ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA GRAF KHUSUS DAN OPERASI AMALGAMASINYA

SKRIPSI

Oleh

Hanuf Maya Ningrum
NIM 121810101081

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA GRAF KHUSUS DAN OPERASI AMALGAMASINYA

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Hanuf Maya Ningrum
NIM 121810101081

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Alm.Sukimin dan Ibunda Lutfiyah, serta Kakakku Sukmo Hadi Prasojo, yang senantiasa mengalirkan kasih sayang, perhatian dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., yang dengan sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi;
4. Guru dan dosen-dosenku, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Sahabat-sahabat tercinta yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang senantiasa memberi kebahagian serta pelajaran hidup dalam kebersamaan yang sangat berharga;
6. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

HALAMAN MOTTO

"Berikhtiarlah sambil berdoa kepada Allah Taala, karena hasil ikhtiarmu tidak ditanganmu tapi ditangan-Nya."
(Achmad Mustofa Bisri)

"Jadilah seseorang yang percaya bahwa selalu ada kemungkinan dalam segala hal."
(Norman Vincent Peale)

"Jangan pernah berharap hidup lebih mudah, tapi berharaplah kamu menjadi lebih baik."
(Jim Rohn)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hanuf Maya Ningrum

NIM : 121810101081

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul ”Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Khusus dan Operasi Amalgamasinya” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2016

Yang menyatakan,

Hanuf Maya Ningrum

NIM. 121810101081

SKRIPSI

ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA GRAF KHUSUS DAN OPERASI AMALGAMASINYA

Oleh

Hanuf Maya Ningrum

NIM 121810101081

Pembimbing:

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Analisa Himpunan Dominasi Lookasi pada Graf Khusus dan Operasi Amalgamasinya” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 19840801 200801 2 006

Dosen Pembimbing Anggota,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Dosen Penguji I,

Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 19770430 200501 1 001

Dosen Penguji II,

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19591220 198503 1 002

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Khusus dan Operasi Amalgamasinya; Hanuf Maya Ningrum, 121810101081; 2016: 65 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Salah satu cabang ilmu matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan yang muncul akibat pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh L.Euler, matematikawan asal Swiss pada tahun 1735. Teori graf banyak memberi masukan kepada ilmu baru salah satunya yaitu himpunan dominasi lokal.

Himpunan dominasi lokasi atau dalam istilah asing disebut *locating dominating set* penerapannya dimulai pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi atau *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik. Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder berupa graf-graf khusus dan operasi amalgamasinya. Graf-graf khusus yang digunakan antara lain graf prisma $P_{m,n}$, graf *antiprism* A_n, graf *web* Wb_n, graf *tringular ladder* TL_n dan graf bintang S_n dan operasi yang digunakan yaitu amalgamasi. Pada penelitian ini dihasilkan beberapa teorema sebagai berikut:

1. **Teorema 4.1** Misal G adalah graf khusus berupa graf prisma $P_{(n,2)}$ untuk $n \geq 3$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah $\gamma_L\left(P_{(n,2)}\right) = n$.

2. **Teorema 4.2** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf prisma $P_{(n,2)}$ untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma_L\left(Amal(P_{(n,2)}, v, r)\right) = 2r+1$.

3. **Teorema 4.3** Misal G adalah graf khusus berupa graf *antiprisma* A_n untuk $n \geq 3$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah $\gamma_L\left(A_n\right) = n-1$.

4. **Teorema 4.4** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf *antiprisma* A_n untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma_L\left(Amal(A_n, v, r)\right) = nr - r$.

5. **Teorema 4.5** Misal G adalah graf khusus berupa graf *web* Wb_n untuk $n \geq 3$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah $\gamma_L\left(Wb_n\right) = \frac{3n-1}{2}$.

6. **Teorema 4.6** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf *web* Wb_n untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma_L\left(Amal(Wb_n, v, r)\right) = \frac{3nr-3r+2}{2}$.

7. **Teorema 4.7** Misal G adalah graf khusus berupa graf *tringular ladder* TL_n untuk $n \geq 3$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah $\gamma_L\left(TL_n\right) = n$.

8. **Teorema 4.8** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf *tringular ladder* TL_n untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma_L\left(Amal(TL_n, v, r)\right) = nr - r + 1$.

9. **Teorema 4.9** Misal G adalah graf khusus berupa graf star S_n untuk $n \geq 3$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah $\gamma_L\ (S_n)$ = n.

10. **Teorema 4.10** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf star S_n untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma_L\ (Amal(S_n, v, r)) = nr - r$.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala kuasa-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul ”Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Khusus dan Oerasi Amalgamsinya”. Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing anggota;
2. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. dan Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
3. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Desember 2016 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Saat ini ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang sangat pesat sehingga mengakibatkan munculnya berbagai masalah. Salah satu cabang ilmu matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh L.Euler, matematikawan asal Swiss pada tahun 1735. Ide besarnya muncul sebagai upaya dalam menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg menggunakan graf (Munir, 2001). Teori graf banyak memberi masukan kepada ilmu baru salah satunya yaitu himpunan dominasi lokal.

Menurut Foucaud (2016) penerapan teori himpunan dominasi lokasi dimulai pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. Himpunan dominasi lokasi *(locating dominating set)* merupakan perluasan teori *dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* bisa mengcover titik yang ada di sekitarnya dan *adjacent*. *Dominating number* merupakan kardinalitas minimum dari *dominating set* yang disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Beberapa hasil penelitian mengenai himpunan dominasi lokasi yang telah ditemukan diantaranya : Chen *et.al* (2011) tentang *Identifying codes and locating dominating sets on paths and cycles*, Canoy *et.al* (2014) tentang *locating dominating set* pada *corona dan composition graph*, Agustin (2014) tentang teori *dominating set* untuk menghitung jumlah minimum yang menghasilkan beberapa kemungkinan untuk instalasi meletakkan client hub untuk jaringan intranet di Universitas Jember, Wardani (2014) tentang *dominating set* pada beberapa graf khusus dan mengaplikasikan teori *dominating set* pada analisis topologi jaringan *Wide Area Network* (WAN), Argiroffo (2015) tentang *A polyhedral approach to locating dominating sets in graph*, Foucaud(2016) tentang *Locating dominating set in twin free graph*, dan Desvandai (2016) tentang analisa himpunan dominasi lokasi pada model topologi graf khusus dan operasinya.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka peneliti tertarik untuk menganalisa teori himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus yaitu graf prisma $P_{m,n}$, graf *antiprism* A_n, graf *web* Wb_n, graf *tringular ladder* TL_n dan graf bintang S_n dengan operasi amalgamasi-nya. Pada penelitian kali ini jenis graf yang digunakan yaitu graf konektif dan tidak berarah. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada hasil operasi graf khusus, kemudian menentukan titik-titik yang memenuhi syarat himpunan dominasi lokasi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. bagaimana himpunan dominasi lokasi dari graf khusus $P_{m,n}$, A_n, Wb_n, TL_n, S_n dan operasi amalgamasinya $Amal(P_{n,2}, v, r)$, $Amal(A_n, v, r)$, $Amal(Wb_n, v, r)$, $Amal(TL_n, v, r)$, $Amal(S_n, v, r)$?

b. berapa nilai himpunan dominasi lokasi dari hasil graf khusus $P_{m,n}$, A_n, Wb_n, TL_n, S_n dan operasi amalgamasinya $Amal(P_{n,2}, v, r)$, $Amal(A_n, v, r)$, $Amal(Wb_n, v, r)$, $Amal(TL_n, v, r)$, $Amal(S_n, v, r)$?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi sebagai beriku :

a. graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf konektif dan graf yang tidak berarah;

b. graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah $P_{m,n}$, A_n, Wb_n, TL_n, S_n;

c. operasi graf yang digunakan dalam penilitian ini adalah amalgamasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasi amalgamasinya $Amal(P_{n,2}, v, r)$, $Amal(A_n, v, r)$, $Amal(Wb_n, v, r)$, $Amal(TL_n, v, r)$, $Amal(S_n, v, r)$;

b. menentukan nilai himpunan dominasi lokasi graf khusus $P_{m,n}$, A_n, Wb_n, TL_n, S_n, W_n dan operasi amalgamasinya $Amal(P_{n,2}, v, r)$, $Amal(A_n, v, r)$, $Amal(Wb_n, v, r)$, $Amal(TL_n, v, r)$, $Amal(S_n, v, r)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

a. menambah pengetahuan dan wawasan baru mengenai teori himpunan dominasi lokasi;

b. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah himpunan dominasi lokasi.

1.6 Kebaharuan

Peneliti sebelumnya telah meneliti himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasinya. Graf khusus yang digunakan dalam penelitian sebelumnya adalah graf kipas F_n, graf *helm* H_n, graf parasut P_n dan graf lintasan C_n. Sedangkan pada penelitian ini, akan diteliti himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasi amalgamasinya. Graf khusus yang digunakan dalam penitian ini adalah graf prisma $P_{m,n}$, graf *antiprism* A_n, graf *web* Wb_n, graf *tringular ladder* TL_n dan graf bintang S_n.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

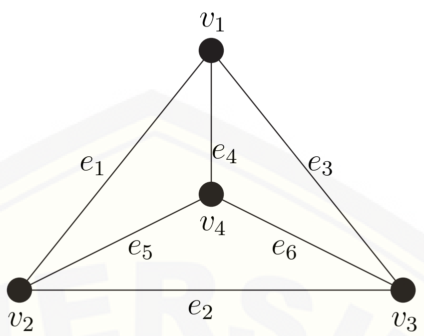
2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G tersusun atas titik-titik yang dinamakan *vertex*, dan garis-garis yang menghubungkan titik-titik tersebut yang dinamakan sisi (*edges*). Secara sistematis, suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), yang dalam hal ini V merupakan himpuan tak kosong dari semua titik (*vertex*) dan E merupakan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik. Definisi graf tersebut menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, tetapi E boleh kosong. Jadi, dapat dimungkinkan tentang adanya sebuah graf G yang tidak memiliki sisi tetapi hanya sebuah titik. Apabila titik-titik ini berkelompok dan membentuk suatu himpunan titik tanpa sisi maka disebut sebagai graf kosong. Sebuah titik pada graf dapat dinomori dengan huruf $\{a, b, c, \ldots, v, w, x, y, z\}$ atau dengan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$ atau dengan gabungan keduanya. Misalkan v_1 dan v_2 adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik v_1 dan v_2 dinyatakan dengan pasangan (v_1, v_2) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$.

Misalkan $e = (v_i, v_j)$ merupakan sebuah sisi pada graf G, yaitu v_i dan v_j adalah titik ujung dari e, maka verteks v_i dikatakan *adjacent* (berelasi) terhadap verteks v_j dan edge e *incident* (terhubung) pada v_i dan v_j. Sedangkan derajat sebuah verteks v pada sebuah graf G ditulid dengan deg (v), adalah jumlah edge yang memuat v sebagai titik ujung (Lipschutz dan Lipson, 2002).

Jika terdapat sebuah titik yang tidak mempunyai sisi yang incident dengannya atau dengan kata lain derajat titik tersebut adalah 0, maka titik tersebut dinamakan *isolated vertex*. Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat/*degree* yang sama n maka graf G disebut graf regular n, jika tidak maka garf tersebut dikatakan non-regular. Derajat terkecil dari suatu graf G, yang dinotsikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Derajat terbesar dari suatu graf G

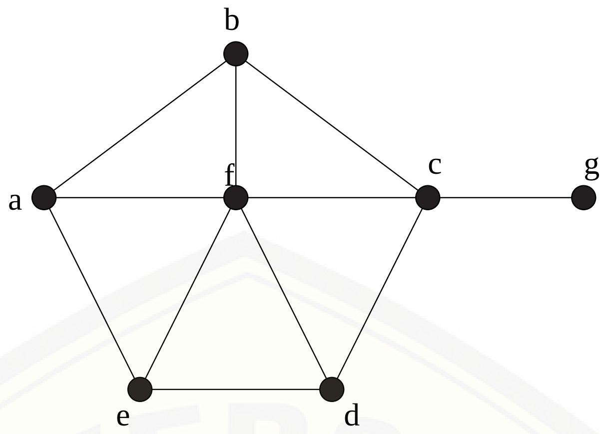
yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Pada Gambar 2.2 diperoleh bahwa $\Delta\ (G) = 3$.



Gambar 2.1 Contoh graf G

Jalan *(walk)* dari suatu graf dinotasikan dengan $v_0 - v_k$. Pada graf G, jalan *(walk)* J dari v_0 ketitik v_k adalah suatu barisan selang-seling dari titik dan sisi $v_0, e_0, v_1, \cdots, v_k - 1, e_k - 1, v_k$ yag dimulai dan diakhiri dengan titik, dengan sisi $e_i = v_i v_i + 1$, untuk $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Panjang dari jalan $v_0, e_0, v_1, \cdots, v_k - 1, e_k - 1, v_k$ adalah banyaknya sisi pada barisan tersebut. Titik v_0 dan v_n disebut titik-titik ujung dari jalan tersebut. Jika pada jalan J berlaku $v_0 = v_k$, maka J disebut jalan tertutup. Jalan J disbut lintasan *(path)* bila semua titiknya berbeda. Sedanngkan jika setiap sisinya yang berbeda maka jalan tersebut dinamakan jejak *(trail)*. Jejak tertuutp disebut sirkit. Sirkit yang semua titiknya berlainan disebut siklus.

Pada Gambar 2.2, $a-f-b-f-c-d-c$ merupakan jalan *(walk)*, $a-b-f-c-g-c-f-e-a$ merupakan jalan tertutup *(close-walk)*, $a-f-c-d-f-b$ merupakan jejak *(trail)*, $a-e-f-c-d$ merupakan lintasan *(path)*, $a-f-e-d-c-f-b-a$ merupakan sirkit, dan $a-f-b-c-d-e-a$ merupakan siklus *(cycle)*.



Gambar 2.2 Contoh graf dengan 7 titik

2.2 Graf Khusus

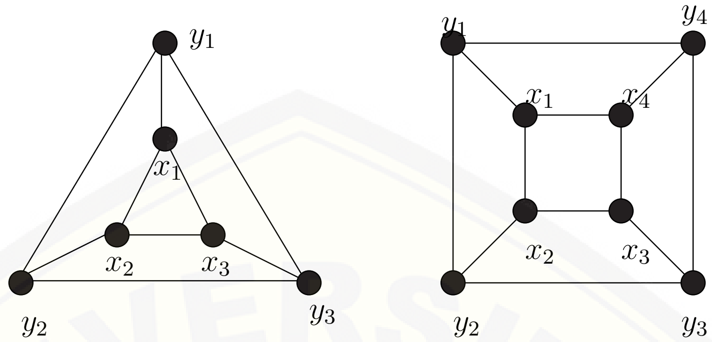
Graf khusus merupaka graf yang memiliki keunikan tidak isomorfosis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Terdapat beberpa jenis graf sederhana khusus. Berikut desinisi beberapa graf khusus :

a. Graf Prisma

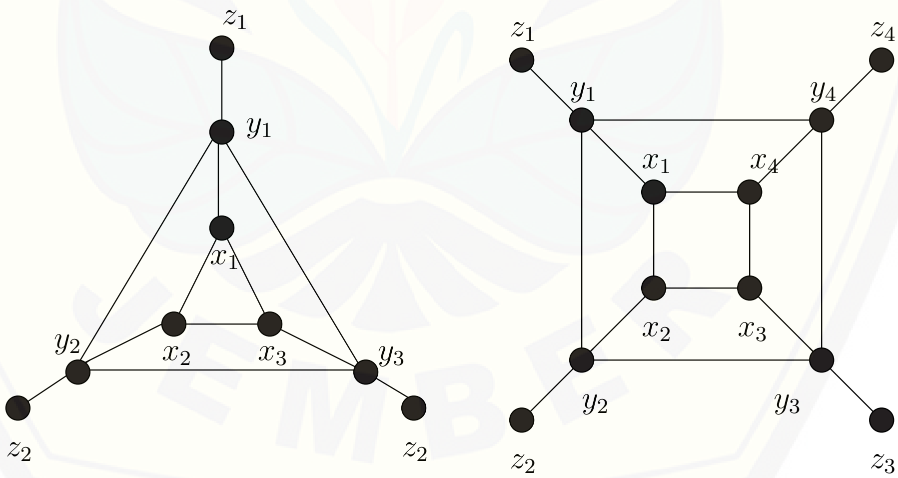
Graf prisma, dinotasikan $P_{m,n}$, adalah sebuah graf yang terdiri dari sebuah siklus luar dengan n titik $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ dan sebuah siklus dalam dengan n titik $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ dan antara siklus luar dengan siklus dalam dihungkan n jari-jari $x_i y_j, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ (Lin, Slamin,dan Miller, 2001). Graf prisma mempunyai $2n$ titik dan $3m$ sisi. Contoh graf prisma dapat dilihat pada gambar 2.3.

b. Graf Jaring Laba-Laba (*Web Graph*)

Graf jaring laba-laba (*Web Graph*), dinotasikan dengan Wb_n adalah graf yang meiliki $2n + 1$ titik yang terdiri dari n titik pada lingkaran dalam u_i dan n titik pada lingkaran luar v_i serta satu titik pusat c yang berderajat n dimana $n \geq 3$ dan $1 \leq i \leq n$ (Setianggoro, 2012). Contoh graf web dapat dilihat pada Gambar 2.4.



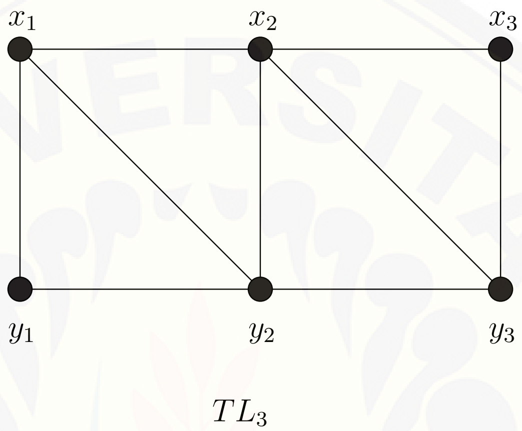
Gambar 2.3 Graf Prisma $P_{3,2}$ dan $P_{4,2}$



Gambar 2.4 Graf Web Wb_3 dan Wb_4

c. Graf *Tringular Ladder*

Graf *tringular ladder* yang dilambangkan dengan TL_n dimana $n \geq 3$ merupakan graf yang diperoleh dengan melengkapi graf *ladder* dengan menambahkan $u_i v_i +$ 1 dengan $1 \leq i \leq n-1$. Graf *tringular ladder* TL_n terdiri dari $2n$ titik dan $4n-3$ sisi dengan $n \geq 3$. Contoh graf *Tringular Ladder* dapat dilihat pada Gambar 2.5.



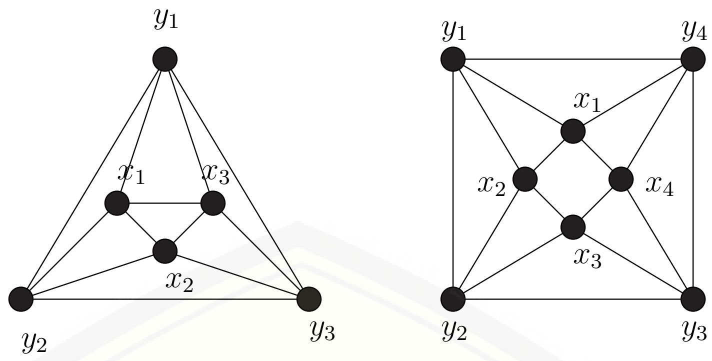
Gambar 2.5 Graf *Tringular Ladder* TL_3

d. Graf Antiprisma

Graf antipisma dinotasikan dengan A_n dengan $n \geq 3$ adalah sebuah graf reguler berderajat 4 dengan $|V(A_n)| = 2n$ dan $|E(A_n)| = 4n$ yang tersusun atas n siklus luar $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ dan n siklus dalam $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ dan antara siklus luar dengan siklus dalam dihubungkan oleh sekumpulan n jeruji $v_i u_{i+1}$, sisi yang terhubung pada siklus luar $v_i v_{i+1}$ dan sisi-sisi yang terhubung pada siklus dalam $u_i u_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n$ dengan pengambilan modulo n. Contoh graf antipprisma dapat dilihat pada Gambar 2.7.

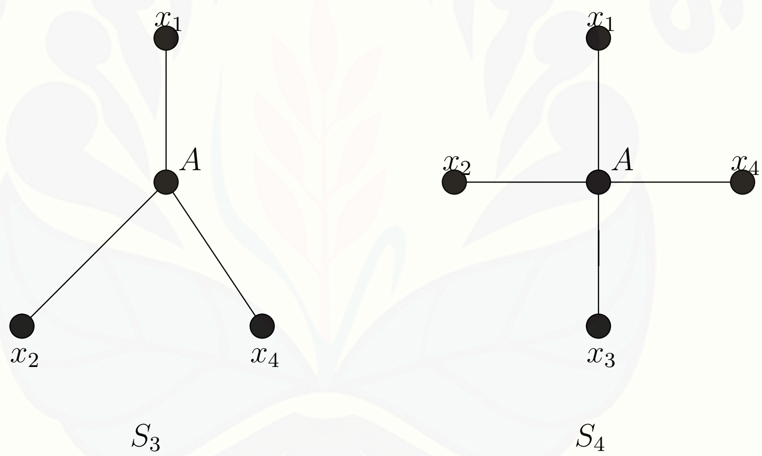
e. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang (*Star Graph*), dinotasikan dengan S_n adalah sebuah graf yang terdiri



Gambar 2.6 Graf Antiprisma A_3 dan A_4

dari n sisi dan $n+1$ titik, dimana satu titik sebagai titik pusat, yaitu titik yang berderajat n. Contoh graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.7.

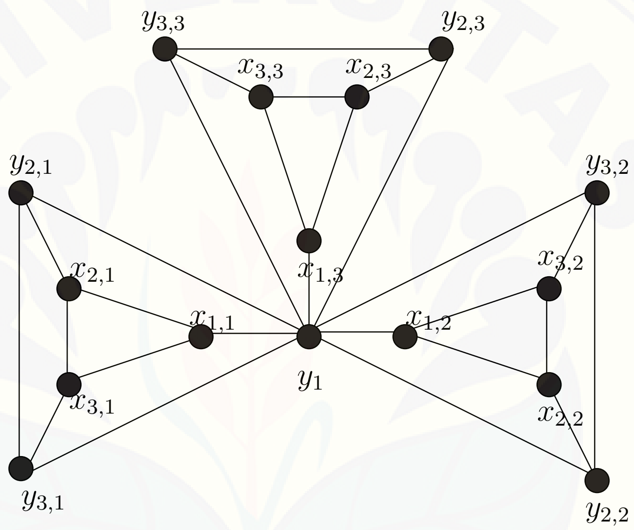


Gambar 2.7 Graf Bintang S_4

2.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru salah satunya yaitu operasi amalgamasi.

Definisi 2.1. Amalgamasi dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_1 mempunyai suatu titik v_{0i} yang disebut titik terminal (Ardiyansah, 2013). Contoh operasi Amalgamasi dapat dilihat pada Gambar 2.8



Gambar 2.8 Graf Hasil Operasi Amalgamasi dari $P_{3,2}$

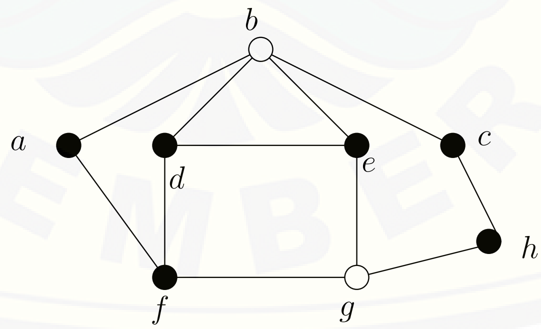
2.4 Himpunan Dominasi Lokasi

Menurut Haynes dan Henning dalam Agustin dan Dafik (2014), himpunan D dari titik graf sederhana G dinamakan *dominating set* jika setiap titik $u \in V(G) - D$ *adjacent* ke beberapa titik $v \in D$. Berikut definisi terkait *dominating set*.

Definisi 2.2. Diberikan sebuah graf tidak berarah $G = (V, E)$, dominating set merupakan subset $S \subseteq V$ dari titik di G sedemikian sehingga untuk semua titik $v \in V$, salah satu dari $v \in S$ atau sebuah tetangga u dari v ada di S (Haynes dkk, 2002).

Dominating set merupakan suatu konsep penentuan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan seminimal mungkin. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma\ (G)$. *Dominating set* D dengan $|D| = \gamma\ (G)$ dinamakan *minimum dominating set*. Batas atas dari *domination number* adalah banyaknya titik di graf. Ketika paling sedikit satu titik yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di graf, maka $1 \leq \gamma\ (G) \leq n$ untuk setiap graf ber-*order* n. Nilai dari *domination number* selalu $\gamma\ (G) \leq |V(G)|$.

Berikut adalah contoh *dominating set* pada graf G dapat dilihat pada Gambar 2.9. Titik yang berwarna putih merupakan *dominating set* dari graf G.

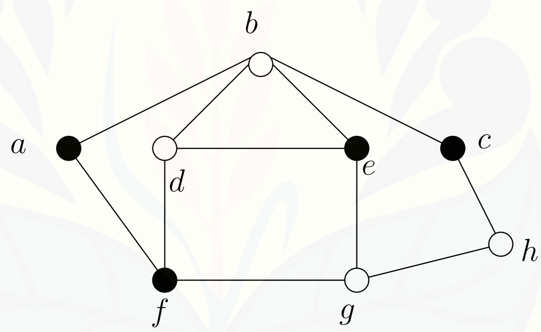


Gambar 2.9 *Dominating Set*

Himpunan dominasi lokasi atau biasa disebut *Locating dominating set* merupakan *dominating set* dengan tambahan syarat. Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi jika himpunan titik dominator D memenuhi syarat setiap titik yang berbeda diluar D yaitu $V - D$ memiliki irisan yang berbeda dengan D. Misal V himpunan titik dan E himpunan sisi dari graf G sehingga $\{u, v \in V \backslash D\}$ maka berlaku :

1. $N(u) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(v) \cap D \neq \emptyset$.
2. $u \neq v$ maka $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ (Honkala, 2002).

Menurut Foucaud (2016) konsep himpunan dominasi lokasi pertama kali dikenalkan dan dipelajari oleh Slater pada tahun 1987. *Locating domination number* merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. Berikut teorema terkait himpunan dominasi lokasi.



Gambar 2.10 Himpunan Dominasi Lokasi Pada Graf G (Foucaud, 2015)

Berikut contoh untuk himpunan dominasi lokasi dapat dilihat pada gambar 2.10 dimana titik yang berwarna putih merupakan titik himpunan dominasi lokasinya. Pada contoh gambar 2.10 diperoleh himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e, f, g,$
$h\}$ dan diperoleh titik dominator $D = \{b, d, g, h\}$, $V - D = \{a, c, e, f\}$ sehingga menurut syarat himpunan dominasi lokasi diperoleh :

$$\{N(a) \cap D = \{b\}, N(c) \cap D = \{b, h\}, N(e) \cap D = \{d, g\}, N(f) \cap D = \{g\}\}.$$

Berdasarkan hasil diatas maka kedua syarat himpunan dominasi lokasi terpenuhi sehingga *locating domination number* $\gamma_L(G) = 4$.

2.5 Hasil-hasil Penelitian

Pada bagian berikut akan disajikan beberapa rangkuman terkait *locating dominating set* yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut diantaranya dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2.1 *Locating Domination Number* pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi

$Graph$	$\gamma_L(G)$	Keterangan
P_2	1	Slater
P_3	2	Slater
P_n	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n > 3$	Slater
C_4, C_5	2	Slater
C_6	3	Slater
C_n	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n > 6$	Slater
Graf Lengkap, K_n	$n-1, n > 1$	Slater
$K_{1,n-1}$	$n-1, n > 2$	Slater
$K_{r,n-r}$	$n-2, r > 1, n > 4$	Slater
Graf Roda $W_{1,4}$	2	Slater
$W_{1,5}, W_{1,6}$	3	Slater
$W_{1,n-1}$	$\lceil\frac{2n-2}{5}\rceil, n > 7$	Slater
Graf Thin Sun (T_n)	$n, n \geq 4$	Argiroffo *et al.*, 2015

Tabel 2.2 *Locating Domination Number* pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi

$Graph$	$\gamma_L(G)$	Keterangan
Graf Twin Free (G)	$\gamma_L \leq \frac{2n}{3}$	Foucaud *et al.*, 2016
Graf Trees (T)	$\gamma_L(T) = \frac{n}{2}, n \geq 2$	Foucaud *et al.*, 2016
(H_n)	$n, n \geq 3$	Desvandai
$(Amal(H_n, v, m))$	$n \times m, n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
$(Shack(H_n, v, m))$	$n \times m, n \geq 3, m \geq 2$	Desvandai
$(W_n^{F_{1,2}})$	$n, n \geq 3$	Desvandai
$(P_n^{H_m})$	$m(n-1), n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
(PC_n)	$\lceil \frac{4n}{5} \rceil, n \geq 4$	Desvandai
(F_n)	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil, n \geq 4, n \neq 5$	Desvandai
$(P_n + H_m)$	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil + m, n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
$(P_n \odot H_m)$	$m \times n, n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
$(Amal(PC_n, v, m))$	$(\lceil \frac{4n}{5} \rceil) \times m, n \geq 4, m \geq 2$	Desvandai
$(Shack(F_n, v, m))$	$\lceil \frac{2mn-2m+2}{5} \rceil, n \geq 5, m \geq 3$	Desvandai

BAB 3. METODE PENELITIAN

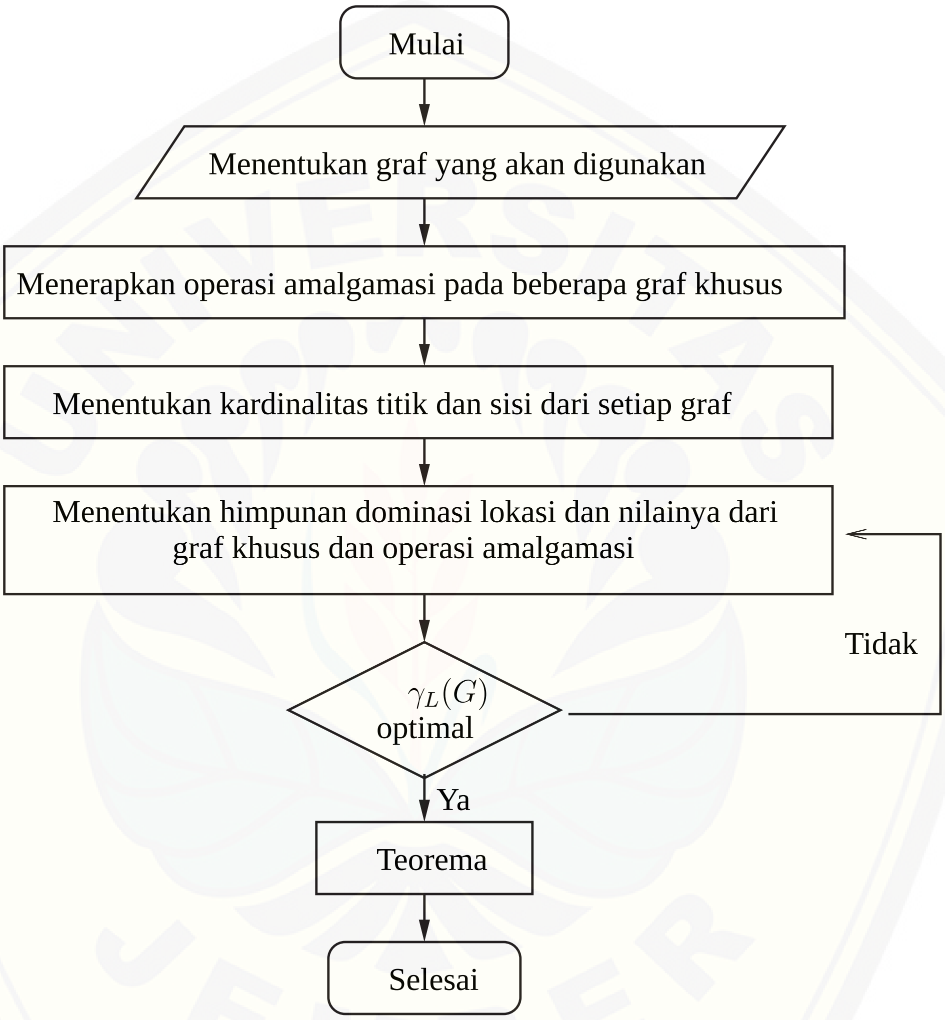
3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif merupakan jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjunya. Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf khusus yang digunakan adalah graf prisma $P_{m,n}$, graf *antiprism* A_n, graf *web* Wb_n, graf *tringular ladder* TL_n dan graf bintang S_n.

3.2 Rancangan Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan meggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Rancangan penelitian untuk himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasinya digambarkan dalam bagan yang diilustasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini sebagai berikut:

a. menentukan objek penelitian berupa graf-graf khusus dan operasinya;
b. menentukan banyak titik dan banyak sisi pada hasil graf operasi;
c. menentukan himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasinya;
d. menganalisa graf-graf khusus dan operasinya dengan teori himpunan dominasi lokasi, sehingga dihasilkan teorema dan akibat tentang nilai himpunan dominasi lokasi ($\gamma_L(G)$) dari hasil graf khusus dan operasinya;
e. Menganalisa keoptimalan dari nilai himpunan dominasi lokasi.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. Himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus dan operasi amalgamasi-nya dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $D(P_{(n,2)}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$.
2. $D(Amal(P_{(n,2)}, v, r)) = \{x_{2,i}; y_1; y_{3,1}; 1 \leq i \leq r\}$.
3. $D(A_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n-1\}$.
4. $D(Amal(A_n, v, r)) = \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq r\}$.
5. $D(Wb_n) = \{x_{2i-1}; 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$.
6. $D(Amal(Wb_n, v, r)) = \{x_{2i-1,j}, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, 1 \leq j \leq r; y_{i+2,j}, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq r; z_1\}$.
7. $D(TL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$.
8. $D(Amal(TL_n, v, r)) = \{x_1, x_{2i+1,j}, x_{2i,j}; 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, 1 \leq j \leq r\}$.
9. $D(S_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n-1\}$.
10. $D(Amal(S_n, v, r)) = \{A_j, x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq r\}$.

b. Nilai himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus dan operasi amalhamasinya dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $\gamma_L\ (P_{(n,2)}) = n$, untuk $n \geq 3$.
2. $\gamma_L\ (Amal(P_{(n,2)}, v, r)) = 2r + 1$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$.
3. $\gamma_L\ (A_n) = n - 1$, untuk $n \geq 3$.
4. $\gamma_L\ (Amal(A_n, v, r)) = nr - r$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$.

5. $\gamma_L\ (Wb_n)$ = $\frac{3n-1}{2}$, untuk $n \geq 3$ dengan n ganjil.
6. $\gamma_L\ (Amal(Wb_n, v, r)) = \frac{3nr-3r+2}{2}$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$ dengan n ganjil.
7. $\gamma_L\ (TL_n)$ = n, untuk $n \geq 3$.
8. $\gamma_L\ (Amal(TL_n, v, r)) = nr - r + 1$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$.
9. $\gamma_L\ (S_n)$ = n, untuk $n \geq 3$.
10. $\gamma_L\ (Amal(S_n, v, r)) = nr - r$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian berkaitan himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasi amalgamasinya maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk meneliti himpunan dominasi lokasi pada operasi graf yang lainnya seperti operasi *cartesian product*, *t*ensor, *j*oint dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H. 2014. *Penerapan Teori Dominating Set dalam Instalasi Client Hub untuk Jaringan Intranet di Universitas Jember*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Agustin, I. H. dan Dafik. 2014. ”On The Domination Number of Some Families of Special Graphs”. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, **1** (1): 139-147.

Ardiyansah, R. 2013. ”Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf”. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, **2** (1): 2337-3520.

Argiroffo, G.R., Bianchi, S.M .2015. ”A Polyhedral Approach to Locating-Dominating Sets in Graphs”. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **50**: 89-94.

Canoy, S.R., Jr., Malacas, G.A. 2014. ”Locating-Dominating Sets in Graphs”. *Journal of Applied Mathematical Sciences*, **8** (88): 4381-4388.

Chen, C., Lu, C., Miao, Z. 2011. ”Identifying Codes and LocatingDominating Sets on Paths and Cycles”. *Discrete Applied Mathematics*, **159**: 1540-1547.

Desvandai, R.B. 2016. ”Analisa Himpunan Dominasi Lokasi Pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya”. Tidak diterbitkan. Skripsi. Universitas Jember.

Foucaud,F. 2015. ”Decision and Approximation Complexity for Identifying Codes and Locating-Dominating Sets in Restricted Graph Classes”. *Journal of Discrete Algorithms*, **31**: 48-68.

Foucaud,F., Henning,M.A. 2016. ”Locating-Dominating Sets in Twin-Free Graphs”. *Journal of Discrete Applied Mathematics*, **200**: 52-58.

Haynes, T.W. 1998. *Fundamental of Domination in Graphs*. New York: Marcel Dekker, INC.

Haynes, T.W and Henning, M.A. 2002. *Total Domination Good Vertices in Graphs*. *Australasian Journal of Combinatorics*, **26**: 305-315.

Honkala,I., Laihonen,T., Ranto,S. 2002. ”On strongly identifying codes”. *Discrete Math*, **254** (13): 191205.

Lipschitz and Lipson. 2002. *Matematika Diskrit Edisi 2*. Jakarta: Salemba Teknika.

Lin, Slamin, and Miller,M. 2001. *On d-Antimagic labelings of Antiprisms*. University of New Cattle.Australia.

Munir, R. 2001. *Matematika Diskrit*: Buku Teks Ilmu Komputer. Bandung: Informatika Bandung.

Setianggoro, A.B. 2012. *Nilai Ketakteraturan Total Sisi Dari Graf Jaring Laba-Laba (Web)*. Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Slater, P. J. 1995. *Locating dominating sets and locating-dominating sets, in: Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.)*. Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Proceedings of Seventh Quad. International Conference on the Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York.

Slater, P. J. 2002. ”Fault-Tolerant Locating-Dominating Sets”. *Discrete Mathematics*, **249**: 179-189.

Wardani, D. A. R., Agustin, I. H., Dafik. 2014. ”Bilangan Dominasi dari Graf-graf Khusus”. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*.