MODIFIKASI METODE *NEWTON* TIGA LANGKAH DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER (SPNL)

SKRIPSI

Oleh :
Yasmin Farida
NIM 121810101056

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

MODIFIKASI METODE *NEWTON* TIGA LANGKAH DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER (SPNL)

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh :
Yasmin Farida
NIM 121810101056

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Allah SWT, skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. kedua orang tuaku tercinta Ayahanda Yusuf Yumartono dan Ibunda Chairunnisa, yang telah mendoakan dan memberi kasih sayang serta semangat untuk putri tercintanya;
2. kakakku Huzaefa dan adikku Luluwa yang selalu mendoakan;
3. seluruh guru dan dosen sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMA Negeri 1 Banyuwangi, SMP Negeri 1 Giri Banyuwangi, SD Negeri 4 Lateng Banyuwangi, dan TK Baiturrahman Banyuwangi.
5. teman-teman Bathics'12 yang selalu membantu dan member dukungan.

MOTO

“In order to succeed, we must first believe that we can”
(Nikos Kazantzakis) *)

“Try and fail, but don’t fail to try”
(Stephen Kaggwa) **)

*) https://www.brainyquote.com/quotes/topics/topic_motivational.html

**) http://www.gadel.info/2011/07/keep-trying-quotes-sayings-and-proverbs.html

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Yasmin Farida

NIM : 121810101056

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsiyang berjudul "Modifikasi Metode *Newton* Tiga Langkah dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier (SPNL)" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2016

Yang menyatakan,

Yasmin Farida

NIM 121810101056

SKRIPSI

MODIFIKASI METODE *NEWTON* TIGA LANGKAH DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER (SPNL)

Oleh
Yasmin Farida
NIM. 121810101056

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Ahmad Kamsyakawuni,S.Si., M.Kom.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Modifikasi Metode *Newton* Tiga Langkah dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier (SPNL)" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas MIPA Universitas Jember.

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.
NIP 198501112008121002

Dosen Pembimbing Anggota,

Ahmad Kamsyakawuni,S.Si., M.Kom.
NIP 197211291998021001

Dosen Penguji I,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP 196610121993031001

Dosen Penguji II,

Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP 197704302005011001

Mengesahkan
Dekan,

Prof. Dr. Sujito, Ph.D.
NIP 196102041987111001

RINGKASAN

Modifikasi Metode Newton Tiga Langkah Dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier; Yasmin Farida; 121810101056; 2016; 50 Halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematikan dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Perkembangan metode numerik dalam bidang sains dan teknik masih terus berjalan seiring dengan perkembangan zaman. Para ahli matematika melakukan penelitian dan memperbarui metode-metode yang sudah ada untuk diperbaiki maupun dikembangkan. Salah satu permasalahan metode numerik yaitu pencarian solusi atau akar dari persamaan nonlinier dan sistem persamaan nonlinier. Sistem persamaan nonlinier pada umumnya sulit diselesaikan secara analitik, akan tetapi memungkinkan untuk diselesaikan menggunakan metode numerik. Metode numerik merupakan sebuah teknik yang digunakan untuk merumuskan permasalahan matematika agar dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika. Adapun metode numerik yang sering digunakan untuk mencari penyelesaian sistem persamaan nonlinier yaitu metode *Newton*.

Pada penelitian ini, dilakukan modifikasi metode *Newton* 3 langkah yang telah ditemukan oleh Cordero (2012) dengan mengganti langkah ketiga menggunakan skema integrasi orde tinggi. Permasalahan yang digunakan pada penelitian ini menggunakan beberapa persamaan dari berbagai rujukan. Terdapat 5 sistem persamaan nonlinier 3 varibel. Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mengetahui bentuk modifikasi metode *Newton* 3 langkah, mengetahui orde konvergensinya, dan mengetahui hasil solusi modifikasi metode *Newton* 3 langkah jika dibandingkan dengan metode lain.

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh solusi yang mendekati dan sama dengan solusi metode rujukan yaitu metode *Newton-Raphson*, KH, dan

Modified Newton . Selain itu, pada penelitian ini menghasilkan 8 skema baru. Skema baru yang diberi nama algoritma 1 sampai 8 ini memiliki orde konvergensi yang berbeda. Algoritma 1 sampai 4 memiliki orde konvergensi yaitu berorde 3. Setelah dilakukan peningkatan orde konvergenitas dengan menghilangkan suku C_2E_n pada ekspansi deret taylor setiap $F'(w_r)$ langkah ke-3 algoritma 1 sampai 4, didapatkan 4 algoritma baru yaitu algoritma 5 sampai 8 yang memiliki orde konvergenitas 4. Dari 8 algoritma baru tersebut, ada satu algoritma yang lebih unggul dibandingkan dengan 7 algoritma lain yaitu algoritma 6 yang merupakan modifikasi algoritma 2. Algoritma 6 tersebut mempunyai iterasi yang lebih sedikit daripada 7 algoritma yang lain.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Modifikasi Metode *Newton* Tiga Langkah dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier (SPNL)". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ahmad Kamsyakawuni,S.Si.,M.Kom selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. dan Kusbudiono, S.Si, M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;
3. Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi dan pengarahan selama penulis menjadi mahasiswa;
4. seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
5. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2016 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu permasalahan penting dalam analisis dan metode numerik dalam bidang sains dan teknik yang masih terus dikembangkan sampai saat ini adalah pencarian solusi atau akar dari persamaan nonlinier dan sistem persamaan nonlinier. Persamaan nonlinier merupakan persamaan yang biasanya berbentuk suatu polinomial maupun transenden. Penyelesaian persamaan nonlinier adalah penentuan akar-akar persamaan nonlinier, dimana akar dari sebuah persamaan $f(x) = 0$ adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol. Sedangkan sistem persamaan nonlinier merupakan kumpulan dari beberapa persamaan nonlinier yang menjadi kesatuan dalam sebuah sistem yang saling mempengaruhi.

Sistem persamaan nonlinier pada umumnya sulit diselesaikan secara analitik, akan tetapi memungkinkan untuk diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik merupakan sebuah teknik yang digunakan untuk merumuskan permasalahan matematika agar dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika (Triatmodjo, 1992). Adapun metode numerik yang sering digunakan untuk mencari penyelesaian sistem persamaan nonlinier yaitu metode *Newton*. Metode *Newton* dapat memberikan orde konvergenitas cukup baik dengan waktu yang relatif singkat apabila nilai awal yang digunakan mendekati solusi. Namun masih memungkinkan untuk mempercepat orde konvergenitas dan waktu dari metode *Newton*. Sehingga beberapa metode terbaru telah ditemukan berdasarkan pengembangan metode *Newton* oleh para ahli matematika. Hal ini dilakukan dengan tujuan untuk memperbaiki akurasi dan mempercepat konvergenitas

Dalam menyelesaikan persamaan nonlinier banyak metode telah dikembangkan seperti pada artikel yang ditulis Soheili *et al.* (2008). Soheili *et al.*

telah mengembangkan sebuah metode prediktor-korektor untuk menyelesaikan persamaan nonlinier dengan menggunakan kombinasi bobot pada titik tengah, dan formula trapesium kuadratur. Wang pada tahun 2011 menggunakan orde ke-3 dari metode iterasi *Newton-Like* untuk menyelesaikan persamaan nonlinier. Selanjutnya, Arif dan Julianto (2013) menggunakan modifikasi metode Chebyshev orde tiga untuk mencari akar ganda tanpa menggunakan turunan. Noor *et al.* (2006), telah mempertimbangkan teknik alternatif dekomposisi yang tidak melibatkan turunan dari suatu polinomial. Sedangkan, Kim *et al.* (2010), mengembangkan skema baru metode iterasi dari hasil analisis geometri dalam menyelesaikan persamaan nonlinier berdasarkan metode *Newton* dengan orde tiga.

Selain itu, beberapa metode iterasi yang telah dikembangkan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier (SPNL) dengan menggunakan berbagai teknik seperti metode *Newton*, dekomposisi Adomain yang telah diperbaiki, gangguan homotopi, dan iterasi *Householder*. Pada tahun 2012 dan 2013, Khirallah dan Hafiz telah mengembangkan metode berorde tiga *Newton-family* dan mengembangkan metode Jarrat untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier (SPNL). Darvishi *et al.* (2007), telah menciptakan dua metode baru, yaitu orde ke-3 metode *Newton* dan iterasi super kubik untuk menyelesaikan SPNL. Sedangkan, Sharma *et al.* (2011), mengembangkan dua *family* dari metode orde ke-3 untuk menyelesaikan SPNL. Selanjutnya, Cordero pada tahun 2012 telah mengembangkan metode penyelesaian SPNL berdasarkan metode yang ditemukan sebelumnya oleh Frontini dan Sormani (2003) dan mendapatkan metode berorde lima dan enam dengan prinsip prediktor-korektor 3 langkah. Terakhir, Hueso *et al*. (2009) memperkenalkan sebuah family dari metode prediktor-korektor bebas turunan ke-2 untuk menyelesaikan SPNL.

Berdasarkan uraian di atas secara eksplisit maupun implisit, hal tersebut menunjukkan bahwa masih banyak kemungkinan untuk memodifikasi metode yang sudah ada. Atas dasar artikel-artikel yang dirujuk oleh peneliti, maka peneliti tertarik unuk melakukan penelitian dengan topik yang sama. Oleh karena itu, di dalam skripsi ini, penulis akan memodifikasi metode *Newton* 3 langkah yang sudah dibahas oleh Cordero (2012) dengan menerapkan metode integrasi orde tinggi untuk mendapatkan orde konvergenitas yang lebih baik. Orde konvergenitas dan simulasi numerik akan dibahas pada uraian bab-bab selanjutnya untuk melihat kecepatan orde konvergenitas dari metode yang sedang dikembangkan.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini jika ditinjau dari latar belakang di atas adalah :

a. Bagaimana bentuk modifikasi metode *Newton* 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier?
b. Bagaimana orde konvergensi dari modifikasi metode *Newton* 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier?
c. Bagaimana hasil solusi dari modifikasi metode *Newton* 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier jika dibandingkan dengan metode *Newton-Raphson*, KH, dan *Modified Newton* ?

1.3 Tujuan

Adapun tujuan yang ingin dicapai dari penulisan skripsi ini adalah :

a. Mengetahui bentuk modifikasi metode *Newton* 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier.
b. Mengetahui orde konvergensi dari modifikasi metode *Newton* 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier.
c. Mengetahui hasil solusi dari modifikasi metode *Newton* 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier jika dibandingkan dengan metode *Newton-Raphson*, KH, dan *Modified Newton*.

1.4 Manfaat

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah memberikan informasi dan wawasan kepada pembaca dalam menyelesaikan permasalahan sistem persamaan nonlinier, selain itu juga menjadi referensi untuk pengembangan metode numerik lain yang lebih baik dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinier.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Nonlinier

Persamaan nonlinier merupakan persamaan yang biasa dalam bentuk polinomial atau transenden. Permasalahan mencari solusi persamaan nonlinier dapat dirumuskan sebagai berikut: S adalah himpunan solusi dari

$$f(x) = 0$$

Jika untuk setiap $s \in S$ sedemikian sehingga $f(s)$ sama dengan nol.

Persamaan nonlinier yang melibatkan fungsi transenden yaitu sinus, cosinus, eksponensial, logaritma dapat ditunjukkan seperti contoh berikut:

a. $cos\ 2x + \tan^{-1} x - 2 = 0$

b. Dalam bidang fisika, kecepatan ke atas sebuah roket dapat dihitung dengan persamaan :

$$v = u \ln \left| \frac{m_0}{m_0 - q_t} \right| - gt$$

Dengan v kecepatan ke atas, u kecepatan saat bahan bakar dikeluarkan, m_0 massa awal roket, q laju pemakaian bahan bakar, g percepatan gravitasi, t waktu

c. Suatu arus osilasi dalam rangkaian listrik

$$I = 10e^{-t} \sin(2\pi t)$$

dengan t waktu dan I arus.

Selain itu, persamaan nonlinier juga melibatkan fungsi non transenden, yaitu persamaan polinomial. Bentuk umum persamaan polinomial satu variabel x

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Contoh persamaan polinomial :

a. satu variabel (x), $x^2 + 4x - 3 = 0$

b. dua variabel (x dan y), $2x^2 - 5xy - y = 0$

(Devi, 2011).

2.2 Sistem Persamaan Nonlinier

Persamaan nonlinier yang berjumlah n buah persamaan dan saling terkait satu sama lain serta harus diselesaikan secara simultan dalam suatu sistem disebut sistem persamaan nonlinier. Dalam matematika, salah satu contoh masalah penyelesaian sistem persamaan nonlinier 2 variabel diaplikasikan dalam mencari titik potong antara 2 kurva, misalnya kurva parabola $(x^2 - 2x - y - 0.5 = 0)$ dan elips $(x^2 + 4y^2 - 4 = 0)$. Hingga diperoleh solusi $(-0.2, 1)$ dan $((1.9, 0.3)$, yang memenuhi 2 kurva tersebut (Devi, 2011).

Bentuk umum sistem persamaan nonlinier dapat ditulis sebagai berikut:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

untuk setiap fungsi $f_i, i = 1,2, \dots, n$ dinyatakan sebagai suatu pemetaan vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ dari suatu ruang $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$. Suatu sistem persamaan nonlinier dengan n persamaan dan n variabel tidak diketahui, direpresentasikan fungsi **F** oleh suatu pemetaan dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$ yaitu,

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

dimana $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah fungsi-fungsi koordinat **F** dan jika variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinyatakan sebagai vektor maka sistem persamaan nonlinier ditampilkan sebagai $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ (Ginting, 2013).

2.3 Metode Numerik dan Galat

Penyelesaian suatu masalah matematika menggunakan metode numerik tidak dapat menghasilkan solusi eksak (yang sebenarnya) tapi hanya dapat memberikan solusi perkiraan (hampiran). Maka dalam penyelesaian tersebut dapat dipastikan akan terdapat galat terhadap nilai eksak. Ada tiga jenis galat yaitu:

a. Galat bawaan yaitu galat yang biasanya terjadi karena kesalahan manusia (*human error*) misalnya salah dalam menyalin data, salah membaca skala, dan lain-lain
b. Galat pembulatan (*round off error*) yaitu galat yang terjadi karena beberapa angka terakhir suatu bilangan tidak diperhitungkan

c. Galat pemotongan (*truncation error*) yaitu galat yang terjadi karena perhitungan yang dilakukan tidak sesuai dengan prosedur matematika yang benar
(Nugroho, 2009).

Hubungan antara solusi eksak dengan hampirannya dapat dirumuskan sebagai berikut

$$E_s = \text{galat} = \text{nilai eksak} - \text{hampiran}$$

huruf s menunjukkan bahwa galat tersebut merupakan galat sejati. Namun, definisi di atas memiliki kelemahan yaitu tidak memperhatikan tingkat besaran dari nilai yang diukur. Oleh karena itu, rumus di atas dapat dinormalkan sehingga menjadi

$$\text{galat relatif} = \frac{\text{nilai eksak} - \text{hampiran}}{\text{nilai eksak}}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk persen seperti berikut

$$\varepsilon_s = \text{persen galat relatif} = \frac{\text{nilai eksak} - \text{hampiran}}{\text{nilai eksak}} \times 100\%$$

Rumus di atas hanya dapat digunakan jika solusi eksak diketahui, jika tidak alternatifnya adalah dengan menormalkan galat menggunakan nilai hampiran terbaik yang tersedia yaitu terhadap hampiran itu sendiri, seperti berikut

$$\begin{aligned} \varepsilon_h &= \frac{\text{galat hampiran}}{\text{hampiran}} \times 100\% \\ &= \frac{\text{hampiran sekarang} - \text{hampiran sebelumnya}}{\text{hampiran sekarang}} \times 100\% \end{aligned}$$

huruf h menyatakan bahwa galat dinormalkan terhadap nilai hampiran (Nugroho, 2009).

2.4 Integrasi Numerik

Integrasi suatu fungsi adalah operator matematika yang penting, dan dipresentasikan dalam bentuk :

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Yang merupakan integral suatu fungsi $f(x)$ terhadap variabel x yang dihitung antara batas $x = a$ sampai $x = b$. Yang dimaksud dengan integrasi adalah nilai total atau luasan yang dibatasi oleh fungsi $f(x)$ dan sumbu x, serta antara batas $x = a$ dan $x = b$ (Triatmodjo, 1992).

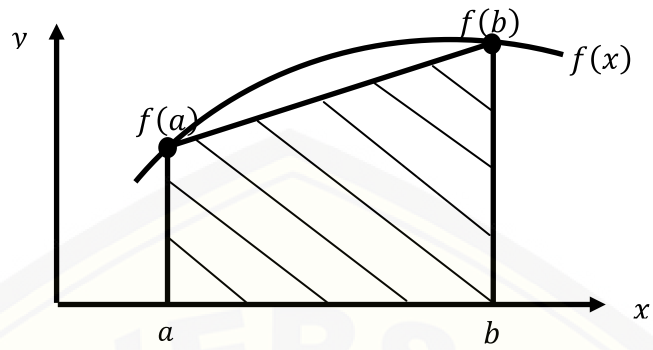
Metode integrasi numerik merupakan integral tertentu yang didasarkan pada hitungan perkiraan. Hitungan dilakukan dengan membagi luasan dalam sejumlah pias kecil. Luas total adalah jumlah dari luas semua pias. Metode ini dapat dibedakan dalam dua kelompok, yaitu metode *Newton-Cotes* dan metode *Gauss*. Metode *Newton-Cotes* dibagi dalam 2 bentuk. Metode *Newton-Cotes* yang didasarkan pada pengganti fungsi yang kompleks dari tabel data dari awal sampai akhir limit integrasi yang diketahui disebut dengan bentuk tertutup (*Newton-Cotes closed forms)* yang diestimasi dengan fungsi polinomial sederhana sehingga mudah diintegralkan. Sedangkan, jika batas integrasi dikembangkan di luar interval data yang diketahui, maka disebut dengan bentuk terbuka (*Newton-Cotes open forms*). Metode *Newton-Cotes* membagi absis dalam jarak interval yang tetap. Ada tiga metode yang termasuk *Newton-Cotes closed forms* yang banyak digunakan yaitu metode (aturan) Trapesium, Simpson 1/3, dan Simpson 3/8. Metode Gauss digunakan untuk mengintegralkan suatu fungsi (tidak untuk tabel data) (Triatmodjo, 1992).

2.4.1 Metode Trapesium

Metode trapesium merupakan metode *Newton-Cotes* order pertama. Dalam metode ini kurva lengkung dari fungsi $f(x)$ digantikan oleh garis lurus. Seperti terlihat dalam Gambar (2.1) luasan bidang di bawah fungsi $f(x)$ antara $x = a$ dan $x = b$ didekati oleh luas trapesium di bawah garis lurus yang menghubungkan $f(a)$ dan $f(b)$. Menurut rumus geometri, luas trapesium adalah lebar kali tinggi rerata.

$$I = (b - a)\frac{f(a) - f(b)}{2}$$

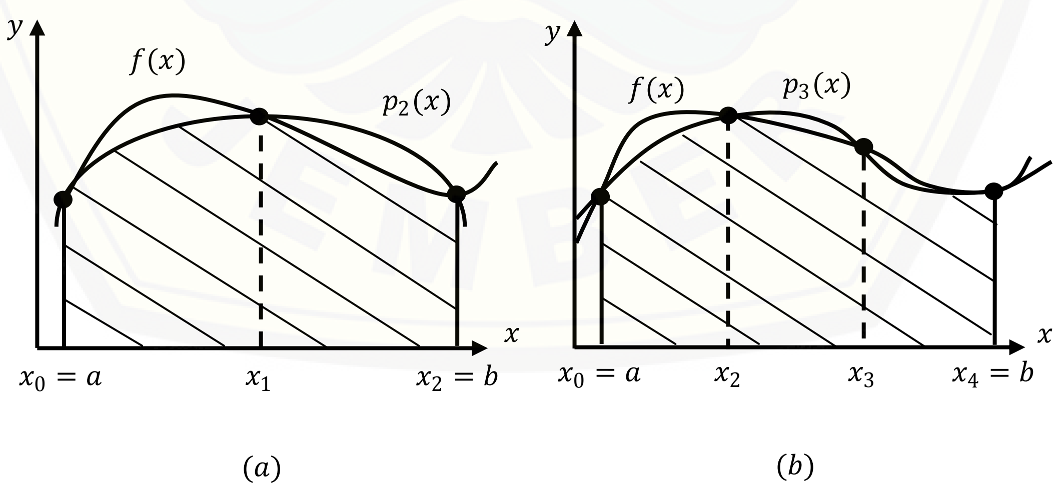
Penggunaan garis lurus untuk mendekati garis lengkung (Gambar 2.1) menyebabkan terjadinya kesalahan sebesar luasan yang tidak diarsir (Triatmodjo, 1992).



Gambar 2.1 Metode Trapesium

2.4.2 Metode Simpson

Cara lain untuk mendapatkan perkiraan yang lebih teliti adalah menggunakan polinomial order lebih tinggi untuk menghubungkan titik-titik. Misalnya, apabila terdapat satu titik tambahan di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka ketiga titik dapat dihubungkan dengan parabola (Gambar 2.2.a). Apabila terdapat dua titik tambahan dengan jarak yang sama antara $f(a)$ dan $f(b)$ maka ke-4 titik tersebut dapat dihubungkan dengan polinomial order tiga (Gambar 2.2.b). Rumus yang dihasilkan oleh integral di bawah polinomial tersebut dikenal dengan metode (aturan) Simpson (Triatmodjo, 1992).



Gambar 2.2 Aturan Simpson

a. Aturan Simpson 1/3

Di dalam aturan Simpson 1/3 digunakan polinomial Lagrange order dua (parabola) yang melalui titik $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, dan $f(x_{i+1})$ untuk mendekati fungsi seperti pada Gambar 2.2.a. Rumus Simpson dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor. Bentuk umum aturan Simpson 1/3 sebagai berikut.

$$A_i = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

dengan titik c adalah titik tengah antara a dan b.

b. Aturan Simpson 3/8

Dengan cara yang sama seperti dalam penurunan aturan Simpson 1/3, rumus umum aturan Simpson 3/8 (Gambar 2.2.b) dapat ditulis dalam bentuk :

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

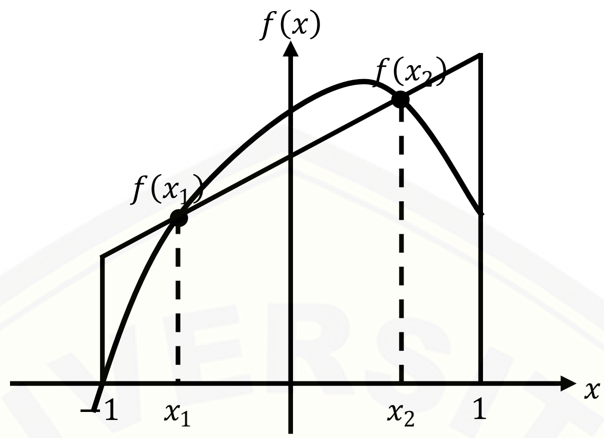
(Triatmodjo, 1992).

2.4.3 Metode Gauss Kuadratur

Di dalam aturan trapesium dan Simpson, fungsi yang diintegralkan secara numerik terdiri dari dua bentuk yaitu tabel data atau fungsi. Pada metode Gauss Kuadratur, data yang diberikan berupa fungsi. Jika pada aturan trapesium dan Simpson, integral didasarkan pada nilai-nilai di ujung-ujung pias. Sedangkan pada metode Gauss Kuadratur dihitung luasan di bawah garis lurus yang yang menghubungkan dua titik sembarang pada kurva. Dengan menetapkan posisi dari kedua titik tersebut secara bebas, maka akan bisa ditentukan garis lurus yang dapat menyeimbangkan antara kesalahan positif dan negatif. Bentuk persamaan umum metode Gauss Kuadratur adalah :

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Dalam hal ini variabel x_1 dan x_2 adalah tidak tetap, dan akan dicari seperti terlihat dalam Gambar 2.3 (Triatmodjo, 1992).



Gambar 2.3 Integrasi Gauss Kuadratur

2.4.4 Metode Integrasi Orde Tinggi

Pada skripsi ini, akan dikembangkan metode dalam pencarian solusi SPNL berdasar pada formula integrasi orde tinggi yang termasuk dalam *Newton-Cotes* baik yang *closed forms* maupun *open forms*. *Newton-Cotes closed forms* adalah metode integrasi yang batas awal dan batas akhirnya diketahui. Sedangkan *Newton-Cotes open forms*, batas integrasi diperluas di luar rentangan (Munif dan Prastyoko, 1995). Beberapa metode integrasi orde tinggi *Newton-Cotes* dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Integrasi Orde Tinggi *Newton-Cotes*

No	*Closed Form*
1	*Bode's rule* $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8f^{(6)}(\xi)h^7}{945}$
2	$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{5h}{288}(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5) - \frac{275f^{(6)}(\xi)h^7}{12096}$

No	*Open Forms*
1	$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{5h}{24}(11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4) + \frac{95f^{(4)}(\xi)h^5}{140}$
2	$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{6h}{20}(11f_1 - 14f_2 + 26f_3 - 14f_4 + 11f_5) + \frac{41f^{(6)}(\xi)h^7}{140}$

(Abramowitz dan Stegun, 1970).

2.5 Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier (SPNL)

2.5.1 Metode *Newton-Raphson*

Metode *Newton-Raphson* adalah metode untuk mencari hampiran atau pendekatan terhadap akar fungsi real. Metode ini sering konvergen dengan cepat, terutama bila iterasi dimulai cukup dekat dengan akar yang diinginkan. Secara umum, pembahasan metode *Newton-Raphson* yang digunakan menggunakan pendekatan polinomial Taylor:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Dalam penyelesaian sistem persamaan nonlinier yang terdiri dari himpunan nilai-nilai x yang secara simultan memberikan semua persamaan tersebut nilai yang sama dengan nol (Mathews, 1992).

Perhatikan sistem persamaan nonlinier di bawah ini :

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ F_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ F_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dimana penyelesaian dengan perluasan metode *Newton-Raphson* melalui ekspansi deret Taylor pada masing-masing persamaan. Dengan ekspansi deret Taylor orde pertama :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i)$$

sehingga persamaan (2.1) menjadi :

$$\begin{bmatrix}(F_1)_{i+1}-(F_1)_i\\(F_2)_{i+1}-(F_2)_i\\\vdots\\(F_n)_{i+1}-(F_n)_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial(F_1)_i}{\partial x_1}&\frac{\partial(F_1)_i}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial(F_1)_i}{\partial x_n}\\\frac{\partial(F_2)_i}{\partial x_1}&\frac{\partial(F_2)_i}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial(F_2)_i}{\partial x_n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\partial(F_n)_i}{\partial x_1}&\frac{\partial(F_n)_i}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial(F_n)_i}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(x_1)_{i+1}-(x_1)_i\\(x_2)_{i+1}-(x_2)_i\\\vdots\\(x_n)_{i+1}-(x_n)_i\end{bmatrix} \quad (2.2)$$

atau

$$\Delta F \approx J(x_1,x_2,\dots,x_n).\Delta X$$

Karena yang akan dicari adalah nilai $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)_{i+1}$ ketika $(F_1)_{i+1},(F)_{i+1},\dots,(F)_{i+1}=0$, maka persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai berikut

$$\boldsymbol{X}_{i+1}=\boldsymbol{X}_i-J(\boldsymbol{X})_i^{-1}.F(\boldsymbol{X}_i)$$

2.5.2 Metode Orde Tiga

Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah solusi dari fungsi terdiferensiabel dan pandang solusi numerik dari sistem persamaan $F(x)=0$, dimana $F\colon D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ adalah pemetaan yang *continue* pada himpunan konveks D, dan memiliki akar unik di dalam D, $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))^T, x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ dan $f_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ merupakan fungsi nonlinier, maka

$$F(x)=F(x_i)+\int_{x_i}^{x}F'(t)\,dt \quad (2.3)$$

Jika integral pada persamaan (2.3) diaproksimasi dengan menggunakan metode aturan Simpson untuk menyelesaikan integral tentu $\int_{x_i}^{x}F'(t)\,dt$, seperti pada artikel Emamzadeh dan Kajani (dalam Khirallah dan Hafiz, 2012), maka

$$\int_{x_i}^{x}F'(t)\,dt=\left[F'(x_i)+4F'\left(\frac{x_i+x}{2}\right)+F'(x)\right]\frac{(x-x_i)}{3} \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.3) dan (2.4) diperoleh,

$$F(x)=\ F(x_i)+\left[F'(x_i)+4F'\left(\frac{x_i+x}{2}\right)+F'(x)\right]\frac{(x-x_i)}{3}$$

Karena $F(x)=0$, maka

$$x = x_i - 6\left[F'(x_i) + 4F'\left(\frac{x_i+x}{2}\right) + F'(x)\right]^{-1} F(x_i) \qquad (2.5)$$

merupakan metode implisit. Untuk mengatasi kelemahan ini, seseorang biasanya menggunakan teknik prediksi dan koreksi. Dengan persamaan (2.5) dan dengan memilih metode *Newton* serta menerapkan prinsip prediktor-korektor maka Khirallah dan Hafiz akan mengikuti metode iterasi *two-step* untuk menyelesaikan SPNL sebagai berikut:

Algoritma 1: diberikan x_0 , menghitung aproksimasi solusi x_{i+1} dengan skema iterasi. $y_i = x_i - J^{-1}(x_i)F(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - 6\left[F'(x_i) + 4F'\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) + F'(y_i)\right]^{-1} F(x_i)$$

Algoritma 2: jika pendekatan integral pada persamaan (2.3) diterapkan metode *Newton-Cotes closed form* 3 titik, maka didapatkan metode sebagai berikut:

$y_i = x_i - J^{-1}(x_i)F(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - 3\left[2F'\left(\frac{3x_i + y_i}{4}\right) - F'\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) + 2F'\left(\frac{x_i + 3y_i}{4}\right)\right]^{-1} F(x_i)$$

Algoritma 3: sedangkan jika pendekatan integral pada persamaan (2.3) diterapkan metode *Newton-Cotes open form* 2 titik, maka didapatkan metode sebagai berikut:

$y_i = x_i - J^{-1}(x_i)F(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - 2\left[F'\left(\frac{2x_i + y_i}{3}\right) + F'\left(\frac{x_i + 2y_i}{3}\right)\right]^{-1} F(x_i)$$

Algoritma 4: sedangkan jika pendekatan integral pada persamaan (2.3) diterapkan metode *Newton-Cotes open form* 4 titik, maka didapatkan metode sebagai berikut:

$y_i = x_i - J^{-1}(x_i)F(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - 8\left[F'(x_i) + 3F'\left(\frac{2x_i + y_i}{3}\right) + 3F'\left(\frac{x_i + 2y_i}{3}\right) + F'(y_i)\right]^{-1} F(x_i)$$

(Khirallah dan Hafiz, 2012).

2.5.3 Metode Cordero

Metode *Newton* untuk pendekatan akar ξ dari persamaan nonlinier (atau sistem persamaan nonlinier) telah dikenal baik, sebagaimana pendekatan lainnya yang merupakan pengembangan dari metode: interpretasi geometri, linierisasi persamaan, iterasi titik tetap order dua pada artikel Dennis dan Schnable (1983) dan Gautschi (1997), atau perkembangan suatu metode baru yang muncul dari teorema *Newton*

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F'(t)\, dt \tag{2.6}$$

(Frontini dan Sormani, 2003).

Metode *Newton* dapat diperoleh dengan menggunakan formula *Newton-Cotes* kuadratur order nol (aturan persegi panjang) untuk perhitungan integral pada persamaan (2.6)

$$\int_{x_n}^{x} F'(t)\, dt \cong (x - x_n)F'(x_n)$$

dan, untuk mencari $F(x) = 0$, diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Penurunan Metode *Newton* dari rumusan integral persamaan (2.6) kurang mendapatkan perhatian sampai Weerakoom dan Fernando (2000) menggunakan perhitungan integral pada persamaan (2.6) dengan metode *Newton-Cotes* orde pertama (aturan Trapesium) sebagai berikut,

$$\int_{x_n}^{x} F'(t)\, dt \cong \frac{(x - x_n)}{2}[F'(x_n) + F'(x)]$$

untuk memperoleh metode implisit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2F(x_n)}{[F'(x_n) + F'(x_{n+1})]}$$

dan, mengganti $F'(x_{n+1})$ dengan $F'(x^*_{n+1})$, dimana

$$x^*_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Merupakan metode iterasi *Newton*, dan diperoleh metode implisit baru yang berorde tiga seperti berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2F(x_n)}{\left[F'(x_n) + F'\left(x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}\right)\right]}$$

Kemudian, Frontini dan Sormani pada tahun 2003 meneruskan hasil yang diperoleh pada artikel Weerakoom dan Fernando (2000) dengan pertimbangan, untuk perhitungan integral pada persamaan (2.6) diestimasi dengan rumus kuadratur dan menunjukkan bahwa Frontini dan Sormani memperoleh metode orde tiga dari rumus kuadratur yang digunakan sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'\left(x_n - \frac{1}{2}\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}\right)}$$

Kemudian, Cordero (2012) memodifikasi metode yang telah dikembangkan Weerakoom dan Fernando (2000) dengan menerapkan kembali skema metode *Newton* sebagai langkah ketiga atau sebagai korektor dengan menggunakan nilai dari langkah pertama dan kedua metode Weerakoom dan Fernando (2000), sehingga didapatkan metode *Cordero* yang berorde 5 sebagai berikut:

$$y^{(k)} = x^{(k)} - F'\left(x^{(k)}\right)^{-1} F(x^{(k)}),$$

$$z^{(k)} = x^{(k)} - 2[F'(y^{(k)}) + F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}),$$

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - F'\left(y^{(k)}\right)^{-1} F(z^{(k)})$$

(Sharma dan Gupta, 2014).

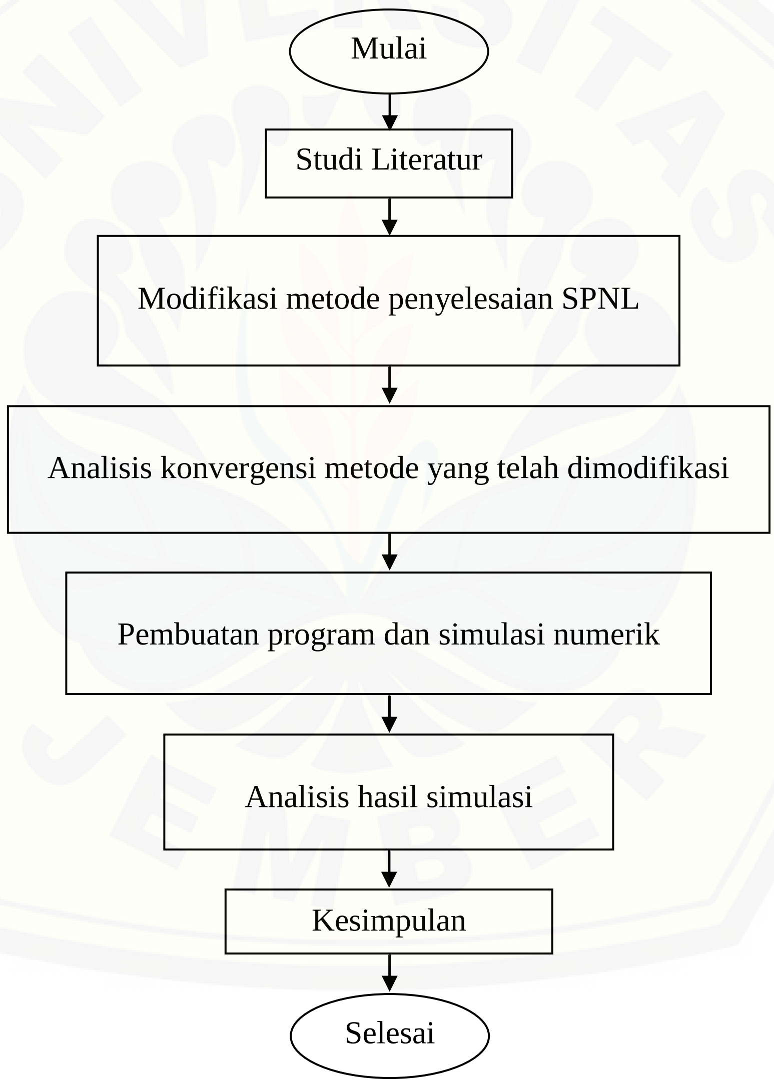
2.6 MATLAB

MATLAB (*Matrix Laboratory*) adalah aplikasi untuk menganalisis dan melakukan proses komputasi data numerik dengan menggunakan bahasa pemrograman matematika lanjutan, yang dibentuk dengan sifat dan bentuk matriks. Bahasa dalam MATLAB mampu mengintegrasikan kemampuan visual, komputasi, dan pemrograman dalam suatu lingkungan yang tunggal dan mudah digunakan. Array atau matriks menjadi standar variabel pada MATLAB.

Program MATLAB yang dikembangkan oleh Mathworks Inc. digunakan untuk menyelesaikan masalah matematis yang kerap ditemui pada bidang teknis. MATLAB juga menyediakan beberapa pilihan untuk dipelajari, misalnya visualisasi, pemrograman, atau keduanya. Dalam bukunya, Widarsono (2005) menyatakan bahwa salah satu aspek yang sangat berguna dari MATLAB adalah kemampuannya untuk menggambarkan berbagai jenis grafik sehingga data dan fungsi yang kompleks dapat tervisualisasi dengan baik. Selain itu, MATLAB juga memberikan keuntungan bagi *programmer* untuk menjadi program pembanding.

BAB 3. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang akan dilakukan untuk menyelesaikan skripsi ini digambarkan dalam skema pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema langkah-langkah penelitian

Penjelasan dari skema langkah penelitian pada Gambar 3.1 adalah sebagai berikut:

a. Studi literatur

Langkah awal yaitu dengan melakukan studi literatur yang bertujuan untuk mendapatkan informasi dari buku, jurnal, dan skripsi yang terkait dengan sistem persamaan nonlinier dan metode penyelesaiannya.

b. Modifikasi metode penyelesaian SPNL

Modifikasi metode numerik yang akan dilakukan yaitu memodifikasi metode yang sudah ditemukan oleh Cordero dengan menerapkan varian dari metode integrasi dan integrasi orde tinggi pada langkah ketiga.

c. Analisis konvergensi metode yang telah dimodifikasi

Analisis konvergensi dilakukan untuk mengetahui orde kesalahan atau galat dalam skema numerik metode yang sedang diteliti. Hal ini dapat menggambarkan syarat-syarat dalam pencapaian konvergenitas dari skema yang sedang diteliti.

d. Membuatan program

Pembuatan program menggunakan *softwere* MATLAB 2009a. Pada langkah ini dibuat desain dan *script* program untuk mencari penyelesaian sistem persamaan nonlinier secara komputasi. Kemudian program akan diuji untuk menemukan kesalahan yang ada.

Input: sistem persamaan nonlinier, nilai awal, galat, dan iterasi maksimal

Output: hasil output dari program tersebut adalah semua solusi.

e. Analisis hasil simulasi

Peneliti akan menganalisis hasil yang diperoleh menggunakan program. Analisis dilakukan dengan melihat hasil perbandingan metode yang telah dimodifikasi dan metode yang sudah ada.

f. Kesimpulan

Kesimpulan dibuat berdasarkan hasil analisis konvergensi dan juga memberikan jawaban dari tujan penulisan skripsi ini.

BAB 5. PENTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab 4, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

a. Penelitian yang telah dilakukan dalam memodifikasi metode *Newton* 3 langkah dengan menerapkan integrasi pada langkah ke-3 sehingga menghasilkan 4 skema numerik baru yang berorde 3 dengan langkah 1 dan 2 yang sama seperti metode *Cordero* pada halaman 27 persamaan (4.1) yaitu:

1. Algoritma 1: $x_{i+1} = y_i - \frac{45}{2}[7F'\left(\frac{5x_i+z_i}{6}\right) + 32F'\left(\frac{4x_i+2z_i}{6}\right) + 12F'\left(\frac{x_i+z_i}{2}\right) + 32F'\left(\frac{2x_i+4z_i}{6}\right) + 7F'\left(\frac{x_i+5z_i}{6}\right)]^{-1}F(y_i)$,
2. algoritma 2:
$x_{i+1} = y_i - \frac{288}{5}\left[19F'\left(\frac{6x_i+z_i}{7}\right) + 75F'\left(\frac{5x_i+2z_i}{7}\right) + 50F'\left(\frac{4x_i+3z_i}{2}\right) + 50F'\left(\frac{3x_i+4z_i}{7}\right) + 75F'\left(\frac{2x_i+5z_i}{7}\right) + 19F'\left(\frac{x_i+6z_i}{7}\right)\right]^{-1} F(y_i)$
3. algoritma 3: $x_{i+1} = y_i - \frac{24}{5}\left[11F'\left(\frac{4x_i+z_i}{5}\right) + F'\left(\frac{3x_i+2z_i}{5}\right) + F'\left(\frac{2x_i+3z_i}{5}\right) + 11F'\left(\frac{x_i+4z_i}{5}\right)\right]^{-1} F(y_i)$, dan
4. algoritma 4: $x_{i+1} = y_i - \frac{20}{6}\left[11F'\left(\frac{5x_i+z_i}{6}\right) - 14F'\left(\frac{4x_i+2z_i}{6}\right) + 26F'\left(\frac{x_i+z_i}{2}\right) - 14F'\left(\frac{2x_i+4z_i}{6}\right) + 11F'\left(\frac{x_i+5z_i}{6}\right)\right]^{-1} F(y_i)$.

Kemudian ke-4 algoritma tersebut dianalisis dan dilakukan modifikasi pada interpolasi titik-titiknya sehingga didapat 4 algoritma baru yang berorde 4 dengan variasi interpolasi langkah ke-3 yaitu:

1. Algoritma 5: $x_{i+1} = y_i - \frac{45}{2}\left[7F'\left(\frac{23x_i - 15z_i}{8}\right) + 32F'\left(\frac{-9x_i + 17z_i}{8}\right) + 12F'\left(\frac{4x_i + 4z_i}{8}\right) + 32F'\left(\frac{4x_i + 4z_i}{8}\right) + 7F'\left(\frac{-7x_i + 15z_i}{8}\right)\right]^{-1} F(y_i)$,
2. algoritma 6:
$x_{i+1} = y_i - \frac{288}{5}\left[19F'\left(\frac{25x_i - 21z_i}{4}\right) + 75F'\left(\frac{2x_i + 2z_i}{4}\right) + 50F'\left(\frac{-18x_i + 22z_i}{4}\right) + 50F'\left(\frac{-19x_i + 23z_i}{4}\right) + 75F'\left(\frac{10x_i - 6z_i}{4}\right) + 19F'\left(\frac{25x_i - 21z_i}{4}\right)\right]^{-1} F(y_i)$,
3. algoritma 7: $x_{i+1} = y_i - \frac{24}{5}\left[11F'\left(\frac{7x_i - z_i}{6}\right) + F'\left(\frac{2x_i + 4z_i}{6}\right) + F'\left(\frac{-2x_i + 8z_i}{6}\right) + 11F'\left(\frac{-7x_i + 13z_i}{6}\right)\right]^{-1} F(y_i)$,
4. algoritma 8:
$x_{i+1} = y_i - \frac{20}{6}\left[11F'\left(\frac{28x_i - 20z_i}{8}\right) - 14F'\left(\frac{11x_i - 3z_i}{8}\right) + 26F'\left(\frac{-5x_i + 13z_i}{8}\right) - 14F'\left(\frac{19x_i - 11z_i}{8}\right) + 11F'\left(\frac{22x_i - 14z_i}{8}\right)\right]^{-1} F(y_i)$.

b. Bila dibandingkan dengan metode numerik yang dirujuk oleh peneliti pada Bab 4, algoritma baru tersebut menghasilkan iterasi yang sama. Namun untuk algoritma 6, solusi numerik yang dihasilkan lebih baik dari solusi numerik yang lain. Akan tetapi secara keseluruhan algoritma yang diteliti memiliki akurasi yang tinggi daripada metode *Newton*.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, disarankan untuk peneliti selanjutnya mengembangkan lagi metode-metode yang sudah ada, misalnya dengan menggunakan skema integrasi orde tinggi 7 titik, 8 titik, atau memodifikasi lagi metode *Newton* 3 langkah yang sudah ada menjadi metode yang baru.

DAFTAR PUSTAKA

Abramowitz, M. dan Stegun, I. A. 1970. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 9th printing edition. Dover Publications, Inc., 180 Varick Street, New York, N.Y. 10014.

Arif, M. Z. & Julianto, B. 2013. Modifikasi Metode Chebyshev Orde Tiga untuk Mencari Akar Ganda Tanpa Menggunakan Turunan. *Majalah Ilmiah Matematika dan Terapan* **13**: 070 – 079.

Azhari, Z. 2016. "Penerapan Algoritma Genetika Pada Penyelesaian Sistem Persamaan Linier". Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Universitas Negeri Jember.

Cordero, Hueso, Martinez, dan Torregrosa. 2012. "Increasing The Convergence Order of An Iterative Method for Nonlinear System". *Applied Mathematics Letters*, **25**: 2369-2374.

Devi, F. M. 2011. "Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier dengan Metode Jaringan Syaraf Tiruan Hopfield". Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jakarta: Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah.

Darvishi, M. T. dan Barati, A. 2007. "A Third-Order Newton-type Method to Solve Systems of Nonlinear Equations". *Appl. Math. Comput*. **187**: 630-635.

Darvishi, M. T. dan Barati, A. 2007. "Super Cubic Iterative Methods to Solve Systems of Nonlinear Equations". *Appl. Math. Comput*. **188**: 1678-1685.

Dennis, J. E. dan Schnable, R. B. 1983. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equation*. New York: Prentice-Hall.

Frontini, M. dan Sormani, E. 2003. "Some variant of Newton's method with third-order convergence". *Applied Mathematics and Computation*, **140**: 419-426.

Gautschi, W. 1997. *Numerical Analysis: An Introduction*. Birkhauser.

Ginting, B. 2013. "Solusi Numerik Sistem Persamaan Nonlinier dengan Menggunakan Metode Homotopy". *Prosiding Semirata FMIPA Universitas Lampung*. 83-87.

Hueso, J. L., Martines, E., dan Torregrosa, J. R. 2009. “Third Order Iterative Methods Free from Second Derivative for Nonlinear Systems”. *Applied Mathematics and Computation*. **215**: 58-65.

Khirallah, M. Q. dan Hafiz, M. A. 2012. “Novel Three Order Methods for Solving a System of Nonlinear Equations”. *Bulletin of Mathematical Sciences & Applications*. **1** (2): 1-14.

Khirallah, M. Q. dan Hafiz, M. A. 2013. “Solving System of Nonlinear Equations Using Family of Jarrat Methods”. *International Journal of Differential Equations and Applications*. **12** (2): 69-83.

Kim, Y. L., Chun, C., dan Kim, W. 2010. “Some Third-Order Curvature Based Methods for Solving Nonlinear Equations. *Studies in Nonlinear Sciences*. **1** (3): 72-76.

Mathews, J. H. 1992. *Numerical Method*. Prentice-hall Internasional, Inc.

Noor, M. A. dan Noor, K. I. 2006. “Improved Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations. *Appl. Math. Comput.* **183**: 774-779.

Nugroho, D. B. 2009. *Diktat Kuliah Metode Numerik*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

Sharma, J. R. dan Sharma, R. 2011. “Some Third Order Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations”. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*. **5** (12): 1864-1871.

Sharma, J. R. dan Gupta, P. 2014. “An efficient fifith order method for solving system of nonlinear equations”. *Computers and Mathematics with Applications*, **67**: 591-601.

Soheili, A. R., Ahmadian, S. A., dan Naghipoor, J. 2008. “A Family of Predictor-Corrector Methods Based on Weight Combination of Quadratures for Solving Nonlinear Equations”. *International Journal of Nonlinear Science*. **6** (1): 29-33.

Triatmodjo, B. 1992. *Metode Numerik*. Yogyakarta : Peta Offset.

Utami, N. N. R., Widana, I. N., dan Asih, N. M. 2013. “Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinier Menggunakan Metode *Newton-Raphson* dan Metode Jacobian”. *E-Jurnal Matematika*. **2** (2): 11-17.

Wang, P. 2011. “A Third-Order Family of Newton-Like Iteration Methods for Solving Nonlinear Equations. *Journal of Numerical Mathematics and Stochastics*. **3** (1): 13-19.

Widiarsono, T., 2005. *Tutorial Praktis Belajar MATLAB*. Jakarta.

Weerakoom, S. dan Fernando, T. G. I. 2000. “A Variant of Newton’s Method with Accelerated Third-Order Convergence”. *Appl. Math. Lett.* **13**: 87-93.