m(n-1)}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{mn}{2}\}$. Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_3 = \frac{m}{2}$. \square

\diamond **Lema 2.4.4.** Misal n dan m bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) = \{1 + ni - k; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_4 = -m$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_4}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m) + m - mk \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m), \frac{n}{2}(m^2 + m) - m, \frac{n}{2}(m^2 + m) - 2m, \dots, \frac{n}{2}(m^2 + m)m - m(n-1), \frac{n}{2}(m^2 + m)m - mn \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_4 = -m$.

\square

\diamond **Lema 2.4.5.** Misal n dan m bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $\{k = 1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) = \{mn + i - mk; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_5 = -m^2$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_5}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - 2m^2, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2(n-1), \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_5 = -m^2$. \square

◇ **Lema 2.4.6.** Misal n dan m bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$. jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) = \begin{cases} \{ni - \frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni + \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ genap}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ genap}\} \end{cases}$$

membentuk baris aritmatika dengan beda $d_6 = \frac{-m}{2}$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_6}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - m, \dots, \frac{m}{4}(2mn \right. \\ &\quad \left. - n + 3) - \frac{m}{2}(n-1), \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_6 = \frac{-m}{2}$.

\square

Suatu partisi yang didefinisikan dengan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, j)$ dapat dibentuk dengan

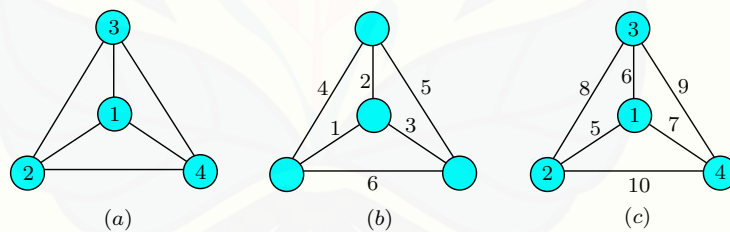
mengkombinasikan partisi lain sehingga diperoleh beda d yang bervariasi. Konstruksi partisi tersebut mengikuti fakta di bawah ini:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{c,d}^n(k) &= \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(i,j) \cup (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(i,j) \oplus (nc_1)); \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ \sum \mathcal{P}_{c,c}^n(i,j) &= \sum \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(i,j) + \sum (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(i,j) \oplus nc_1), \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ &= \sum \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(i,j) + \sum (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(i,j) \oplus nc_1c_2), 1 \leq i \leq c \end{aligned}$$

dimana $c = c_1 + c_2$ dan $d = d_1 + d_2$ (Bača, dkk. 2013)

2.5 Pelabelan Graf

Pelabelan graf dari suatu graf G adalah suatu fungsi satu-satu yang memetakan elemen-elemen dalam graf (baik titik, sisi, maupun titik dan sisi) ke dalam himpunan bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif) yang disebut label. Pelabelan yang diberikan pada himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labelling*), pelabelan yang diberikan pada himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labelling*), dan pelabelan yang diberikan pada himpunan titik dan sisi disebut pelabelan total (*total labelling*). Pada Gambar 2.13, dapat dilihat contoh pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.



Gambar 2.13 (a) Pelabelan titik, (b) Pelabelan sisi, (c) Pelabelan total

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi f himpunan A ke dalam B disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen dalam A mempunyai bayangan yang berbeda pada B dan disebut onto jika dan hanya jika range f sama dengan B . secara singkat, $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ dan merupakan onto

jika $f(A) = B$. Suatu selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka H dikatakan suatu selimut- H dari G . Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- H .

Misalkan H dalah selimut- H yang memuat semua subgraf dari G yang isomorfik dengan H . Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total \mathcal{H} -ajaib dengan menggunakan konsep selimut- \mathcal{H} . Misalkan $\beta : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_g + e_g\}$ adalah suatu fungsi injektif. Definisikan bobot- H_i , $\beta(H_i)$ sebagai $\beta(H_i) = \sum_{v \in V(H_i)} \beta(v) + \sum_{e \in E(H_i)} \beta(e)$. Fungsi β disebut pelabelan H -ajaib, jika $\{\beta(H_i) | H_i \in H\} = k_\beta$ untuk suatu bilangan bulat positif k_β . Kemudian, β dikatakan pelabelan H -ajaib super, jika $\beta(V(G)) = \{1, 2, \dots, v_G\}$. Selanjutnya, pelabelan total \mathcal{H} -ajaib yang terkait dengan selimut- \mathcal{H} dinamakan pelabelan selimut H -ajaib.

Pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ sedemikian hingga bobot selimutnya membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$ dengan a adalah suku pertama, d adalah beda, dan k adalah jumlah selimutnya. Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ - antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut:

Lema 2.5.1. *Jika sebuah graf $G(V, E)$ adalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$ dan $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$. Mi-

salkan graf (p_G, q_G) memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + (p_G - 1) + (p_G - 2) + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H q_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\ &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\ &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\ &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\ &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\ d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)} \end{aligned}$$

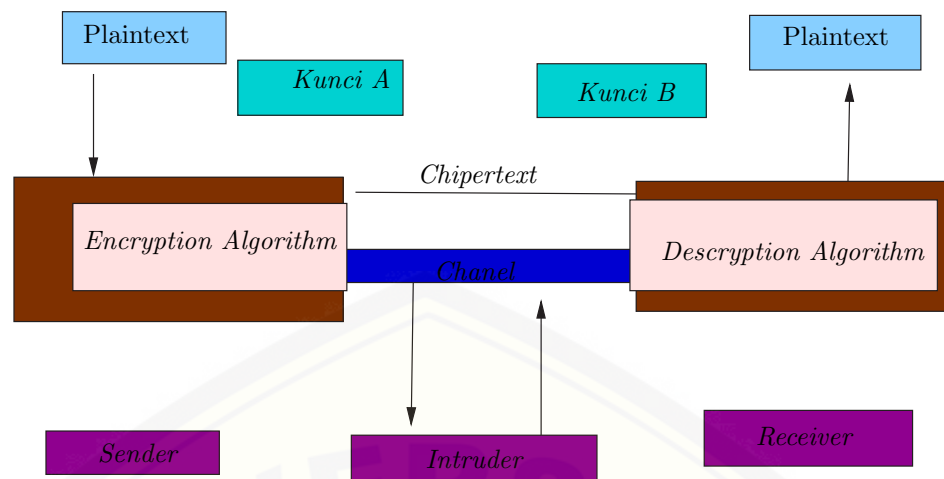
Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering dari berbagai famili graf (Dafik, 2007). \square

2.6 Aplikasi Graf

Aplikasi graf dalam kehidupan sehari-hari meliputi berbagai macam yaitu pengaturan jadwal ujian, pewarnaan peta, pengaturan IP komputer. Aplikasi yang mulai berkembang lagi dalam bidang kriptologi yakni *chipertext*. Kriptologi (*cryptologi*) adalah studi tentang sistem, yang disebut kriptosistem (*cryptosystem*), untuk komunikasi yang aman (Baugh:181). Dalam sebuah kriptosistem, pengirim mengubah pesan sebelum mengirimkan sehingga, diharapkan penerima yang berhak yang bisa menyusun ulang pesan yang asli (yakni, pesan yang belum diubah). Kriptosistem penting bagi organisasi yang besar seperti lembaga militer, pemerintah, bahkan keperluan individu. sebagai contoh jika layanan pesan singkat dikirimkan lewat jaringan komputer, diharapkan isi pesan tersebut hanya bisa dibaca oleh penerima.

Plaintext merupakan teks jelas yang dapat dimengerti berupa pesan yang dirahasiakan. *Ciphertext* merupakan pesan hasil penyandian. kegiatan pengirim pesan disebut menyandikan atau mengkriptosasi (*encryption*) pesan, yakni proses menyandikan *plaintext* menjadi *ciphertext*. penerima pesan melakukan penguraian sandi atau deskripsi (*decryption*) pesan untuk mendapatkan *plaintext* asal. Berikut alur pengembangan *chipertext* yang di tunjukan gambar 2.14.

Ada dua jenis algoritma kriptografi simetris saat ini, yaitu *block cipher* dan *stream cipher*. *Block cipher* dilakukan dengan membagi-bagi *plaintext* yang akan dikirimkan. *Stream Cipher* disebut juga dengan sandi aliran. Pada algoritma kriptografi *stream cipher*, plainteks pada proses enkripsi dilakukan secara mengalir menggunakan kunci enkripsi yang mengalir juga. *Stream cipher* banyak digunakan pada bidang telekomunikasi di internet dan telepon seluler. keuntungan dari *stream cipher* adalah tidak dibatasi oleh panjang plainteks. Sebagai contoh penerapan fungsi *chaos* sebagai pembangkit kunci aliran (*key stream*) yang dikembangkan oleh Rinaldi Munir 2015. *Stream Cipher* adalah algoritma kriptografi yang mengenkripsikan plainteks menjadi chiperteks satu bit atau satu karakter (1



Gambar 2.14 Alur Kerja Kriptografi

byte), yang dalam hal ini panjang kunci sama dengan panjang pesan. Salah satu algoritma *stream cipher* yang aman adalah *one-time pada (OTP)*. OTP menerapkan kunci aliran yang terdiri dari bilangan acak, panjang kunci aliran sama panjang dengan pesan.

Jika karakter yang digunakan adalah huruf A sampai Z maka enkripsi dan deskripsi dinyatakan penjumlahan modulo 26. Pada penelitian ini akan digunakan adalah anggota himpunan 128 karakter seperti pengkodean ASCII (*American Standard Code for Information interchange*) sehingga menerapkan penjumlahan modulo 128. Pada tabel ASCII terdapat karakter yang digantikan dengan karakter yang lain yakni urutan karakter ke-0 sampai ke-32, karakter ke-33 sampai ke-127 sesuai dengan karakter ASCII.

Misalkan diberikan korespondensi huruf abjad dengan bilangan sebagai berikut, a dengan 0, b dengan 1, c dengan 2, dan seterusnya sampai z dengan 25 dinotasikan dengan Z_{26} . Sehingga *plaintext* x_1, x_2, x_3, \dots dengan $x_i \in Z_{26}$ dan kunci aliran k_1, k_2, k_3, \dots dengan $k_i \in Z_{26}$. *Chipertext* y_1, y_2, y_3, \dots diperoleh dengan proses enkripsi sebagai berikut :

$$y_1 = x_1 + k_1, y_2 = x_2 + k_2, \dots, y_n = x_n + k_n, y_{n+1} = x_{n+1} + k_{n+1} \dots (\text{mod } 26)$$

Pada penelitian ini akan membahas fungsi partisi sebagai pembangkit kunci aliran (*key stream*) pada proses enkripsi-deskripsi. Berikut contoh sebuah pesan yang akan dikirim "Pesan Rahasia" fungsi dan *key stream* hasil dari partisi graf. Ber-

Tabel 2.1 Tabel Kode ASCII

DEC	Char	DEC	Char	DEC	Char	DEC	Char	DEC	Char
0		27	←	54	6	81	Q	108	l
1	☺	28	L	55	7	82	R	109	m
2	☹	29	↔	56	8	83	S	110	n
3	♥	30	▲	57	R	84	T	111	o
4	♦	31	▼	58	:	85	U	112	p
5	♣	32	(SP)	59	;	86	V	113	q
6	♠	33	!	60	i	87	W	114	r
7	•	34	”	61	=	88	X	115	s
8	☐	35	#	62	¿	89	Y	116	t
9	◦	36	\$	63	?	90	Z	117	u
10	■	37	%	64	@	91	[118	v
11	♂	38	&	65	A	92	\	119	w
12	♀	39	'	66	B	93]	120	x
13	⊖	40	(67	C	94	^	121	y
14	⊗	41)	68	D	95	_	122	z
15	⊛	42	*	69	E	96	`	123	{
16	▶	43	+	70	F	97	a	124	
17	◀	44	,	71	G	98	b	125	}
18	↕	45	-	72	H	99	c	126	~
19	@	46	.	73	I	100	d	127	(DEL)
20	¶	47	/	74	J	101	e		
21	§	48	0	75	K	102	f		
22	—	49	1	76	L	103	g		
23	◇	50	2	77	M	104	h		
24	↑	51	3	78	N	105	i		
25	↓	52	4	79	O	106	j		
26	→	53	5	80	P	107	k		

dasarkan hasil perhitungan tabel 2.2, diperoleh hasil enkripsi dengan chiperteks "qjbnpxkvdztp"

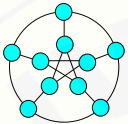
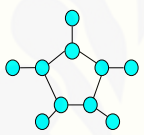
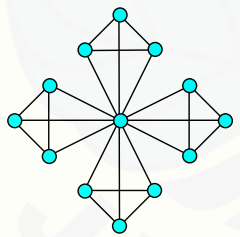
Tabel 2.2 Proses enkripsi dengan kunci aliran hasil Partisi graf

<i>Plaintext</i>	x_i	k_i	$y_i = x_i + k_i$	<i>Chipertext</i>
p	15	1	16	q
e	4	5	9	j
s	18	9	1	b
a	0	13	13	n
n	13	2	15	p
r	17	6	23	x
a	0	10	10	k
h	7	14	21	v
a	0	3	3	d
s	18	7	25	z
i	8	11	19	t
a	0	15	15	p

2.7 Hasil Pelabelan Selimut Graf $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic yang digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini.

Tabel 2.3: Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic.

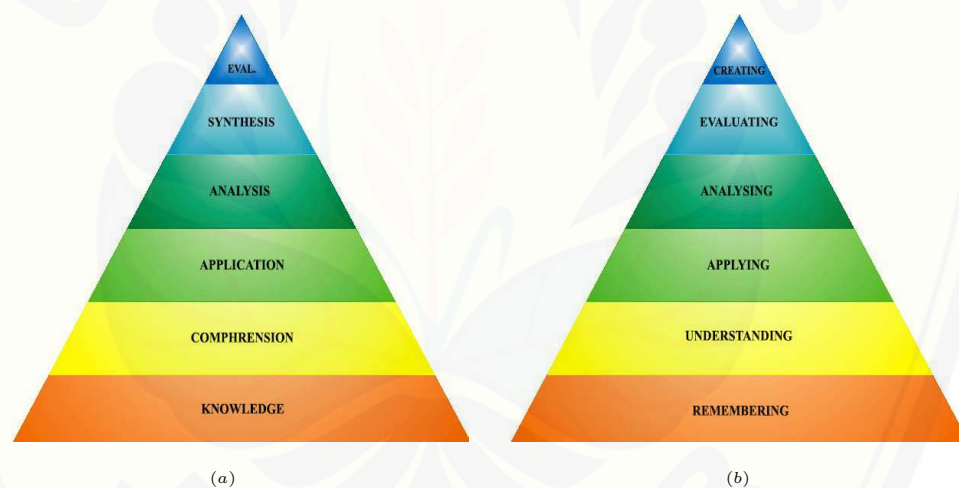
Graf	a	d	Hasil
$GP_{n,k}$ (<i>Generalized Petersen</i>)  (Karyanti, 2012)	$3 + 14n - 3\lfloor n/2 \rfloor$	$d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
S_n (<i>Matahari</i>)  (Karyanti, 2012)	$13n + 4$ $12n + 5 + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$ $d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
$Amal(w_3, v, m)$ (<i>Amalgamasi graf roda</i>)  (Anggraeni, 2015)	$30m + 7$ $29m + 71$	$d = 9$ $d = 7$	$\mathcal{H} = W_3$

2.8 Berpikir Tingkat Tinggi

Penggunaan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan total selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada eksponensial face graf wheel (W_n) untuk mengetahui hubungan

tahapan taksonomi bloom pada proses menemukan lema, teorema, dan algoritmanya. *Higher Order Thinking Skills* (HOTS) adalah kegiatan berpikir yang melibatkan level kognitif hirarki tinggi dari taksonomi berpikir Bloom. Terdiri enam level yaitu (1) pengetahuan (*knowledge*); (2) pemahaman (*comprehension*); (3) penerapan (*application*); (4) analisis (*analysis*); (5) sintesis (*synthesis*); dan (6) evaluasi (*evaluation*).

Taksonomi Bloom yang telah direvisi khususnya pada ranah kognitif yang disusun oleh Lorin W. Anderson dan David R. Krathwohl pada tahun 2001 telah direvisi sudah banyak yang menerima terutama oleh saintisi dan praktisi sehingga keberadaan bisa dijadikan rujukan penelitian. Berikut Level Taksonomi Bloom ranah kognitif yang telah direvisi Anderson dan Krathwohl (2001:66 - 88) yakni: mengingat (*remembering*) , memahami/mengerti (*understanding*) , menerapkan (*applying*) , menganalisis (*analyzing*) , mengevaluasi (*evaluating*) , dan menciptakan (*creating*).



Gambar 2.15 (a) Tahapan Taksonomi Bloom yang belum direvisi dan (b) Tahapan Taksonomi Bloom yang telah direvisi

1. mengingat merupakan kemampuan mengulang pengetahuan dari ingatan atau memori yang telah lampau diterima, baik yang baru diperoleh atau sudah lama. Kemampuan mengingat berperan penting dalam proses pembelajaran yang bermakna dan pemecahan permasalahan. Proses mengingat

kata kerja kuncinya yaitu : mengingat, mengulangi, menemukan, menyusun, menyatakan kembali, mengurutkan, menamai, menyebutkan.

2. memahami berkaitan dengan kemampuan membangun sebuah pengertian dari sebuah pesan atau informasi yang telah ada baik dalam bentuk lisan atau tertulis. Kata kerja kunci yaitu menerangkan, menjelaskan, menerjemahkan, menguraikan, menafsirkan, membandingkan.
3. menerapkan merupakan kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Menerapkan berkaitan dengan dimensi pengetahuan prosedural (*pro cedural knowledge*). Kata kerja kunci yaitu : menerapkan, memilih, melaksanakan menggunakan, memprogramkan, mempraktikkan.
4. menganalisis merupakan kemampuan untuk memecahkan permasalahan dengan memisahkan tiap-tiap bagian dari masalah serta mencari tahu bagaimana keterkaitan tersebut menimbulkan masalah. Kata kerja kunci : mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, mengorganisir, menghubungkan.
5. mengevaluasi berkaitan dengan proses kognitif yaitu memberikan penilaian berdasarkan norma dan kriteria tertentu. Kata kerja kunci menilai, mengevaluasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, menyeleksi.
6. mengkreasi merupakan kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi kesatuan yang koheren dan mengarahkan untuk menghasilkan suatu produk baru. Kata kerja kunci : merancang, membangun, membentuk, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan terapan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik yaitu menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada terkait tentang pengertian dasar selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic *eksponensial face wheel* W_n dan graf $S_m W_n^{[S_m]}$, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada *eksponensial face* graf dari graf khusus. Graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf *wheel* w_n . Pelabelan titik dan sisi pada graf *eksponensial face wheel* W_n dan graf $S_m W_n^{[S_m]}$ menggunakan lemma yang telah ada yakni menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan partisi. Jika terdapat pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total selimut pada graf *eksponensial face wheel* W_n dan graf $L W_n^{[S_m]}$, maka akan dirumuskan bagaimana pola super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total selimut pada *eksponensial face wheel* W_n dan graf S_m untuk menentukan pola umumnya, sehingga nantinya dapat dirumuskan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total selimut pada *eksponensial face* graf. pada penelitian ini juga menggunakan tahapan pada taksonomi bloom yang telah direvisi yaitu mengingat, mengerti, mengaplikasikan, menganalisa, mengevaluasi, dan menciptakan.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Berikut ini maksud dari definisi operasional variabel.

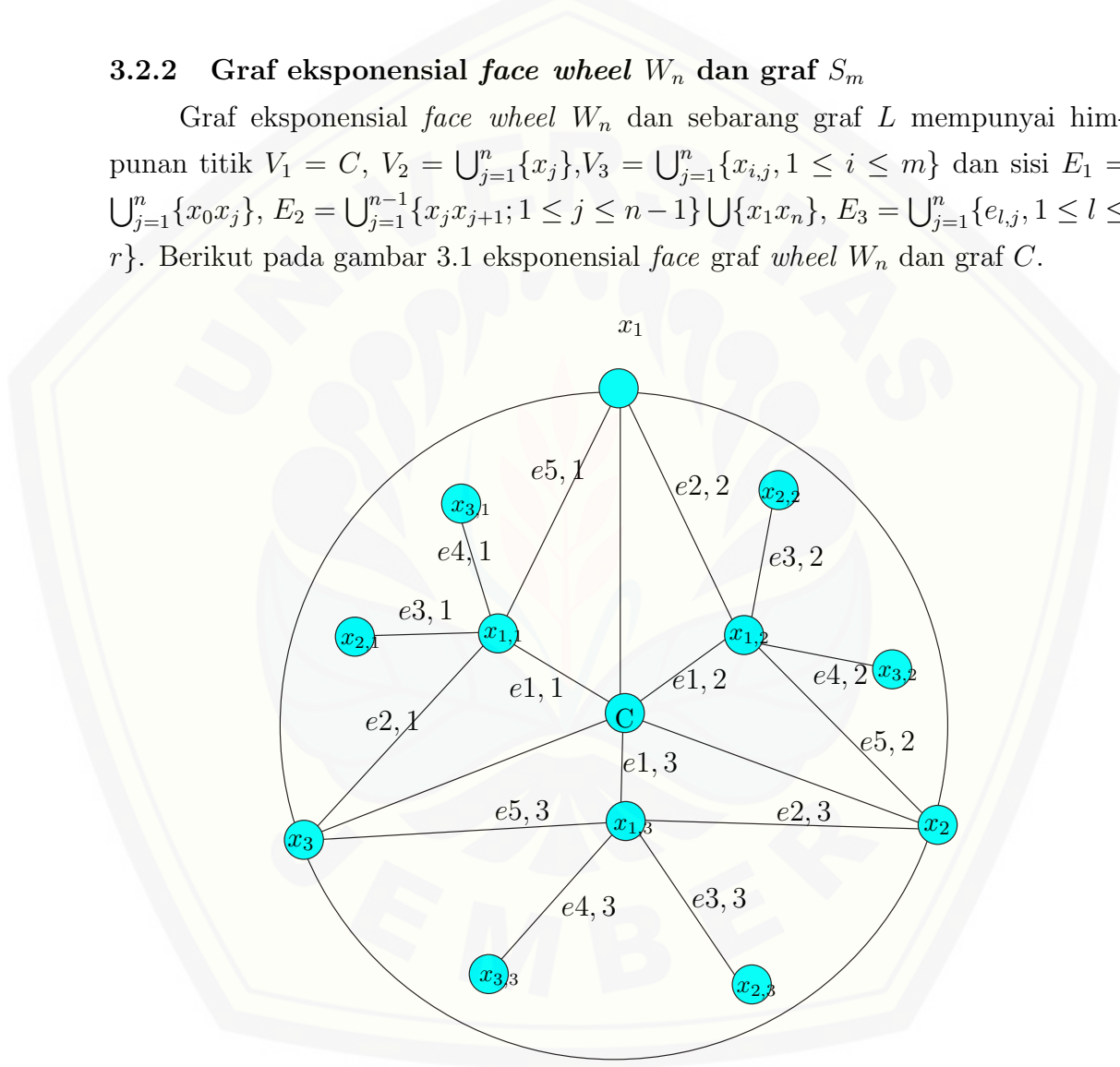
3.2.1 pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total

Pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan

bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ sedemikian hingga bobot selimutnya membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$ dengan a adalah suku pertama, d adalah beda, dan k adalah jumlah selimutnya.

3.2.2 Graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m

Graf eksponensial *face wheel* W_n dan sebarang graf L mempunyai himpunan titik $V_1 = C, V_2 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j\}, V_3 = \bigcup_{j=1}^n \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq m\}$ dan sisi $E_1 = \bigcup_{j=1}^n \{x_0 x_j\}, E_2 = \bigcup_{j=1}^{n-1} \{x_j x_{j+1}; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_1 x_n\}, E_3 = \bigcup_{j=1}^n \{e_{l,j}, 1 \leq l \leq r\}$. Berikut pada gambar 3.1 eksponensial *face* graf *wheel* W_n dan graf C .



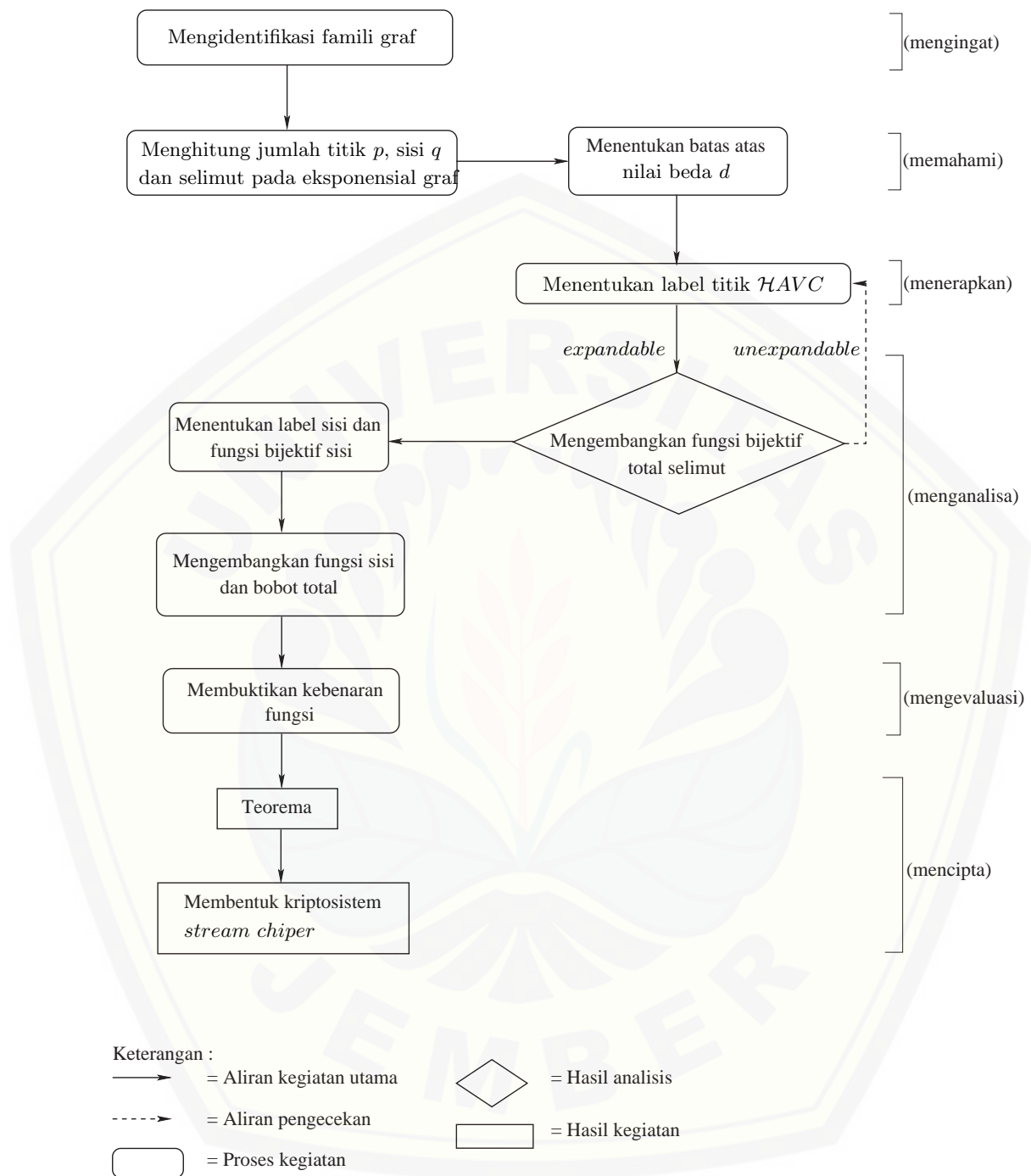
Gambar 3.1 Eksponensial *face* Graf *wheel* $W_n^{[S_m]}$

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada *eksponensial face wheel* graf. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut :

1. mengidentifikasi famili eksponensial *face wheel* W_n dan graf $S_m W_n^{[S_m]}$;
2. menghitung jumlah titik p_G dan sisi q_G pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m , serta menghitung jumlah titik p_H , jumlah selimut sisi q_H , dan jumlah selimut pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m ;
3. menentukan batas atas nilai beda d pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m ;
4. menentukan label $\mathcal{H}AVC$ (\mathcal{H} -*antimagic vertex covering*) atau pelabelan titik (a, d) - antimagic selimut pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf $S_m W_n^{[L]}$;
5. apabila label $\mathcal{H}AVC$ berlaku untuk beberapa graf baik maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan dengan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik (a, d) -antimagic selimut pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m ;
6. menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi (a, d) - antimagic selimut pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m ;
7. mengembangkan fungsi sisi dan bobot total (a, d) - antimagic total covering pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m ;
8. membuktikan kebenaran fungsi sisi pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m ;
9. menemukan teorema ;
10. membentuk kriptosistem *stream chipertext* sesuai pesan rahasia.

Secara umum, langkah-langkah penelitian tersebut dapat juga disajikan dalam bagan alir pada gambar 3.2.

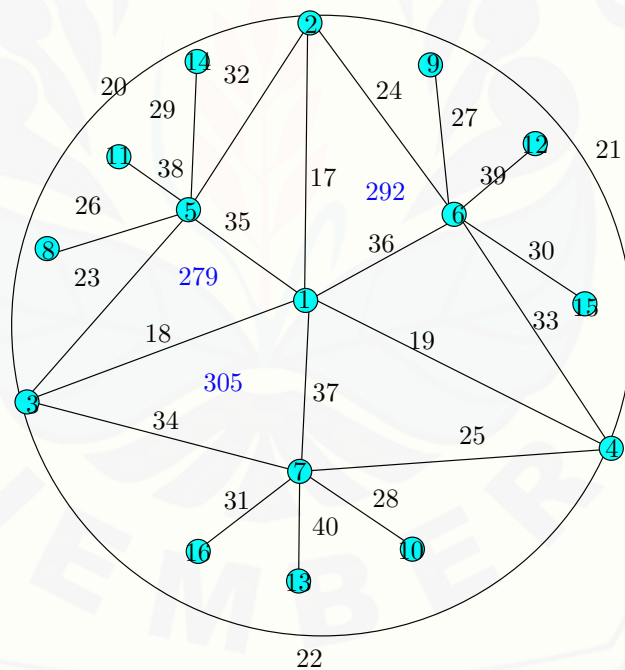


Gambar 3.2 Diagram Alir Penelitian

3.4 Observasi

Sebelum penelitian pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m , telah dilakukan observasi awal untuk nilai m , t_i dan n tertentu sebagai pedoman untuk menduga keberadaan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total serta menentukan pola pelabelannya. Ternyata setelah dilakukan observasi awal, peneliti menemukan pola pelabelan titik tunggal pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m $W_n^{[L]}$, antara lain sebagai berikut :

Berdasarkan tahapan pelabelan tersebut yang dilakukan pada observasi awal sehingga peneliti menemukan pelabelan titik dan bobot titik yang berurutan, maka penulis dapat melanjutkan observasinya untuk menemukan pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total pada eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m . Untuk lebih jelasnya, gambar 3.3 hasil observasi awal pelabelan eksponensial *face wheel* W_n dan graf S_m . Observasi selanjutnya akan mengikuti tahapan-tahapan yang terdapat pada Taksonomi Bloom yang telah direvisi.



Gambar 3.3 Eksponensial *face graf wheel* dan S_m beserta pelabelannya

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf eksponensial *face* Graf *whell* berorder $n + 1$ (W_n) dan graf S_m $G = W_n^{[S_m]}$, dimana $p_{S_m} = m + 1$ dan $q_{S_m} = r$. G memiliki himpunan titik $V_1 = C$, $V_2 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j\}$, $V_3 = \bigcup_{j=1}^n \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq m\}$ dan sisi $E_1 = \bigcup_{j=1}^n \{Cx_j\}$, $E_2 = \bigcup_{j=1}^{n-1} \{x_j x_{j+1}\} \cup \{x_1 x_n\}$, $E_3 = \bigcup_{j=1}^n \{e_{l,j}, 1 \leq l \leq r + 3\}$. Sedangkan jumlah titik $|V_1| = 1$, $|V_2| = n$, $|V_3| = (m - 2)n$ maka $p_G = |V_1| + |V_2| + |V_3|$ dan jumlah sisi $|E_1| = n$, dan $|E_2| = n$, $|E_3| = nr$ maka $q_G = |E_1| + |E_2| + |E_3|$ sedangkan p_H dan q_H merupakan jumlah titik dan sisi pada selimut sehingga $p_G = n(m - 1) + 1$, $p_H = m + 1$, $q_G = n(r + 2)$, $q_H = r + 3$ dengan jumlah selimut $G = W_n^{[S_m]}$ $d \leq m^2 + r^2 + 4m + 11r + 33 + \frac{-m-r+9}{n-1}$. dimana $p_H = m + 1$ dan $q_H = r + 3$.
2. Misalkan m, n, r adalah bilangan bulat dengan $m, r \geq 2$, $n \geq 3$, n bilangan ganjil maka graf eksponensial *face wheel* W_n dan graf star S_m mempunyai Super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic total covering* dengan nilai $a = 5n + 7 + m_1(-\frac{1}{2}m_1 + n + 2\frac{1}{2}) + m_2(m_2n - n + \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2}) + \sum_{c=2}^8 m_c(n \sum_{t=1}^{c-1} m_t + n + 1) + \frac{n}{2}(m_3^2 + m_3) + \frac{n}{2}(m_4^2 - m_4) + \frac{m_5}{2}(2m_5n - n + 1) + \frac{m_6}{4}(2m_6n - n + 3) + \frac{1}{2}(m_7 - m_7^2) + \frac{m_8}{2}(2m_8n + m_8 + 1) + \frac{1}{2}(3r_1 - r_1^2) + r_1(mn + 3n + 1) + r_2(r_2n - n + \frac{r_2}{2} - \frac{1}{2}) + \sum_{c=2}^8 r_c(n \sum_{t=1}^{c-1} r_t + mn + 3n + 1) + \frac{n}{2}(r_3^2 + r_3) + \frac{n}{2}(r_4^2 - r_4) + \frac{r_5}{2}(2r_5n - n + 1) + \frac{r_6}{4}(2r_6n - n + 3) + \frac{1}{2}(r_7 - r_7^2) + \frac{r_8}{2}(2r_8n + r_8 + 1)$ dan $d = (3 + m_1^2 - 2m_1 - m_2^2 - 2m_2 - m_3 + m_4 + \frac{m_5}{2} - \frac{m_6}{2} + m_7^2 - m_8^2 + r_1^2 - 2r_1 - r_2 - 2r_2 - r_3 + r_4 + \frac{r_5}{2} - \frac{r_6}{2} + r_7^2 + r_8^2)j$
3. Dari pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total *covering* pada eksponensial *face* graf *wheel* W_n dan graf star $G = W_n^{[S_m]}$ dapat digunakan untuk

mengembangkan *stream cipher one time pad* (OTP). Terdapat dua algoritma yaitu algoritma membentuk kunci aliran dan algoritma *stream cipher*. Untuk menghasilkan kunci aliran mengikuti algoritma berikut ini:

- (a) menentukan jenis graf G yang akan di bangun kunci;
- (b) melabeli titik dan sisi jika membentuk super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total *covering* lanjutkan langkah 3, jika tidak membentuk super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total *covering* kembali ke langkah satu;
- (c) panjang kunci aliran yang digunakan sama dengan panjang *plaintext*, misal panjang kunci aliran adalah h , sehingga mengeliminasi label sisi $f_e > |V(G)| + h$;
- (d) membangun diagram pohon yang mulai dari titik 1 dan akar selanjutnya mengikuti pola graf G . Sisi yang dieliminasi tidak perlu digunakan;
- (e) melabeli diagram pohon yang terbentuk sesuai dengan sisi pada graf G Kemudian mengurutkan label sisi dari kiri ke kanan dan dimulai dari sisi atas diagram ;
- (f) menerapkan bilangan mod 128 pada barisan dari label sisi untuk memperoleh OTP atau kunci aliran pada *stream cipher*;

Langkah-langkah membentuk *chipertext* dengan *stream cipher one-time pad* (OTP) :

- (a) karakter dikorespondensikan dengan bilangan sesuai dengan tabel ASCII ;
- (b) *plaintext* dinotasikan dengan $p = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$;
- (c) kunci aliran dinotasikan dengan $s = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$, Panjang *keystream* sama dengan panjang *plaintext*;
- (d) *chipertext* dinotasikan dengan $c = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_i\}$;
- (e) proses Ekripsi : $c_i = (p_i + s_i) \bmod 26$ dan Deskripsi : $p_i = (c_i - s_i) \bmod 26$;

4. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan super yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditemukan, yaitu dimulai dari mengingat dalam mengidentifikasi famili graf, memahami dalam menghitung jumlah titik p dan sisi q serta menentukan batas atas nilai beda d pada, menerapkan dalam menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik selimut, menganalisa dalam menentukan label sisi dan fungsi bijektif serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi dan mencipta teorema baru.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian pelabelan super $(a, d) - H$ antimagic total covering eksponensial face graf $wheel(W_n)$ serta mengacu pada open problem dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran agar pembaca dapat melakukan penelitian pelabelan $(a, d) - H$ antimagic eksponensial face graf $wheel$ dan graf star $W_n^{[S_m]}$ untuk diskonektif

DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, I. H., Dafik and Milasari, M. D 2016. *Super complete of amalgamation of complete graph*. Working Paper, Jember: CGANT UNEJ. page 1.
- Azizah, I. and Dafik. 2014. *Super (a, d) - H -antimagic total selimut pada graf shackle kipas f_4* . Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, 1:242-250. page 1.
- Azizah, Y.N. 2016. *Super (a, d) - h -antimagic total selimut pada graf shackle kipas f_4* . Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, 1:242-250. page 1.
- Bača, Bronkovic, L., Lascsakova, M., Phanalasy, and Fenovcikova, A. S. , G. 2013. *On d - antimagic labelings of plane graphs*. *Electonica Journal of Graph Theory and Application*,1:28-39.
- Chartrand, G. 2012. *Introductory Graph Theory*. United Stated of America: Dover Publication Inc.
- Dafik. 2011. *Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Disconnected Graphs*. Jember, CSS.
- Dafik, Mirka, M., Ryan, J., Bača, M. 2008. *Antimagic labeling of union of stars*. *The Australasian Journal of Combinatorics*. 42, 35-44. .
- Dafik, Mirka, M., Ryan, J., Bača, M. 2009. *On Super (a, d) -Edge-Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs*. *Discrete Mathematics* 309 (15), 4909-4915.
- Dafik, Slamini, Wuria. 2015. *Super (a, d) – H – Antimagic Total Covering of Shackle Graph*. Working Paper, FKIP UNEJ.
- Hartsfield, N., Ringel, G. 1990, *Pearls in Graph Theory*. San Diego: Academic Press.
- Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2013. *Super (a,d) - H -Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H* . *Australasian Journal of Combinatorics* 57, 127-138.

- Gutierrez and Llado. 2005. *Magic coverings. Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55:451-461.
- Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut (a,d) - H -Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.
- Krathwol, D.R. 2002. *A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. Theory Into Practice*, 41(4): 213-218.
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. *On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph*. Utilitas Math 83, 333-342.
- Munir. R. 2012. *Matematika Diskrit*, Bandung : Informatika
- Rinaldi Munir, Bambang Riyanto, Sarwono Sutikno., 2015. *Perancangan Algoritma Kriptografi Stream Cipher dengan Chaos*. Bandung Institute of Technology, page 1- 8 .
- Sedlacek, J.1963. *Problem 27 in theory of graph and its Applications*. Proceeding of the Symposium Held in Smolenice Praha. 163, 163-167.
- Slamin . 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*, Jember : Jember University Press
- Siddiqui, M. K., Imran, M. dan Numan M., 2015. *Super d -antimagic labeling of uniform subdivision of wheel o* . Vol 77, page 227-240 page 1.
- Solehah, S.A. dan Dafik. 2016. *Independent Dominating Numerik pada Beberapa Graf Operasi*. Skripsi Tidak Dipublikasikan. Jember: Universitas Jember. page 1.