# ***POWER DOMINATION NUMBER*** **PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

**SKRIPSI**

Oleh

**Darian Aji Bawono**
**NIM 130210101007**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**
**JURUSAN PENDIDIKAN MIPA**
**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2017**

# *POWER DOMINATION NUMBER* PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

## SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

**Darian Aji Bawono**

**NIM 130210101007**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**
**JURUSAN PENDIDIKAN MIPA**
**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2017**

## PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Allah S.W.T., Tuhan yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi besar, Nabi Muhammad S.A.W., kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan dan perjuangan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Almarhum Papa tercinta, Papa Andy Hidayat yang telah mendidik dan mengajariku kemandirian dan perjuangan dalam hidup;
2. Mama Arisanti Dyah Kartikowati yang senantiasa mengalirkan rasa cinta, kasih sayang, dan cucuran keringat serta doa yang tiada pernah putus untuk anakmu ini, selalu mendukung setiap perjalanan hidupku, selalu menghiasi hariku dengan canda tawa dan penuh kasih sayang;
3. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., dan Bapak Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsi ini;
4. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dalam banyak hal;
5. Keluarga besar di Jember dan Solo;
6. Keluarga maupun saudara baru dari Situbondo, Keluarga dari Annisa Aulia Rahmanti;
7. Sahabat Saklawase REGUKU, terimakasih atas semua cerita, kisah, dan pengalamannya;
8. Keluarga CGANT dan MSC;
9. Beasiswa Bidikmisi;
10. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

# HALAMAN MOTTO

"Keinginan merupakan kekuatan besar yang mampu mengalahkan rasa takut dan sifat malas untuk meraih sukses"
(Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.)

"Pada prinsipnya kita bisa melakukan apapun yang orang lain bisa, hanya beda tingkatannya. Resepnya suka, biasa, dan bisa"
(Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.)

"Jika nasib adalah titik, dan usaha adalah sisi; maka hidup adalah sebuah graf. Tantangan kita adalah bagaimana merangkai titik dan sisi tersebut agar tercipta sebuah graf yang keindahannya dapat dinikmati bersama"
(Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.)

## HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Darian Aji Bawono

NIM : 130210101007

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *Power Domination Number* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi Dikaitkan dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 19 Januari 2017

Yang menyatakan,

Darian Aji Bawono

NIM. 130210101007

# HALAMAN PENGAJUAN

## *POWER DOMINATION NUMBER* PADA GRAF HASIL OPERASI COMB SISI DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaiakan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

| | |
|---|---|
| Nama | : Darian Aji Bawono |
| NIM | : 130210101007 |
| Tempat dan Tanggal Lahir | : Surakarta, 30 Desember 1994 |
| Jurusan / Program Studi | : Pendidikan MIPA / P. Matematika |

Disetujui oleh:

| | |
|---|---|
| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
| Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D | Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si. |
| NIP. 19680802 199303 1 004 | NIP. 19820529 200912 1 003 |

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul : *Power Domination Number* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi Dikaitkan degan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Kamis

Tanggal : 19 Januari 2017

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

| | |
|---|---|
| Ketua, | Sekretaris, |
| Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D<br>NIP. 19680802 199303 1 004 | Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.<br>NIP. 19820529 200912 1 003 |
| Anggota I, | Anggota II, |
| Drs, Toto' Bara S, M. Si.<br>NIP. 19581209 198603 1 003 | Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.<br>NIP. 19700307 199512 2 001 |

Mengetahui,
Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 19680802 199303 1 004

# RINGKASAN

***Power Domination Number* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi Dikaitkan dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**; Darian Aji Bawono, 130210101007; 2017: 71 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk mendeskripsikan persoalan agar lebih mudah dipahami dan diselesaikan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Konigsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *power dominating set*. *Power dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung disekitarnya. Kardinalitas terkecil dari *power dominating set* disebut *power domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma_p(G)$. Aplikasi *power domination number* mulai digunakan dalam kehidupan, salah satunya adalah penempatan *reclouser* pada sistem kelistrikan yang berguna untuk menentukan jumlah titik pusat agar lebih minimal dan efisien.

Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf hasil operasi comb sisi. Graf hasil operasi comb sisi merupakan operasi dari dua buah graf dengan melekatkan salah satu sisi dari suatu graf misalkan graf $H$ ke setiap sisi dari yang lain misalkan graf $G$. Operasi comb sisi dinotasikan dengan $(G \trianglerighteq H)$. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah $(P_n \trianglerighteq Bt_m), (C_n \trianglerighteq Bt_m), (L_n \trianglerighteq Bt_m), (P_n \trianglerighteq C_m), (C_n \trianglerighteq C_m), (L_n \trianglerighteq C_m)$. Adapun alasan dalam pemilihan graf - graf tersebut sebagai bahan penelitian ini salah satunya dikarenakan keindahan dari graf yang dibentuk oleh operasi comb sisi dari kedua graf tersebut. Untuk graf lainnya dapat diteliti, hanya saja karena keterbatasan waktu sehingga peneliti mengambil 6 graf tersebut untuk diteliti.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan kardinalitas titik (*order*) dan sisi (*size*) pada graf hasil operasi comb sisi dan menentukan *power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi serta dalam tahapannya dikaitkan dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Pada penelitian ini menghasilkan kardinalitas dan *power domination number* dari graf hasil operasi comb sisi, antara lain:
Kardinalitas titik (*order*) dan sisi (*size*) pada graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $|V(P_n \trianglerighteq Bt_m)| = nm + n - m$ dan $|E(P_n \trianglerighteq Bt_m)| = 2nm + n - 2m - 1$.
2. $|V(C_n \trianglerighteq Bt_m)| = nm + n$ dan $|E(C_n \trianglerighteq Bt_m)| = 2nm + n$.
3. $|V(L_n \trianglerighteq Bt_m)| = 3nm + 2n - 2m$ dan $|E(L_n \trianglerighteq Bt_m)| = 6nm + 3n - 4m - 2$.
4. $|V(P_n \trianglerighteq C_m)| = nm - n - m + 2$ dan $|E(P_n \trianglerighteq C_m)| = nm - m$.
5. $|V(C_n \trianglerighteq C_m)| = nm - n$ dan $|E(C_n \trianglerighteq C_m)| = nm$.
6. $|V(L_n \trianglerighteq C_m)| = 3nm - 4n - 2m + 4$ dan $|E(L_n \trianglerighteq C_m)| = 3nm - 2m$.

*Power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $\gamma_p(P_n \trianglerighteq Bt_m) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
2. $\gamma_p(C_n \trianglerighteq Bt_m) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
3. $\gamma_p(L_n \trianglerighteq Bt_m) = n$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
4. $\gamma_p(P_n \trianglerighteq C_m) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
5. $\gamma_p(C_n \trianglerighteq C_m) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
6. $\gamma_p(L_n \trianglerighteq C_m) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.

Keterkaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan *power domination number* yakni dalam penemuan teorema dengan batas bawah yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengingat graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi, memahami kardinalitas dari graf dan teorema *power domination number* serta definisi operasi comb sisi, menerapkan teorema *power domination number* dengan menentukan titik pendominasi minimal, menganalisis dengan menunjukkan bahwa titik pendominasi yang dipilih adalah yang minimal, mengevaluasi dengan mengkaji ulang dan mengecek bahwa semua titik terobservasi, dan yang terakir mencipta dengan memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi teorema yang baru.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Power Domination Number* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi Dikaitkan dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Matematika Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Dosen Pembimbing I dan Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
6. Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing dan memberikan ilmu;
7. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
8. Ketua dan sekretaris CGANT;
9. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 19 Januari 2017

Penulis

## DAFTAR ISI

## DAFTAR GAMBAR

# DAFTAR TABEL

## DAFTAR LAMBANG

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | = | Graf $G$ |
| $V(G)$ | = | Himpunan Titik pada Graf $G$ |
| $E(G)$ | = | Himpunan Sisi pada Graf $G$ |
| $p = \|V(G)\|$ | = | Banyaknya Titik pada Graf $G$ |
| $q = \|E(G)\|$ | = | Banyaknya Sisi pada Graf $G$ |
| $\Delta(G)$ | = | Derajat Terbesar pada Graf $G$ |
| $\delta(G)$ | = | Derajat Terkecil pada Graf $G$ |
| $P_n$ | = | Graf Lintasan dengan $n$ Titik |
| $C_n$ | = | Graf Lingkaran dengan $n$ Titik |
| $L_n$ | = | Graf Tangga dengan $2n$ Titik |
| $Bt_n$ | = | Graf Buku Segitiga dengan $n$ buah segitiga |
| $G \trianglerighteq H$ | = | Operasi Comb Sisi dari Graf $G$ dan $H$ |
| $Z(G)$ | = | *Zero Forching* pada Graf $G$ |
| $\gamma_p(G)$ | = | *Power Domination Number* pada Graf $G$ |

# BAB 1. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu dasar yang sangat dibutuhkan untuk perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Perkembangan bidang ilmu lain seperti, fisika, biologi, ekonomi, bahkan bidang ilmu sosial, tidak terlepas dari peran ilmu matematika. Oleh karena itu, matematika juga dapat dikatakan sebagai jembatan ilmu pengetahuan dan teknologi. Penguasaan ilmu matematika sangat penting bagi para penerus bangsa untuk kemajuan suatu negara dimasa yang akan datang. Pembelajaran matematika sangat dibutuhkan untuk membekali para penerus bangsa dengan kemampuan berpikir kritis, logis, analitis, dan sistematis. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, antara lain: aritmatika, geometri, aljabar, matematika statistik, matematika komputasi, matematika diskrit, dan lain-lain.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk mendeskripsikan persoalan agar lebih mudah dipahami dan diselesaikan. Representasi visual dari graf tersebut yaitu dengan menyatakan objek dengan titik (*vertex*) dan hubungan antara objek dengan sisi (*edge*). Pada tahun 1736, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss yang bernama Leonhard Euler pertama kali memperkenalkan teori graf melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan *Konigsberg* di sungai *Pregal* yang sangat terkenal di Eropa. Saat itu orang-orang ingin membuat sebuah rute agar dapat menyeberangi ketujuh jembatan satu kali saja. Euler menyatakan bahwa teka-teki Jembatan *Konigsberg* adalah mustahil. Euler membuktikan pernyataannya dengan memformulasikan masalah Jembatan *Konigsberg* ke dalam teori graf. Meskipun pada awalnya teori graf diciptakan untuk penyelesaian kasus tersebut, namun kini teori graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri, mulai dari pelabelan titik, pelabelan sisi, pewarnaan titik, pewarnaan sisi, titik pendominasi, dan lain-lain.

Salah satu kajian dari teori graf adalah *dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan menentukan titik sebagai dominator dan menjangkau titik yang ada di sekitarnya. *Dominating set* telah banyak mengalami perkembangan, diantaranya *independent dominating set*, *independent set*, *locating independent dominating set*, *locating dominating set*, *power dominating set*, dan lain-lain.

*Power dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung disekitarnya, dengan simpul pendominasi berjumlah minimal. Kardinalitas terkecil dari *power dominating set* disebut *power domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma_p(G)$. Untuk mengetahui batas minimal dari banyaknya *power domination number* pada suatu graf menggunakan perbandingan fungsi *ceilling* antara *zero forching* yang dinotasikan dengan $Z(G)$ dengan derajat terbesar dari suatu graf. Aplikasi *power domination number* mulai digunakan dalam kehidupan, salah satunya adalah penempatan *reclouser* pada sistem kelistrikan yang berguna untuk menentukan jumlah titik pusat agar lebih minimal dan efisien. *Power domination number* tidak hanya diterapkan pada graf khusus saja, tetapi juga diterapkan pada hasil operasi graf. Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Jenis operasi graf diantaranya operasi *cartesian product*, *composition*, *shackle*, amalgamasi, comb sisi, dan lain-lain.

Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf hasil operasi comb sisi. Graf hasil operasi comb sisi merupakan operasi dari dua buah graf dengan melekatkan salah satu sisi dari suatu graf misalkan graf $H$ ke setiap sisi dari yang lain misalkan graf $G$. Operasi comb sisi dinotasikan dengan $(G \trianglerighteq H)$. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah $(P_n \trianglerighteq Bt_m), (C_n \trianglerighteq Bt_m), (L_n \trianglerighteq Bt_m), (P_n \trianglerighteq C_m), (C_n \trianglerighteq C_m), (L_n \trianglerighteq C_m)$. Adapun alasan dalam pemilihan graf - graf tersebut sebagai bahan penelitian ini salah satunya dikarenakan keindahan dari graf yang dibentuk oleh operasi comb sisi dari kedua graf tersebut. Untuk graf lainnya dapat diteliti, hanya saja karena keterbatasan waktu sehingga peneliti mengambil 6 graf tersebut untuk diteliti.

Menurut Arends (2000), berpikir merupakan suatu kemampuan untuk menganalisis, mengkritik, dan mencapai kesimpulan berdasarkan pada inferensi atau pertimbangan yang seksama. Plato mengungkapkan bahwa berpikir merupakan berbicara dalam hati. Dewey dalam Kowiyah, berpikir dimulai apabila seseorang dihadapkan pada suatu masalah dan menghadapi sesuatu yang menghendaki adanya jalan keluar. Geiles mengartikan berpikir adalah berbicara dengan diri sendiri dalam batin, yaitu mempertimbangkan, merenungkan, membuktikan sesuatu, memberi alasan, menarik kesimpulan, meneliti, dan mencari bagaimana berbagai hal itu berhubungan satu sama lain. Dari beberapa pendapat tersebut, dapat diartikan bahwa berpikir merupakan suatu proses kegiatan untuk menemukan kebenaran dan keterampilan kognitif untuk memperoleh pengetahuan.

Salah satu keterampilan berpikir dalam pemecahan masalah matematika adalah keterampilan berpikir tingkat tinggi. Selain membutuhkan kemampuan mengingat, memahami, dan menerapkan, keterampilan ini juga membutuhkan kemampuan lain yang lebih tinggi yaitu menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Berpikir tingkat tinggi sangat diperlukan bagi setiap manusia, karena terdapat berbagai masalah yang memerlukan pemecahan masalah dengan menggunakan pemikiran tingkat tinggi. Oleh karena itu, keterampilan berpikir tingkat tinggi dapat membantu kita dalam memecahkan masalah yang tidak mudah untuk diselesaikan.

Teori yang membahas keterampilan berpikir tingkat tinggi adalah Taksonomi Bloom. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif dalam enam tingkatan, yaitu pengetahuan, pemahaman, penerapan, analisis, sintesis, dan evaluasi. Setelah direvisi, taksonomi Bloom berubah menjadi mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Mengingat, memahami, dan menerapkan merupakan tiga ranah yang termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat rendah, sedangkan tiga ranah lainnya seperti menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat tinggi. Hal ini berarti untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi tetap harus melewati tiga ranah dasar yaitu mengingat, memahami, dan menerapkan.

Penelitian ini akan mengkaji keterkaitan antara menciptakan teorema dari *power domination number* dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi yang berpacu pada taksonomi Bloom yang telah direvisi. Sehingga pada penelitian ini penulis memilih judul " ***Power Domination Number*** **Pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi Dikaitkan dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

a.) berapakah kardinalitas titik dan sisi pada graf hasil operasi comb sisi $(P_n \trianglerighteq Bt_m), (C_n \trianglerighteq Bt_m), (L_n \trianglerighteq Bt_m), (P_n \trianglerighteq C_m), (C_n \trianglerighteq C_m), (L_n \trianglerighteq C_m)$?

b.) berapakah *power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi $(P_n \trianglerighteq Bt_m), (C_n \trianglerighteq Bt_m), (L_n \trianglerighteq Bt_m), (P_n \trianglerighteq C_m), (C_n \trianglerighteq C_m), (L_n \trianglerighteq C_m)$?

c.) bagaimana keterkaitan antara *power domination number* dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi?

## 1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

a.) graf $G$ dalam $(G \trianglerighteq H)$ yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf *path* $(P_n)$, *cycle* $(C_n)$, dan *ladder* $(L_n)$;

b.) graf $H$ dalam $(G \trianglerighteq H)$ yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf *triangular book* $(Bt_m)$ dan *cycle* $(C_m)$;

c.) operasi graf yang digunakan adalah operasi comb sisi;

d.) menggunakan Taksonomi Bloom yang telah direvisi.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a.) Untuk mengetahui kardinalitas titik dan sisi pada graf hasil operasi comb sisi $(P_n \trianglerighteq Bt_m), (C_n \trianglerighteq Bt_m), (L_n \trianglerighteq Bt_m), (P_n \trianglerighteq C_m), (C_n \trianglerighteq C_m), (L_n \trianglerighteq C_m)$;

b.) Untuk mengetahui *power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi $(P_n \trianglerighteq Bt_m), (C_n \trianglerighteq Bt_m), (L_n \trianglerighteq Bt_m), (P_n \trianglerighteq C_m), (C_n \trianglerighteq C_m), (L_n \trianglerighteq C_m)$;

c.) untuk mengetahui keterkaitan antara *power domination number* dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

a.) menambah wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai *power domination number*;

b.) menambah wawasan baru dalam menciptakan keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan *power domination number*;

c.) hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dalam menentukan *power domination number* untuk hasil operasi graf-graf yang lainnya.

## 1.6 Kebaharuan Penelitian

Kebaharuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

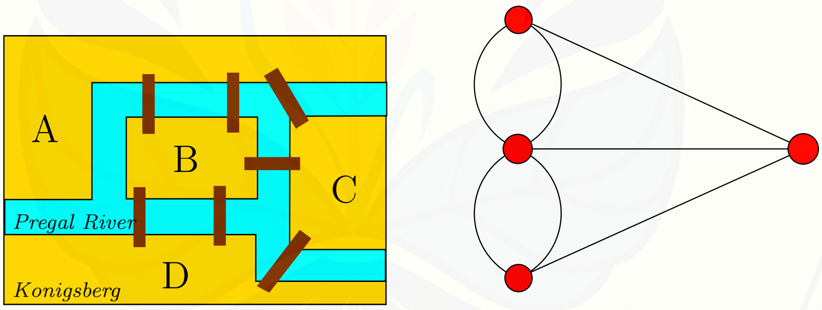
a.) menggunakan metode *power dominating set*;

b.) menggunakan graf hasil operasi comb sisi.

# BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

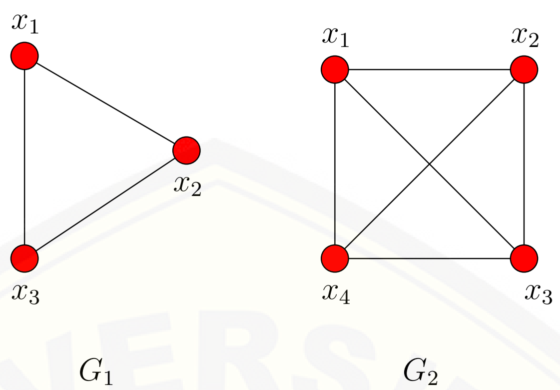
## 2.1 Terminologi Dasar Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 melalui tulisan Leonhard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan masalah Jembatan *Konigsberg* di Sungai *Pregal* yang sangat terkenal di Eropa. Pada saat itu orang-orang ingin membuat sebuah rute agar orang-orang dapat menyeberangi ketujuh jembatan satu kali saja. Leonard Euler berhasil menemukan penyelesaiannya dengan menggunakan teori graf dengan menentukan keempat daerah itu sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai. Hal tersebut dimungkinkan ada, jika dan hanya jika representasi dari graf tersebut tidak punya titik yang berderajat ganjil dan tepat ada dua titik yang berderajat ganjil tetapi kedua titik tersebut akan menjadi titik awal dan titik akhir (Saoni, 2003).



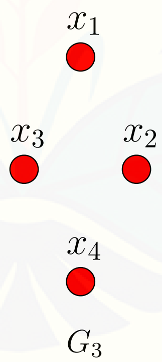

Gambar 2.1 Representasi Jembatan *Konigsberg*

Graf $G$ adalah pasangan himpunan $(V, E)$ dimana $V$ adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan $E$ adalah himpunan sisi (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik $(v_1, v_2)$ dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edge*). $V$ disebut himpunan titik dari $G$, dan $E$ disebut himpunan sisi dari $G$. Seringkali kita menuliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf $G$ dan $E(G)$ *adalah* himpunan sisi dari graf $G$. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu (Slamin, 2009). Contoh graf dengan 3 dan 4 titik dapat dilihat pada Gambar 2.2.




Gambar 2.2 Graf $G_1$ dan $G_2$

Sedangkan graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) dinotasikan dengan $N_n$, dimana $n$ adalah jumlah titik pada graf. $G_3$ adalah graf dengan $E$ merupakan himpunan kosong. Gambar 2.3 mempresentasikan contoh graf kosong dengan 4 titik yang dinotasikan dengan $N_4$.




Gambar 2.3 Graf $G_3$

Banyaknya titik *(order)* pada suatu graf $G$ dapat dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya sisi *(size)* yang dinotasikan dengan $|E(G)|$. Secara umum graf dapat digambarkan dengan suatu diagram dimana *verteks* yang ditunjukkan sebagai titik yang dinotasikan dengan $v_i, i = 1, 2, 3...$ dan sisi yang digambarkan dengan sebuah garis lurus atau dengan garis lengkung yang menghubungkan dua *verteks* $v_i, v_j$ dan dinotasikan $e_k, k = 1, 2, 3, ..., q$. Dengan kata lain titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Misalkan $v_i$ dan $v_j$ adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik $v_i$ dan $v_j$ dinyatakan dengan pasangan $(v_i,\ v_j)$ dan dapat disedehanakan menjadi $E(G) = v_i\ v_j$ atau dengan lambang $e_1,\ e_2,\ e_3,\ ...,\ e_n$ (Douglas, 1996). Pada Gambar 2.2, $G_1$ adalah graf dengan $|V(G_1)| = 3$ dan $|E(G_1)| = 3$, sedangkan $G_2$ adalah graf dengan $|V(G_2)| = 4$ dan $|E(G_2)| = 6$, dan $G_3$ adalah graf dengan $|V(G_3)| = 2$ dan $|E(G_3)| = 0$. Pada $G_1$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_1) = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ dan $E(G_1) = \{x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3\}$ dan $G_2$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E(G_2) = \{x_1x_2, x_1x_4, x_1x_3, x_2x_4, x_2x_3, x_3x_4\}$, serta $G_3$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_3) = \{x_1,x_2\}$ dan $E(G_3) = \{\}$. Sebuah sisi dinamakan *loop* jika sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama. Sebuah sisi dinamakan sisi ganda (*parallel*) jika dua atau lebih sisi yang mempunyai titik-titik ujung yang sama.

Menurut Munir (2012: 365) dua buah titik pada suatu graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Misalkan $v_1$ dan $v_2$ titik pada graf $G$, titik $v_1$ dikatakan *adjacent* dengan titik $v_2$ jika ada sisi $e_1$ yang menghubungkan titik $v_1$ dan titik $v_2$, yaitu $e_1 = v_1v_2$. Sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), sebuah titik $v_1$ dikatakan *incident* dengan sebuah sisi $e_1$ jika $v_1$ merupakan titik ujung dari $e_1$, demikian juga $e_1$ dikatakan *incident* dengan $v_1$ jika $v_1$ merupakan titik ujung dari $e_1$. Sebagai contoh, pada graf $G_1$ Gambar 2.2, $x_1$ *adjacent* dengan $x_2$, $x_2$ dan $x_3$. Pada graf $G_1$ Gambar 2.2, $x_1$ dan $x_3$ *incident* dengan $x_1\ x_3$.

Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dinamakan derajat (*degree*). Derajat dinotasikan dengan $d_i$ (*index i* menunjukkan titik ke-$i$ pada graf). Sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*) yang artinya titik tersebut tidak bertetangga dengan titik lain. Jika ada suatu graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan graf regular (Gary Chartrand, 2009: 38). Derajat terkecil dari suatu graf $G$ adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada suatu titik $v_i$ di graf $G$ diantara titik-titik lainnya di graf $G$ yang dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat terbesar dari suatu graf $G$ adalah banyaknya maksimal sisi yang *incident* pada suatu titik $v_i$ di graf $G$ diantara titik-titik lainnya di graf $G$ yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Sebagai contoh graf $G_2$ pada Gambar 2.2 memiliki $\Delta(G) = 3$.

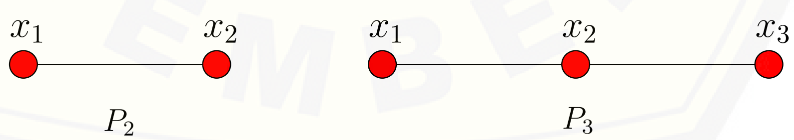
Jalan (*walk*) pada sebuah graf adalah barisan titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik. Jalan dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama. Jika titik dan jalan yang dilalui berbeda maka disebut lintasan (*path*), sedangkan jika semua sisinya yang berbeda maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Sikel (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda (lintasan yang tertutup).

## 2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus merupakan suatu graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order $n$ tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

1. Graf Lintasan (*Path Graph*)

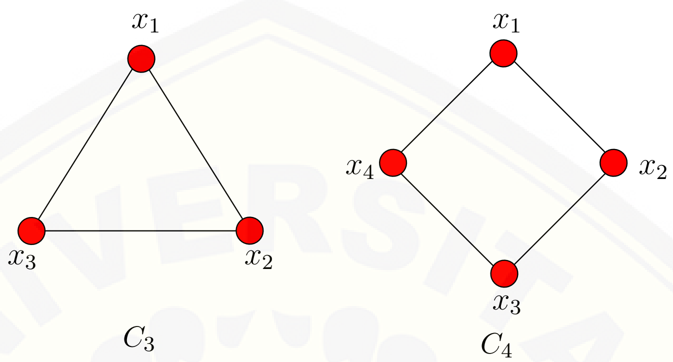
   Graf lintasan terdiri dari $n$ buah titik (satu lintasan) dinotasikan dengan $P_n$ dimana $n \geq 2$. Jumlah sisi pada graf lintasan yang terdiri dari $n$ buah titik dan $n-1$ sisi (Akram, 2015). Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.4.




Gambar 2.4 Graf Lintasan $P_2$ dan $P_3$

2. Graf lingkaran (*Cycle Graph*)

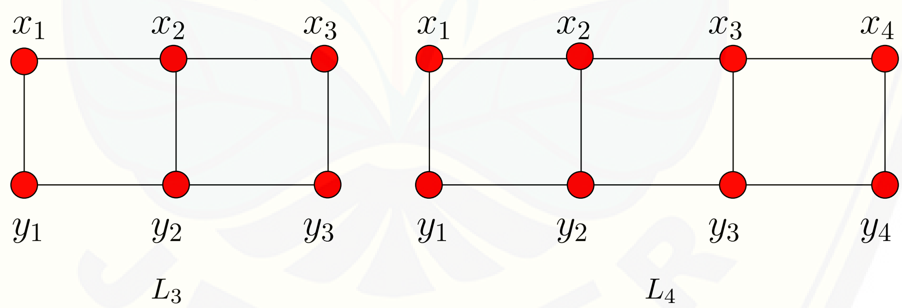
   Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan $n$ titik dan $n$ sisi dilambangkan dengan $C_n$ dimana $n \geq 3$ (Acharya dan Mehta, 2014). Contoh dari graf lingkaran bisa dilihat pada Gambar 2.5.




Gambar 2.5 Graf Lingkaran $C_3$ dan $C_4$

3. Graf Tangga (*Ladder Graph*)

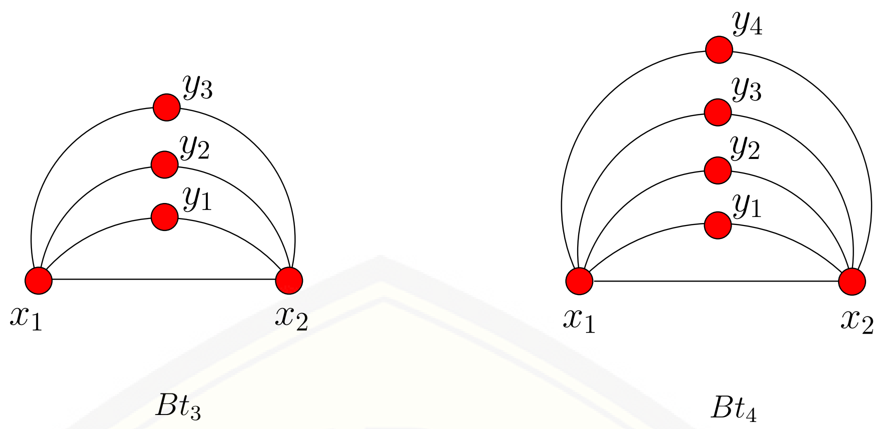
   Graf tangga yang dinotasikan dengan $L_n$ yaitu terdiri dari $2n$ titik dan $3n-2$ sisi dengan $n \geq 3$ (Sugeng, 2005). Contoh graf tangga dapat dilihat pada Gambar 2.6.




Gambar 2.6 Graf Tangga $L_3$ dan $L_4$

4. Graf Buku Segitiga (*Triangular Book*)

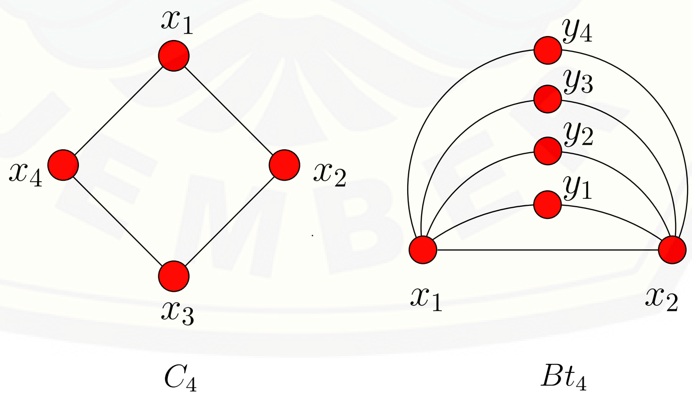
   Graf buku segitiga yang dinotasikan dengan $Bt_n$ yaitu graf yang terdiri dari sejumlah $n$ buah segitiga ($n \geq 2$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama (Dafik dkk., 2013). Contoh graf buku segitiga dapat dilihat pada Gambar 2.7.



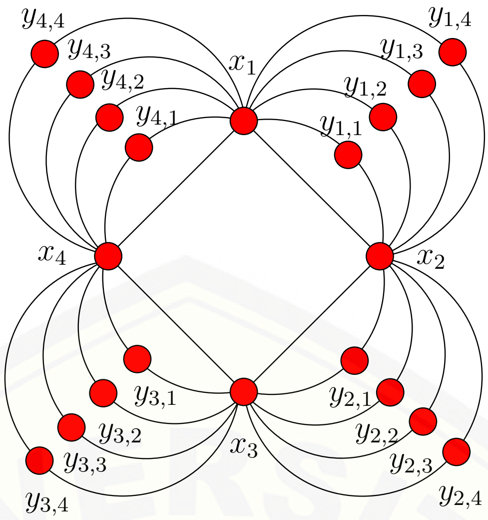

Gambar 2.7 Graf Buku Segitiga $Bt_3$ dan $Bt_4$

Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Berikut ini adalah contoh graf hasil operasi comb sisi.

**Definisi 2.2.1.** *Graf Comb Sisi (Edge Comb Product). Misalkan $G$ dan $H$ adalah graf terhubung dan $e$ adalah sisi dari graf $H$. Operasi comb sisi dari graf $G$ dan $H$ dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf $G$ dan $|E(G)|$ salinan graf $H$ dan melekatkan salinan ke-i dari graf $H$ di sisi cangkok ke-i dari graf $G$, dengan demikian himpunan titik dan sisi adalah sebagai berikut: $V(G \trianglerighteq H) = \{(a,v)|a \in V(G), v \in V(H)\}$ dan $(a,v),(b,w) \in E(G \trianglerighteq H)$ jika $a = b$ dan $vw \in E(H)$, atau $ab \in E(G)$ dan $vw = e$* (Dafik, 2016). Contoh graf operasi comb sisi dapat dilihat pada Gambar 2.9.




Gambar 2.8 Graf $C_4$ dan $Bt_4$




$(C_4 \trianglerighteq Bt_4)$

Gambar 2.9 Graf Hasil Operasi Comb Sisi dari $C_4$ dan $Bt_4$

Pada bagian berikut adalah rencana penelitian yang akan dilakukan terkait *power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi. Graf hasil operasi comb sisi yang akan diteliti dalam penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Rencana Penelitian *Power Domination Number* pada Graf Hasil Operasi Comb sisi.

| **No.** | **Graf Comb sisi** | **Keterangan** |
|---|---|---|
| 1. | $P_n \trianglerighteq Bt_m$ | Graf hasil operasi dari *path* dengan *triangular book* |
| 2. | $C_n \trianglerighteq Bt_m$ | Graf hasil operasi dari *cycle* dengan *triangular book* |
| 3. | $L_n \trianglerighteq Bt_m$ | Graf hasil operasi dari *ladder* dengan *triangular book* |
| 4. | $P_n \trianglerighteq C_m$ | Graf hasil operasi dari *path* dengan *cycle* |
| 5. | $C_n \trianglerighteq C_m$ | Graf hasil operasi dari *cycle* dengan *cycle* |
| 6. | $L_n \trianglerighteq C_m$ | Graf hasil operasi dari *ladder* dengan *cycle* |

## 2.3 Fungsi *Flooring* dan *Ceiling*

Fungsi *flooring* $f : R \rightarrow Z$, dimana $f(x)$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $x$, dinotasikan dengan $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Sedangkan fungsi *ceiling* $f : R \rightarrow Z$, dimana $f(x)$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan $x$, dinotasikan dengan $f(x) = \lceil x \rceil$. Berikut ini merupakan sifat-sifat dari fungsi *flooring* dan *ceiling*: (1) $\lfloor x \rfloor = n$ bila $n \leq x \leq n+1$, (2) $\lceil x \rceil = n$ bila $n-1 < x < n$, (3) $\lfloor x \rfloor = n$ bila $x-1 < n < x$, (4) $\lceil x \rceil = n$ bila $x \leq n \leq x+1$, (5) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$, (6) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$, (7) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$, (8) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, (9) $\lceil x+n \rceil = \lfloor x \rfloor + n$.

## 2.4 *Power Domination Number*

Menurut Haynes dan Henning dalam Agustin dan Dafik (2014), himpunan $S$ dari titik graf sederhana $G$ dinamakan himpunan dominasi (*dominating set*) jika setiap titik $u \in V(G) - S$ *adjacent* ke beberapa titik $v \in S$. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Himpunan $S \subseteq V$ adalah *dominating set* pada graf $G = (V, E)$ jika setiap titik $V \in S$ memiliki setidaknya satu tetangga di $S$ yaitu $N[S] = V$. Masalah *power system* merupakan salah satu variasi dari masalah *dominating set*. Himpunan $S$ didefinisikan sebagai *power dominating set* jika setiap titik dan sisi dalam $G$ diamati oleh $S$. *Power domination number* dinotasikan dengan $\gamma_P(G)$. $\gamma_P(G)$ adalah kardinalitas minimum dari *power dominating set* dari $G$ (Zhao, 2006).

$\Diamond$ **Teorema 2.4.1.** *Untuk sebarang graf* $\lceil \frac{Z(G)}{\Delta(G)} \rceil \leq \gamma_p(G)$.

**Bukti:** Misal $G$ adalah graf terhubung dengan komponen simpul dan sisi, dan $G$ tidak memiliki *isolated vertex*. Dengan memilih himpunan *power domination* yang minimal akan didapat $S = \{x_1,\ x_2,\ x_3, ...\}$ kemudian $\gamma_p(G) \geq \lceil \frac{Z(G)}{\Delta G} \rceil$. Ketika $G$ memiliki sisi dengan $\Delta(G) \geq 1$ maka $\gamma_p(G) \geq \lceil \frac{Z(G)}{\Delta G} \rceil$, menjadi terikat. Misal $G$ adalah graf terhubung $G_1, G_2, ..., G_h$ dengan order $G_i$ minimal dua, maka :

$$\Leftrightarrow \gamma_p(G_i) \geq \lceil \frac{Z(G_i)}{\Delta(G_i)} \rceil$$

$$\Leftrightarrow \gamma_p(G_i) \geq \lceil \frac{Z(G_i)}{\Delta(G)} \rceil$$

dengan $\Delta(G) \geq 1$ dan $\gamma_p(G_i) \geq \lceil \frac{Z(G_i)}{\Delta(G)} \rceil$ untuk setiap komponen $G$ maka :

$$\Leftrightarrow \gamma_p(G) = \sum_{i=1}^{h} \gamma_p(G_i)$$

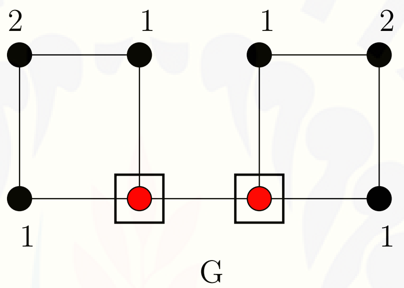
$$\Leftrightarrow \gamma_p(G) \geq \sum_{i=1}^{h} \lceil \frac{Z(G_i)}{\Delta(G)} \rceil$$

$$\Leftrightarrow \gamma_p(G) \geq \lceil \sum_{i=1}^{h} \frac{Z(G_i)}{\Delta(G)} \rceil$$

$$\Leftrightarrow \gamma_p(G) \geq \lceil \frac{\sum_{i=1}^{h} Z(G_i)}{\Delta(G)} \rceil$$

$$\Leftrightarrow \gamma_p(G) \geq \lceil \frac{Z(G)}{\Delta(G)} \rceil \qquad \text{(Benson, 2015)}$$

Contoh penerapan *power dominating set* dapat dilihat pada Gambar 2.10.




Gambar 2.10 Contoh *Power Dominating Set* pada Graf Sebarang

Pada bagian berikut adalah penelitian terkait *power domination number* yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut dapat dilihat pada tabel 2.2 :

Tabel 2.2 *Power Domination Number* Pada Sebarang Graf Khusus dan Graf Operasi

| **Graf** | $\gamma_p(G)$ | **Keterangan** |
|---|---|---|
| $C_n$ | 1 | Min Zhao |
| $P_n$ | 1 | Min Zhao |
| $K_n$ | 1 | Min Zhao |
| $K_n \square K_m$ | $n-1$ untuk $m \geq n \geq 2$ | K. M. Koh |
| $P_n \square P_m$ | $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$ untuk $n = 4(mod 8)$<br>$\lceil \frac{n}{4} \rceil$ untuk $n$ lainnya | Michael D. |
| $P_n \boxtimes P_m$ | $max\{\lceil \frac{n}{3} \rceil, \lceil \frac{n+m-2}{4} \rceil\}$<br>untuk $3m - n - 6 \equiv 4(mod 8)$ | Michael D. |

## 2.5 *Zero Forching*

Himpunan *Zero forching* dari graf $G$ adalah simpul dari $B$, ketika simpul $B$ berwarna biru maka sisa simpul berwarna putih. Himpunan *zero forching* minimum adalah *zero forching* dengan kardinalitas minimum. *Zero forching* dinotasikan dengan $Z(G)$. Aturan pergantian warna : jika $u$ adalah simpul berwarna biru maka pasti satu tetangga yaitu $w$ akan berwarna putih. Kemudian mengganti warna $w$ menjadi biru.

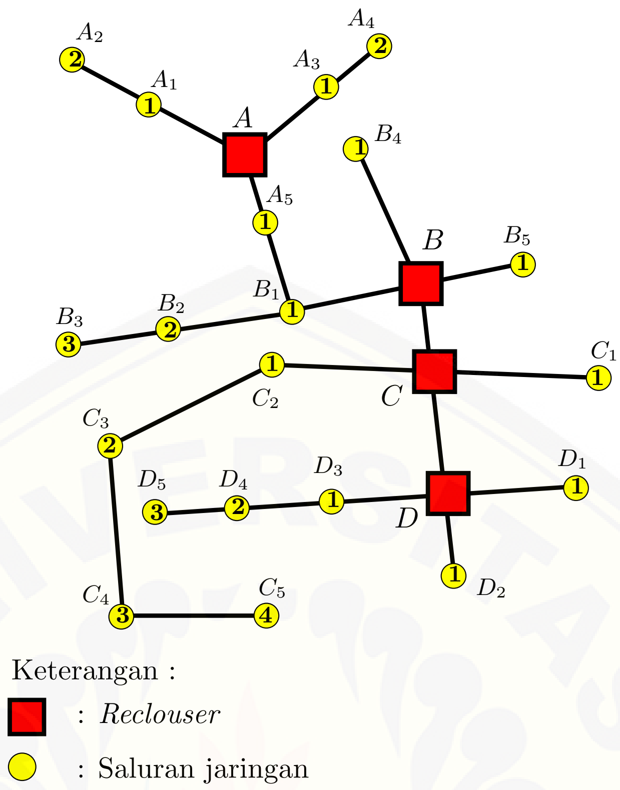
*Zero forching* untuk sebarang graf dapat ditulis dengan sederhana yaitu $Z(G) \geq \delta$. Dengan $Z(G)$ merupakan *zero forching* dan $\delta$ merupakan derajat minimum dari $G$ (Benson, 2015).

## 2.6 Aplikasi Graf

Perusahaan tenaga listrik membutuhkan pemantauan terus menerus terhadap jaringan pada perusahaan tersebut. Salah satu metode pemantauannya adalah menempatkan *Reclouser* pada lokasi yang dipilih sebagai sistem kemudian direpresentasikan sebagai simpul dalam graf. Dimana semua jalur terhubung pada simpul dan berperan sebagai sisi. Dalam hal ini dapat menggunakan aplikasi dari power domination, lokasi *Reclouser* ditempatkan pada titik-titik tertentu agar dapat menjangkau seluruh sistem dan meminimalisir biaya perusahaan tersebut. Penentuan jaringan ini dapat menggunakan teori *power dominating set*.

Dalam sistem ketenagalistrikan yang patut menjadi perhatian adalah bagaimana mengoperasikan tenaga listrik secara handal, tidak terputus-putus yang secara kontinu selalu dapat menyalurkan tenaga listrik pada para pelanggan PLN. Untuk menyalurkan tenaga listrik ssecara berkesinambungan tersebut diperlukan cara dan metode tertentu dalam mengelola penyaluran tenaga listrik tersebut.

Metode *Power Dominating Set* dapat memberikan informasi tentang penempatan *Reclouser* sebagai *Power* dan LBS *(Load Break Switch)* sebagai titik cakupan, kedua alat ini sejenis, yaitu *switching*/alat pemutus aliran tenaga listrik pada jaringan listrik jika terjadi gangguan/pemadaman yang diharapkan tidak akan berimbas pada daerah daerah lain (Haynes, dkk., 2002). Gambar 2.11 adalah sketsa penempatan *Reclouser*.




Gambar 2.11 Sketsa penempatan *reclouser*

## 2.7 Fungsi dan Barisan Aritmatika

### 2.7.1 Fungsi

Fungsi seringkali disebut dengan pemetaan. Fungsi $f$ dari himpunan $X$ ke himpunan $Y$ dinotasikan dengan $f : X \rightarrow Y$ adalah aturan korespondensi satu-satu yang menghubungkan setiap $x \epsilon X$ dengan tepat satu ke anggota Y. Himpunan $X$ disebut domain dari fungsi $f$ sedangkan himpunan $Y$ disebut kodomain dari fungsi $f$. Menurut Susilo (2012, 115-117) terdapat 3 jenis fungsi khusus, diantaranya:

1. Fungsi Injektif

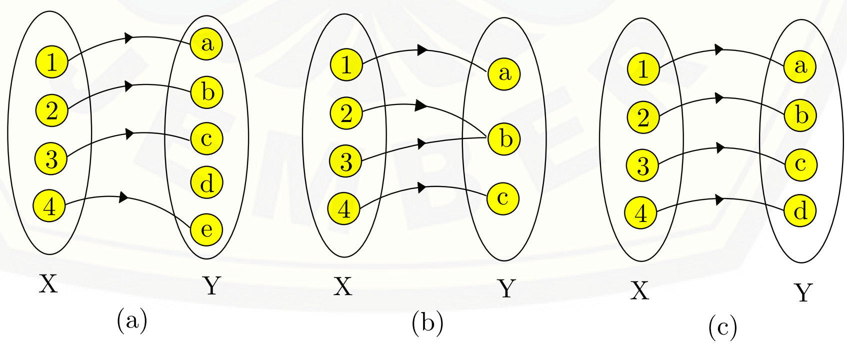
   Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi (pemetaan) injektif jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2 \epsilon X$ berlaku apabila $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ yaitu bila dua elemen dalam domain mempunyai bayangan (peta) yang sama, maka kedua elemen itu adalah elemen yang sama. Secara simbolis dapat dinyatakan: $f$ adalah fungsi injektif $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \epsilon X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Secara ekivalen, juga dapat dinyatakan bahwa: $f$ adalah fungsi injektif $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \epsilon X) x_1 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ yaitu jika dua elemen dalam domain adalah dua elemen yang tidak sama, maka bayangan (peta) kedua elemen itu juga tidak sama.

2. Fungsi Surjektif Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi (pemetaan) surjektif jika dan hanya jika kisaran dari fungsi $f$ tersebut sama dengan kodomain dari fungsi $f$, yaitu $f(X) = Y$. Dengan perkataan lain, fungsi $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap $y \epsilon Y$ terdapat $x \epsilon X$ sedemikian sehingga $y = f(x)$, yaitu setiap elemen dalam kodomain mempunyai prabayangan (prapeta). Secara simbolis dapat dinyatakan: $f$ adalah fungsi surjektif $\Leftrightarrow (\forall y \epsilon Y)(\exists x \epsilon X) y = f(x)$.

3. Fungsi Bijektif

   Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi (pemetaan) bijektif jika dan hanya jika fungsi $f$ tersbut adalah fungsi yang injektif da sekaligus surjektif. Pada fungsi bijektif, setiap elemen dalam domain mempunyai tepat satu bayangan dan setiap elemen dalam kodomain juga mempunyai tepat satu prabayangan. Oleh karena itu, fungsi bijektif seringkali juga disebut korespondensi satu-satu.

   Contoh dari ketiga fungsi khusus tersebut adalah dapat dilihat pada Gambar 2.12.




Gambar 2.12 Fungsi-fungsi khusus: (a) injektif, (b) surjektif, (c) bijektif

### 2.7.2 Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang memiliki beda (selisih) antaradua suku berurutan tetap. Berikut adalah beberapa contoh barisan bilangan:

1. $1, 5, 9, 13, ...$

2. $3, 6, 9, 12, ...$

3. $50, 45, 40, 35, ...$

Berdasarkan contoh barisan tersebut, didapat bahwa untuk contoh 1, suku pertama $(U_1) = 1$, suku kedua $(U_2) = 5$ yang diperoleh dari suku pertama ditambah 4, dan seterusnya. Selisih dari setiap suku berurutan dari barisan ini adalah tetap, yaitu sebesar 4. Barisan ini disebut barisan aritmatika dan selisih yang tetap dari barisan ini disebut beda barisan yang dilambangkan dengan $b$. Demikian halnya dengan contoh 2 dan 3, contoh-contoh tersebut juga disebut barisan aritmatika meskipun memiliki nilai beda yang tidak sama dengan contoh 1. Contoh 2 memiliki nilai beda $b = 3$, sedangkan contoh 3 memiliki beda $b = -5$. Rumus suku ke$-n$ dari barisan aritmatika, yaitu jika suku pertama barisan aritmatika $U_1$ disimbolkan $a$, maka diperoleh:

$U_1 = a$
$U_2 - U_1 = b \Leftrightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$
$U_3 - U_2 = b \Leftrightarrow U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$
$U_4 - U_3 = b \Leftrightarrow U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$

dan seterusnya, sehingga diperoleh barisan aritmatika dalam bentuk:

$a, a + b, a + 2b, a + 3b, ..., a + (n - 1)b$

Dari barisan tersebut kita dapatkan bentuk umum rumus suku ke-n barisan aritmatika yaitu:

$U_n = a + (n - 1)b.$

## 2.8 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan *corolarry* (akibat). Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual. *Corollary* (akibat) adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan *corollary* adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain (Yunimelawati, 2012). Konjektur adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Konjektur bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, konjektur adalah proposisi yang tidak terbuktikan atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. *Open problem* (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh *open problem* dalam matematika, yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad kedua puluh, adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta. Sedangkan *open problem* yang belum terselesaikan contohnya adalah permasalahan jembatan Königsberg.

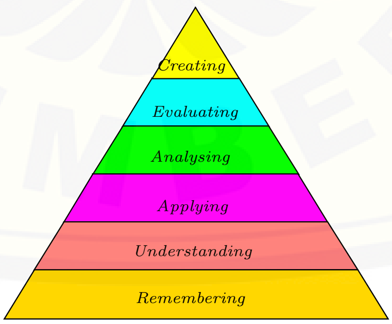
## 2.9 Keterampilan Berfikir Tingkat Tinggi

Menurut Santrock (2008) berpikir melibatkan kegiatan memanipulsasi dan mentransformasi informasi dalam memori. Kemampuan berikir setiap individu memiliki perbedaan satu sama lain. Terdapat dua klasikasi tingkat berpikir yaitu berpikir tingkat rendah dan berpikir tingkat tinggi. Kemampuan berpikir tingkat rendah (*Lower Order Thinking*) adalah kemampuan berpikir yang hanya menuntut seseorang untuk mengingat, memahami, dan mengaplikasikan suatu rumus atau hukum. Sedangkan, Berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking*) adalah keterampilan yang lebih dari sekedar mengingat, memahami, dan mengaplikasikan.

Keterampilan berpikir dapat didefinisikan sebagai proses kognitif yang dipecah-pecah ke dalam langkah-langkah nyata yang kemudian digunakan sebagai pedoman berpikir. Salah satu contoh keterampilan berpikir adalah menarik kesimpulan, yang didefinisikan sebagai kemampuan untuk menghubungkan berbagai petunjuk dan fakta atau informasi dengan pengetahuan yang telah dimiliki untuk membuat suatu prediksi hasil akhir yang terumuskan. Untuk mengajarkan keterampilan berpikir menarik kesimpulan tersebut yaitu proses kognitif harus dipecah ke dalam langkah-langkah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi pertanyaan atau fokus kesimpulan yang akan dbuat;
2. mengidentifikasi fakta yang diketahui;
3. mengidentifikasi pengetahuan yang relevan yang telah diketahui sebelumya;
4. membuat perumusan prediksi hasil akhir, berdasarkan Taksonomi Bloom yang telah direvisi terdapat enam tahapan ranah kognitif yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi.

Taksonomi Bloom dianggap dasar bagi proses berpikir. Taksonomi Bloom yang digambarkan dalam Gambar 2.13 memuat enam level, diantaranya: mengingat (*remembering*), memahami (*understanding*), menerapkan (*applying*), menganalisis (*analysing*), mengevaluasi (*evaluating*), dan mencipta (*creating*). Kebiasaan berpikir akan memacu munculnya kreativitas, inovasi, dan kecerdasan. Semakin tinggi level berpikir seseorang dikatakan semakin tinggi pula keterampilan berpikir. Sebaliknya semakin rendah level berpikir seseorang dikatakan semakin rendah pula keterampilan berpikirnya.




Gambar 2.13 Tahapan Taksonomi Bloom yang Telah Direvisi

Aspek mengingat, memahami, dan menerapkan merupakan kategori berpikir tingkat rendah, sedangkan aspek menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi termasuk kategori berpikir tingkat tinggi. Hal tersebut bukan berart bahwa aspek mengingat, memahami, dan menerapkan tidak penting, namun untuk menuju dalam berpikir tingkat tinggi seseorang harus melalui tiga aspek tersebut. Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja kunci dari ranah kognitif yang telah direvisi: (Utari, R, 2013: 10)

1. Mengingat adalah Kemampuan menyebutkan kembali informasi/ pengetahuan yang tersimpan di dalam ingatan. Kata kerja kuncinya: mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, menemukan kembali, menyatakan, mengulang, mengurutkan, menamai, menempatkan, menyebutkan.

2. Memahami adalah Kemampuan memahami instruksi dan menegaskan pengertian/ makna ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk lisan, tertulis maupun grafik/ diagram. Kata kerja kuncinya: Menerangkan, menjelaskan, menterjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, mengubah, memperkirakan.

3. Menerapkan adalah Kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kata kerja kuncinya: memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, mempraktekkan.

4. Menganalisis adalah Kemampuan memisahkan konsep kedalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata kerja kuncinya: mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan, menunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisihkan menjadi beberapa bagian, mengorganisir, mengkerangkakan.

5. Mengevaluasi adalah Kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja kuncinya: menilai, mengevaluasi, menjustifikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, menyeleksi.

6. Mengkreasi adalah Kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinil. Kata kerja kuncinya: merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengembangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya.

# BAB 3. METODE PENELITIAN

## 3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Penelitian ini terlebih dahulu menentukan objek penelitian berupa graf hasil operasi comb sisi. Setelah itu menentukan kardinalitas dari graf tersebut. Selanjutnya menentukan titik yang memiliki derajat maksimum pada graf tersebut sebagai titik dominator (*power*). Setelah tahapan tersebut, periksa apakah tetangga terdekat memiliki derajat dua atau lebih, dan analisa keoptimalannya dengan menggunakan perbandingan fungsi *ceilling* antara *zero forching* dengan derajat terbesar dari graf. Selanjutnya dapat ditentukan $\gamma_p$ minimal dan semua titik terdominasi. Penelitian ini juga menggunakan tahapan-tahapan Taksonomi Bloom yang telah direvisi yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Setiap langkah dalam penelitian ini akan dikaitkan dengan tahapan-tahapan tersebut untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang digunakan berupa graf hasil operasi comb sisi. Graf-graf khusus yang digunakan adalah *path* ($P_n$), *cycle* ($C_n$), *ladder* ($L_n$), yang dioperasikan dengan operasi comb sisi dengan graf *triangular book* ($Bt_n$) dan *cycle* ($C_n$).

## 3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna.

### 3.2.1 *Power Domination Number*

Himpunan titik $S$ adalah *dominating set* $G$ jika semua titik di $G$ didominasi oleh $S$. Bilangan kardinalitas adalah kardinalitas minimum dari *dominating set* yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$.

Dapat dikatakan bahwa, himpunan $S \subseteq V(G)$ adalah *power dominating set* dari graf $G$ jika setiap simpul yang bukan anggota $S$ diobservasi oleh $S$ dengan menggunakan aturan sebagai berikut:

1. Jika setiap simpul pada *power dominating set* mengobservasi dirinya sendiri dan simpul tetangga.
2. Jika sebuah simpul memiliki tetangga lebih dari satu $k > 1$, maka $k-1$ simpul akan terobservasi, sehingga semua simpul $k$ terobservasi.

*Power dominating set* merupakan himpunan titik pendominasi dari suatu graf dinotasikan dengan $S$.

### 3.2.2 Graf Hasil Operasi Comb sisi

Graf hasil operasi comb sisi merupakan salah satu hasil operasi graf yang menerapkan definisi mengganti semua sisi graf $G$ dengan salah satu sisi graf $H$ yang telah ditentukan. Graf comb sisi dinotasikan dengan $(G \trianglerighteq H)$.

### 3.2.3 Keterkaitan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi

Dalam menentukan *power domination number* pada suatu graf, setiap tahapan penemuannya dikaikan dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Setiap proses penemuannya mulai dari menentukan graf yang digunakan dalam penelitian, menggunakan teorema yang sudah ada, hingga menemukan teorema baru selalu dikaitkan dengan keterampilan beripikir tinggi yaitu menggunakan Taksonomi Bloom yang telah direvisi. Mengaitkan berarti menghubungkan dua objek atau lebih sehingga menjadi satu kesatuan yang padu.

## 3.3 Teknik Penelitian

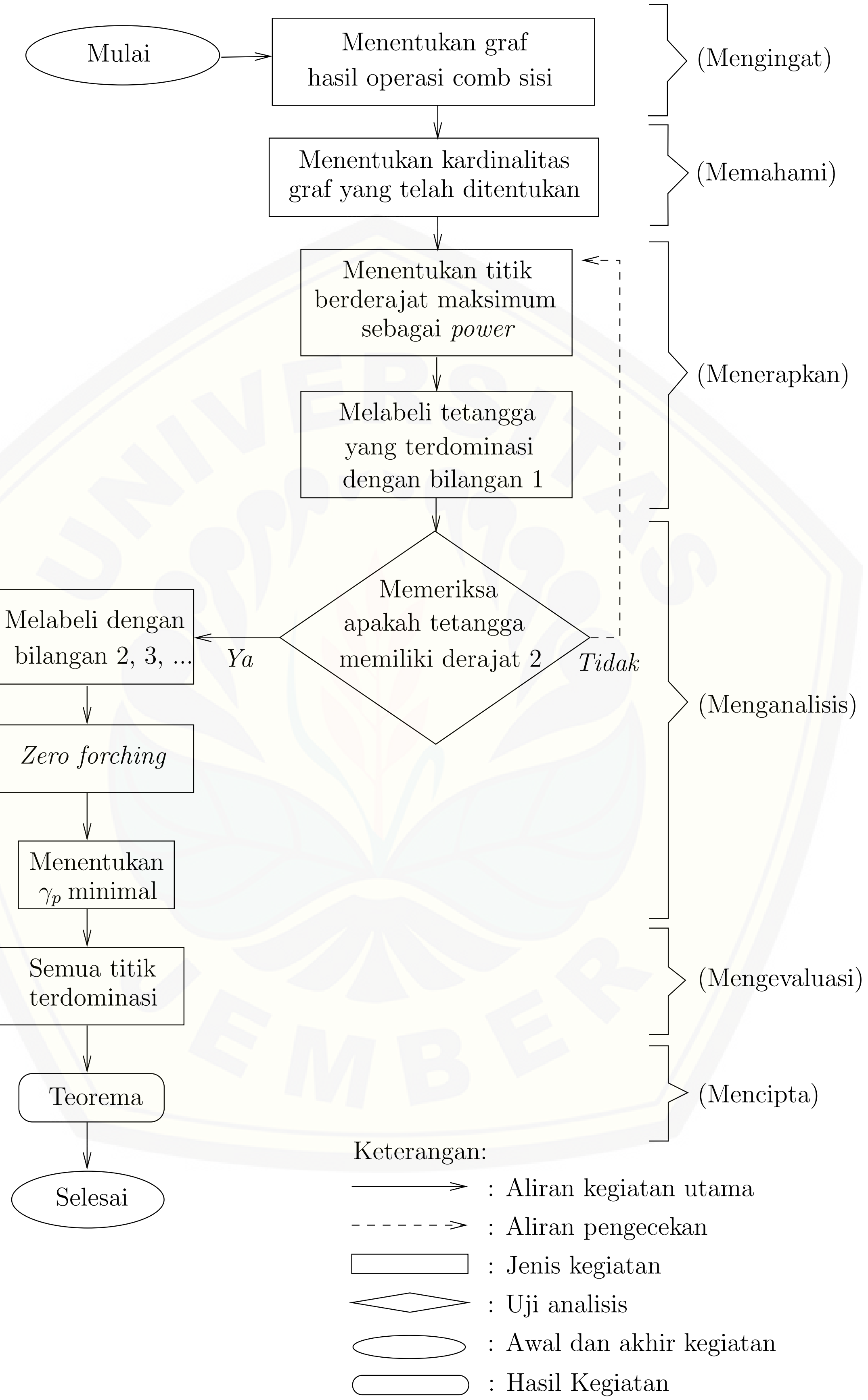
Teknik penelitian untuk *power domination number* pada graf khusus dan operasinya. Uraian dari rancangan penelitian ini sebagai berikut :

1. menentukan objek penelitian berupa graf hasil operasi comb sisi;
2. memilih titik berderajat maksimal sebagai *power*;
3. melabeli tetangga yang terdominasi dengan label 1;
4. memeriksa apakah tetangga terdekat memiliki derajat dua;
5. melabeli dengan bilangan berikut misal 2, 3, dan seterusnya;
6. menganalisa keoptimalannya dengan menggunakan *Zero forching*;
7. menentukan $\gamma_p$ minimal.

Peneitian ini menemukan *power domination number* dari beberapa graf hasil operasi comb sisi. Teknik penelitian *power domination number* sama seperti teknik penelitian yang dijelaskan di atas. Secara umum teknik penelitian disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.1.

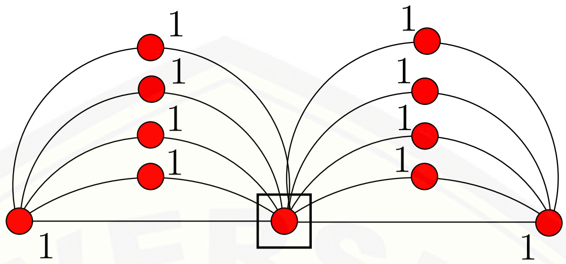
## 3.4 Observasi

Sebelum melakukan penelitian lanjutan pada graf hasil operasi comb sisi, telah dilakukan observasi awal (nilai $\gamma_p$ minimal) untuk menentukan titik dominator sebagai *power* pada graf hasil operasi comb sisi. Setelah melakukan observasi awal tersebut, peneliti menganalisa keoptimalan kardnalitas minimal dengan menggunakan perbandingan fungsi *ceilling* metode *zero forching* dengan derajat terbesar dari graf. Observasi awal yang dilakukan dikaitkan dengan proses berpikir tingkat tinggi berdasarkan Taksonomi Bloom, antara lain tahapannya sebagai berikut: 1) mengingat definisi graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi (tahap mengingat), 2) memahami definisi dan teorema kardinalitas titik dan sisi graf tersebut dan teorema *power domination number* (tahap memahami), 3) menggunakan definisi dan teorema pada *power dominating set* yaitu menentukan titik dominator sebagai *power* dengan memilih $v$ berderajat maksimal sebagai *power* serta menandai tetangga yang terdominasi dengan label 1, 2, seterusnya (tahap menerapkan), 4) kemudian titik yang sebagai *power* akan mendominasi tetangganya serta menganalisa keoptimalannya menggunakan perbandingan batas bawah sesuai dengan teorema dan menentukan $\gamma_p$ minimal (tahap menganalisa), 5) mengecek kembali apakah semua titik terdominasi (tahap megevaluasi), 6) menciptakan teorema baru dari graf hasil operasi comb sisi (tahap mencipta).



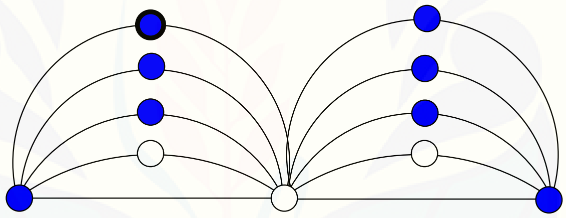

Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

Berdasarkan tahapan-tahapan tersebut, peneliti menemukan *power dominating set* untuk graf hasil operasi comb sisi *path* dengan *triangular book* ($P_3 \trianglerighteq Bt_4$). Gambar 3.2 merupakan observasi awal yaitu *power dominating set* pada graf hasil operasi comb sisi *path* dengan *triangular book* ($P_3 \trianglerighteq Bt_4$).




Gambar 3.2 Graf Hasil Operasi Comb sisi dari $P_3$ dan $Bt_4$

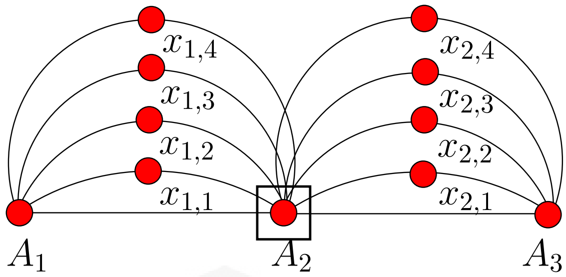
Analisa keoptimalannya menggunakan metode *zero forching*. Nilai *zero forching* dari graf ($P_3 \trianglerighteq Bt_4$) adalah 8. Ditunjukkan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 *Zero Forching* pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi dari $P_3$ dan $Bt_4$

Sedangkan derajat maksimal pada graf hasil operasi comb sisi ($P_3 \trianglerighteq Bt_4$) adalah 10. Sesuai teorema maka $\gamma_p(G) \geq \lceil \frac{Z(G)}{\Delta G} \rceil = \lceil \frac{8}{10} \rceil = 1$, sehingga $\gamma_p(G) = 1$

Jadi, *power domination number* dari graf hasil operasi comb sisi ($P_3 \trianglerighteq Bt_4$) adalah $\gamma_p(P_3 \trianglerighteq Bt_4) = 1$ ; dengan simpul yang dipilih $\{A_i, i \in$genap$\}$. Ditunjukkan pada Gambar 3.4




$(P_3 \trianglerighteq Bt_4)$

Gambar 3.4 Graf Hasil Operasi Comb Sisi dari $P_3$ dan $Bt_4$

Oleh karena itu, Penulis dapat melanjutkan observasinya untuk melanjutkan generalisasi graf raf hasil operasi comb sisi $(P_n \trianglerighteq Bt_m)$ dan menemukan beberapa *power domination number* dari graf yang lainnya. Observasi selanjutnya akan mengikuti tahapan-tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi.

# BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a.) Kardinalitas titik (*order*) dan sisi (*size*) pada graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $|V(P_n \trianglerighteq Bt_m)| = nm + n - m$ dan $|E(P_n \trianglerighteq Bt_m)| = 2nm + n - 2m - 1$.
2. $|V(C_n \trianglerighteq Bt_m)| = nm + n$ dan $|E(C_n \trianglerighteq Bt_m)| = 2nm + n$.
3. $|V(L_n \trianglerighteq Bt_m)| = 3nm + 2n - 2m$ dan $|E(L_n \trianglerighteq Bt_m)| = 6nm + 3n - 4m - 2$.
4. $|V(P_n \trianglerighteq C_m)| = nm - n - m + 2$ dan $|E(P_n \trianglerighteq C_m)| = nm - m$.
5. $|V(C_n \trianglerighteq C_m)| = nm - n$ dan $|E(C_n \trianglerighteq C_m)| = nm$.
6. $|V(L_n \trianglerighteq C_m)| = 3nm - 4n - 2m + 4$ dan $|E(L_n \trianglerighteq C_m)| = 3nm - 2m$.

b.) *Power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $\gamma_p(P_n \trianglerighteq Bt_m) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
2. $\gamma_p(C_n \trianglerighteq Bt_m) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
3. $\gamma_p(L_n \trianglerighteq Bt_m) = n$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
4. $\gamma_p(P_n \trianglerighteq C_m) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
5. $\gamma_p(C_n \trianglerighteq C_m) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
6. $\gamma_p(L_n \trianglerighteq C_m) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.

c.) Keterkaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan *power domination number* yakni dalam penemuan teorema dengan batas bawah yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengingat graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi, memahami kardinalitas dari graf dan teorema *power domination number* serta definisi operasi comb sisi, menerapkan teorema *power domination number* dengan menentukan titik pendominasi minimal, menganalisis dengan menunjukkan bahwa titik pendominasi yang dipilih adalah yang minimal, mengevaluasi dengan mengkaji ulang dan mengecek bahwa semua titik terobservasi, dan yang terakir mencipta dengan memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi teorema yang baru.

### 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan *power domination number* pada graf hasil operasi lainnya dan untuk sebarang graf khusus.

# DAFTAR PUSTAKA


Acharya, UP. dan Mehta, H. S. 2014. *2-Cartesian Product of Special Graph.* International Journal of Mathematics and Soft Computing, Vol. 4, No. 1: 140.

Agustin, I. H. dan Dafik. 2014. On The Domination Number of Some Families of Special Graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember.*

Akram, M. dan Nawas, S. 2015. *Operation on Soft Graph.* Jurnal: Scient Direct, Vol. 7: 423-449.

Ardiyansah, R. dan Darmaji. 2013. *Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf.* Jurnal SAINS dan Seni POMITS, Vol.2, No.1: 2337-3520.

Arends, R.I. 2000. *Learning to Teach. Fifth Edition.* New York: McGraw Hill Companies, Inc.

Benson, K. F., Ferrero, D., dkk. 2015. *Power domination and zero forcing.* arXiv preprint arXiv:1510.02421.

Chartrand, G. 2009. *Introduction Graph Teory.* United Stated of America: dover publication inc.

Dafik, Slamin, Eka, F., dan Sya'diyah, L. 2013. *Super antimagicness of triangular book and diamond ladder graphs.* Proceedings of IICMA.

Dafik, I. H. Agustin, Eka, dan A. I. Nurvitaningrum. 2016. *On H - antimagicness of the comb product graph with subgraph as a terminal of its amalgamation.* Working paper, CGANT.

Douglas. W. B. 1996. *Introduction to Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall.

Hanani, H., Slamin, dan Dafik. 2014. *Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Graf Tangga Permata*. Kadikma, Vol.5, No.1: 137-150.

Harsya. A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Kajian Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, Vol.1, No.1

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston - San Diego - New York - London: Academic Press.

Koh, K. M. dan Soh, K. W. 2016. *Power Domination of the Cartesian Product of Graph*. National University of Singapore. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, Vol. 13: 22 - 30.

Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Santrock, John. 2008. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Salemba Humanika.

Saoni, Ondi. 2003. *Teori Graf*. Serang : Rumah Buku Perss.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Sugeng, Kiki Ariyanti. 2005. *Magic and Labeling of Graph*. Thesis. Australia: University of Ballarat.

Susilo, Frans. 2012. *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, and M. A. Henning. 2002. *Domination in graphs applied to electric power networks*. SIAM J. Discrete Math, Vol. 15: 519 - 529.

Utari, R. 2013. *Taksonomi Bloom: Apa dan Bagaimana Cara Menggunakannya*. Pusdiklat KNPK, Widyaiswara Madya.

Yunimelawati. 2012. Pengertian dari Aksioma, Denisi, Postulat, Proposisi, Teorema, Lemma, Corollary, Konjektur. https://yunimatematika09.wordpress.com/2012/11/23/pengertian-dari-aksioma-defininisi-postulat-proposisi-teorema-lemma-corollary-konjektur-lemma/ [2 Agustus 2016].

Zhao, M., dkk. 2006. *Power domination in graphs*. Discrete mathematics, Vol. 306, No. 15: 1812-1816.