



**PENERAPAN METODE RUNGE-KUTTA DAN KONTROL OPTIMAL  
PADA PENGENDALIAN HAYATI HAMA PENGGEREK  
TANAMAN JAGUNG**

**SKRIPSI**

Oleh

**Ilham Agung Nugroho  
NIM 121810101083**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2016**



**PENERAPAN METODE RUNGE-KUTTA DAN KONTROL OPTIMAL  
PADA PENGENDALIAN HAYATI HAMA PENGGEREK  
TANAMAN JAGUNG**

**SKRIPSI**

disusun guna memenuhi Tugas Akhir sebagai salah satu persyaratan  
akademik pada program sarjana (S1) Jurusan Matematika  
FMIPA Universitas Jember

Oleh

**Ilham Agung Nugroho**  
**NIM 121810101083**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2016**

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Allah SWT yang telah memberikan kehidupan, pertolongan dan kasih sayang-Nya;
2. Ayahanda Sumadi, S.Pd dan Ibunda Laminem tercinta yang telah sabar mendidik, memberi doa, memberi kasih sayang dan motivasi yang luar biasa;
3. saudariku Fifin Rahayu Kurnialam, S.Pd yang telah memberikan doa dan dukungan;
4. para dosen dan guru sejak taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi yang telah membimbing dan membagi ilmu dengan sabar dan tulus;
5. Almamater Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, SMAN 1 Sukapura, SMPN 1 Sukapura, SDN Ngepung, dan TK Darma Wanita yang telah menjadi sarana menuntut ilmu.

## MOTTO

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kemampuannya.”

(*Qs. Al-Baqarah: 286*)\*)

“Orang-orang hebat di bidang apapun bukan baru bekerja karena mereka terinspirasi, namun mereka menjadi terinspirasi karena mereka lebih suka bekerja, mereka tidak menyia-nyiakan waktu untuk menunggu inspirasi.”

(Ernest Newman)\*\*)

---

\*) Departemen Agama Republik Indonesia, 2002. Al-Qur’an Al-Karim dan Terjemahannya. Semarang: PT Karya Toha Semarang.

\*\*\*) <http://www.maribelajarbk.web.id/2015/03/contoh-motto-terbaru-dalam-skripsi.html> [18 Desember 2016]

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ilham Agung Nugroho

NIM : 121810101083

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Penerapan Metode Runge-Kutta dan Kontrol Optimal pada Pengendalian Hayati Hama Penggerek Tanaman Jagung” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum diajukan dalam institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2016

Yang menyatakan,

Ilham Agung Nugroho  
NIM 121810101083

**SKRIPSI**

**PENERAPAN METODE RUNGE-KUTTA DAN KONTRO OPTIMAL  
PADA PENGENDALIAN HAYATI HAMA PENGGEREK  
TANAMAN JAGUNG**

Oleh

**Ilham Agung Nugroho**

**NIM 121810101083**

**Pembimbing**

**Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc**

**Dosen Pembimbing Anggota : M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc**

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul “Penerapan Metode Runge-Kutta dan Kontrol Optimal pada Pengendalian Hayati Hama Penggerek Jagung” telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas  
Jember

**Tim Penguji:**

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc  
NIP. 196610121993031001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc  
NIP. 198501112008121002

Penguji I,

Penguji II,

Kusbudiono, S.Si., M.Si  
NIP. 197704302005011001

Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom  
NIP. 197211291998021001

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.  
NIP. 196102041987111001



## RINGKASAN

**Penerapan Metode Runge-Kutta dan Kontrol Optimal pada Pengendalian Hayati Hama Penggerek Tanaman Jagung;** Ilham Agung Nugroho, 121810101083; 2016; 47 halaman; Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Model Matematika *predator-prey* merupakan interaksi dua populasi, yaitu mangsa dan pemangsa. Dalam tugas akhir ini akan membahas model matematika *predator-prey* dapat diterapkan pada pertumbuhan populasi telur hama penggerek batang jagung. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui kestabilan dari model pertumbuhan populasi hama penggerek batang jagung dan di terapkan kontrol optimal pengendalian secara hayati. Kemudian diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Pada penelitian ini terdapat beberapa langkah yang akan dilakukan. Langkah yang pertama adalah melakukan analisis kestabilan pada model. Langkah yang selanjutnya adalah mencari kontrol optimal pada model. Langkah selanjutnya menyelesaikan model matematika pertumbuhan populasi hama penggerek batang jagung secara numerik dengan metode Runge-Kutta orde empat. Langkah selanjutnya mensimulasikan model tersebut dengan menggunakan program. Langkah terakhir adalah menganalisis hasil simulasi pada model matematika pertumbuhan populasi hama penggerek batang jagung dan kontrol optimal pengendalian dengan metode Runge-Kutta orde empat.

Model matematika pertumbuhan populasi hama penggerek batang jagung merupakan sistem persamaan differensial non linier orde satu. Untuk menyelesaikan kestabilan dari titik setimbang pada model, maka sistem persamaan differensial non linier orde satu tersebut dirubah menjadi persamaan differensial linier dengan menggunakan matriks Jacobi. Untuk menentukan sifat kestabilan dari titik setimbang model, maka perlu dicari terlebih dahulu nilai eigen-nya. Setelah



didapatkan nilai eigen, dapat ditentukan kestabilan dari titik setimbang tersebut berdasarkan kriteria kestabilan.

Kontrol optimal pengendalian secara hayati pada model matematika pertumbuhan populasi hama penggerek batang jagung direpresentasikan dengan fungsi  $U$ . Fungsi dari  $U$  adalah sebagai konstanta pengontrol yang menggerakkan jumlah populasi di bawah *Economic Injury Level* (EIL) dan penyelesaian analisis kontrol optimal populasi menggunakan *Linear feedback control* dan matriks Riccati.

Penyelesaian persamaan differensial biasa tersebut diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde empat, maka analisis penyelesaian hasil simulasi didapatkan 3 titik kesetimbangan yaitu titik setimbang kepunahan setiap individu ( $E_1$ ), titik setimbang kepunahan telur yang terparasit ( $E_2$ ), dan titik setimbang tidak ada yang punah ( $E_3$ ). Kemudian disimulasikan kontrol optimal pada model matematika pertumbuhan populasi telur hama penggerek batang jagung sebagai strategi pengendalian hama secara hayati melalui proses parasitasi telur hama penggerek batang jagung.

## PRAKATA

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga skripsi yang berjudul “Penerapan Metode Runge-Kutta dan Kontrol Optimal pada Pengendalian Hayati Hama Penggerek Tanaman Jagung” ini dapat terselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap melimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, para sahabat, dan umat pengikutnya. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan strata (S1) di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga untuk membimbing saya dalam penulisan skripsi ini dengan sangat sabar, tulus dan perhatian;
2. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan Bapak Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang sangat bermanfaat dan membangun untuk penyempurnaan skripsi ini;
3. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Akademik yang memberikan banyak masukan dan dukungan selama menjalani perkuliahan;
4. Ayahanda Sumadi, S.Pd dan Ibunda Laminem tercinta yang sabar mendidik, membimbing, memberi doa, kasih sayang, dan dukungan yang luar biasa yang selalu bisa saya rasakan setiap saat serta menjadi motivasi utama dalam hidup saya untuk berjuang sampai saat ini;
5. saudariku Fifin Rahayu Kurnialam, S.Pd yang selalu memberikan doa dan dukungan serta menjadi motivasi saya untuk terus berjuang sampai saat ini;

6. seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
7. sahabat-sahabat (BALSEM) Shella Ariska Susianti, Lailatul Nurfadila, dan Hanief Anggara yang selalu mendukung, membantu, memberi motivasi dan nasehat, serta berbagi suka dan duka;
8. sahabat-sahabat (BALAKENEM) dan teman-teman se-angkatan BATHICS'12 yang selalu kompak dalam memberikan semangat dari awal kuliah sampai sekarang;
9. teman-teman KKN 75 yang sudah memberikan rasa kebersamaan dan pengalaman-pengalaman baru kepada saya;
10. serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semuga semua kebaikan yang telah diberikan akan dibalas oleh Allah SWT.

Penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak demi penyempurnaan skripsi ini. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberi manfaat bagi semua pihak.

Jember, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

|   | Halaman |
|---|---------|
| <b>HALAMAN JUDUL</b> .....  | i       |
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....  | iii     |
| <b>HALAMAN MOTTO</b> .....  | iv      |
| <b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....   | v       |
| <b>HALAMAN PEMBIMBING</b> .....   | vi      |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....   | vii     |
| <b>RINGKASAN</b> .....  | viii    |
| <b>PRAKATA</b> .....  | x       |
| <b>DAFTAR ISI</b> .....   | xii     |
| <b>DAFTAR GAMBAR</b> .....  | xiv     |
| <b>DAFTAR TABEL</b> .....   | xv      |
| <b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....  | xvi     |
| <b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....   | 1       |
| <b>1.1 Latar Belakang</b> .....   | 1       |
| <b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....  | 2       |
| <b>1.3 Batasan Masalah</b> .....  | 3       |
| <b>1.4 Tujuan</b> .....   | 3       |
| <b>1.5 Manfaat</b> .....  | 3       |
| <b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....  | 4       |
| <b>2.1 Persamaan Differensial</b> .....   | 4       |
| <b>2.2 Model Matematika Pertumbuhan Populasi Telur Hama<br/>    Penggerek dan Parasitoidnya</b> ..... | 5       |
| <b>2.3 Titik Kesetimbangan Model <i>Predator-Prey</i></b> .....                                       | 6       |
| <b>2.4 Kriteria Routh-Hurwitz</b> .....   | 8       |
| <b>2.5 Persamaan <i>Linear Feedback Control</i> dan Matriks Riccati</b> .....                         | 9       |
| <b>2.6 Metode Runge-Kutta</b> .....   | 11      |
| <b>2.7 Hama Tanaman Jagung dan Musuh Alaminya</b> .....   | 13      |
| 2.7.1 Hama Penggerek Batang Jagung.....   | 13      |

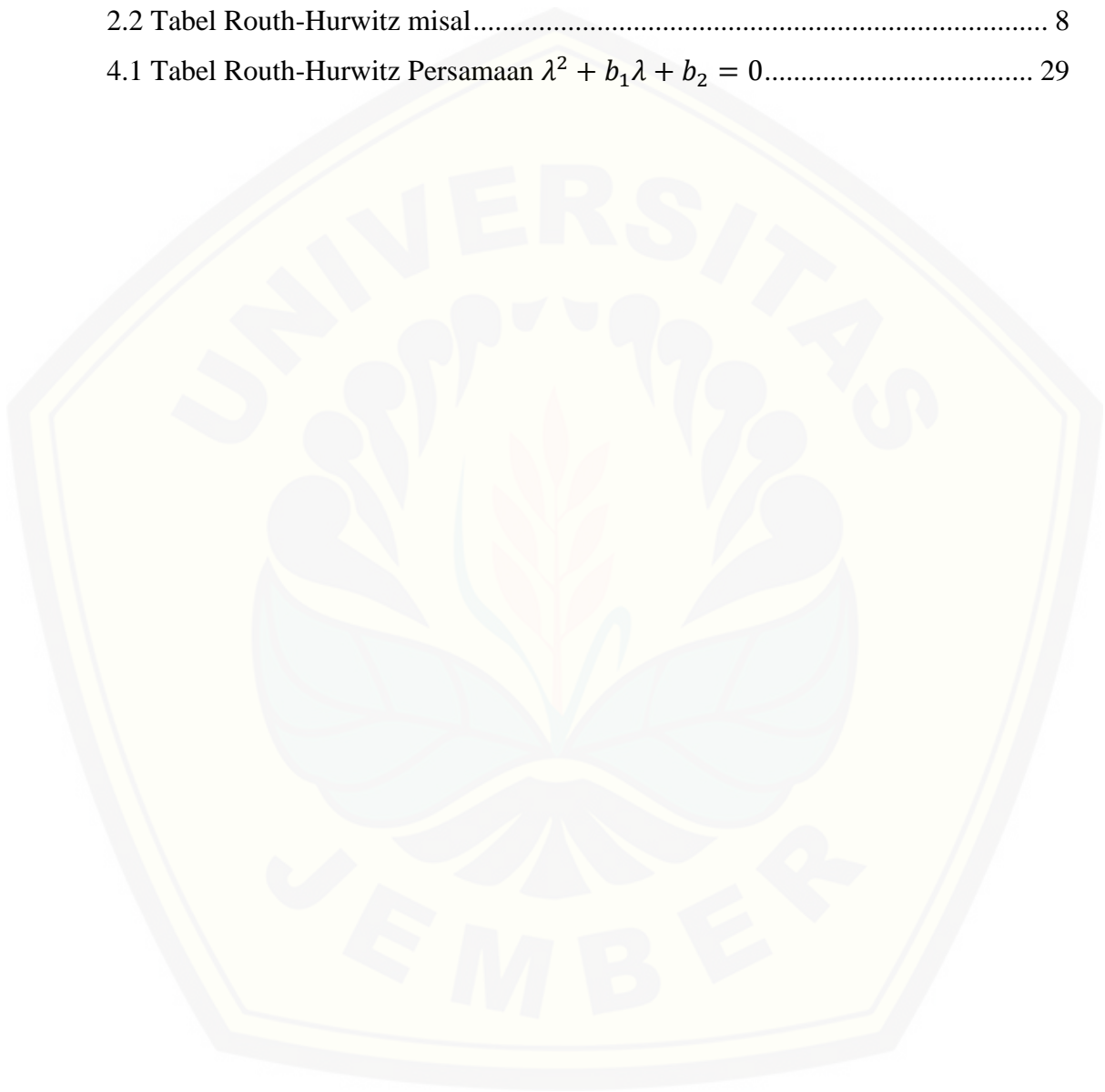
|  |           |
|--|-----------|
| 2.7.2 Musuh Alami (Agen Hayati).....                                       | 14        |
| <b>BAB 3. METODE PENELITIAN.....</b>                                       | <b>15</b> |
| <b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>                                    | <b>19</b> |
| <b>4.1 Model Matematika <i>Predator-Prey</i> Penggerek Jagung.....</b>     | <b>19</b> |
| <b>4.2 Titik Keseimbangan.....</b>   | <b>20</b> |
| 4.2.1 Titik Setimbang Kepunahan Setiap Populasi.....                       | 21        |
| 4.2.2 Titik Setimbang Kepunahan Telur Terparasit.....                      | 21        |
| 4.2.3 Titik Setimbang Tidak Ada Kepunahan.....                             | 23        |
| <b>4.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan.....</b>               | <b>24</b> |
| 4.3.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E_1$ .....                   | 25        |
| 4.3.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E_2$ .....                   | 26        |
| 4.3.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E_3$ .....                   | 27        |
| <b>4.4 Kontrol Optimal Pengendalian Model.....</b>                         | <b>29</b> |
| <b>4.5 Penyelesaian dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat.....</b>          | <b>32</b> |
| <b>4.6 Pembahasan.....</b>   | <b>34</b> |
| 4.6.1 Simulasi Numerik dan Data.....                                       | 34        |
| 4.6.2 Simulasi Numerik Pada Hama dan Parasitoid Tanpa<br>Pengendalian..... | 34        |
| 4.6.3 Simulasi Numerik dengan Pengendalian.....                            | 38        |
| 4.6.4 Analisis Hasil Simulasi.....   | 41        |
| <b>BAB 5. PENUTUP.....</b>   | <b>44</b> |
| <b>5.1 Kesimpulan.....</b>   | <b>44</b> |
| <b>5.2 Saran.....</b>  | <b>45</b> |
| <b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>   | <b>46</b> |
| <b>HALAMAN LAMPIRAN.....</b>   | <b>48</b> |

DAFTAR GAMBAR

|  | Halaman |
|--|---------|
| 3.1 Skema Metode Penelitian.....   | 15      |
| 4.1 Perubahan jumlah populasi telur ( $x$ ), telur terparasit ( $y$ ), dan populasi larva ( $z$ )<br>untuk $\beta = 0.13$ dan $\alpha = 0.0001723$ .....   | 35      |
| 4.2 Perubahan jumlah populasi telur ( $x$ ), telur terparasit ( $y$ ), dan populasi larva ( $z$ )<br>untuk $\beta = 0.139$ dan $\alpha = 0.0001723$ .....  | 36      |
| 4.3 Perubahan jumlah populasi telur ( $x$ ), telur terparasit ( $y$ ), dan populasi larva ( $z$ )<br>untuk $\beta = 0.1908$ dan $\alpha = 0.0001723$ ..... | 37      |
| 4.4 Perubahan jumlah populasi yang terkontrol dengan teknik kontrol optimal titik<br>ekuilibrium ( $x^*$ , $y^*$ , $z^*$ ) .....                           | 39      |
| 4.5 Perubahan dinamika setrategi kontrol optimal.....  | 40      |

**DAFTAR TABEL**

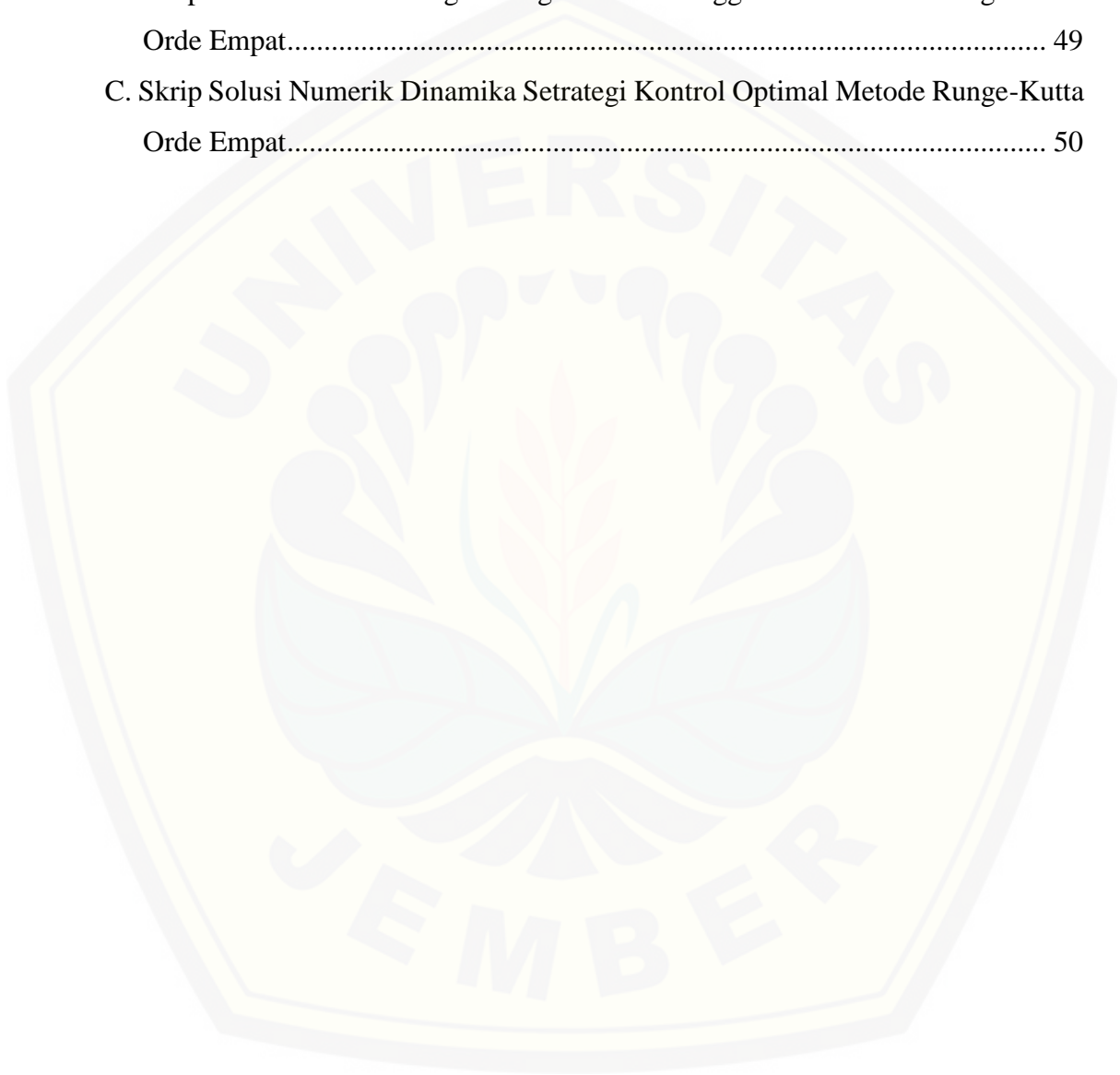
|  | Halaman |
|--|---------|
| 2.1 Kriteria Kestabilan .....  | 7       |
| 2.2 Tabel Routh-Hurwitz misal.....   | 8       |
| 4.1 Tabel Routh-Hurwitz Persamaan $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ ..... | 29      |





**DAFTAR LAMPIRAN**

|   |    |
|---|----|
| A. Skrip Solusi Numerik Tanpa Pengendalian Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat.....     | 48 |
| B. Skrip Solusi Numerik dengan Pengendalian Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat.....    | 49 |
| C. Skrip Solusi Numerik Dinamika Setrategi Kontrol Optimal Metode Runge-Kutta Orde Empat..... | 50 |



## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Jagung (*zea mays*) merupakan salah satu tanaman pangan dunia yang terpenting bagi kelangsungan hidup manusia, selain gandum dan padi. Jagung digunakan sebagai sumber karbohidrat utama di berbagai negara seperti negara-negara di kawasan Amerika Tengah, dan Amerika Selatan. Jagung juga menjadi alternatif sumber pangan di Amerika Serikat. Berapa penduduk daerah di Indonesia juga menggunakan jagung sebagai pangan pokok, dan menjadi salah satu komoditas pertanian yang penting di Indonesia.

Selain dimanfaatkan sebagai pangan pokok, jagung juga dapat digunakan sebagai pakan ternak dan bahan baku berbagai industri. Hal tersebut menyebabkan kebutuhan jagung meningkat. Menurut informasi Badan Pusat Statistik tahun 2015 produksi jagung diperkirakan mencapai 976.989 ton pipilan kering. Produksi ini mengalami penurunan sebanyak 70.088 ton atau turun sebesar 6,69% dibandingkan dengan produksi jagung pada tahun 2014 yang mencapai 1.047.077 ton pipilan kering. Penurunan produksi jagung disebabkan adanya penurunan luas panen sebesar 9,72% atau turun seluas 13.897 hektar dari 142.964 hektar tahun 2014 menjadi 129.067 hektar tahun 2015.

Penyebab turunnya produksi jagung disebabkan oleh banyak faktor, diantaranya faktor fisik dan faktor biologis. Faktor fisik dapat berupa iklim, jenis tanaman, dan lahan yang digunakan, sedangkan faktor biologis dapat berupa varietas jagung, hama, penyakit dan gulma. Namun faktor utama yang berperan terbesar dalam penurunan produksi jagung adalah hama penggerek batang. Penggerek batang dapat menurunkan 20% hingga 80% produksi jagung (Nonci, 2004), sehingga perlu di waspadai populasi dari hama penggerek batang.

Mengendalikan populasi hama penggerek batang dapat dilakukan dengan berbagai cara, yaitu pemberian insektisida dan pengendalian hayati. Namun pemberian insektisida secara berlebih dapat merusak ekosistem dari lahan jagung, sedangkan pengendalian hayati berupa penyebaran musuh utama hama penggerek batang lebih ramah lingkungan. Beberapa penelitian telah mengkaji tentang

pengendalian hayati untuk mengendalikan hama, yaitu dengan cara pelepasan musuh (*predator*) alami. Geremias dan Parra (2014) meneliti Penyebaran *Trichogramma galloi* pada tanaman jagung untuk mengontrol populasi hama *Diatraea saccharalis*. Keberadaan musuh alami dapat menurunkan populasi dari hama penggerek batang tanpa merusak ekosistem di sekitar area tanaman jagung.

Pengendalian hama dapat dimodelkan secara matematis yang biasa disebut sebagai model *predator-prey*, yang mana hama sebagai mangsa (*prey*) dan musuh dari hama sebagai pemangsa (*predator*). Model matematika *predator-prey* merupakan persamaan differensial yang dapat diselesaikan secara aproksimasi menggunakan metode numerik. Banyak metode numerik yang dapat digunakan, salah satunya adalah metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta merupakan suatu metode yang dapat menyelesaikan persamaan differensial secara numerik atau pendekatan, sehingga mendapatkan penyelesaian yang mendekati penyelesaian secara eksak atau analitik. Penelitian yang telah mengkaji pengendalian hayati secara matematis adalah Rafikov dan de Holanda Limeira (2012) meneliti pengendalian hayati model matematika telur hama penggerek tanaman tebu.

Berdasarkan uraian di atas, maka hal yang menjadi bahasan yang menarik adalah bagaimana cara mengendalikan hama tanaman jagung secara alami dengan teori kontrol optimal melalui suatu penyelesaian model matematis dengan metode Runge-Kutta. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk menganalisa kestabilan dan menerapkan teori kontrol optimal model *predator-prey* pada pengendalian hayati hama tanaman jagung, serta mensimulasikan dengan metode Runge-Kutta.

## 1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

- a. Bagaimana penyelesaian model matematika *predator-prey* hama penggerek tanaman jagung?
- b. Bagaimana analisis kestabilan dari model *predator-prey* pada hama penggerek tanaman jagung?

- c. Bagaimana bentuk fungsi kontrol optimal dari metode pengendalian hama penggerek tanaman jagung?
- d. Bagaimana solusi numerik metode Runge-Kutta?

### 1.3 Batasan Masalah

Dalam penulisan tugas akhir ini hanya memiliki batasan yaitu penerapan metode Runge-Kutta pada pengendalian hayati telur hama penggerek tanaman jagung.

### 1.4 Tujuan

Tujuan yang akan dicapai dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

- a. Menyelesaikan model matematika *predator-prey* pada hama penggerek tanaman jagung.
- b. Menentukan analisis kestabilan dari model *predator-prey* pada hama penggerek tanaman jagung.
- c. Menentukan fungsi kontrol optimal dari metode pengendalian hama penggerek tanaman jagung.
- d. Menentukan solusi numerik metode Runge-Kutta pada pengendalian hayati hama penggerek tanaman jagung.

### 1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diambil dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

- a. Menambah wawasan tentang model matematika pada bidang biologi yang berhubungan dengan *predator-prey*.
- b. Memberikan informasi tentang kestabilan model *predator-prey* hama penggerek tanaman jagung.
- c. Memberikan informasi tentang teori kontrol optimal dari metode pengendalian hama penggerek tanaman jagung.
- d. Menentukan solusi numerik metode Runge-Kutta pada pengendalian hayati hama penggerek tanaman jagung.

## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas mengenai dasar teori untuk menganalisis kestabilan dan kontrol optimal model matematika *predator-prey* pada pengendalian hayati hama pengerek tanaman jagung menggunakan metode Runge-Kutta.

### 2.1 Persamaan Differensial

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi. Persamaan differensial dapat dibedakan menjadi dua macam yang tergantung pada jumlah variabel bebas. Apabila persamaan tersebut mengandung hanya satu variabel bebas disebut dengan persamaan differensial biasa, dan jika mengandung lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan differensial parsial (Triatmodjo, 1992).

Sistem persamaan differensial adalah suatu sistem yang memuat  $n$  buah persamaan differensial, dengan  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui, dimana  $n$  merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan differensial yang satu dengan yang lain saling berkaitan dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu  $n$  persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Dengan  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel bebas dan  $t$  adalah variabel terikat, sehingga  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n(t)$ , dimana  $\frac{dx_n}{dt}$  merupakan derivatif fungsi  $x_n$  terhadap  $t$ , dan  $g$ , adalah fungsi yang tergantung pada variabel  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$  dan  $t$  (Neuhauser, 2004).



Berdasarkan kelinieran dari peubah tak bebasnya, persamaan differensial biasa (PDB) dapat dibedakan menjadi persamaan differensial biasa linier dan persamaan differensial biasa non linier. Disebut persamaan differensial biasa linier apabila dapat dibedakan menjadi persamaan berikut

$$a_n(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \quad (2.1)$$

dan disebut sebagai persamaan differensial biasa non linier apabila tidak dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.1) (Hidayat, 2006).

## 2.2 Model Matematika Pertumbuhan Populasi Telur Hama Penggerek dan Parasitoidnya

Populasi suatu makhluk hidup dalam ekosistem dipengaruhi oleh beberapa faktor yang menyebabkan naik turunnya populasi, salah satunya yaitu hama penggerek. Pertimbangan dua tahap utama perkembangan hama penggerek dipengaruhi oleh tahapan telur dan larva.

Pada tanaman tebu memiliki struktur batang mirip dengan tanaman jagung yaitu memiliki bentuk batang rumput atau batang yang berlapis. Jenis hama penggerek batang tanaman tebu sama dengan jenis hama tanaman jagung, yaitu pada penelitian penyebaran *Trichogramma galloi* pada tanaman jagung untuk mengontrol populasi hama *Diatraea saccharalis* (Geremias dan Parra 2014).

Sehingga model matematika populasi telur hama penggerek batang tebu dapat digunakan pada tanaman jagung, dengan keberadaan musuh alami dapat menurunkan populasi dari hama penggerek batang tanpa merusak suatu ekosistem. Model matematika interaksi pertumbuhan antara hama penggerek batang jagung yang direpresentasikan dengan telur dan musuh alaminya yaitu parasitoid *Trichogramma evanescens*. Dengan asumsi bahwa predator tidak dimangsa oleh musuhnya. adalah dituliskan dalam bentuk tiga persamaan differensial berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\beta}{K}x^2 - \alpha xy + (\beta - m_1 - n_1)x \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha xy - (m_2 + n_2)y \\ \frac{dz}{dt} &= n_1x - (m_3 + n_3)z \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan

- $x$  = tingkat kepadatan populasi telur hama yang berpotensi menjadi larva.
- $y$  = kepadatan populasi telur hama yang telah diparasit oleh *Trichogramma evanescens*.
- $z$  = kepadatan populasi larva penggerek jagung.
- $\beta$  = tingkat pertumbuhan intrinsik telur hama penggerek jagung perhari.
- $\alpha$  = tingkat parasitasi.
- $K$  = daya dukung lingkungan.
- $m_1$  = tingkat kematian alami dari populasi telur hama.
- $m_2$  = populasi telur yang terparasitasi.
- $m_3$  = populasi larva hama penggerek.
- $n_1$  = bagian dari populasi telur yang berubah menjadi larva pada waktu  $t$ .
- $n_2$  = bagian dari telur yang terparasit dimana muncul larva parasitoid dewasa pada waktu  $t$ .
- $n_3$  = bagian dari populasi larva yang rontok ke tahap pupa pada waktu  $t$ .

(Rafikov dan de Holanda Limeira, 2012).

### 2.3 Titik Keseimbangan Model *Predator-Prey*

Diasumsikan  $f(x, y)$  dan  $g(x, y)$  kontinu dan mempunyai turunan parsial terhadap  $x$  dan  $y$ . Titik keseimbangan dapat di peroleh jika sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nilai  $x^*$  dan  $y^*$  yang memenuhi persamaan (2.3) disebut titik keseimbangan persamaan (2.2). Berikut merupakan definisi yang berhubungan dengan titik keseimbangan.

#### Definisi 2.1

Diberikan persamaan differensial orde satu,  $\frac{dy}{dt} = f(x)$ . Titik  $x^*$  disebut setimbang jika memenuhi.

$$f(x^*) = 0$$



Persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) merupakan sistem persamaan differensial non linier. Untuk mempermudah dalam proses perhitungan maka perlu merubah sistem differensial non linier menjadi sistem persamaan differensial linier dengan menggunakan matriks Jacobi.

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan sifat kestabilan dari titik setimbang model, maka perlu dicari terlebih dahulu nilai eigen-nya.

Misal  $A$  adalah matriks  $n \times n$  maka sebuah vektor tak nol  $x$  di dalam  $R^n$  disebut vektor eigen dari  $A$ . Jika  $\lambda$  untuk skalar  $\lambda$ , yang disebut nilai eigen dari  $A$ , berlaku

$$Ax = \lambda x \quad (2.4)$$

Vektor  $x$  disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$ . Untuk mencari nilai eigen berukuran  $n \times n$  maka persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Ix \\ (\lambda I - A)x &= (A - \lambda I)x = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan  $I$  matriks identitas. Persamaan (2.2) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) disebut persamaan karakteristik dari  $A$  (Anton dan Rorres, 2004).

Setelah didapatkan nilai eigen, dapat ditentukan kestabilan dari titik setimbang tersebut. Sifat-sifat stabilitas titik setimbang dapat dilihat berdasarkan kriteria kestabilan dari analisis nilai eigen pada matriks Jacobian seperti pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Kriteria Kestabilan

| Nilai Eigen                 | Tipe         | Kestabilan       |
|-----------------------------|--------------|------------------|
| $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  | Node         | Tidak stabil     |
| $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  | Node         | Stabil asimtotik |
| $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ | Saddle point | Tidak stabil     |

|   |              |                  |
|---|--------------|------------------|
| $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$                               | Saddle point | Tidak stabil     |
| $\lambda_1, \lambda_2$ bilangan kompleks, $\lambda_i < 0$ | Spiral       | Stabil asimtotik |
| $\lambda_1, \lambda_2$ bilangan kompleks, $\lambda_i > 0$ | Spiral       | Tidak stabil     |
| $\lambda_1, \lambda_2$ bilangan kompleks, $\lambda_i = 0$ | Limit cycle  | Stabil           |

(Boyce dan DiPrima, 1992)

## 2.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Untuk mempermudah menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan digunakan kriteria Routh-Hurwitz, yaitu nilai-nilai karakteristik dari matriks  $A$  adalah akar-akar karakteristik dari polinomial

$$q(s) = \det(\lambda I - A) = a_0 \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.7)$$

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien  $a_i$  tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada, yaitu dengan melakukan penabelan dan suatu aturan penghitungan dari koefisien  $a_i$  akan diketahui bahwa apakah polinomial yang diberikan oleh persamaan (2.7) semua akar-akarnya bagian realnya adalah negatif.

Diberikan pada kasus persamaan (2.7) dengan  $a_n \neq 0$ , sehingga dapat disusun tabel sebagai berikut

Tabel 2.2 Tabel Routh-Hurwitz misal

|                 |           |           |           |     |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----|
| $\lambda^n$     | $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | ... |
| $\lambda^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | ... |
| $\lambda^{n-2}$ | $b_1$     | $b_2$     | $b_3$     |     |
| $\lambda^{n-3}$ | $c_1$     | $c_2$     | $c_3$     |     |
| $\vdots$        | $\vdots$  |           |           |     |
| $\lambda^0$     | $q$       |           |           |     |

dimana

$$b_1 = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - (a_n)(a_{n-3})}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{(a_{n-1})(a_{n-4}) - (a_n)(a_{n-5})}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{(b_1)(a_{n-3}) - (b_2)(a_{n-1})}{b_1}, \quad c_2 = \frac{(b_1)(a_{n-5}) - (b_3)(a_{n-1})}{b_1}, \quad \dots$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

Kriteria Routh-Hurwitz disimpulkan bahwa banyak perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel 2.2 sama dengan banyaknya akar-akar polinomial  $q(s)$  yang bagian realnya positif. Sehingga bila pada kolom pertama dalam tabel tidak ada perubahan tanda (semua bertanda positif atau semuanya bertanda negatif), maka semua akar polinomial karakteristik dari matrik  $A$  dimana  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , maka sistem ini adalah stabil (Subiono, 2013).

## 2.5 Persamaan *Linear Feedback Control* dan Matriks Riccati

Teori kontrol pada awalnya dikembangkan oleh para insinyur dengan tujuan mengatur dinamika sistem mekanik. Namun, teori kontrol yang merupakan bagian dari teori sistem dinamis pada umum dapat diterapkan untuk pengendalian hayati. Teori kontrol berkaitan dengan perubahan waktu (dinamika) dari sistem yang kompleks dan cara perubahan ini dikendalikan atau diatur melalui *feedback*. Beberapa ahli ekologi dan pengendali hama berpendapat bahwa teori kontrol tidak cocok, karena sistem biologis yang unik berbeda dari sistem mekanik. Tetapi terdapat kesamaan antara mekanik dan sistem hayati, yaitu sistem hayati merupakan sistem dinamik.

Untuk menerapkan teori kontrol pada suatu sistem terlebih dahulu dirumuskan strategi pengendalian hama melalui pengenalan musuh alami. Dengan tujuan untuk memindahkan sistem untuk kondisi *steady*.

$$X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T \quad (2.8)$$

dimana kerusakan ekonomi yang disebabkan oleh kepadatan hama distabilkan dengan cara dikendalikan oleh musuh alami. Dan diformulasikan dalam bentuk

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (2.9)$$

misalkan persamaan (2.9) dapat deskripsikan sebagai jumlah dari linier dan non linier pada bentuk

$$\frac{dX}{dt} = A(X) + g(X) \quad (2.10)$$

dimana  $A \in R^{n \times n}$  adalah matriks konstan, dan  $g(x)$  adalah vektor, yang elemennya adalah fungsi nonlinier kontinu.

Model matematika yang merepresentasikan sistem kontrol dapat digambarkan oleh persamaan

$$\frac{dX}{dt} = AX + g(X) + BU \quad (2.11)$$

dimana  $U \in R^m$  adalah vektor kontrol dan  $B \in R^{m \times n}$  adalah matriks konstan. diperhatikan bahwa matriks  $A$  tidak unik, dan dapat mempengaruhi kinerja dari pengontrol yang dihasilkan.

Vektor kontrol yang mempertahankan sistem yang dikendalikan (2.11) yang diinginkan kondisi *steady* (2.8) memenuhi persamaan berikut

$$AX^* + g(X^*) + Bu^* = 0 \quad (2.12)$$

Nilai yang diharapkan dari  $X$  untuk mendapatkan keadaan *steady* yang dikendalikan oleh  $u^*$  dapat tidak stabil atau tidak ada jumlah pemangsa yang tepat untuk mengontrol populasi dibawah *Economic Injury Level*. Oleh Karena itu, diterapkan *feedback control*  $u$ , kondisi yang diharapkan menjadi stabil secara asimtotik.

definisikan suatu variabel baru

$$y = X - X^*, u = U - u^* \quad (2.13)$$

substitusi persamaan (2.13) ke (2.11) dan menggunakan (2.12), untuk mendapatkan sistem error

$$\frac{dy}{dt} = Ay + h(y) + Bu \quad (2.14)$$

dimana

$$h(y) = g(y + X^*) - g(X^*) \quad (2.15)$$

Untuk menemukan hukum kontrol  $u$  yang menyebabkan sistem terganggu dengan keadaan *steady* yang diinginkan. Vektor  $y$  dari sistem (2.14) dapat dianggap

sebagai penyimpangan dari sistem lintasan yang terganggu dari salah satu yang diinginkan.

Untuk menentukan *feedback control* dari  $u$  ditentukan teorema sebagai berikut.

### Teorema 2.1

Jika terdapat matriks  $Q$  dan  $R$  adalah sebarang matriks konstanta yang positif definit dan matriks  $A$  merupakan matriks simetris.

$$l(y) = y^T Q y - h^T(y) P y - y^T P h(y) \quad (2.16)$$

positif definit pada *linear feedback control*

$$u = -R^{-1} B^T P(t) y \quad (2.17)$$

Dimana  $P$  suatu matriks simetris, positif definit. Matriks  $P$  merupakan solusi dari bentuk persamaan matriks Riccati berikut:

$$PA + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.18)$$

dari Teorema 2.1 dapat menyimpulkan bahwa sistem dinamik error (2.14) dikendalikan oleh *linear feedback control*  $u$  secara global stabil, dan karenanya, Sistem (2.11) dikendalikan oleh

$$u = U - u^*,$$

cenderung keadaan *steady* yang diinginkan persamaan (2.8) (Rafikov, 2008).

## 2.6 Metode Runge-Kutta

Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi.

Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah

$$x_{i+1} = x_i + \Phi(t_i, x_i, h)h$$

dengan  $\Phi(t_i, x_i, h)$  adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama  $x_i$  ke nilai baru  $x_{i+1}$  sepanjang interval  $h$ . Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$



dengan  $a$  adalah konstanta dan  $k$  adalah:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_i, x_i) \\k_2 &= f(t_i + p_i h, x_i + q_{11} k_1 h) \\k_3 &= f(t_i + p_i h, x_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\&\vdots\end{aligned}$$

$$k_n = f(t_i + p_{n-1} h, x_i + q_{n-1,2} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

dengan  $p$  dan  $q$  adalah konstanta. Nilai  $k$  menunjukkan hubungan berurutan. Nilai  $k_1$  muncul dalam persamaan  $k_2$ , yang keduanya juga muncul dalam persamaan  $k_3$ , dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta efisien untuk hitungan komputer (Triatmodjo, 2002).

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde dua dan tiga. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan differensial. Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagai berikut.

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (2.16)$$

dengan

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_i, x_i) \\k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\k_4 &= f\left(t_i + h, x_i + \frac{1}{2}hk_3\right)\end{aligned}$$

Metode Runge-Kutta orde empat ini mempunyai tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi dari pada metode Runge-Kutta orde dua dan tiga. Metode Runge-Kutta orde empat juga mudah diprogram, stabil, kecil kesalahan pemotongan dan juga kecil kesalahan pembulatan (Triatmodjo, 2002).

## 2.7 Hama Tanaman Jagung dan Musuh Alaminya

Rendahnya hasil produksi jagung disebabkan oleh banyak faktor diantaranya faktor fisik (iklim, jenis tanah, dan lahan) dan faktor biologis (varietas, hama, penyakit dan gulma), serta faktor sosial ekonomi. Tidak kurang dari 50 spesies serangga telah ditemukan menyerang tanaman jagung di Indonesia. Hama dan penyakit merupakan kendala dalam peningkatan produksi jagung. Pada proses perkembangbiakan jagung terdapat beberapa jenis hama yang diantaranya berstatus penting dalam penyebab rusaknya tanaman jagung yaitu lalat bibit (*Atherigona* sp.), ulat tanah (*Agrothis* sp.), lundi/uret (*Phylophaga hellen*), penggerek batang jagung (*Ostrinia furnacalis*), ulat grayak (*Spodoptera litura*, *Mythimna* sp.), penggerek tongkol (*Helicoverpa armigera*), dan wereng jagung (*Peregrinus maydis*) (Surtikanti, 2011).

Upaya yang dilakukan untuk menekan populasi hama adalah Pengendalian Hama Terpadu (PHT) yang mengintegrasikan komponen pengendalian yang selaras terbukti tidak hanya meningkatkan produksi jagung tetapi juga pendapatan petani. Sistem PHT melibatkan semua komponen yang berpeluang untuk menekan atau mencegah hama untuk mencapai ambang batas populasi merusak secara ekonomi (*economic injury level*).

### 2.7.1 Hama Penggerek Batang Jagung

Hama penggerek batang jagung banyak terdapat di Asia Tenggara, Asia Tengah, Asia Timur, dan Australia. Hama tersebut merupakan salah satu hama utama pada proses perkembangbiakan jagung di Indonesia. Larva penggerek batang jagung dapat merusak daun, batang, serta bunga jantan dan betina (tongkol muda). Penggerek batang jagung *Ostrinia furnacalis* Guenee di klasifikasikan dalam *Phyllum Arthropoda*, Kelas *Insecta*, Bangsa *Lepidoptera*, Suku *Pyralidea*, Marga *Ostrinia*, Jenis *Ostrinia furnacalis* Guenee.

Serangan pada tanaman jagung umur 2 dan 4 minggu menyebabkan kerusakan pada daun, pucuk dan batang. Pada tanaman 6 minggu menyebabkan kerusakan pada daun, batang, bunga jantan dan bunga betina (tongkol muda). Sedangkan serangan pada tanaman umur 8 minggu menyebabkan kerusakan pada



daun dan batang. Pada tanaman yang berumur 6 minggu, mortalitas larva lebih rendah dibandingkan pada tanaman yang berumur lebih muda maupun yang berumur lebih tua.

Telur pengerek batang jagung berukuran sekitar 0,90 mm. Telur diletakkan secara berkelompok di bagian bawah daun dan bentuknya menyerupai sisik ikan dengan ukuran yang berbeda-beda. Hampir semua telur diletakkan pada daun, terutama daun yang terkulai dan pucuk. Puncak peletakan telur pengerek batang terjadi pada saat terbentuknya bunga jantan dan berakhir pada saat pematangan biji. Sekitar 29,27% kelompok telur diletakkan di atas permukaan daun dan 70,73% di bawah permukaan daun, masing-masing pada daun ke-4, 5, 6, 7, dan 8 dari bawah. Jumlah telur setiap kelompok berbeda-beda, yakni antara 5–90 butir, tetapi ada yang lebih dari 100 butir. Di laboratorium, jumlah telur setiap kelompok beragam dari 2 hingga 200 butir (Nonci, 2004).

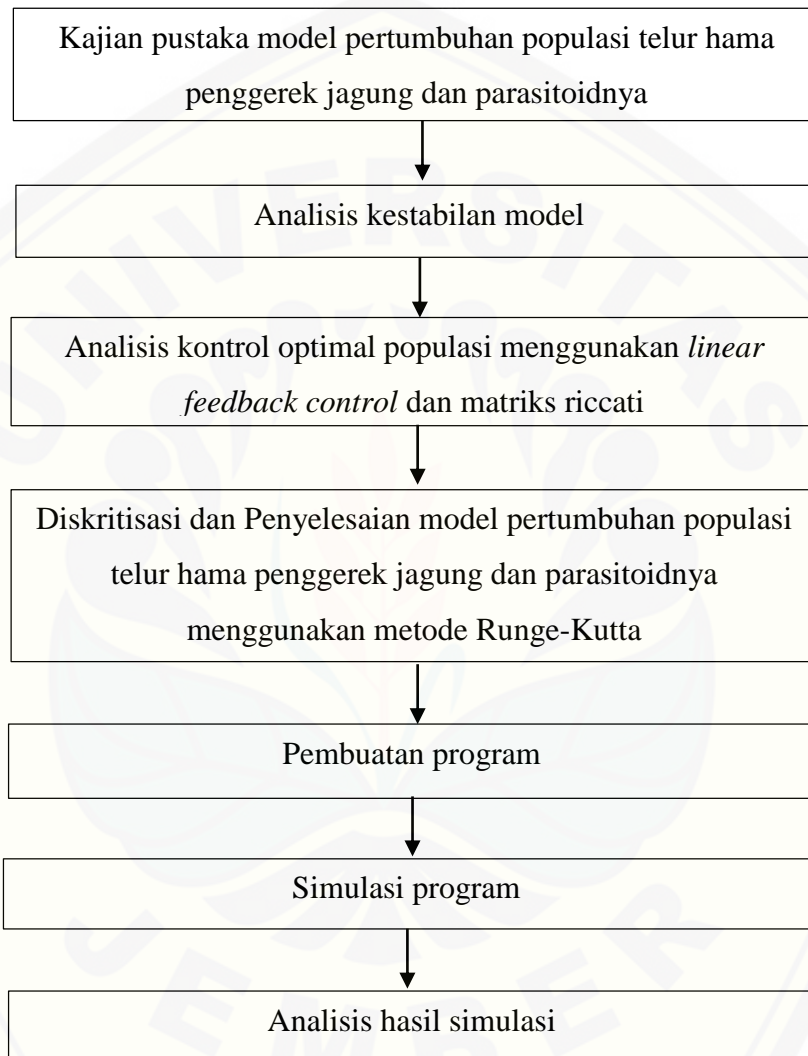
#### 2.7.2 Musuh Alami (Agen Hayati)

Musuh alami penggerek batang jagung *O. furnacalis* adalah *Trichogramma evanescens* Westwood. Parasitoid merupakan unsur pengendali populasi hama dan umumnya bersifat spesifik, sehingga dapat menekan populasi inang pada tingkat yang lebih rendah. Sifat itulah yang menyebabkan parasitoid lebih sering digunakan dalam pengendalian hayati dibanding dengan predator. Parasitoid hama penggerek batang jagung diklasifikasikan dalam *Phyllum Arthropoda*, Kelas *Insecta*, Bangsa *Hymenoptera*, Suku *Trichogrammatidae*, Marga *Trichogramma*, Jenis *Trichogramma evanescens* Westwood (Nonci, 2004).

Tingkat parasitasi maksimum dicapai pada kepadatan populasi empat ekor betina *T. evanescens* yaitu 53,2% per 100 butir inang atau telur penggerek batang *O. furnacalis*. semakin tinggi populasi parasitoid, tingkat parasitasi per ekor betina parasitoid, keperidian (perkembangbiakan) parasitoid per betina dan kemunculan imago parasitoid baru makin menurun, sebaliknya jumlah parasitoid yang ada dalam tiap butir telur *O. furnacalis* dan parasitoid yang mati dalam inang atau telur *O. furnacalis* makin tinggi (Pabbage, 2011).

### BAB 3. METODE PENELITIAN

Secara skematik, langkah-langkah penelitian yang dilakukan dalam tugas akhir ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

Adapun penjelasan dari skema langkah-langkah metode penelitian Gambar 3.1 adalah sebagai berikut

a. Kajian Pustaka

Kajian pustaka merupakan suatu tahapan awal yang digunakan untuk mendapatkan informasi dari buku-buku, jurnal maupun skripsi yang ada keterkaitan

dengan model *Predator-Prey* pada model matematika pertumbuhan populasi telur hama penggerek jagung dan parasitoidnya dengan penyelesaian secara numerik.

b. Analisis Kestabilan Model

Sistem persamaan (2.3) merupakan sistem persamaan differensial nonlinier. Menurut Boyce dan Diprima tahun 1992, kestabilan lokal titik kesetimbangan dari sistem nonlinier ditentukan dengan terlebih dahulu melakukan linierisasi di sekitar titik kesetimbangan. Linierisasi tersebut menghasilkan matriks Jacobi. Nilai eigen dari matriks Jacobi pada masing-masing titik kesetimbangan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $(\lambda I - A)x = 0$ . Selanjutnya, kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen tersebut.

c. Analisis Kontrol Optimal Populasi Hama Penggerek

Kontrol optimal merupakan strategi pengendalian populasi hama penggerek. Pengendalian ini harus mampu menggerakkan sistem dan populasi hama ke dalam kondisi yang stabil yang tidak merugikan secara ekonomi dan selanjutnya telur hama yang berpotensi menjadi larva pada generasi berikutnya menjadi terkontrol. Oleh karena itu fungsi kontrol direpresentasikan dengan  $U$  pada persamaan (2.2), dengan  $U = u^* + u$ ,  $u^*$  adalah suatu konstanta kontrol yang menggerakkan jumlah populasi telur hama di bawah *Economic Injury Level* dan  $u$  merupakan fungsi *feedback control* telur hama penggerek batang yang menstabilkan sistem pada waktu  $t$ . Keadaan *steady* dengan pengendalian yang diinginkan adalah pada persamaan (2.7) sehingga diterapkan *feedback control*  $u$ , sehingga diharapkan menjadi kondisi stabil secara asimtotik. *Feedback control* dari  $u$  ditentukan dengan menerapkan dua teorema yang diperkenalkan oleh Rivakov, *et al* tahun 2012. Teorema *feedback control* dapat dilihat dengan persamaan (2.17) dan mencari solusi matriks  $P$  pada bentuk persamaan matriks Riccati (2.18). Penerapan teorema tersebut menyimpulkan bahwa sistem penyimpanan/error yang terkontrol oleh  $u$  adalah stabil secara asimtotik. Akibatnya sistem (2.2) yang terkontrol oleh  $U$  juga stabil, dan bentuk *feedback control*  $U$  merupakan strategi optimal.

#### d. Penyelesaian Model Metode Runge-Kutta

Untuk menyelesaikan model pertumbuhan populasi telur hama penggerek jagung dan parasitoidnya dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat seperti pada persamaan (2.16). Model ini akan diselesaikan dengan memasukkan nilai koefisien-koefisien yang sudah ditentukan. Koefisien yang dimasukkan meliputi tingkat kepadatan populasi telur hama yang berpotensi menjadi larva ( $x_1$ ), kepadatan populasi telur hama yang telah diparasit oleh *Trichogramma evanescens* ( $x_2$ ), kepadatan populasi larva penggerek jagung ( $x_3$ ), tingkat pertumbuhan intrinsik telur hama penggerek jagung perhari ( $\beta$ ), tingkat parasitasi ( $\alpha$ ), daya dukung lingkungan terhadap telur hama ( $K$ ), tingkat kematian alami dari populasi telur hama ( $m_1$ ), populasi telur yang terparasitasi ( $m_2$ ), populasi larva hama penggerek ( $m_3$ ), bagian dari populasi telur yang berubah menjadi larva pada waktu  $t$  ( $n_1$ ), bagian dari telur yang terparasit dimana muncul larva parasitoid dewasa pada waktu  $t$  ( $n_2$ ), bagian dari populasi larva yang rontok ke tahap pupa pada waktu  $t$  ( $n_3$ ). Selain itu masukkan nilai pengendali hama yang harus dilepaskan berupa parasitoid ( $u^*$ ).

#### e. Pembuatan Program

*Software* yang akan digunakan untuk pembuatan program adalah *software* MATLAB. Prosedur untuk membuat program simulasi dari model pertumbuhan populasi telur hama penggerek jagung dan parasitoidnya adalah sebagai berikut.

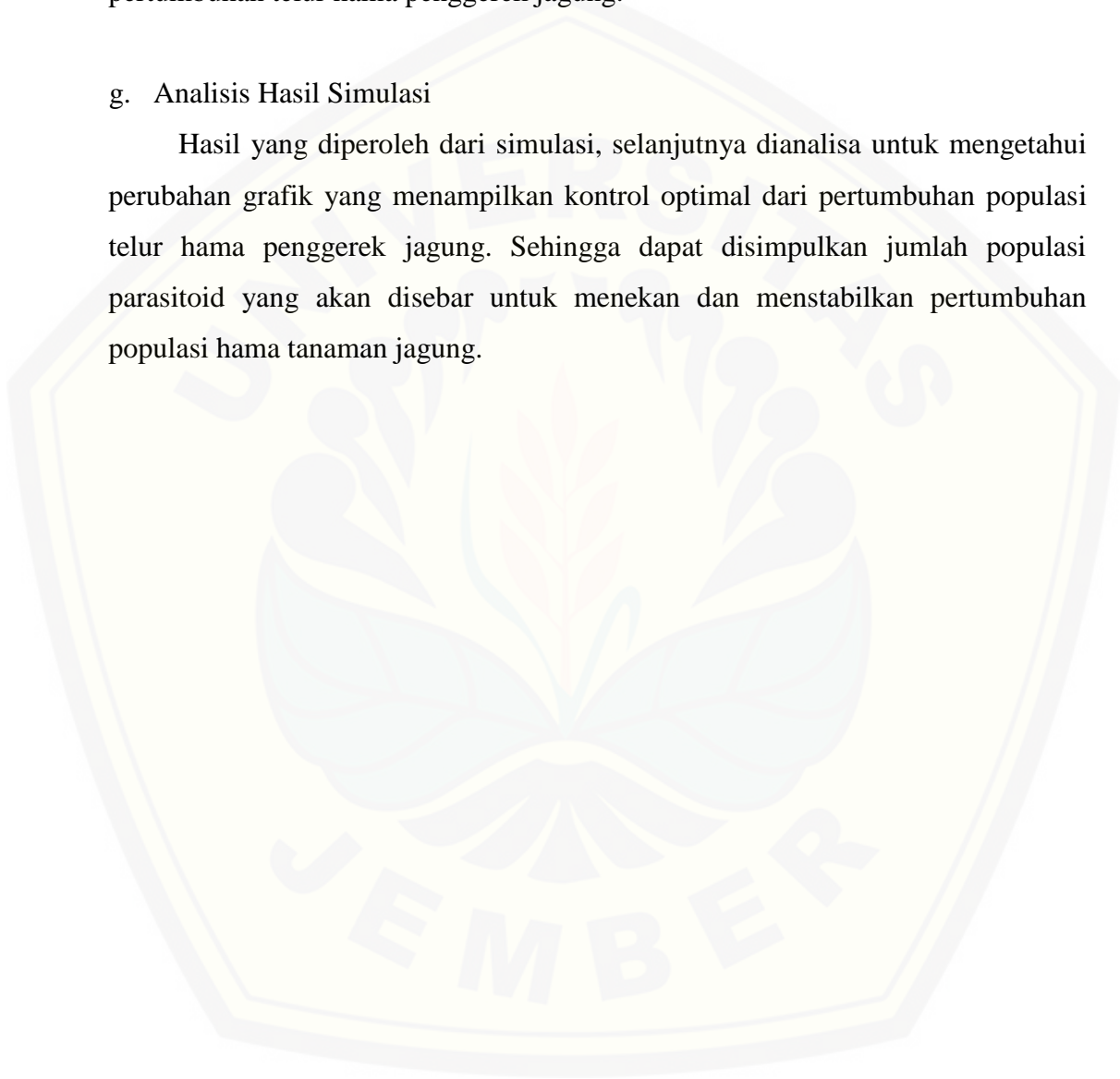
- 1) Input nilai parameter dari model pertumbuhan populasi telur hama penggerek jagung dan parasitoidnya dan kontrol optimal pengendalian hayati hama tanaman jagung.
- 2) Proses  
Membuat subprogram untuk metode Runge-kutta orde empat
- 3) Output  
Output yang dihasilkan dari simulasi ini berupa grafik jumlah populasi dan model kontrol optimal.

f. Simulasi Program

Langkah selanjutnya adalah mensimulasi beberapa parameter yang mempengaruhi populasi model pertumbuhan telur hama penggerek jagung dan parasitoidnya sehingga dapat ditentukan koefisien dari kontrol optimal dari pertumbuhan telur hama penggerek jagung.

g. Analisis Hasil Simulasi

Hasil yang diperoleh dari simulasi, selanjutnya dianalisa untuk mengetahui perubahan grafik yang menampilkan kontrol optimal dari pertumbuhan populasi telur hama penggerek jagung. Sehingga dapat disimpulkan jumlah populasi parasitoid yang akan disebar untuk menekan dan menstabilkan pertumbuhan populasi hama tanaman jagung.





## BAB 5. PENUTUP

Pada bab ini diperoleh kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang diperoleh dari penerapan metode Runge-Kutta orde empat pada penyelesaian model matematika pertumbuhan populasi telur hama penggerek batang jagung beserta kontrol optimalnya. Dan diberikan saran yang dapat dilakukan sebagai kelanjutan dari skripsi ini.

### 5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

- a. Model matematika *predator-prey* dapat diterapkan pada pertumbuhan populasi telur hama penggerek batang jagung dan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta.
- b. Analisis kestabilan dari titik kesetimbangan model matematika pertumbuhan populasi telur hama penggerek batang jagung didapatkan 3 titik kesetimbangan yaitu titik setimbang kepunahan setiap individu ( $E_1$ ), titik setimbang kepunahan telur yang terparasit ( $E_2$ ), dan titik setimbang tidak ada yang punah ( $E_3$ ).
- c. Penerapan kontrol optimal digunakan sebagai pengendalian model matematika pertumbuhan populasi telur hama penggerek batang jagung agar stabil pada level yang diinginkan yaitu dibawah *Economic Injury Level* (EIL), sebesar 2500 larva/ha. Fungsi kontrol optimal direpresentasikan dengan fungsi  $U$ .
- d. Hasil simulasi menggunakan metode Runge-Kutta orde empat menunjukkan bahwa.
  - 1) Hasil yang diperoleh dari penyelesaian numerik pada metode Runge-Kutta orde empat didapatkan pada tingkat pertumbuhan telur hama penggerek jagung perhari ( $\beta$ ) yaitu pada titik kesetimbangan  $E_1$  dengan variasi  $\beta = 0,13$  diperoleh semua populasi terjadi kepunahan dan memenuhi syarat kestabilan asimtotik, titik kesetimbangan  $E_2$  dengan variasi  $\beta = 0,139$

diperoleh populasi telur yang terparasit mengalami kepunahan sehingga populasi telur hama dan larva hama mengalami kenaikan dan akan stabil memenuhi syarat kestabilan asimtotik, titik kesetimbangan  $E_3$  dengan variasi  $\beta = 0,1908$  didapatkan kenaikan pada larva hama diatas *Economic Injury Level* (EIL) sehingga perlu diterapkan kontrol hayati dengan mengikuti syarat stabil asimtotik.

- 2) Pada kasus kontrol optimal kepadatan populasi larva dikendalikan sebesar 2000 larva/ha. Maka strategi parasitasi telur hama setelah hari ke-40 diusulkan sebesar 12,6723 parasitasi telur/hari secara berkelanjutan. Sehingga dapat ditentukan penyebaran parasitoid sebesar 73547,88 parasitoid/hari (*Trichogramma evanescens*) untuk mengontrol tingkat populasi larva penggerek batang jagung (*Ostrinia furnacalis*).

## 5.2 Saran

Pada penelitian ini, permasalahan yang dibahas adalah penyelesaian numerik model matematika populasi hama penggerek batang jagung dan parasitoidnya dengan metode Runge-Kutta orde empat, sehingga pada penelitian yang berikutnya disarankan menggunakan metode numerik lainnya atau metode Runge-Kutta yang berorde lebih tinggi.



**DAFTAR PUSTAKA**

- Anton, H., Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer Edisi ke-8*. Terjemahan Refina Indriasari, S. T. Dan Irzam Harmein, S. T. Jakarta: Erlangga
- Boyce, W.E., R.C, DiPrima, and C.W. Haines. 1992. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Vol. 9.: Wiley New York.
- Geremias, L and Parra, J. 2014. Dispersal of *Trichogramma galloi* in corn for the control of *Diatrea saccharalis*. *Biocontrol Science and technology*: Mount St Vincent University.
- Hidayat, R. 2006. *Matematika Teknik*. Jember. University Press.
- M. Rafikov, J.M. Balthazar, and H.F. von Bremen, *Mathematical modeling and control of population systems: application in biological pest control*, Appl. Math. Comput. 200 (2008), pp. 557–573.
- Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. New Jersey: Pearson Education.
- Nonci, N. 2004. *Biologi dan Musuh Alami Penggerek Batang Ostrinia Furnacalis Guenee (Lepidoptera: Pyralidae) Pada Tanaman Jagung*. Sulawesi Selatan: Balai Penelitian Tanaman Serealia.
- Pabbage, M., S. 2011. *Kinerja Parasitoid Trichogramma evanescens Westwood Dalam Pengendalian Penggerek Batang Jagung Ostrina furnacalis Guenee di Lapangan*. Balai penelitian tanaman serealia.
- Rafikov, M and E. de Holanda Limeira. 2012. Mathematical modelling of the biological pest control of the sugarcane borer. *International Journal of Mathematics*, 89(3): p. 390-401.
- Subiono. 2013. *Sistem Linier Kontrol Optimal*. Surabaya. Institut Teknologi Sepuluh November
- Surtikanti. 2011. *Hama dan Penyakit Penting Tanaman Jagung dan Pengendaliannya*. Balai penelitian tanaman serealia

Triatmodjo, B. 1992. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.



LAMPIRAN

**A. Skrip Solusi Numerik Tanpa Pengendalian Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat**

```

clear all;clc;
disp('----- Analisi Kestabilan -----');
disp('----- telur hama penggerek jagung -----');
disp('inputkan Parameter');
n1=0.1
n2=0.1
n3=0.02439
m1=0.03566
m2=0.03566
m3=0.00256
K=25000
alfa=0.0001723
beta=input('beta='); %masukkan nilai beta
%%
disp('titik awal populasi');
t(1)=input('t=');
x(1)=input('x=');
y(1)=input('y=');
z(1)=input('z=');
%definisi fungsi
fx=@(t,x,y,z)beta*(1-x/K)*x-(m1+n1)*x-alfa*x*y;
fy=@(t,x,y,z)alfa*x*y-(m2+n2)*y;
fz=@(t,x,y,z)n1*x-m3*z-n3*z;
%inisial kondisi
h=0.1;
tfinal=input('batas waktu=');
N=ceil(tfinal/h-1);
%metode runge-kutta orde 4
for i=1:N
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1x=fx(t(i) ,x(i) ,y(i) ,z(i) );
    k1y=fy(t(i) ,x(i) ,y(i) ,z(i) );
    k1z=fz(t(i) ,x(i) ,y(i) ,z(i) );
    k2x=fx(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k2y=fy(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k2z=fz(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k3x=fx(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
    k3y=fy(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
    k3z=fz(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
    k4x=fx(t(i)+h ,x(i)+h*k3x ,y(i)+h*k3y ,z(i)+h*k3z );
    k4y=fy(t(i)+h ,x(i)+h*k3x ,y(i)+h*k3y ,z(i)+h*k3z );
    k4z=fz(t(i)+h ,x(i)+h*k3x ,y(i)+h*k3y ,z(i)+h*k3z );
    x(i+1)=x(i)+h/6*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
    y(i+1)=y(i)+h/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);
    z(i+1)=z(i)+h/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z);
    fprintf('%0.20f %25.20f %25.20f \n',x(i+1),y(i+1),z(i+1));
end
%plot solusi
plot(t,x,'b-', 'LineWidth',2.5);

```

```

hold on
plot(t,y,'g-','LineWidth',2.5);
plot(t,z,'r-','LineWidth',2.5);
hold off
grid on
xlabel('waktu')
ylabel('populasi')
legend('x','y','z')

```

## B. Skrip Solusi Numerik dengan Pengendalian Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

```

clear all;clc;
disp('----- Kontrol Optimal -----');
disp('----- Pengendalian Hama -----');
disp('Dengan menggunakan titik ekulibirium E3');
n1=0.1
n2=0.1
n3=0.02439
m1=0.03566
m2=0.03566
m3=0.00256
K=25000
beta=0.1908
alfa=0.0001723
disp('Masukkan nilai z_star sebagai jumlah larva yang
dikendalikan');
z_star=input('z_star='); %populasi larva yang dikendalikan
x_star=((m3+n3)*z_star)/n1
y_star=(beta*(1-(x_star/K))-m1-n1)/alfa
u_star=-y_star*(alfa*x_star-m2-n2)
%%
a1=beta-(2*beta*beta*x_star)/K-m1-n1-alfa*y_star;
a2=-alfa*x_star;
a3=0;
b1=alfa*y_star;
b2=alfa*x_star-m2-n2;
b3=0;
c1=n1;
c2=0;
c3=-m3-n3;
disp('matriks A');
A=[a1 a2 a3;b1 b2 b3;c1 c2 c3] %matriks A
B=[0;1;0] %matriks B
Q=[0.01 0 0;0 0.01 0;0 0 0.01] %matriks Q
R=[1] %matriks R
%%
[P]=care(A,B,Q,R) %matriks riccati
P(2,:)
%%
disp('Masukkan titik awal populasi');
t(1)=input('t=');
x(1)=input('x=');
y(1)=input('y=');
z(1)=input('z=');

```

```

%definisi fungsi
fx=@(t,x,y,z)beta*(1-x/K)*x-(m1+n1)*x-alfa*x*y;
fy=@(t,x,y,z)alfa*x*y-(m2+n2)*y+(u_star-(P(2,1)*(x-
x_star)+P(2,2)*(y-y_star)+P(2,3)*(z-z_star)));
fz=@(t,x,y,z)n1*x-m3*z-n3*z;
%inisial kondisi
h=0.1;
tfinal=input('batas waktu=');
N=ceil(tfinal/h-1);
%metode runge-kutta orde 4
for i=1:N
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1x=fx(t(i)      ,x(i)      ,y(i)      ,z(i)      );
    k1y=fy(t(i)      ,x(i)      ,y(i)      ,z(i)      );
    k1z=fz(t(i)      ,x(i)      ,y(i)      ,z(i)      );
    k2x=fx(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k2y=fy(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k2z=fz(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k3x=fx(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
    k3y=fy(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
    k3z=fz(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
    k4x=fx(t(i)+h   ,x(i)+h*k3x  ,y(i)+h*k3y  ,z(i)+h*k3z  );
    k4y=fy(t(i)+h   ,x(i)+h*k3x  ,y(i)+h*k3y  ,z(i)+h*k3z  );
    k4z=fz(t(i)+h   ,x(i)+h*k3x  ,y(i)+h*k3y  ,z(i)+h*k3z  );
    x(i+1)=x(i)+h/6*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
    y(i+1)=y(i)+h/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);
    z(i+1)=z(i)+h/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z);
    fprintf('%0.20f %25.20f %25.20f \n',x(i+1),y(i+1),z(i+1));
end
%plot solusi
plot(t,x,'b-', 'LineWidth',2.5);
hold on
plot(t,y,'g-', 'LineWidth',2.5);
plot(t,z,'r-', 'LineWidth',2.5);
grid on
xlabel('waktu')
ylabel('populasi')
legend('x','y','z')
title('Strategi Kontrol Optimal')

```

### C. Skrip Solusi Numerik Dinamika Setrategi Kontrol Optimal Metode Runge-Kutta Orde Empat

```

clear all;clc;
disp('----- Kontrol Optimal -----');
disp('----- Pengendalian Hama -----');
n1=0.1;
n2=0.1;
n3=0.02439;
m1=0.03566;
m2=0.03566;
m3=0.00256;
K=25000;
beta=0.1908;
alfa=0.0001723;

```

```

disp('titik P3');
x=(m2+n2)/alfa
y=(beta/alfa)-beta/((alfa^2)*K)*(m2+n2)-(m1+n1)/alfa
z=(n1*(m2+n2))/(alfa*(m3+n3))
disp('masukkan populasi parasitoid');
disp('yang menyerang telur hama penggerek jagung');
z_star=input('z_star='); %populasi larva yang dikendalikan
x_star=((m3+n3)*z_star)/n1
y_star=(beta*(1-(x_star/K))-m1-n1)/alfa
u_star=-y_star*(alfa*x_star-m2-n2)
%%
a1=beta-(2*beta*beta*x_star)/K-m1-n1-alfa*y_star;
a2=-alfa*x_star;
a3=0;
b1=alfa*y_star;
b2=alfa*x_star-m2-n2;
b3=0;
c1=n1;
c2=0;
c3=-m3-n3;
disp('matriks A');
A=[a1 a2 a3;b1 b2 b3;c1 c2 c3] %matriks A
B=[0;1;0] %matriks B
Q=[0.01 0 0;0 0.01 0;0 0 0.01] %matriks Q
R=[1] %matriks R
%%
[P]=care(A,B,Q,R) %matriks riccati
P(2,:)
%%
t(1)=input('t=');
x(1)=input('x=');
y(1)=input('y=');
z(1)=input('z=');
%definisi fungsi
U=@(t,x,y,z)(u_star-(P(2,1)*(x-x_star)+P(2,2)*(y-y_star)+P(2,3)*(z-z_star)));
fx=@(t,x,y,z)beta*(1-x/K)*x-(m1+n1)*x-alfa*x*y;
fy=@(t,x,y,z)alfa*x*y-(m2+n2)*y+(u_star-(P(2,1)*(x-x_star)+P(2,2)*(y-y_star)+P(2,3)*(z-z_star)));
fz=@(t,x,y,z)n1*x-m3*z-n3*z;
Uu(1)=U(t,x,y,z);
%inisial kondisi
h=0.1;
tfinal=input('batas waktu=');
N=ceil(tfinal/h-1);
%metode runge-kutta orde 4
for i=1:N
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1x=fx(t(i),x(i),y(i),z(i));
    k1y=fy(t(i),x(i),y(i),z(i));
    k1z=fz(t(i),x(i),y(i),z(i));
    k2x=fx(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k2y=fy(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k2z=fz(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k1x,y(i)+h/2*k1y,z(i)+h/2*k1z);
    k3x=fx(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
    k3y=fy(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);

```



```
k3z=fz(t(i)+h/2,x(i)+h/2*k2x,y(i)+h/2*k2y,z(i)+h/2*k2z);
k4x=fx(t(i)+h ,x(i)+h*k3x ,y(i)+h*k3y ,z(i)+h*k3z );
k4y=fy(t(i)+h ,x(i)+h*k3x ,y(i)+h*k3y ,z(i)+h*k3z );
k4z=fz(t(i)+h ,x(i)+h*k3x ,y(i)+h*k3y ,z(i)+h*k3z );
x(i+1)=x(i)+h/6*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
y(i+1)=y(i)+h/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);
z(i+1)=z(i)+h/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z);
Uu(i+1)=U(t(i+1),x(i+1),y(i+1),z(i+1));
fprintf('%0.20f %25.20f %25.20f %25.20f \n'
,x(i+1),y(i+1),z(i+1),Uu(i+1));
end
%plot solusi
plot(t,Uu,'b-','LineWidth',2.5);
grid on
xlabel('waktu')
ylabel('Fungsi Kontrol (U)')
legend('Fungsi Kontrol')
title('Strategi dinamika Kontrol Optimal')
```