EFEKTIVITAS METODE MILNE ORDE LIMA DALAM MENYELESAIKAN MODEL MATEMATIKA VAKSINASI TUBERKULOSIS TIPE VEIT

SKRIPSI

Oleh

A. Riyan Ivan Ali Putra W.

NIM 120210101072

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2016

EFEKTIVITAS METODE MILNE ORDE LIMA DALAM MENYELESAIKAN MODEL MATEMATIKA VAKSINASI TUBERKULOSIS TIPE VEIT

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar sarjana

Oleh

A. Riyan Ivan Ali Putra W.

NIM 120210101072

Dosen Pembimbing I	:	Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
Dosen Pembimbing II	:	Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
Dosen Penguji I	:	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Penguji II	:	Drs. Toto' Bara Setiawan, M.Si.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat, nikmat, dan karunia-Nya, sehingga karya tulis ini dapat diselesaikan. Sebuah kebahagiaan dengan selesainya karya tulis ini, teriring rasa terima kasih yang mendalam kepada:

1. Kedua orang tua tercinta Bapak Ali Masrur dan Ibu Miftahul Hidayati, yang telah memberi kasih sayang, semangat, dukungan, doa, usaha, sehingga penulis dapat menuntut ilmu sampai saat ini.
2. Seluruh keluarga yang selalu memberi dukungan, doa, dan semangat kepada penulis.
3. Seluruh Dosen dan Guru yang telah memberi bimbingan, dukungan, dan semangat kepada penulis.
4. Keluarga besar mahasiswa pendidikan matematika, khususnya angkatan 2012 yang selalu memberikan bantuan, dukungan, semangat, dan inspirasi.
5. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

"Sebaik-baiknya saya, lebih baik orang lain.
Seburuk-buruknya orang lain, masih buruk saya."
(Derry Sulaiman)

"Kurangi mengeluh, perbanyak bersyukur.
Kurangi berharap, perbanyak memberi"
(Anonim)

"Sebaik-baik manusia adalah yang bermanfaat bagi manusia."
(HR. Thabrani dan Daruquthni)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : A. Riyan Ivan Ali Putra W.

NIM : 120210101072

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: EFEKTIVITAS METODE MILNE ORDE LIMA DALAM MENYELESAIKAN MODEL MATEMATIKA VAKSINASI TUBERKULOSIS TIPE VEIT adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 7 November 2016

Yang menyatakan,

A. Riyan Ivan Ali Putra W.

NIM. 120210101072

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Efektivitas Metode Milne Orde Lima dalam Menyelesaikan Model Matematika Vaksinasi Tuberkulosis Tipe VEIT telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari :

Tanggal : November 2016

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.	Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
NIP.19820529 200912 1 003	NIP.19700307 199612 2 001
Anggota I,	Anggota 2,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D	Drs. Toto' Bara Setiawan, M.Si.
NIP.19680802 199303 1 004	NIP. 19670420 199201 1 001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D

NIP. 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

"Efektivitas Metode Milne Orde Lima dalam Menyelesaikan Model Matematika Vaksinasi Tuberkulosis Tipe VEIT; A. Riyan Ivan Ali Putra W., 120210101072; 2016: 56 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Metode numerik merupakan teknik untuk menyelesaikan permasalahan matematika dengan cara mengaproksimasi atau menghampiri solusi dengan menggunakan operasi biasa. Metode numerik juga dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, salahsatu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan differensial adalah metode Milne. Metode Milne yang sering digunakan secara umum adalah metode Milne orde empat. Selama ini belum ada karya tulis atau buku tentang metode Milne orde lebih dari empat. Oleh karena itu, penulis melakukan penelitian tentang efektivitas metode Milne orde lima, sebagai pembanding digunakan metode Runge-Kutta orde lima. Persamaan differensial biasa yang digunakan adalah model matematika vaksinasi tuberkulosis yang dimodelkan oleh Taufik dkk. (2015) tipe VEIT.

Metode Milne orde lima masih belum dikembangkan, sehingga pengembangan metode Milne orde lima perlu dilakukan dalam penelitian ini. Berikut hasil penurunan *predictor* dan *corrector* metode Milne orde lima.

$predictor: y^*_{r+1} = y_{r-3} + \frac{2h}{45}(7f_{r-4} - 28f_{r-3} + 102f_{r-2} - 58f_{r-1} + 67f_r)$

$corrector: y_{r+1} = y_{r-1} + \frac{h}{90}(-f_{r-3} + 4f_{r-2} + 24f_{r-1} + 124f_r + 29f_{r+1})$

dengan kesalahan pemenggalan lokalnya yaitu:

$predictor: I_r = Y_{r+1} - y^*_{r+1} \approx \frac{28h^{(4+1)}}{90} y^{(6)}(t)$

$corrector: I_r = Y^*_{r+1} - y_{r+1} \approx \frac{-h^{(4+1)}}{90} y^{(6)}(t)$

Uji konvergensi metode Milne orde lima secara teoritis merupakan metode yang konvergaen karena memenuhi

$\|e_n\| \leq \frac{h^5}{720L} M_6(e^{nhL} - 1)$

$\lim_{h\to 0} \|e_n\| \leq \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{720L} M_6(e^{nhL} - 1)$

$\lim_{h\to 0} \|e_n\| \leq \leftrightarrow \lim_{h\to 0} \|e_n\| = 0$

dimana L adalah konstanta Lipschitz.

Selain secara teoritis, uji konvergensi metode Milne orde lima juga dilakukan dengan simulasi menggunakan *software* Matlab. Hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa variabel E, I, dan T untuk h yang lebih kecil selalu menghasilkan galat relatif lebih kecil dari galat relatif yang dihasilkan oleh simulasi pada h yang lebih besar. Sedangkan pada variabel V galat yang dihasilkan pada simulasi untuk h yang lebih kecil tidak selalu menghasilkan galat relatif lebih kecil dari galat relatif yang dihasilkan oleh simulasi pada h yang lebih besar.

Efektivitas metode Milne didapatkan dengan membandingkan galat hasil simulasi Milne dengan galat hasil simulasi Runge-Kutta. Hasil simulasi menunjukkan bahwa galat relatif Milne lebih kecil dari galat relatif Runge-Kutta. Artinya solusi hampiran yang dihasilkan Milne lebih baik dari Runge-Kutta. Sehingga dapat dikatakan bahwa metode Milne lebih efektif dibandingkan dengan Runge-Kutta dalam menyelesaikan model matematika vaksinasi tuberkulosis.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Efektivitas Metode Milne Orde Lima dalam Menyelesaikan Model Matematika Vaksinasi Tuberkulosis Tipe VEIT. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Komputer Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing I dan Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
6. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 7 November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$V(t)$	=	Jumlah populasi tervaksinasi
$E(t)$	=	Jumlah populasi terinfeksi tetapi tidak dapat menularkan orang lain (penderita laten TB)
$I(t)$	=	Jumlah populasi terinfeksi TB-aktif
$T(t)$	=	Jumlah populasi terobati (dari penderita aktif atau laten TB)
α	=	Angka kelahiran
ϵ	=	Kemungkinan penderita laten TB menjadi aktif TB
n	=	Perbandingan angka kelahiran dengan populasi tervaksinasi
μ	=	Nilai kematian secara normal
μ_{tb}	=	Nilai kematian karena infeksi TB
r	=	Angka kesembuhan dari penderita TB-aktif
β	=	Angka terinfeksi
ρ	=	Angka kesembuhan dari penderita TB-laten
τ	=	Angka terinfeksi kembali Y
f	=	Nilai keefektifan vaksinasi

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang sangat penting, karena dibutuhkan oleh ilmu pengetahuan lain seperti Fisika, Biologi, Kimia, Ekonomi, dan lain sebagainya. Peran matematika untuk ilmu pengetahuan lain adalah memodelkan setiap permasalahan sehingga lebih mudah dalam memahami atau menyelesaikan permasalahan tersebut. Salah satu model matematika yang sering muncul adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang terdiri dari gabungan antara fungsi yang tidak diketahui dan turunannya. Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua yakni persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). PDB adalah persamaan diferensial yang mempunyai satu peubah bebas. Sedangkan PDP merupakan persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas (Munir, 2003:375).

Beberapa PDB yang saling terkait antara satu sama lain disebut sistem PDB. Untuk mendapatkan solusi eksak dari sistem PDB kita harus menyelesaikan sistem PDB tersebut dengan cara analitik. Akan tetapi tidak semua sistem PDB dapat diselesaikan dengan cara analitik karena sistem PDB tersebut cukup kompleks dan sulit untuk diselesaikan dengan cara analitik. Oleh karena itu, metode numerik diperlukan untuk menghampiri solusi eksak dari PDB yang sulit, bahkan tidak bisa diselesaikan secara analitik.

Metode numerik merupakan cara alternatif untuk mendekati atau menghampiri solusi eksak dari permasalahan yang sulit untuk diselesaikan dengan cara analitik. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi eksak, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2003:5). Prinsip penyelesaian dari metode numerik adalah menggunakan operasi hitungan dasar, sehingga dibutuhkan perhitungan yang relatif banyak dan berulang. Untuk memudahkan perhitungan tersebut maka diperlukan bantuan komputer, dan dalam penelitian ini akan digunakan *software* Matlab.

Metode Milne merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan PDB yang tergolong jenis *multi-step*, artinya diperlukan beberapa nilai awal untuk menyelesaikan PDB. Afandi (2014) dengan penelitiannya yang berjudul "Analisis Solusi Numerik Model Gerak Roket dengan Metode Runge-Kutta dan Milne" dan Amalia (2014) dengan penelitiannya yang berjudul "Analisis Solusi Laju Korosi dengan Metode Milne dan Runge-Kutta Orde Empat" menggunakan metode Milne orde empat dalam penelitiannya. Metode Milne orde empat merupakan metode yang konvergen. Metode yang konvergen merupakan metode yang jika ukuran langkahnya semakin kecil, maka solusi yang dihasilkan akan mendekati eksak. Sedangkan dalam penelitian ini akan digunakan metode Milne orde lima.

Model PDB yang digunakan untuk menganalisa efektivitas metode Milne adalah model matematika vaksinasi tuberkulosis tipe VEIT. Tipe VEIT berarti terdapat empat variabel yaitu *vaccinated*(V)-vaksinasi *exposed*(E)-terjangkit, *infected*-(R)terinveksi, *treated*-(T)terobati. Model matematika tersebut dimodelkan oleh Taufik, M. R., Lestari, D., dan Septiarini, T. W. pada tahun 2015 dan diselesaikan dengan metode kualitatif.

Oleh karena itu, untuk mengetahui efektivitas solusi Milne dalam menyelesaikan sistem PDB model matematika vaksinasi tuberkulosis perlu dilaksanakan penelitian "Efektivitas Metode Milne Orde Lima dalam Menyelesaikan Model Matematika Vaksinasi Tuberkulosis Tipe VEIT".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana formulasi metode Milne orde lima?
2. Apakah metode Milne orde lima merupakan metode yang konvergen?
3. Bagaimana efektivitas metode Milne orde lima dalam menyelesaikan model matematika vaksinasi tuberkulosis?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang konvergensi dan efektivitas metode Milne orde lima. Sebagai pembanding digunakan Metode Runge-Kutta yang dikembangkan oleh Yustica. Menggunakan Sistem PDB model matematika vaksinasi tuberkulosis tipe VEIT yang telah dimodelkan oleh Taufik, M. R., Lestari, D., dan Septiarini, T. W. pada tahun 2015 untuk uji konvergensi dan analisis efektivitas, serta menggunakan *software* Matlab untuk proses komputasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui formulasi metode Milne orde lima.
2. Untuk mengetahui apakah metode Milne orde lima merupakan metode yang konvergen.
3. Mengetahui efektivitas metode Milne orde lima dalam menyelesaikan model matematika vaksinasi tuberkulosis.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian adalah:

1. Bagi bidang matematika memberikan konstribusi berupa efektivitas metode Milne orde lima dalam menyelesaikan model matematika vaksinasi tuberkulosis tipe VEIT.
2. Bagi peneliti merupakan tambahan pengetahuan terhadap ilmu matematika, khususnya numerik.
3. Bagi peneliti lain, dapat digunakan sebagai referensi dan bahan pertimbangan untuk melakukan penelitian sejenis.
4. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam numerik.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika Vaksinasi Tuberkulosis Tipe VEIT

Model matematika merupakan terjemahan dari suatu permasalahan ke dalam bahasa matematika. Model matematika untuk penyebaran penyakit tuberkulosis (TB) sudah relatif banyak dikembangkan. Pada tahun 2015, Taufik dkk., telah membuat model matematika tentang vaksinasi TB dan diselesaikan menggunakan metode kualitatif. Model matematika ini merupakan tipe VEIT yang berarti terdapat empat variabel yakni *vaccinated*(V)-vaksinasi *exposed*(E)-terinveksi TB-laten, *infected*(R)-terinveksi TB-aktif, *treated*-(T)terobati.

Model matematika yang dikembangkan oleh Taufik dkk., merupakan sistem persamaan differensial biasa seperti berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V'(t) = n\alpha - (1-f)\beta VI - \mu V \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E'(t) = (1-f)\beta VI + \tau TI - \rho E - (1-f)\epsilon EI - \mu E \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I'(t) = (1-f)\epsilon EI - rI - \mu_{Tb} I - \mu I \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T'(t) = rI - \tau TI + \rho E + \mu T \tag{2.4}$$

Persamaan (2.1) sampai dengan (2.4) merupakan sistem persamaan diferensial biasa model matematika vaksinasi penyakit TB. Dengan nilai awal dan definisi dari setiap variabel dan parameternya disajikan pada tabel (2.1) sebagaimana tercantum dalam jurnal Taufik dkk.

2.2 Konsep Dasar Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) merupakan persamaan diferensial yang hanya memiliki satu variabel bebas, sedangkan Persamaan Diferensial Parsial

Tabel 2.1 Daftar Nilai dan satuan variabel dan parameter

Simbol	Definisi	Nilai	Satuan
$V(t)$	Jumlah populasi tervaksinasi	1325	Orang
$E(t)$	Jumlah populasi terinfeksi tetapi tidak dapat menularkan orang lain (penderita laten TB)	105	Orang
$I(t)$	Jumlah populasi terinfeksi TB-aktif	10	Orang
$T(t)$	Jumlah populasi terobati (dari penderita aktif atau laten TB)	2	Orang
α	Angka kelahiran	20	
ϵ	Kemungkinan penderita laten TB menjadi aktif TB	8	
n	Perbandingan angka kelahiran dengan populasi tervaksinasi	0,3	
μ	Nilai kematian secara normal	30	
μ_{tb}	Nilai kematian karena infeksi TB	6	
r	Angka kesembuhan dari penderita TB-aktif	7	
β	Angka terinfeksi	5	
ρ	Angka kesembuhan dari penderita TB-laten	4	
τ	Angka terinfeksi kembali	13	
f	Nilai keefektivan vaksinasi	0,7	

(PDP) memiliki lebih dari satu variabel bebas. Bronson dan Costa (2007:1) mendefinisikan persamaan diferensial sebagai berikut.

Definisi 2.3.1. (Persamaan Diferensial) Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya. Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial biasa (PDB) jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel bebas. Jika fungsi yang dicari terdiri dari dua atau lebih variabel bebas, persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial parsial (PDP). Bentuk umum Persamaan Diferensial Biasa adalah

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0 \tag{2.5}$$

Beberapa PDB terdiri dari beberapa persamaan yang saling terkait dan melibatkan beberapa variabel terikat yang masing-masing variabel terikat tersebut merupakan fungsi dari satu variabel bebas. PDB seperti itu disebut sistem PDB.

Kartono (2012:119) menuliskan bentuk umum dari sistem persamaan PDB seperti berikut,

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, .., y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, .., y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, .., y_n) \end{aligned}$$

Model matematika vaksinasi TB merupakan sistem PDB karena terdiri dari beberapa persaman yang saling terkait dan hanya memiliki satu variabel bebas. Sehingga untuk selanjutnya lebih ditekankan pada teori yang berkaitan dengan PDB.

Bronson dan Costa (2007) juga memberikan definisi-definisi yang berkaitan dengan PDB, antara lain :

Definisi 2.3.2. (Orde PDB) Orde dari PDB adalah orde dari turunan tertinggi yang muncul dalam PDB tersebut.

Definisi 2.3.3. (Linieritas dan Homogenitas) Sebuah PDB linier Orde n memiliki bentuk

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x)y = F(x), a_0(x) \neq 0 \tag{2.6}$$

Jika $F(x) = 0$ maka persamaan (2.6) adalah homogen; jila tidak, (2.6) adalah non-homogen (tak-homogen). Suatu PDB memiliki koefisien-koefisien konstan jika seluruh koefisien $a_i(x)$ dalam (2.6) konstan; jika satu atau lebih koefisien tidak konstan, (2.6) memiliki koefisien variabel.

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan PDB pada dasarnya ada tiga yaitu, analitik, kualitatif, dan numerik. masing-msing metode tersebut adalah sebagai berikut.

1. Metode Analitik

   Metode analitik merupakan cara menyelesaikan model matematika yang menghasilkan solusi eksak. Untuk persamaan diferensial yang diselesaikan dengan metode analitik solusinya berupa fungsi asli yang dicari. Namun, untuk model matematika yang cukup kompleks metode analitik sulit atau bahkan tidak bisa menyelesaikan model tersebut.

2. Metode Kualitatif
   Metode ini merupakan cara menyelesaikan suatu model matematika dengan menggambarkan solusi dari model secara geometris. Akan tetapi fungsi asli yang dicari tidak diketahui, dan juga metode ini tidak cukup fleksibel untuk menyelesaikan model matematika yang cukup kompleks.
3. Metode Numerik
   Metode numerik merupakan cara untuk menyelesaikan suatu model matematika dengan prinsip mendekati solusi eksak. Metode ini memerlukan banyak perhitungan sehingga untuk kasus yang sulit memerlukan bantuan komputer untuk membantu proses perhitungan yang cepat dan tepat.

Model matematika vaksinasi TB tipe VEIT merupakan sistem PDB yang cukup sulit untuk diselesaikan dengan metode analitik. Taufik dkk. menyelesaikan model matematika ini dengan metode kualitatif. Sedangkan untuk penelitian ini digunakan metode Milne yang merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan sistem PDB.

2.3 Konsep Dasar Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi) (Munir, 2003:5). Metode numerik memiliki solusi berupa angka yang merupakan hasil pendekatan (aproksimasi) dari solusi eksak, sehingga secara umum solusi metode numerik pasti memiliki kesalahan (*error*). Untuk meminimalisasi *error* dalam metode numerik diatasi dengan teknik perhitungan berulang (iterasi). Iterasi akan dijelaskan pada bagian 2.7.

Secara umum metode numerik untuk menyelesaikan PDB dikelompokkan menjadi dua, yakni metode satu-langkah (*one-step*) dan metode banyak-langkah (*multi-step*). Menurut Munir (2003:407), metode satu-langkah (*one-step*) hanya dibutuhkan satu buah taksiran nilai $y(x_r)$ untuk menaksir nilai $y(x_{r+1})$. Sedangkan metode banyak-langkah memerlukan beberapa taksiran nilai $y(x_r)$, $y(x_{r-1})$,

$y(x_{r-2})$, ... $y(x_{r+n})$ untuk menaksir nilai $y(x_{r+1})$. Sehingga untuk mendapatkan nilai awal pada metode banyak-langkah, diperlukan prosedur pendahuluan (*starting procedure*) dengan metode satu-langkah.

Berikut definisi dan teorema dasar berkaitan metode numerik.

Definisi 2.3.5 (Galat Sejati) Galat Sejati didefinisikan sebagai $e_r = Y_r - y_r$

keterangan :

e_r=kesalhan global

Y_r= solusi analitik atau solusi eksak

y_r= solusi numerik atau solusi aproksimasi

Definisi 2.3.6 (Galat Relatif) Galat Relatif adalah perbandingan galat sejati terhadap solusi eksak $er_r = \frac{e_r}{Y_r}$

keterangan :

er_r=kesalhan global

Y_r= solusi analitik atau solusi eksak (Chapra,1996:56).

Definisi 2.3.7 (Kesalahan Pemenggalan Lokal) Kesalahan Pemenggalan Lokal adalah kesalahan yang ditimbulkan oleh persamaan suatu metode dalam bentuk $I_r = Y_{r+1} - y_{r+1}$

keterangan :

I_r = kesalahan pemenggalan lokal

Y_{r+1} = solusi analitik atau solusi eksak

y_{r+1} = solusi numeris atau aproksimasi

Definisi 2.3.8 (Orde Metode) Suatu metode dikatakan berorde p bila $I_r = \sigma(h^{p+1})$

keterangan :

h= ukuran langkah

p= orde

Definisi 2.3.9. (Norm Vektor) Norm Vektor adalah pemetaan dari suatu fungsi terhadap setiap x yang disimbolkan dengan $\|x\|$ sedemiian hingga memenuhi sifat-sifat dibawah ini :

1. $\|x\| > 0$,$x \neq 0$, atau $\|x\| = 0$,$x = 0$

2. $\|\alpha x\| = \|\alpha\|\|x\|$

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dimana x dan y adalah masing-masing vektor pada R^n dan α adalah suatu konstanta.

Definisi 2.4.10 (Syarat Lipschitz) suatu fungsi $f(t,y)$ dikatakan memenuhi syarat Lipschitz dalam variabel y di suatu domain $D \in R^2$ jika ada konstanta $L > 0$ sedemikian hingga

$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$

untuk sebarang (t,y_1), $(t,y_2) \in D$. selanjutnya konstanta L disebut sebagai konstanta Lipschitz (Dafik,2008). Syarat Lipschitz dan vektor norm akan digunakan dalam pembuktian konvergensi dari metode Milne pada penelitian ini. Khususnya, Konstanta L akan dipakai untuk menyederhanakan fungsi-fungsi yang berkaitan dengan pembuktian konvergensi.

Definisi 2.3.11 (Konvergen) Lambert (1992:27) mengatakan suatu metode dikatakan konvergen bila

$\lim_{h\to 0} y_r = Y_r$ atau dapat dikatakan $\lim_{h\to 0} \|e_n\| = 0$

2.4 Metode Milne

Metode Milne merupakan salah satu metode numerik utuk menyelesaikan sistem PDB yang tergolong metode banyak langkah (*multi-step*). Metode Milne merupakan metode *predictor-corrector*. Scheid (1992:213) menjelaskan bahwa metode *predictor-corrector* melibatkan penggunaan satu rumus untuk membuat ramalan pertama dari nilai y_k yang berikutnya, dan yang diikuti oleh pemakaian sebuah rumus pembetul yang lebih teliti yang kemudian akan menghasilkan perbaikan-perbaikan berurutan.

Beberapa metode termasuk *predictor-corrector* diturunkan dari PDB orde satu berikut

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.7}$$

yang kemudian diintegrasikan untuk mendapatkan $y(x)$. Sebelum diintegrasikan tentu saja kedua ruas dikalikan dx terlebih dahulu, sehingga secara umum dapat dituliskan

$$\int_{r+j}^{r+k} dy = \int_{r+j}^{r+k} f(x,y)dx \tag{2.8}$$

$$y_{r+k} - y_{r+j} = \int_{r+j}^{r+k} f(x,y)dx \tag{2.9}$$

Predictor metode Milne didasarkan pada integrasi $f(x,y)dx$ pada selang $[r-3, r+1]$ sehingga didapatkan persamaan:

$$y^*_{r+1} = y_{r-3} + \int_{r-3}^{r+1} f(x,y)dx \tag{2.10}$$

Sedangkan *corrector* metode Milne menggunakan selang integrasi$[r-1, r+1]$ sehingga didapatkan persamaan:

$$y_{r+1} = y_{r-1} + \int_{r-1}^{r+1} f(x,y)dx \tag{2.11}$$

Untuk memperoleh persamaan *predictor*, digunakan interpolasi polinomial. Karena hasil dari setiap metode interpolasi polinomial adalah sama atau unik (Munir, 2003:219) maka cukup memakai satu metode interpolasi polinomial. Digunakan metode interpolasi polinomial Lagrange derajat dua untuk menghampiri fungsi $f(x,y)$. Sehingga diperlukan tiga buah titik yang berjarak sama yaitu: (x_{r-2}, f_{r-2}), (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r). Untuk persamaan *corrector* diperlukan titik-titik $(x_{r-1},\ f_{r-1})$, (x_r, f_r), dan titik baru (x_{r+1}, f_{r+1}). Setelah didapatkan $f(x,y)dx$ untuk *predictor* $f(x,y)dx$ diintegrasikan terhadap selang $[r-3, r+1]$, sedangkan $f(x,y)dx$ *corrector*, diintegrasikan terhadap selang $[r-1, r+1]$. Sehingga didapatkan metode milne sebagai berikut:

$$predictor : y^*_{r+1} = y_{r-3} + \frac{4h}{3}(2f_{r-2} - f_{r-1} + 2f_r) \tag{2.12}$$

$$corrector : y_{r+1} = y_{r-1} + \frac{h}{3}(f_{r-1} + 4f_r + f_{r+1}) \tag{2.13}$$

dengan kesalahan pemenggalan lokalnya yaitu:

$$\begin{aligned} predictor \quad &: I_r = Y_{r+1} - y^*_{r+1} \approx \tfrac{28h^{(4+1)}}{90} y^{(5)}(t) \\ corrector \quad &: I_r = Y^*_{r+1} - y_{r+1} \approx \tfrac{-h^{(4+1)}}{90} y^{(5)}(t) \end{aligned}$$

untuk $x_{r-3} < t < x_{r+1}$(Munir, 2003).

Karena $I_r = \sigma(h^{4+1})$ baik untuk *predictor* maupun *corrector* maka orde metode tersebut adalah empat. Hasil integrasi $f(x,y)dx$ *corrector* yang mirip dengan kaidah Simpson $\frac{1}{3}$ menyebabkan ada yang menyebut metode ini sebagai metode Milne-Simpson.

Afandi (2014) dan Amalia (2014) menggunakan metode Milne orde empat diatas dalam penelitian mereka masing-masing. Saat ini belum ada buku maupun jurnal tentang penelitian sejenis yang menggunakan metode metode Milne orde lima.

2.5 Jumlah Iterasi

Iterasi merupakan proses perhitungan berulang. Misal domain masalah yang akan diselesaikan adalah $a \leq x \leq b$ maka teknik numerik dilakukan dengan membagi domain itu ke dalam n bagian (*grid*) dengan jarak antara bagian yang satu dan yang lain h satuan, sehingga kalkulasi diproses berdasarkan langkah tahap $x_i = a+ih$ untuk $i = 1, 2, ..., n$. Jumlah iterasi secara kongkrit adalah bergantung pada sejauh mana i melangkah. Bila proses perhitungan mencapai $i = k$ maka komputer dikatakan melakukan k iterasi.

2.6 Efektivitas

Efektif adalah kemampuan pencapaian suatu keberhasilan. Tingkat keefektifan disebut efektivitas yang merupakan tingkat pencapaian suatu keberhasilan. Dalam metode numerik efektif ditujukan untuk mendapat solusi dari hampiran terdekat dalam menyelesaikan suatu prmasalahan.

Indikator yang digunakan untuk mengetahui tingkat keefektifan adalah nilai *error* yang dihasilakan pada ukuran langkah dan iterasi tertentu. Jika nilai *error* yang hasilkan oleh suatu metode lebih kecil dari metode lain, maka metode tersebut dapat dikatakan lebih efektif dari pada metode lain tersebut. Untuk itu diperlukan suatu metode lain sebagai pembanding untuk membandingkan nilai *error* yang dihasilkan pada ukuran langkah dan iterasi yang sama. Metode pembanding yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Runge-Kutta orde lima.

2.7 Metode Runge-Kutta

Runge-Kutta merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan PDB yang cukup populer dan sudah banyak teruji konvergensi, stabilitas, dan efesiensinya. Dalam penelitian ini digunakan metode Runge-Kutta orde lima sebagai pembanding metode Milne-Simpson orde lima. Metode Runge-Kutta orde lima dalam penelitian ini diambil dari skripsi Yustica (2010).

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5) \tag{2.14}$$

dimana,
$k_1 = f(x_r, y_r)$
$k_2 = f(x_r + \frac{h}{3}, y_r + \frac{h}{3}k_1)$
$k_3 = f(x_r + \frac{h}{3}, y_r + \frac{h}{6}(k_1 + k_2))$
$k_4 = f(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_3))$
$k_5 = f(x_r + h, y_r + \frac{h}{2}(k_1 + 3k_3 + 4k_4))$

2.8 Algoritma dan Pemrograman

Komputer dapat memudahkan manusia untuk menyelesaikan permasalahan matematika. Akan tetapi komputer memerlukan program untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Kadir (2012:2) mendefinisikan bahwa program adalah kumpulan instruksi yang digunakan untuk mengatur komputer agar melakukan suatu tindakan tertentu.

Untuk membuat program, perlu disusun suatu langkah detail (prosedur) yang sesuai. Langkah detail yang ditujukan untuk komputer guna menyelesaikan suatu masalah disebut algoritma (Kadir, 2012:10). Setelah algoritma disusun, selanjutnya algoritma ditulis dalam notasi bahasa pemrograman sehingga jadilah suatu program yang dapat memudahkan manusia dalam menyelesaikan permasalahan matematika.

Beberapa simbol dan kata-kata yang dipakai dalam algoritma, misalnya simbol periode (.) untuk menunjukan akhir prosedur dan simbol titik koma (;) untuk memisahkan tugas dalam beberapa langkah. Adapun kata-kata yang dipakai adalah *INPUT, OUTPUT, Set, Do* dan lain-lain. Selain itu juga dikenal teknik loops (pengulangan), yang dinyatakan dengan ”kontrol penyanggah”

$$\textit{For } i = 1, 2, ..., n$$
$$\textit{Set } x_i = a_i + i.h$$

dan ”kontrol bersyarat”

$$\textit{while } i < N \textit{ do Step 3-6}$$
$$\textit{If......Then,}$$
$$\textit{If.......Then.....Else}$$

2.9 MATLAB Programming

Untuk menjalankan algoritma yang disusun, diperlukan *software* yang mendukung. MATLAB merupakan *software* yang mendukung untuk menjalankan algoritma. MATLAB merupakan sistem interaktif dengan elemen basis data berupa *array*. Artinya setiap data yang dimasukkan pada MATLAB diinterpertasikan sebagai *array*. *Array* berdimensi satu adalah vektor dan *array* berdimensi dua adalah matriks (Hernadi, 2012:1).

Program MATLAB dapat ditulis dengan menggunkan perintah yang sederhana, namun dapat mencakup tuntutan untuk menyelesaikan persoalan menganalisis data. Sekarang ini MATLAB adalah salah satu bahasa pemrograman yang banyak digunakan. MATLAB mampu menangani perhitungan sederhana juga mampu meyelesaikan perhitungan rumit, yang meliputi bilangan kompleks, akar dan pangkat, logaritma dan fungsi trigonometri. Seperti kalkulator yang dapat diprogram, MATLAB dapat digunakan untuk menyimpan dan mengambil data, dalam MATLAB dapat dibuat sekumpulan perintah untuk mengotomatisasi suatu persamaan yang rumit, dan masih banyak lagi kemampuan lain dari MATLAB.

Fasilitas dari MATLAB adalah user dapat menggunakan MATLAB *programming editor* untuk menyusun prosedur logis dalam program nonprosedural yang dapat dipahami langsung oleh MATLAB. berhubung bahasa MATLAB adalah bahasa nonprosedural maka struktur bahasa yang dikembangkan tidak terlampau hierarkikal dan banyak mengaitkan fungsi-fungsi yang sudah *build-in* dalam MATLAB *library*. sehingga dalam hal ini MATLAB memberikan fleksibilitas yang luas terhadap para user untuk mengembangkan imajinasinya dalam menyelesaikan masalah.

Selain itu, MATLAB juga dapat melakukan program besar sebagaimana *compiler*(bahasa pemrograman prosedural) lainnya. Dengan kemampuan ini user dapat mengembangkan suatu algoritma kemudian diimplementasikan dalam MATLAB *programing* untuk memecahkan masalah tertentu.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Desain Penelitian

Desain penelitian merupakan strategi mengatur latar penelitian, agar memperoleh data yang valid sesuai dengan karakteristik variabel dan tujuan penelitian. Desain penelitian mencakup prosedur penelitian, definisi oprasional, tempat penelitian, metode pengumpulan data, dan metode analisis data.

3.2 Prosedur Penelitian

Adapun prosedur penelitian dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menurunkan metode Milne orde lima
   Proses penurunan metode Milne orde lima seperti teori yang dijelaskan pada subbab (2.4).
2. Menentukan konvergensi teoritis metode Milne
   Konvergensi metode Milne dibuktikan secara teoritis berdasarkan definisi (2.3.11). Jika tidak terbukti bahwa metode Milne orde lima konvergen, maka metode Milne tidak konvergen secara teoritis.
3. Menggunakan model matematika vaksinasi TB dan metode Runge-Kutta orde lima
   Model matematika Vaksinasi TB diperoleh dari jurnal Taufik dkk. (2015), sekaligus parameter dan nilai awalnya. Metode Runge-Kutta orde lima diperoleh dari skripsi Yustica (2010).
4. Membuat pola algoritma metode Milne
   Pola algoritma metode Milne disusun untuk merancang pemrograman.
5. Membuat format program pada Matlab
   Format program pada Matlab disusun sesuai algoritma yang telah disusun.
6. Simulasi model pada Matlab
   Simulasi model pada Matlab menggunakan ode45, Milne, dan Runge-Kutta.

7. Uji Konvergensi

   Uji konvergensi hasil simulasi metode Milne didasarkan definisi (2.3.11), yakni jika h diperkecil, maka $\|e_r\|$ semakin kecil. Jika h diperkecil dan $\|e_r\|$ tidak semakin kecil maka metode Milne orde lima adalah metode yang tidak konvergen.

8. Analisis

   Analisis efektivitas metode Milne terhadap metode Runge-Kutta didasarkan pada nilai $\|er_r\|$. Suatu metode dikatakan lebih efektif dari metode lain jika memiliki $\|er_r\|$ yang lebih kecil.

Prosedur penelitian dalam bentuk bagan disajikan pada Gambar 3.1.

3.3 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Deduktif Aksiomatik

   Penelitian ini berpacuan pada definisi-definisi yang sudah ada dan digunakan untuk menformulasikan metode Milne orde lima serta menguji konvergensi dari metode secara teoritis.

2. Metode eksperimen

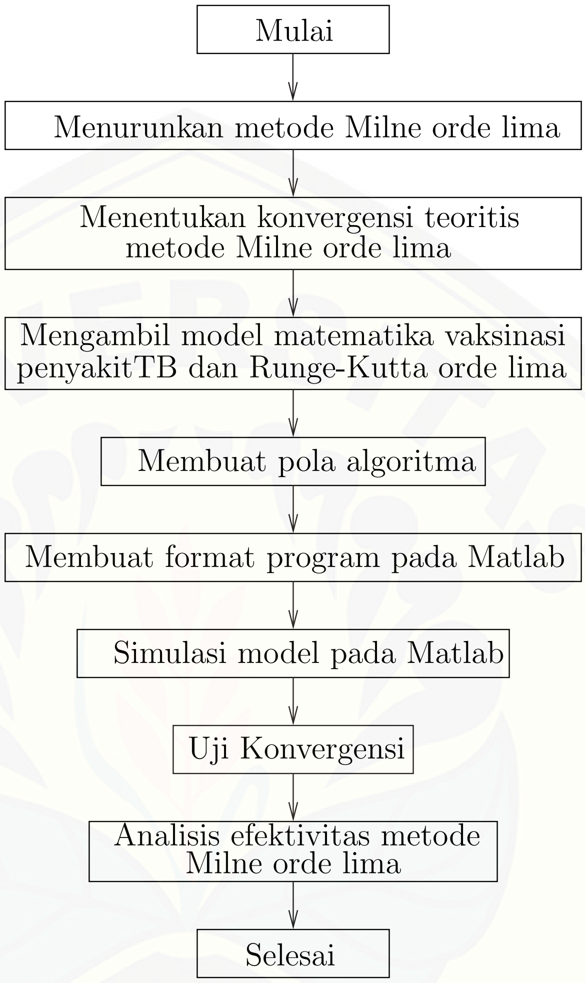
   Metode eksperimen adalah metode meneliti dan menyelidiki guna mencari jawaban atau pemecahan dari kasus ataupun penelitian. Metode eksperimen digunakan untuk menganalisis efektivitas metode Milne orde lima dengan adanya perlakuan penentuan nilai toleransi dan jumlah iterasi yang berbeda-beda.

3.4 Definisi Operasional

Beberapa istilah dalam penelitian ini yang perlu didefinisikan adalah:

1. Metode Milne

   Metode Milne merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial. Metode ini merupakan metode *predictor-corrector* dan termasuk metode banyak langkah, sehingga diperlukan metode satu langkah untuk menentukan nilai awal. Metode Milne



Keterangan:

$\longrightarrow$ = Aliran kegiatan utama

$\square$ = Proses kegiatan

Gambar 3.1 Bagan Prosedur Penelitian

yang dimaksud dalam penelitian ini adalah metode Milne orde lima. Selanjutnya metode tersebut akan digunakan untuk mencari solusi model persamaaan diferensial biasa pada model matematika vaksinasi TB dengan model VEIT.

2. Model matematika vaksinasi TB tipe VEIT
   Model matematika vaksinasi TB dengan model VEIT merupakan model matematika tentang vaksinasi TB yang dikembangkan oleh Taufik dkk., pada tahun 2015. Model tersebut merupakan sistem persamaan diferensial biasa dan telah diselesaikan oleh Taufik dkk., menggunakan metode kualitatif.
3. MATLAB
   MATLAB (*Matrix Laboratory*) adalah *software* aplikasi yang dilengkapai oleh fungsi-fungsi sedemikian hingga mudah dan cepat menyelesaikan beberapa masalah dalam bidang sains dan teknologi. MATLAB mampu menyelesaikan perhitungan rumit dalam menyelesaikan permasalahan diferensial.

3.5 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Komputasi Kinerja Tinggi (*High Performance Computating*) PSSI Universitas Jember dengan alasan di laboratorium tersebut tersedia program MATLAB versi R2011b (7.13.0.564), komputer yang berkecepatan tinggi dengan menggunakan *Intel(R) Xeon(R) CPU* 3.46GHz (2 *processor*), RAM 72 GB yang digunakan sebagai penunjang penelitian ini.

3.6 Metode Pengumpulan Data

Metode pengumpulan data diperlukan untuk mendapatkan data yang sesuai dengan keperluan penelitian. Pengumpulan data adalah prosedur yang sistematis dan standar untuk memperoleh data yang diperlukan (Nazir, 2009). Data penelitian dikumpulkan sesuai dengan rancangan penelitian yang telah ditentukan dan data tersebut diperoleh dengan cara pengamatan, percobaan atau pengukuran gejala yang diteliti.

Penelitian ini menggunakan metode dokumentasi dan metode eksperimen dalam proses pengumpulan data. Arikunto (2006:231) mendefinisikan metode dokumentasi sebagai metode pengumpulan data yang berupa hal-hal atau veriabel yang terdiri dari catatan, gambar, transkrip, buku, surat kabar, majalah, prasasti, notulen rapat, agenda, dan sebagainya. Data simulasi mengenai nilai awal serta parameter yang mempengaruhi sistem PDB vaksinasi TB tipe VEIT diperoleh dari jurnal.

Pengumpulan data dengan metode eksperimen yaitu pengumpulan data yang dilakukan secara sistematis terhadap indikator penelitian sesuai dengan perlakuan yang diberikan dan gejala-gejala apa yang akan terjadi. Pengumpulan data dengan metode eksperimen dalam penelitian ini berupa hasil simulasi dengan perlakuan ukuran langkah h yang berbeda. Dengan data pengamatan tersebut, dapat diketahui tingkat keefektifan metode yang diuji.

3.7 Analisis Data

Data yang dikumpulkan selanjutnya diklasifikasikan secara sistematis, diolah dan dianalisis secara logis menurut rancangan penelitian yang telah ditetapkan. Analisis data ini merupakan tahap akhir dalam penelitian. Analisis data diarahkan untuk memberi argumentasi atau penjelasan mengenai tujuan yang diajukan dalam penelitian. data mentah yang diperoleh sebelumnya tidak akan berarti apa-apa jika tidak dianalisis. Maka, data mentah yang telah dikumpulkan dianalisis dan diberi arti dan makna sehingga dapat berguna untuk menyelesaikan masalah dan menguji hipotesis.

Metode deskriptif digunakan untuk menganalisis data yang diperoleh dan menarik kesimpulan dari penelitian. Metode deskriptif dalam menganalisa data dapat diartikan sebagai usaha mengamati suatu data dengan cara menggambarkan keadaan data tersebut. Efektivitas metode Milne dalam menyelesaikan model matematika vaksinasi TB tipe VEIT dideskripsikan dari nilai *error*.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang dilakukan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. *Predictor* dan *corrector* Milne orde lima adalah
   $predictor\ :\ y^*_{r+1} = y_{r-3} + \frac{2h}{45}(7f_{r-4} - 28f_{r-3} + 102f_{r-2} - 58f_{r-1} + 67f_r)$
   $corrector\ :\ y_{r+1} = y_{r-1} + \frac{h}{90}(-f_{r-3} + 4f_{r-2} + 24f_{r-1} + 124f_r + 29f_{r+1})$
   dengan kesalahan pemenggalan lokalnya yaitu:
   $predictor\ :\ I_r = Y_{r+1} - y^*_{r+1} \approx \frac{28h^{(4+1)}}{90}y^{(6)}(t)$
   $corrector\ :\ I_r = Y^*_{r+1} - y_{r+1} \approx \frac{-h^{(4+1)}}{90}y^{(6)}(t)$
2. Metode Milne orde lima adalah metode yang konvergen karena telah memenuhi
   $\|e_n\| \leq \frac{h^5}{720L}M_6(e^{nhL} - 1)$
   $\lim_{h\to 0}\|e_n\| \leq \lim_{h\to 0}\frac{h^5}{720L}M_6(e^{nhL} - 1)$
   $\lim_{h\to 0}\|e_n\| \leq 0 \leftrightarrow \lim_{h\to 0}\|e_n\| = 0$
   dimana L adalah konstanta Lipschitz.
3. Metode Milne orde lima lebih efektif dalam menyelesaikan Model matematika vaksinasi tuberkulosis tipe VEIT dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde lima.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian efektivitas metode Milne orde lima dalam menyelesaikan model matematika vaksinasi tuberkulosis, hendaknya:

1. Untuk mengetahui efektivitas suatu metode perlu suatu model PDB yang dapat diselesaikan secara analitik.
2. Metode Milne dapat dikembangkan lagi untuk orde yang lebih tinggi.
3. Perlu dilakukan penelitian efektivitas metode Milne dibandingkan dengan metode lain selain metode Runge-Kutta.

DAFTAR PUSTAKA

Afandi, Nuril. 2014. *Analisis Solusi Numerik Model Gerak Roket dengan Metode Runge-Kutta dan Milne*. Skripsi. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Amalia, Medhy. 2014. *Analisis Solusi Laju Korosi dengan Metode Milne dan Metode Runge-Kutta Orde Empat*. Skripsi. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Arikunto, Suharsimi. 2006. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktik*. Jakarta: Rineka Cipta

Bronson, R. dan G. Costa. 2007. *Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.

Chapra, S. C. dan R. P. Chanale. 1996. *Metode Numerik*. Jakarta: Erlangga

Dafik. 2008.*Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Jember:Pena Salsabila.

Hernadi, Julan. 2012. *Matematika Numerik dengan Implementasi Matlab*. Yogyakarta: Andi.

Kadir, Abdul. 2012. *Algoritma & Pemrograman Menggunakan C dan C++*. Yogyakarta: Andi.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Lambert, J. D. 1991. *A Numerical Methods for Ordinary Differential Systems The Initial Value*. New York: Wiley.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*. Jakarta: Informatika.

Nazir, Moh. 2009*Metode Penelitian*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Taufik, M. R., Lestari, D., dan Septiarini, T. W. 2015. *Mathematical Model for Vaccinated Tuberculosis Disease with VEIT Model*. International Journal of Modeling and Optimization, Vol. 5, No. 3. http://search.proquest.com/open view/678b161cca8bb9c7ed71184dc26ef534/1?pq-origsite=gscholar. (Diakses 3 Januari 2016 pukul 20.00 wib.)

Yustica, Ayu. 2010. *Efektivitas Metode Runge-Kutta Orde Lima Untuk Menyelesaikan Model Penyebaran Virus Avian Influenza (flu burung)*. Skripsi. Jember: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

LAMPIRAN A. Hasil simulasi program

Tabel 5.1 Keseluruhan galat relatif metode Milne $h = 1,25 \times 10^{-6}$

iterasi	V	E	I	T
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	2,8708e-09	1,2529e-04	4,6173e-07	1,1838e-08
6	1,8981e-09	1,2509e-04	1,7487e-06	2,8083e-09
7	6,2019e-09	1,5704e-04	2,2915e-06	4,3005e-08
8	1,0883e-08	1,5671e-04	5,7709e-06	3,0792e-09
9	4,7711e-08	1,5726e-04	4,0018e-06	3,8751e-07
10	8,3767e-09	1,5625e-04	9,3450e-06	1,0812e-08
11	1,1056e-07	1,8638e-04	9,9244e-06	9,4967e-07
12	5,4784e-08	1,8510e-04	1,5996e-05	1,4422e-07
13	2,1937e-07	1,8686e-04	1,3347e-05	1,9412e-06
14	9,7980e-08	1,8462e-04	2,1988e-05	4,0927e-07
15	3,9364e-07	2,1363e-04	2,3326e-05	3,5856e-06
16	2,2771e-07	2,1097e-04	3,1673e-05	9,8771e-07
17	6,2611e-07	2,1445e-04	2,8840e-05	5,8507e-06
18	3,8289e-07	2,1067e-04	4,4080e-05	1,9028e-06
19	9,9853e-07	2,3914e-04	4,2934e-05	9,5681e-06
20	6,7572e-07	2,3472e-04	5,3677e-05	3,2112e-06
21	1,4551e-06	2,4041e-04	5,1072e-05	1,4333e-05
22	1,0489e-06	2,3473e-04	6,5710e-05	5,1774e-06
23	2,1705e-06	2,6331e-04	6,9428e-05	2,2003e-05
24	1,6382e-06	2,5665e-04	8,3041e-05	7,3813e-06
25	3,0287e-06	2,5620e-04	8,0894e-05	3,1845e-05
26	2,4058e-06	2,5707e-04	9,8744e-05	1,0388e-05
27	4,3341e-06	2,8659e-04	1,0374e-04	4,7434e-05
28	3,5024e-06	2,7693e-04	1,2106e-04	1,2558e-05
29	5,9132e-06	2,8925e-04	1,1944e-04	6,8595e-05
30	4,9860e-06	2,8925e-04	1,4091e-04	1,3954e-05

t	V	E	I	T
31	8,4233e-06	3,0940e-04	1,4707e-04	1,0211e-04
32	7,0281e-06	2,9538e-04	1,6939e-04	9,3390e-06
33	1,1134e-05	3,1299e-04	1,6813e-04	1,5355e-04
34	9,7332e-06	2,9641e-04	1,9395e-04	8,0355e-06
35	1,5288e-05	3,3209e-04	2,0086e-04	2,3850e-05
36	1,3418e-05	3,1108e-04	2,3014e-04	5,9035e-05
37	2,0627e-05	3,3668e-04	2,2856e-04	4,0021e-04
38	1,8527e-05	3,1125e-04	2,6384e-04	1,9182e-04
39	2,8482e-05	3,5526e-04	2,6972e-04	7,3002e-04
40	2,5224e-05	3,2233e-04	3,0462e-04	5,5904e-04

Tabel 5.2 Keseluruhan galat relatif metode Milne $h = 6,25 \times 10^{-7}$

t	V	E	I	T
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	3,1929e-10	6,3200e-05	9,9922e-08	2,1141e-10
6	4,4730e-10	6,3165e-05	4,4841e-07	1,2688e-10
7	4,0900e-10	7,8666e-05	4,5825e-07	2,2974e-09
8	2,7277e-09	7,8571e-05	1,1359e-06	1,4698e-08
9	2,1459e-10	7,8653e-05	6,4268e-07	1,5483e-08
10	2,6358e-09	7,8469e-05	2,1187e-06	3,7692e-08
11	9,5143e-09	9,3462e-05	2,1455e-06	5,8110e-08
12	3,4350e-09	9,3236e-05	3,6587e-06	2,7347e-08
13	2,1233e-08	9,3519e-05	2,7579e-06	1,5513e-07
14	7,7866e-09	9,3124e-05	5,0664e-06	3,3500e-09
15	3,5455e-08	1,0766e-04	4,8671e-06	2,9070e-07
16	1,0239e-08	1,0718e-04	6,7939e-06	2,8027e-08
17	4,8950e-08	1,0770e-04	5,6119e-06	4,262e-07
18	2,1562e-08	1,0704e-04	8,8952e-06	6,7265e-08
19	8,3546e-08	1,2126e-04	8,9947e-06	6,6747e-07
20	4,3653e-08	1,2054e-04	1,1662e-05	1,6951e-07

iterasi	V	E	I	T
21	1,1770e-07	1,2139e-04	1,0300e-05	9,6970e-07
22	6,9120e-08	1,2044e-04	1,4231e-05	3,5427e-07
23	1,6523e-07	1,3435e-04	1,4171e-05	1,4151e-06
24	9,1485e-08	1,3327e-04	1,7077e-05	5,2219e-07
25	2,0645e-07	1,3447e-04	1,5607e-05	1,8224e-06
26	1,3502e-07	1,3317e-04	2,0481e-05	7,6849e-07
27	2,0977e-07	1,4692e-04	2,0934e-05	2,4860e-06
28	1,9365e-07	1,4551e-04	2,4630e-05	1,0928e-06
29	3,6909e-07	1,4178e-04	2,3116e-05	3,0277e-06
30	2,6672e-07	1,4551e-04	2,8533e-05	1,6191e-06
31	4,7927e-07	1,5909e-04	2,8766e-05	4,2655e-06
32	3,3189e-07	1,5722e-04	3,2579e-05	2,0881e-06
33	5,7414e-07	1,5932e-04	3,1060e-05	5,2142e-06
34	7,4765e-07	1,7079e-04	3,8450e-05	6,6818e-06
35	5,6914e-07	1,6852e-04	4,3233e-05	3,4789e-06
36	9,0773e-07	1,7123e-04	4,1752e-05	8,2160e-06
37	7,3032e-07	1,6868e-04	4,8672e-05	4,6209e-06
38	1,1282e-07	1,8223e-04	4,9216e-05	1,0416e-05
39	8,7779e-07	1,7936e-04	5,3999e-05	5,5961e-06
40	1,3214e-06	1,8264e-04	5,2567e-05	1,2405e-05
41	1,1039e-06	1,7954e-04	6,0709e-05	6,9229e-06
42	1,6489e-06	1,9325e-04	6,2219e-05	1,5366e-05
43	1,3593e-06	1,8987e-04	6,8032e-05	8,3068e-06
44	1,9559e-06	1,9392e-04	6,6948e-05	1,8475e-05
45	1,6813e-06	1,9026e-04	7,5520e-05	1,0409e-05
46	2,3659e-06	2,0415e-04	7,6284e-05	2,2813e-05
47	1,9716e-06	2,0000e-04	8,2212e-05	1,2078e-05
48	2,7348e-06	2,0478e-04	8,0921e-05	2,6830e-05
49	2,4025e-06	2,0036e-04	9,1054e-05	1,4284e-05
50	3,3254e-06	2,1465e-04	9,3141e-05	3,2666e-05

iterasi	V	E	I	T
51	2,8816e-06	2,0979e-04	1,0090e-04	1,6470e-05
52	3,8941e-06	2,1563e-04	9,9693e-05	3,9002e-05
53	3,4800e-06	2,1045e-04	1,1020e-04	1,9747e-05
54	4,6295e-06	2,2523e-04	1,1097e-04	4,7598e-05
55	4,0258e-06	2,1932e-04	1,1833e-04	2,1797e-05
56	5,3114e-06	2,2613e-04	1,1714e-04	5,5877e-05
57	4,8095e-06	2,1984e-04	1,2976e-04	2,4373e-05
58	6,3544e-06	2,3532e-04	1,3239e-04	6,7897e-05
59	5,6827e-06	2,2836e-04	1,4242e-04	2,6572e-05
60	7,3922e-06	2,3669e-04	1,4126e-04	8,1815e-05
61	6,7627e-06	2,2927e-04	1,5417e-04	2,9797e-05
62	8,6960e-06	2,4579e-04	1,5454e-04	1,0027e-04
63	7,7627e-06	2,3729e-04	1,6380e-04	2,8718e-05
64	9,9426e-06	2,4703e-04	1,6252e-04	1,1925e-04
65	9,1564e-06	2,3777e-04	1,7841e-04	2,6583e-05
66	1,1777e-05	2,5551e-04	1,8141e-04	1,4804e-04
67	1,0728e-05	2,4520e-04	1,9466e-04	2,1865e-05
68	1,3673e-05	2,5729e-04	1,9320e-04	1,8524e-04
69	1,2660e-05	2,4620e-04	2,0932e-04	1,3903e-05
70	1,6003e-05	2,6605e-04	2,0855e-04	2,3466e-04
71	1,4485e-05	2,5325e-04	2,2056e-04	1,4335e-05
72	1,8297e-05	2,6762e-04	2,1858e-04	2,9199e-04
73	1,6941e-05	2,5311e-04	2,3907e-04	5,7438e-05
74	2,1551e-05	2,7515e-04	2,4181e-04	3,8917e-04
75	1,9762e-05	2,5880e-04	2,5985e-04	1,2165e-04
76	2,5068e-05	2,7730e-04	2,5715e-04	5,3738e-04
77	2,3235e-05	2,5931e-04	2,7801e-04	2,3198e-04
78	2,9449e-05	2,8559e-04	2,7727e-04	7,6220e-04
79	2,8443e-05	2,7579e-04	2,8527e-04	5,7830e-04
80	2,6901e-05	2,6428e-04	2,9697e-04	4,4424e-04

Tabel 5.3 Keseluruhan galat relatif metode Milne $h = 4,1667 \times 10^{-7}$

iterasi	V	E	I	T
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	4,0894e-11	4,2255e-05	3,8277e-08	2,2829e-10
6	9,7097e-11	4,2241e-05	1,9181e-07	7,8791e-10
7	4,1052e-10	5,2467e-05	1,9028e-07	4,7929e-10
8	1,8959e-09	5,2423e-05	4,5770e-07	7,7955e-09
9	2,1398e-09	5.2447e-05	1,8421e-07	1,3882e-09
10	3,8882e-09	5,2365e-05	7,9485e-07	2,2033e-08
11	9,7710e-10	6,2348e-05	7,6211e-07	2,7352e-12
12	2,6554e-09	6,2259e-05	1,4609e-06	3,1528e-08
13	3,1288e-09	6,2362e-05	1,0852e-06	1,5574e-08
14	3,0362e-10	6,2216e-05	2,1933e-06	3,0703e-08
15	9,5607e-09	7,1993e-05	2,1176e-06	5,2826e-08
16	3,5435e-09	7,1828e-05	3,0532e-06	1,4163e-08
17	1,4819e-08	7,2014e-05	2,4300e-06	1,0469e-07
18	6,2941e-09	7,1766e-05	3,8715e-06	8,1692e-09
19	2,1790e-08	8,1341e-05	3,7010e-06	1,6752e-07
20	7,0972e-09	8,1061e-05	4,8060e-06	2,2289e-08
21	2,5473e-08	8,1337e-05	4,0020e-06	2,2234e-07
23	9,8203e-09	8,0970e-05	5,8136e-06	4,0836e-08
24	3,7244e-08	9,0384e-05	5,7344e-06	3,0652e-07
25	1,7654e-08	9,0008e-05	7,2390e-06	6,6259e-08
26	5,1310e-08	9,0429e-05	6,4863e-06	3,9928e-07
27	3,0823e-08	8,9958e-05	8,7460e-06	1,3054e-07
28	7,3392e-08	9,9244e-05	8,7072e-06	5,6088e-07
29	4,4007e-08	9,8746e-05	1,0369e-05	2,1493e-07
30	9,1065e-08	9,9306e-05	9,4287e-06	7,2489e-07

iterasi	V	E	I	T
31	5,9936e-08	9,8694e-05	1,1935e-05	3,3840e-07
32	1,1640e-07	1,0784e-04	1,1832e-05	9,5528e-07
33	7,1725e-08	1,0718e-04	1,3581e-05	4,3851e-07
34	1,3355e-07	1,0788e-04	1,2515e-05	1,1465e-06
35	9,0517e-08	1,0711e-04	1,5345e-05	5,7862e-07
36	1,6857e-07	1,1616e-04	1,5420e-05	1,4284e-06
37	1,1540e-07	1,1536e-04	1,7612e-05	7,1026e-07
38	2,0371e-07	1,1626e-04	1,6730e-05	1,6943e-06
39	1,5321e-07	1,1536e-04	2,0020e-05	9,4055e-07
40	2,5707e-07	1,2435e-04	2,0179e-05	2,1217e-06
41	1,8889e-07	1,2340e-04	2,2485e-05	1,1834e-06
42	3,0014e-07	1,2448e-04	2,1422e-05	2,5306e-06
43	2,3406e-07	1,2340e-04	2,4900e-05	1,5323e-06
44	3,6105e-07	1,3232e-04	2,4973e-05	3,0895e-06
45	2,7005e-07	1,3115e-04	2,7301e-05	1,8178e-06
46	4,0559e-07	1,3242e-04	2,6125e-05	3,5590e-06
47	3,2244e-07	1,3114e-04	2,9917e-05	2,2904e-06
48	4,8391e-07	1,4002e-04	3,0244e-05	4,2275e-06
49	3,8143e-07	1,3868e-04	3,3131e-05	2,5536e-06
50	5,5914e-07	1,4020e-04	3,2281e-05	4,8357e-06
51	4,6660e-07	1,3877e-04	3,6598e-05	3,1022e-06
52	6,6883e-07	1,4766e-04	3,7029e-05	5,7659e-06
53	5,4545e-07	1,4613e-04	4,0005e-05	3,6421e-06
54	7,5955e-07	1,4789e-04	3,8932e-05	6,6402e-06
55	6,4534e-07	1,4624e-04	4,3390e-05	4,4012e-06
56	8,8369e-07	1,5511e-04	4,3660e-05	7,8168e-06
57	7,2736e-07	1,5331e-04	4,6594e-05	5,0196e-06
58	9,7935e-07	1,5531e-04	4,5387e-05	8,8172e-06
59	8,4123e-07	1,5340e-04	5,0165e-05	5,8462e-06
60	1,1133e-06	1,6231e-04	5,0775e-05	1,0195e-05

iterasi	V	E	I	T
61	9,6270e-07	1,6029e-04	5,4475e-05	6,5547e-06
62	1,2812e-06	1,6261e-04	5,37632e-05	1,1454e-05
63	1,1320e-06	1,6050e-04	5,9205e-05	7,6374e-06
64	1,4882e-06	1,6951e-04	5,9923e-05	1,3305e-05
65	1,2888e-06	1,6724e-04	6,3692e-05	8,6767e-06
66	1,6648e-06	1,6989e-04	6,2658e-05	1,5064e-05
67	1,4851e-06	1,6751e-04	6,8188e-05	1,0108e-05
68	1,8976e-06	1,7658e-04	6,8670e-05	1,7372e-05
69	1,6499e-06	1,7397e-04	7,2242e-05	1,1249e-05
70	2,0852e-06	1,7691e-04	7,0987e-05	1,9373e-05
71	1,8708e-06	1,7419e-04	7,6887e-05	1,2734e-05
72	2,3683e-06	1,8338e-04	7,7764e-05	2,2049e-05
73	2,1029e-06	1,8046e-04	8,2499e-05	1,3980e-05
74	2,6450e-06	1,8323e-04	8,2001e-05	2,4565e-05
74	2,4175e-06	1,8082e-04	8,8770e-05	1,5860e-05
76	3,0181e-06	1,9024e-04	8,9744e-05	2,8149e-05
77	2,7122e-06	1,8701e-04	9,4525e-05	3,1652e-05
78	3,0748e-06	1,8745e-04	1,0030e-04	2,0039e-05
79	3,7662e-06	1,9706e-04	1,0075e-04	3,6112e-05
80	3,3860e-06	1,9336e-04	1,0525e-04	2,1812e-05
81	4,1173e-06	1,9756e-04	1,0388e-04	4,0072e-05
82	3,7904e-06	1,9371e-04	1,1110e-04	2,4032e-05
83	4,6205e-06	2,0356e-04	1,1218e-04	4,5261e-05
84	4,2164e-06	1,9939e-04	1,1831e-04	2,5797e-05
85	5,1251e-06	2,0416e-04	1,1806e-04	5,4012e-05
86	4,7806e-06	1,9989e-04	1,2650e-04	2,8558e-05
87	5,7835e-06	2,1017e-04	1,2764e-04	5,7585e-05
88	5,3186e-06	2,0555e-04	1,3378e-04	3,1061e-05
89	6,3861e-06	2,1098e-04	1,3272e-04	6,4293e-05
90	5,9692e-06	2,0618e-04	1,4106e-04	3,4340e-05

iterasi	V	E	I	T
91	7,1264e-06	2,1686e-04	1,4129e-04	7,3975e-05
92	6,5400e-06	2,1157e-04	1,4692e-04	3,5947e-05
93	7,7710e-06	2,1759e-04	1,4522e-04	8,2236e-05
94	7,2605e-06	2,1203e-04	1,5412e-04	3,7687e-05
95	8,6544e-06	2,2314e-04	1,5524e-04	9,3075e-05
96	8,0271e-06	2,1704e-04	1,6334e-04	3,8423e-05
97	9,5656e-06	2,2384e-04	1,6330e-04	1,0492e-04
98	9,0232e-06	2,1756e-04	1,7396e-04	4,0435e-05
99	1,0724e-05	2,2945e-04	1,7507e-04	1,2133e-04
100	9,9955e-06	2,2266e-04	1,8313e-04	4,1369e-05
101	1,1824e-05	2,3055e-04	1,8174e-04	1,3936e-04
102	1,1152e-05	2,2342e-04	1,9215e-04	4,2088e-05
103	1,3137e-05	2,3614e-04	1,9173e-04	1,6109e-04
104	1,2193e-05	2,2828e-04	1,9896e-04	3,6538e-05
105	1,4322e-05	2,3716e-04	1,9647e-04	1,8187e-04
106	1,3468e-05	2,2871e-04	2,0767e-04	2,7720e-05
107	1,5879e-05	2,4220e-04	2,0844e-04	2,1038e-04
108	1,4836e-05	2,3277e-04	2,1942e-04	1,5098e-05
109	1,7258e-05	2,4283e-04	2,1929e-04	2,4684e-04
110	1,6587e-05	2,3297e-04	2,3312e-04	1,5010e-06
111	1,9586e-05	2,4795e-04	2,3367e-04	2,9889e-04
112	1,8348e-05	2,3726e-04	2,4462e-04	1,9678e-05
113	2,1622e-05	2,4935e-04	2,4224e-04	3,6300e-04
114	2,0418e-05	2,3790e-04	2,5572e-04	5,2697e-05
115	2,4042e-05	2,5457e-04	2,5491e-04	4,4544e-04
116	2,2475e-05	2,4169e-04	2,6704e-04	1,0943e-04
117	2,6488e-05	2,5570e-04	2,6454e-04	5,5007e-04
118	2,4968e-05	2,4177e-04	2,7991e-04	1,9150e-04
119	2,9463e-05	2,6065e-04	2,7849e-04	6,9713e-04
120	2,7570e-05	2,4506e-04	2,9227e-04	3,1741e-04

Tabel 5.4 Keseluruhan galat relatif metode Runge-Kutta $h = 1,25 \times 10^{-6}$

t	V	E	I	T
0	0	0	0	0
1	1,8034e-07	1,6195e-05	1,8902e-04	1,5612e-06
2	7,4513e-07	2,8581e-05	3,8182e-04	6,4303e-06
3	1,7213e-06	3,7205e-05	5,7834e-04	1,4885e-05
4	3,1455e-06	4,2074e-05	7,7894e-04	2,7218e-05
5	5,0631e-06	4,3143e-05	9,8414e-04	4,3781e-05
6	7,5216e-06	4,0370e-05	0,0012	6,4991e-05
7	1,0561e-05	3,3796e-05	0,0014	9,1255e-05
8	1,4236e-05	2,3406e-05	0,0016	1,2301e-04
9	1,8615e-05	9,1244e-06	0,0019	1,6078e-04
10	2,3771e-05	9,1272e-06	0,0021	2,0519e-04
11	2,9763e-05	3,1313e-05	0,0023	2,5688e-04
12	3,6677e-05	5,7462e-54	0,0026	3,1650e-04
13	4,4616e-05	8,7683e-05	0,0028	3,8485e-04
14	5,3693e-05	1,2209e-04	0,0031	4,6291e-04
15	6,4000e-05	1,6064e-04	0,0034	5,5165e-04
16	7,5670e-05	2,0337e-04	0,0036	6,5208e-04
17	8,8866e-05	2,5042e-04	0,0039	7,6545e-04
18	1,0376e-04	3,0193e-04	0,0042	8,9330e-04
19	1,2501e-04	3,5784e-04	0,0045	0,0010
20	1,3932e-04	4,1818e-04	0,0048	0,0012
21	1,6045e-04	4,8308e-04	0,0051	0,0014
22	1,8418e-04	5,5272e-04	0,0055	0,0016
23	2,1075e-04	6,2700e-04	0,0058	0,0018
24	2,4051e-04	7,0588e-04	0,0062	0,0021
25	2,7387e-04	7,8944e-04	0,0066	0,0024
26	3,1131e-04	8,7787e-04	0,0069	0,0027
27	3,5323e-04	9,7102e-04	0,0073	0,0030
28	4,0081e-04	0,0011	0,0077	0,0034
29	4,5286e-04	0,0012	0,0082	0,0039
30	5,1208e-04	0,0013	0,0086	0,0044

t	V	E	I	T
31	5,7850e-04	0,0014	0,0091	0,0049
32	6,5304e-04	0,0015	0,0095	0,0056
33	7,3691e-04	0,0016	0,0100	0,0063
34	8,3144e-04	0,0017	0,0105	0,0071
35	9,3777e-04	0,0019	0,0109	0,0080
36	0,0011	0,0020	0,0114	0,0090
37	0,0012	0,0021	0,0119	0,0101
38	0,0013	0,0022	0,0124	0,0114
39	0,0015	0,0024	0,0129	0,0128
40	0,0017	0,0025	0,0133	0,0144

Tabel 5.5 Keseluruhan galat relatif metode Runge-Kutta $h = 6,25 \times 10^{-7}$

t	V	E	I	T
0	0	0	0	0
1	2,2302e-08	4,2971e-06	4,7165e-05	1,9306e-07
2	9,0677e-08	8,1180e-06	9,4787e-05	7,8346e-07
3	2,0674e-07	1,1466e-05	1,4286e-04	1,7878e-06
4	3,7234e-07	1,4342e-05	1,9141e-04	3,2220e-06
5	5,8983e-07	1,6745e-05	2,4045e-04	5,1039e-06
6	8,6165e-07	1,8675e-05	2,9001e-04	7,4538e-06
7	1,1916e-06	2,0119e-05	3,4017e-04	1,0296e-05
8	1,5812e-06	2,1083e-05	3,9089e-04	1,3652e-05
9	2,0310e-06	2,1580e-05	4,4209e-04	1,7542e-05
10	2,5435e-06	2,1612e-05	4,9380e-04	2,1984e-05
11	3,1223e-06	2,1176e-05	5,4608e-04	2,7000e-05
12	3,7715e-06	2,0264e-05	5,9902e-04	3,2615e-05
13	4,4949e-06	1,8868e-05	6,5266e-04	3,8858e-05
14	5,2959e-06	1,6987e-05	7,0698e-04	4,5766e-05
15	6,1793e-06	1,4607e-05	7,6205e-04	5,3376e-05
16	7,1479e-06	1,1735e-05	8,1785e-04	6,1716e-05
17	8,2024e-06	8,3848e-06	8,7425e-04	7,0817e-05
18	9,3465e-06	4,5601e-06	9,3127e-04	8,0709e-05
19	1,0586e-05	2,544e-07	9,8903e-04	9,1421e-05
20	1,1926e-05	4,5421e-06	0,0010	1,0299e-04

t	V	E	I	T
21	1,3374e-05	9,8396e-06	0,0011	1,1546e-04
22	1,4933e-05	1,5644e-05	0,0012	1,2889e-04
23	1,6613e-05	2,1972e-05	0,0012	1,4334e-04
24	1,8416e-05	2,8817e-05	0,0013	1,5884e-04
25	2,0345e-05	3,6162e-05	0,0014	1,7546e-04
26	2,2404e-05	4,4001e-05	0,0014	1,9322e-04
27	2,4603e-05	5,2344e-05	0,0015	2,1219e-04
28	2,6950e-05	6,1201e-05	0,0015	2,3241e-04
29	2,9455e-05	7,0587e-05	0,0016	2,5395e-04
30	3,2126e-05	8,0511e-05	0,0017	2,7689e-04
31	3,4974e-05	9,0994e-05	0,0018	3,0134e-04
32	3,8007e-05	1,0203e-04	0,0018	3,2737e-04
33	4,1225e-05	1,1359e-04	0,0019	3,5503e-04
34	4,4639e-05	1,2568e-04	0,0020	3,8442e-04
35	4,8260e-05	1,3830e-04	0,0020	4,1558e-04
36	5,2104e-05	1,5146e-04	0,0021	4,4862e-04
37	5,6186e-05	1,6518e-04	0,0022	4,8363e-04
38	6,0519e-05	1,7948e-04	0,0023	5,2076e-04
39	6,5120e-05	1,9438e-04	0,0023	5,6016e-04
40	7,0001e-05	2,0987e-04	0,0024	6,0194e-04
41	7,5165e-05	2,2592e-04	0,0025	6,4622e-04
42	8,0626e-05	2,4253e-04	0,0026	6,9310e-04
43	8,6404e-05	2,5969e-04	0,0027	7,4269e-04
44	9,2524e-05	2,7741e-04	0,0028	7,9513e-04
45	9,9010e-05	2,9572e-04	0,0028	8,5058e-04
46	1,0588e-04	3,1464e-04	0,0029	9,0929e-04
47	1,1317e-04	3,3419e-04	0,0030	9,7150e-04
48	1,2090e-04	3,5437e-04	0,0031	0,0010
49	1,2906e-04	3,7513e-04	0,0032	0,0011
50	1,3768e-04	3,9647e-04	0,0033	0,0012

t	V	E	I	T
51	1,4681e-04	4,1837e-04	0,0034	0,0013
52	1,5646e-04	4,4082e-04	0,0035	0,0013
53	1,6670e-04	4,6358e-04	0,0036	0,0014
54	1,7754e-04	4,8749e-04	0,0037	0,0015
55	1,8905e-04	5,1176e-04	0,0038	0,0016
56	2,0124e-04	5,3666e-04	0,0039	0,0017
57	2,1414e-04	5,6215e-04	0,0040	0,0018
58	2,2777e-04	5,8818e-04	0,0041	0,0019
59	2,4220e-04	6,1473e-04	0,0042	0,0021
60	2,5748e-04	6,4175e-04	0,0043	0,0022
61	2,7369e-04	6,6925e-04	0,0044	0,0023
62	2,9088e-04	6,9729e-04	0,0046	0,0025
63	3,0915e-04	7,2586e-04	0,0047	0,0026
64	3,2854e-04	7,5497e-04	0,0048	0,0028
65	3,4907e-04	7,8462e-04	0,0049	0,0030
66	3,7079e-04	8,1473e-04	0,0050	0,0032
67	3,9381e-04	8,4517e-04	0,0051	0,0034
68	4,1822e-04	8,7585e-04	0,0053	0,0036
69	4,4414e-04	9,0672e-04	0,0054	0,0038
70	4,7168e-04	9,3790e-04	0,0055	0,0040
71	5,0098e-04	9,6934e-04	0,0056	0,0042
72	5,3212e-04	0,0010	0,0058	0,0045
73	5,6515e-04	0,0010	0,0059	0,0048
74	6,0014e-04	0,0011	0,0060	0,0051
75	6,3725e-04	0,0011	0,0061	0,0054
76	6,7664e-04	0,0011	0,0062	0,0057
77	7,1849e-04	0,0012	0,0064	0,0060
78	7,6298e-04	0,0012	0,0065	0,0064
79	8,1024e-04	0,0012	0,0066	0,0068
80	8,6042e-04	0,0013	0,0067	0,0072

Tabel 5.6 Keseluruhan galat relatif metode Runge-Kutta $h = 4,1667 \times 10^{-7}$

t	V	E	I	T
0	0	0	0	0
1	6,5844e-09	1,9467e-06	2,0949e-05	5,7000e-08
2	2,6610e-08	3,7525e-06	4,2030e-05	2,3017e-07
3	6,0410e-08	5,4178e-06	6,3246e-05	5,2268e-07
4	1,0834e-07	6,9429e-06	8,4597e-05	9,3766e-07
5	1,7084e-07	8,3277e-06	1,0609e-04	1,4785e-06
6	2,4833e-07	9,5721e-06	1,2773e-04	2,1488e-06
7	3,4196e-07	1,0671e-05	1,4955e-04	2,9536e-06
8	4,5213e-07	1,1624e-05	1,7155e-04	3,8977e-06
9	5,7847e-07	1,2436e-05	1,9369e-04	4,9841e-06
10	7,2101e-07	1,3112e-05	2,1595e-04	6,2160e-06
11	8,8010e-07	1,3652e-05	2,3833e-04	7,5964e-06
12	1,0563e-07	1,4056e-05	2,6086e-04	9,1285e-06
13	1,2504e-06	1,4322e-05	2,8354e-04	1,0816e-05
14	1,4632e-06	1,4449e-05	3,0639e-04	1,2663e-05
15	1,6956e-06	1,4435e-05	3,2945e-04	1,4674e-05
16	1,9483e-06	1,4278e-05	3,5272e-04	1,6856e-05
17	2,2219e-06	1,3976e-05	3,7618e-04	1,9214e-05
18	2,5168e-06	1,3531e-05	3,9983e-04	2,1758e-05
19	2,8354e-06	1,2936e-05	4,2370e-04	2,4493e-05
20	3,1757e-06	1,2192e-05	4,4781e-04	2,7426e-05
21	3,5398e-06	1,1306e-05	4,7209e-04	3,0560e-05
22	3,9269e-06	1,0280e-05	4,9653e-04	3,3901e-05
23	4,3375e-06	9,1168e-06	5,2112e-04	3,7453e-05
24	4,7725e-06	7,8155e-06	5,4588e-04	4,1220e-05
25	5,2330e-06	6,3742e-06	5,7084e-04	4,5210e-05
26	5,7202e-06	4,7904e-06	5,9603e-04	4,9426e-05
27	6,2355e-06	3,0614e-06	6,2148e-04	5,3876e-05
28	6,7800e-06	1,1848e-06	6,4719e-04	5,8569e-05
29	7,3547e-06	8,4116e-07	6,7317e-04	6,3516e-05
30	7,9600e-06	3,0168e-06	6,9937e-04	6,8729e-05

Tabel 5.7 Hasil simulasi $dy = ydx$ dengan $h = 0,1$ pada 10 iterasi awal, akkhir

t	V	E	I	T
31	8,5982e-06	5,3493e-06	7,2587e-04	7,4218e-05
32	9,2705e-06	7,8388e-06	7,5267e-04	7,9992e-05
33	9,9760e-06	1,0477e-05	7,7969e-04	8,6057e-05
34	1,0715e-05	1,3260e-05	8,0689e-04	9,2422e-05
35	1,1488e-05	1,6185e-05	8,3428e-04	9,9093e-05
36	1,2296e-05	1,9254e-05	8,6187e-04	1,0608e-04
37	1,3141e-05	2,2467e-05	8,8971e-04	1,1338e-04
38	1,4026e-05	2,5829e-05	9,1786e-04	1,2102e-04
39	1,4951e-05	2,9343e-05	9,4632e-04	1,2900e-04
40	1,5920e-05	3,3013e-05	9,7512e-04	1,3733e-04
41	1,6932e-05	3,6840e-05	0,0010	1,4603e-04
42	1,7990e-05	4,0826e-05	0,0010	1,5512e-04
43	1,9096e-05	4,4979e-05	0.0011	1,6462e-04
44	2,2053e-05	4,9302e-05	0,0011	1,7453e-04
45	2,1459e-05	5,3782e-05	0,0011	1,8488e-04
46	2,2714e-05	5,8415e-05	0,0012	1,9567e-04
47	2,4020e-05	6,3199e-05	0,0012	2,0692e-04
48	2,5378e-05	6,8132e-05	0,0012	2,1863e-04
49	2,6791e-05	7,3218e-05	0,0012	2,3081e-04
50	2,8262e-05	7,8460e-05	0,0013	2,4349e-04
51	2,9795e-05	8,3862e-05	0,0013	2,5666e-04
52	3,1392e-05	8,9429e-05	0,0013	2,7037e-04
53	3,3055e-05	9,5163e-04	0,0014	2,8462e-04
54	3,4786e-05	1,0107e-04	0,0014	2,9947e-04
55	3,6591e-05	1,0716e-04	0,0014	3,1492e-04
56	3,8472e-05	1,1342e-04	0,0015	3,3100e-04
57	4,0472e-05	1,1986e-04	0,0015	3,4774e-04
58	4,2456e-05	1,2646e-04	0,0015	3,6514e-04
59	4,4562e-05	1,3323e-04	0,0016	3,8324e-04
60	4,6747e-05	1,4014e-04	0,0016	4,0203e-04

Tabel 5.8 Hasil simulasi $dy = ydx$ dengan $h = 0,1$ pada 10 iterasi awal, akkhir

t	V	E	I	T
61	4,9016e-05	1,4722e-04	0,0017	4,2154e-04
62	5,1373e-05	1,5446e-04	0,0017	4,4180e-04
63	5,3824e-05	1,6187e-04	0,0017	4,6281e-04
64	5,6734e-05	1,6945e-04	0,0018	4,8642e-04
65	5,9025e-05	1,7721e-04	0,0018	5,0727e-04
66	6,1780e-05	1,8515e-04	0,0018	5,3082e-04
67	6,4649e-05	1,9328e-04	0,0019	5,5531e-04
68	6,7636e-05	2,0161e-04	0,0019	5,8078e-04
69	7,0738e-05	2,1012e-04	0,0020	6,0725e-04
70	7,3954e-05	2,1880e-04	0,0020	6,3476e-04
71	7,7289e-05	2,2765e-04	0,0020	6,6332e-04
72	8,0746e-05	2,3666e-04	0,0021	6,9297e-04
73	8,4333e-05	2,4584e-04	0,0021	7,2372e-04
74	8,8059e-05	2,5517e-04	0,0022	7,5561e-04
75	9,1931e-05	2,6468e-04	0,0022	7,8867e-04
76	9,5956e-05	2,7453e-04	0,0022	8,2297e-04
77	1,0014e-04	2,8420e-04	0,0023	8,5856e-04
78	1,0449e-04	2,9425e-04	0,0023	8,9557e-04
79	1,0902e-04	3,0449e-04	0,0024	9,3408e-04
80	1,1373e-04	3,1493e-04	0,0024	9,7413e-04
81	1,1863e-04	3,2555e-04	0,0025	0,0010
82	1,2371e-04	3,3636e-04	0,0025	0,0011
83	1,2897e-04	3,4734e-04	0,0026	0,0011
84	1,3443e-04	3,5817e-04	0,0026	0,0012
85	1,4010e-04	3,6976e-04	0,0027	0,0012
86	1,4599e-04	3,8119e-04	0,0027	0,0012
87	1,5210e-04	3,9276e-04	0,0027	0,0013
88	1,5847e-04	4,0448e-04	0,0028	0,0014
89	1,6509e-04	4,1636e-04	0,0028	0,0014
90	1,7198e-04	4,2841e-04	0,0029	0,0015

Tabel 5.9 Hasil simulasi $dy = ydx$ dengan $h = 0,1$ pada 10 iterasi awal, akkhir

t	V	E	I	T
91	1,7915e-04	4,4065e-04	0,0029	0,0015
92	1,8663e-04	4,5307e-04	0,0030	0,0016
93	1,9440e-04	4,6566e-04	0,0030	0,0017
94	2,0246e-04	4,7844e-04	0,0031	0,0017
95	2,1083e-04	4,9137e-04	0,0031	0,0018
96	2,1951e-04	5,0444e-04	0,0032	0,0019
97	2,2852e-04	5,1762e-04	0,0033	0,0019
98	2,3790e-04	5,3088e-04	0,0033	0,0020
99	2,4765e-04	5,4421e-04	0,0034	0,0021
100	2,5779e-04	5,5762e-04	0,0034	0,0022
101	2,6836e-04	5,7112e-04	0,0035	0,0023
102	2,7936e-04	5,8476e-04	0,0035	0,0024
103	2,9083e-04	5,9850e-04	0,0036	0,0025
104	3,0280e-04	6,1233E-04	0,0036	0,0026
105	3,1526e-04	6,2633e-04	0,0037	0,0027
106	3,2820e-04	6,4049e-04	0,0037	0,0028
107	3,4163e-04	6,5479e-04	0,0038	0,0029
108	3,5559e-04	6,6918e-04	0,0038	0,0030
109	3,7009e-04	6,8358e-04	0,0039	0,0031
110	3,8517e-04	6,9793e-04	0,0040	0,0033
111	4,0086e-04	7,1220e-04	0,0040	0,0034
112	4,1721e-04	7,2636e-04	0,0041	0,0035
113	4,3424E-04	7,4047e-04	0,0041	0,0037
114	4,5198e-04	7,5464e-04	0,0042	0,0038
115	4,7046e-04	7,6889e-04	0,0042	0,0040
116	4,8969e-04	7,8312e-04	0,0043	0,0041
117	5,0970e-04	7,9733e-04	0,0043	0,0043
118	5,3053e-04	8,1149e-04	0,0044	0,0044
119	5,5220e-04	8,2556e-04	0,0044	0,0046
120	5,7476e-04	8,3955e-04	0,0045	0,0048

LAMPIRAN B. Lembar Revisi

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
Jalan Kalimantan Nomor 37 Kampus Bumi Tegalboto Jember 68121
Telepon: 0331- 334988, 330738 Faks: 0331-334988
Laman: www.fkip.unej.ac.id

LEMBAR REVISI SKRIPSI

NAMA MAHASISWA : A. RIYAN IVAN ALI PUTRA W.
NIM : 120210101072
JUDUL SKRIPSI : EFEKTIVITAS METODE MILNE ORDE LIMA DALAM MENYELESAIKAN MODEL MATEMATIKA VAKSINASI TUBERKULOSIS TIPE VEIT
TANGGAL UJIAN : 14 NOVEMBER 2016
PEMBIMBING : 1. Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
2. Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

MATERI PEMBETULAN / PERBAIKAN

No.	HALAMAN	HAL-HAL YANG HARUS DIPERBAIKI
1.	vi	Memperbaiki tata tulis pada ringkasan
2.	3	Menghapus penggunaan $dy = y\,dx$
3.	32	Mengganti iterasi pada simulasi
4.	39	Menambahkan grafik galat relatif

PERSETUJUAN TIM PENGUJI

JABATAN	NAMA TIM PENGUJI	TTD danTanggal
Ketua	Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.	
Sekretaris	Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.	23/11 2016
Anggota	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.d.	
	Drs. Toto' Bara Setiawan, M.Si.	23/11 2016

Jember, 22 November 2016
Mengetahui / menyetujui :

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,	Mahasiswa Yang Bersangkutan
Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.	Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.	A. Riyan Ivan Ali Putra W.
NIP. 19700307 199512 2 001	NIP. 19820529 200912 1 003	NIM. 120210101072

Mengetahui,
Ketua Jurusan P.MIPA

Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes.
NIP. 19600309 198702 2 002

Gambar 5.1 Lembar Revisi