



**SUPER $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING  
PADA SHACKLE DARI GRAF PRISMA DAN  
APLIKASINYA DALAM PENGEMBANGAN  
CHIPERTEXT**

**SKRIPSI**

Oleh

Dedy Susanto

NIM 091810101052

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2016**



**SUPER( $a, d$ )- $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING  
PADA SHACKLE DARI GRAF PRISMA DAN  
APLIKASINYA DALAM PENGEMBANGAN  
CHIPERTEXT**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Dedy Susanto**

**NIM 091810101052**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2016**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda Almarhum Sunardi selaku pahlawan masa depanku yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan iringan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringi dalam setiap perjalananku dari awal memasuki perkuliahan hingga akhir masa perkuliahan ini;
2. Bapak tersayangku Almarhum Hasan dan Ibunda May Hosni yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta iringan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringi dalam setiap perjalanan hidupku;
3. Prof. Drs. Dafik, M. Sc., Ph.D. dan Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini;
4. Adik-adik seperjuangan graf khususnya untuk bidang covering yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
5. Saudara yunus selaku saudara terbaikku yang senantiasa mendukung selama proses mengerjakan skripsi ini;
6. Kota Jember selaku kota yang telah mendewasakan aku. Membuatku mengerti arti kebebasan dan paham akan tanggung jawab;
7. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan.  
Sesungguhnya bersama keulitan itu ada kemudahan."  
(Q.S Al Insyirah : 5-6)"

"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah nasib suatu kaum hingga  
mereka mengubah diri mereka sendiri."  
(Q.S. Ar-Ra'd:11)

"kesuksesan adalah seberapa tinggi anda mampu melompat ketika  
terpuruk di jurang kegagalan."  
(George S. Patton)

**HALAMAN PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dedy Susanto

NIM : 091810101052

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Shackle dari Graf Prisma dan Aplikasinya dalam Pengembangan Chipertext adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Dedy Susanto

NIM. 091810101052

SKRIPSI

**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL *COVERING*  
PADA *SHACKLE* DARI GRAF PRISMA DAN  
APLIKASINYA DALAM PENGEMBANGAN  
*CHIPHERTEXT***

Oleh

**Dedy Susanto**  
**NIM 091810101052**

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.  
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M. Sc., Ph.D.

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Shackle dari Graf Prisma dan Aplikasinya dalam Pengembangan *Chipertext* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Gedung Matematika FMIPA

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., Msi.

NIP.19840801200801200

Anggota I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D

NIP.196808021993031004

Anggota 2,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

NIP.196610121993031001

Dian Anggraeni, S.Si., M.Si

NIP. 198202162006042002

Mengetahui,

Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 196102041987111001

## RINGKASAN

**Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Shackle dari Graf Prisma dan Aplikasinya dalam Pengembangan Chipertext;** Dedy Susanto, 091810101052; 2016: 59 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh L.Euler seorang ahli matematika dari swiss untuk memecahkan masalah jembatan Konigsberg yang terkenal. Teori graf memiliki beragam aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Pada dasarnya graf diaplikasikan untuk memodelkan suatu permasalahan yang dapat dipandang sebagai kumpulan objek atau relasi. Model dari objek berupa representasi titik dan sisi. Salah satu contoh penerapan teori graf adalah pelabelan graf.

Pelabelan suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan magic, dan pelabelan antimagic. Dalam pengembangan pelabelan antimagic, dikenal juga pelabelan total  $(a, d)$ -titik antimagic, pelabelan total titik magic super, pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic, dan pelabelan total sisi magic super serta pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik. Langkah yang dilakukan terlebih dahulu pada penelitian ini adalah menentukan nilai beda  $(d)$ , selanjutnya nilai beda  $(d)$  tersebut diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada shackle dari graf prisma. Jika terdapat super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada shackle dari graf prisma, maka dapat dirumuskan pola super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada shackle dari graf prisma dengan menggunakan metode partisi untuk menentukan polanya.

Sebelum penelitian lanjutan pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ , telah dilakukan observasi awal untuk nilai  $m$  dan  $n$  tertentu sebagai pedoman untuk menduga



keberadaan pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super serta menentukan pola pelabelannya. Setelah melakukan observasi awal, peneliti menemukan pola pelabelan titik tunggal pada  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ . Selanjutnya menghasilkan 2 partisi, Lemma dan Teorema.



## PRAKATA

Puji syukur atas ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal pemodelan yang berjudul "**Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering Pada Shackle dari Graf Prisma dan Aplikasinya Dalam Pengembangan Chipertext**". Proposal pemodelan ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan, serta bimbingan dan dukungan dalam penyusunan proposal pemodelan ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan proposal pemodelan ini;
2. Teman-teman satu bimbingan covering. Terima kasih telah senantiasa membantu dalam proses tugas akhir ini;
3. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya proposal pemodelan ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tulisan ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tulisan ini dapat bermanfaat.

Jember, 28 Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	ii
HALAMAN MOTTO . . . . .	iii
HALAMAN PERNYATAAN . . . . .	iv
Halaman Pengesahan . . . . .	vi
RINGKASAN . . . . .	vii
PRAKATA . . . . .	ix
DAFTAR ISI . . . . .	xi
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xii
DAFTAR TABEL . . . . .	xiii
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	4
1.4 Manfaat Penelitian . . . . .	4
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 Terminologi Dasar Graf . . . . .	5
2.2 Jenis-Jenis Graf . . . . .	9
2.3 Graf Khusus . . . . .	10
2.4 Operasi Graf . . . . .	14
2.5 Fungsi dan Barisan Aritmatika . . . . .	15
2.6 Partisi . . . . .	18
2.7 Pelabelan Graf . . . . .	18
2.7.1 Definisi Pelabelan Graf . . . . .	18
2.7.2 Pelabelan Super- $\mathcal{H}$ - <i>Antimagic Total Covering</i> . . . . .	19
2.7.3 Lemma untuk batas atas $d$ . . . . .	20
2.8 Partisi pada Pelabelan Graf . . . . .	21
2.9 Aplikasi Graf . . . . .	25

2.10 Hasil Pelabelan Selimut $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Super pada Beberapa Graf . . . . .	26
<b>3 METODE PENELITIAN . . . . .</b>	<b>28</b>
3.1 Metode Penelitian . . . . .	28
3.2 Rancangan Penelitian . . . . .	28
3.2.1 Penotasian Titik dan sisi . . . . .	28
3.2.2 Indikator Pelabelan . . . . .	29
3.2.3 Teknik penelitian . . . . .	30
<b>4 HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>33</b>
4.1 Observasi Awal . . . . .	33
4.2 Kardinalitas dan Batas atas . . . . .	35
4.3 Pengembangan Partisi dan Variasi Nilai Beda . . . . .	37
4.4 Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Shackle dari Graf Prisma . . . . .	38
4.5 Pembangunan <i>Chipertext</i> Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total <i>Covering</i> pada <i>Shackle</i> dari Graf Prisma . . . . .	43
4.5.1 Pembangunan <i>Chipertext</i> Alfabet Pada Graf <i>shack</i> $(P_{2,8}, P_2, n)$ Dengan $d=12$ . . . . .	44
4.5.2 Pembangunan <i>Stream Chipertext</i> Pada Graf <i>shack</i> $(P_{2,14}, P_2, 3)$ Dengan $d=5$ . . . . .	47
4.6 Pembahasan . . . . .	50
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN . . . . .</b>	<b>54</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	54
5.2 Saran . . . . .	55
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>56</b>

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf secara umum . . . . .	5
2.2	$G_1$ isomorfik dengan $G_2$ . . . . .	8
2.3	Graf $G$ , Subgraf $G$ , dan Spanning Subgraf $G$ . . . . .	9
2.4	Contoh gabungan graf . . . . .	9
2.5	Graf terhubung dan graf tak terhubung . . . . .	10
2.6	(a). Graf $K_4$ ; (b). Graf $K_5$ ; (c). Graf $K_6$ . . . . .	11
2.7	(a). Regular-0; (b). Regular-1; (c). Regular-2 . . . . .	11
2.8	(a). $K_{2,3}$ ; (b). $K_{3,3}$ ; (c). $K_{2,4}$ . . . . .	12
2.9	Graf lintasan $P_3$ dan $P_5$ . . . . .	12
2.10	Graf rantai $3K_4$ -lintasan . . . . .	13
2.11	Graf siklus . . . . .	13
2.12	$shack(P_{2,t}, P_2, n)$ . . . . .	14
2.13	Perkalian Cartesius . . . . .	15
2.14	Graf shack $(S_m, n)$ . . . . .	15
2.15	Fungsi-fungsi khusus: (a) injektif; (b) surjektif; (c) bijektif . . . . .	17
2.16	Alur Kerja Kriptografi . . . . .	26
3.1	Penotasian pada $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ . . . . .	29
3.2	Diagram Alir Penelitian . . . . .	31
4.1	Observasi awal pada $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ . . . . .	34
4.2	Pelabelan total selimut $shack(P_{2,10}, P_2, n)$ . . . . .	41
4.3	Pelabelan total selimut $shack(P_{2,12}, P_2, n)$ . . . . .	41
4.4	Pelabelan total selimut $shack(P_{2,14}, P_2, n)$ . . . . .	42
4.5	graf $shack(P_{2,8}, P_2, 4)$ dengan $d=12$ . . . . .	45
4.6	graf pohon . . . . .	46

DAFTAR TABEL

2.1	Klasifikasi partisi $d = m$ . . . . .	24
2.2	Klasifikasi partisi $d = m^2$ . . . . .	24
2.3	Klasifikasi partisi $d = \frac{m}{2}$ . . . . .	25
2.4	Ringkasan pelabelan selimut $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf tunggal. . . . .	27
4.1	Klasifikasi Partisi yang ditemukan. . . . .	34
4.2	Pembentukan <i>chipertext</i> dari gambar 4.6. . . . .	46
4.3	Klasifikasi <i>shack</i> ( $P_{2,14}, P_2, 3$ ) Dengan $d=5$ . . . . .	48
4.4	Pembentukan <i>Stream Chiphertext</i> dari Figure 1. . . . .	49
4.5	Pembentukan <i>Stream Chiphertext</i> dari Figure 1. . . . .	50
4.6	<i>Chiphertext</i> alfabet dari graf <i>shack</i> ( $P_{2,8}, P_2, 4$ ) dengan $d=12$ . . . . .	52
5.1	<i>Chiphertext</i> alfabet dari graf <i>shack</i> ( $P_{2,8}, P_2, 4$ ) dengan $d=12$ . . . . .	54

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu ilmu yang mendasari dari ilmu pengetahuan yang lain. Sebagian besar masalah kehidupan sehari-hari dapat diabstraksikan sebagai masalah yang berkaitan dengan himpunan benda-benda dan relasi pada benda-benda tersebut yang tentunya perhitungan tersebut terkait dengan teorema yang terkandung dalam matematika. Matematika sering digunakan dalam menyelesaikan masalah khususnya untuk komputasi dan perhitungan. Dalam pandangan formalis, matematika merupakan pemeriksaan aksioma yang menegaskan struktur abstrak menggunakan logika simbolik dan notasi matematika. Hal ini menunjukkan bahwa matematika telah memberikan banyak sumbangan dan manfaat secara langsung kepada masyarakat.

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh L.Euler seorang ahli matematika dari swiss untuk memecahkan masalah jembatan Konigsberg yang terkenal. Teori graf memiliki beragam aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Pada dasarnya graf diaplikasikan untuk memodelkan suatu permasalahan yang dapat dipandang sebagai kumpulan objek atau relasi. Model dari objek berupa representasi titik dan sisi. Graf dapat digunakan untuk memecahkan berbagai permasalahan yang berkaitan dengan objek diskrit. Graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan suatu himpunan pasangan tidak terurut dari titik-titiknya yang disebut sisi. Walaupun teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang penting namun teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh penerapan teori graf adalah pelabelan graf.

Pelabelan suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Pelabelan graf diperkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963 dengan memunculkan ide tentang pelabelan magic. Misal  $G(V, E)$ , selanjutnya disingkat  $G$ , adalah graf sederhana dan tak ber-

arah dengan himpunan titiknya adalah  $V$  dan himpunan sisinya adalah  $E$ . Graf  $G$  mempunyai jumlah titik (*order*) dan jumlah sisi (*size*). Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan magic, dan pelabelan antimagic. Dalam pengembangan pelabelan antimagic, dikenal juga pelabelan total  $(a, d)$ -titik antimagic, pelabelan total titik magic super, pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic, dan pelabelan total sisi magic super serta pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super.

Pelabelan antimagic adalah pengembangan dari pelabelan magic yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (dalam martin baca dan M.Miller,2008). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf  $G$  disebut antimagic jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan  $1, 2, \dots, e_G$  sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total  $\mathcal{H}$ -magic dengan menggunakan konsep selimut  $-\mathcal{H}$ . Inayah et al. kemudian mengembangkan suatu pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf  $G$  adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat penjumlahan yang merupakan barisan aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$ . Pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic dapat dikatakan fungsi bijektif jika label selimut pada suatu graf tersebut selalu berbeda dan berurutan.

Penelitian tentang selimut pernah dilakukan oleh Inayah (2013), Citra et al. (2014), dan Ika et al (2016). Inayah membahas tentang pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf kipas dan graf roda. Citra membahas tentang pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super pada graf semi windmill. Citra menemukan 4 teorema baru dengan  $d \in \{7, 5, 3, 1\}$  yaitu  $(18n + 27, 7) - (C_3 + e)$ ,  $(25n + 17, 5) - (C_3 + e)$ ,  $(23n + 13, 3) - (C_3 + e)$ , dan  $(22n + 20, 1) - (C_3 + e)$ . Ika menemukan teorema tentang pelabelan selimut menggunakan metode partisi pada amalgamsi dari graf komplit.

Graf prisma adalah sebuah graf regular yang diperoleh dari hasil kali Cartesius graf yakni graf lintasan di 2 titik dengan graf lingkaran di titik dapat dino-



tasikan dengan  $(P_{2,t})$ . Sedangkan shackle dari graf prisma dengan konektif sisi dapat dinotasikan dengan  $Shack(P_{2,t}, P_2, n)$  adalah sebuah graf yang dibentuk dari dua buah atau lebih subgraf prisma  $(P_{2,t})$  dengan jumlah titik sebanyak  $S$  pada setiap selimutnya dan sisi dari gabungan dua titik,  $e = 1$  dan  $v = 2$  yang berarti bahwa ada 1 sisi yang dipakai bersama-sama oleh selimut pertama dan selimut kedua, dan  $n \geq 2$ .

Aplikasi pada graf meliputi berbagai macam, yaitu dalam transparansi, komunikasi, ikatan kimia, desain arsitektur. Untuk aplikasi graf yang lain adalah kriptografi, pengaturan jadwal, astronomi dan sebagainya. Aplikasi graf mulai berkembang lagi pada pengembangan *chipertext*.

Pada penelitian ini dibahas tentang pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super pada shackle dari graf prisma dengan konektif sisi. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis memilih judul "**Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Shackle dari Graf Prisma dan Aplikasinya dalam Pengembangan *Chipertext***".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada *shackle* dari graf prisma?
- bagaimana menentukan batas atas nilai beda  $(d)$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada *shackle* dari graf prisma?
- bagaimana menentukan beberapa nilai beda  $(d)$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada *shackle* dari graf prisma?
- bagaimana mengembangkan *chipertext* dengan menggunakan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada *shackle* dari graf prisma?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. menentukan kardinalitas titik dan sisi pada *shackle* dari graf prisma;
- b. menentukan batas atas nilai beda  $(d)$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* pada *shackle* dari graf prisma;
- c. menentukan nilai beda  $(d)$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* pada *shackle* dari graf prisma;
- d. mengembangkan *chipertext* dengan menggunakan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* pada *shackle* dari graf prisma.

### 1.4 Manfaat Penelitian

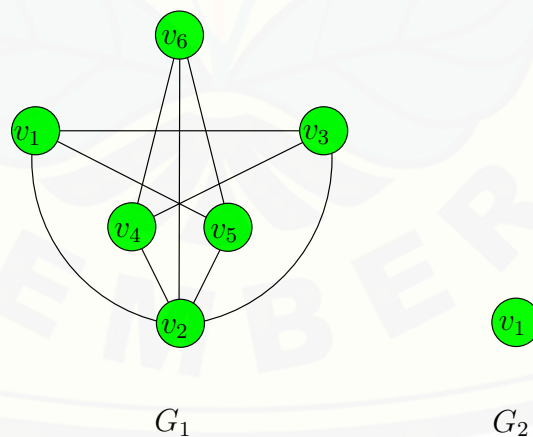
Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

- a. menambah pengetahuan baru tentang pelabelan selimut pada *shackle* dari graf prisma dengan menggunakan metode partisi;
- b. memberi motivasi untuk meneliti tentang pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* pada graf jenis lain;
- c. menambah pengetahuan baru tentang *ciphertext*;
- d. melatih peneliti dalam menentukan batas atas nilai beda  $(d)$ , menerapkan dalam menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik, menganalisa dalam menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi, dan mencipta teorema.

## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf merupakan himpunan tak kosong  $V$  yang elemennya disebut titik (*vertex*) dan himpunan yang mungkin kosong  $E$  yang elemennya disebut *edge*. Sisi merupakan pasangan tak berurut  $(u, v)$  dari dua titik  $u$  dan  $v$  di  $V$ . Pada sebuah graf, *vertex* tidak boleh kosong. Sedangkan *edge* boleh kosong. Sehingga sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai *edge*, namun *vertex* harus ada. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan *trivial*. Seperti yang dinyatakan Saoni (2003) bahwa graf yang tidak mempunyai sisi dinamakan graf kosong (*null graph atau empty graph*). Graf kosong (*null graph atau empty graph*) dinotasikan dengan  $N_n$ , dimana  $n$  adalah jumlah titik pada graf, titik tersebut membentuk himpunan titik tanpa sisi maka disebut graf kosong (Munir, 2001). Pada graf jumlah titik  $G$  disebut *order* dari  $G$  dinotasikan  $|V(G)|$ . Graf mempunyai *order*  $p = |V(G)|$  dan *size*  $q = |E(G)|$  dapat ditulis  $(p, q)$ -graf (Harfield dan Ringel, 1994). Contoh graf secara umum dapat dilihat pada gambar 2.1



Gambar 2.1 Contoh graf secara umum

Pada gambar 2.1 tersebut  $G_1$  adalah contoh graf secara umum. Sedangkan  $G_2$  adalah graf *trivial* yaitu graf yang hanya mempunyai satu titik saja.  $G_2$  juga dapat disebut *null graph* atau *empty graph* karena tidak mempunyai sisi.

Sebuah titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, bilangan asli ataupun keduanya. Misalkan  $v_i$  dan  $v_j$  adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik  $v_i$  dan  $v_j$  dinyatakan dengan pasangan  $(v_i, v_j)$  atau dengan lambang  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ .  $G_2$  pada gambar 2.1 mempresentasikan contoh graf kosong dengan  $|V(G_2)|=1$  yang dinotasikan dengan  $N_1$ .  $G_1$  pada gambar 2.1 adalah graf dengan  $|V(G_1)|=6$  dan  $|E(G_1)|=10$ . Untuk  $G_2$ ,  $V = \{v_1\}$  dan  $E = \emptyset$ , sedangkan  $G_1$ ,  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  dan  $E = \{(v_6, v_4), (v_6, v_2), (v_6, v_5), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_3, v_4), (v_2, v_4), (v_5, v_2)\}$ .

Derajat (*degree*) dari titik  $v$  dinotasikan dengan  $d(v)$  adalah jumlah sisi yang berada di titik  $v$  tersebut. Derajat total graf adalah Jumlah derajat semua titik graf. Jalan (*walk*) pada sebuah graf adalah barisan titik (*edge*) dan sisi (*vertex*) yang diawali dan diakhiri dengan titik. Jalan (*walk*) dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama atau *identik*. Jika titik jalan yang berbeda maka disebut lintasan (*path*), sedangkan semua sisinya yang berbeda maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Sikel (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda (lintasan tertutup).

Graf selain menggunakan titik dan garis, juga dapat dipresentasikan menggunakan matriks. Matriks *adjacent* adalah matriks persegi berordo  $n \times n$  dan dinotasikan dengan  $A(G) = [a_{ij}]$ ,  $a_{ij}$  menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik  $v_i$  dan titik  $v_j$ , dimana:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \{v_i, v_j\} \in E(G), \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah titik pada graf  $G$ . Titik  $u$  dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan titik  $v$  jika ada sisi  $e$  yang menghubungkan titik  $u$  dan titik  $v$ , yaitu  $e = uv$ . Apabila  $u$  dan  $v$  terletak pada sisi  $e$ , maka  $u$  dan  $v$  dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi  $e$ . Titik  $v$  *incident* dengan sebuah sisi  $e$  jika  $v$  merupakan titik ujung  $e$ , demikian juga  $e$  *incident* dengan  $v$  ketika  $v$  merupakan

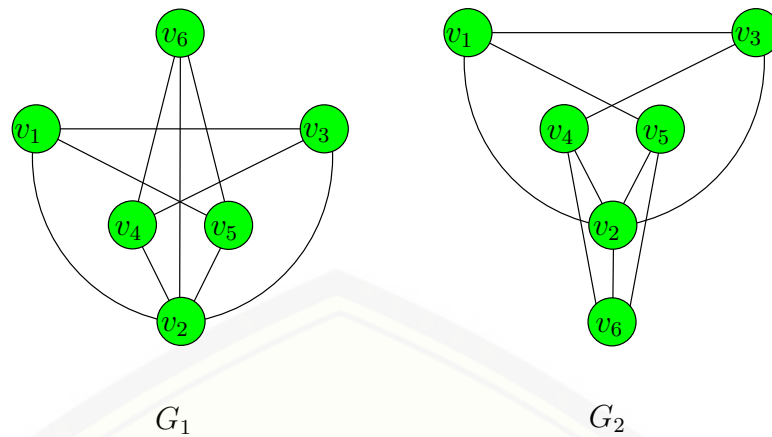
titik ujung dari  $e$  (Hartsfield dan Ringel, 1994.). Sebagai contoh  $G_1$  pada gambar 2.1 titik  $v_2$  *adjacent* dengan titik  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  dan titik  $v_1$  *incident* dengan sisi  $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_5)$ .

$$\text{Matriks } G_1 \text{ dari gambar 2.1 adalah : } M = [G_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dua buah graf yang sama tetapi secara struktur geometri berbeda dan kebanyakan mereka berbeda cara pemberian label titik-titik dan sisi-sisinya atau cara menggambarannya disebut graf yang saling isomorfik (*Isomorphic graph*). Untuk memperjelas maksud kalimat tersebut, akan didefinisikan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis jika ada suatu fungsi  $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$  sedemikian hingga  $uv \in E(G_1) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$ . Fungsi  $\phi$  dinamakan sebuah fungsi isomorfis. Jadi dapat dikatakan bahwa graf  $G_1$  dan  $G_2$  terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga. Dengan kata lain misalkan sisi  $e$  bersisian dengan simpul  $u$  dan  $v$  di  $G_1$ , maka sisi  $e'$  yang berkorespondensi di  $G_2$  harus bersisian dengan simpul  $u'$  dan  $v'$  yang di  $G_2$ . Tetapi jika graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis maka kedua graf tersebut selalu memenuhi 3 syarat sebagai berikut:

1. jumlah titik  $G_1 =$  jumlah titik  $G_2$  (jumlah simpul yang sama),
2. jumlah garis  $G_1 =$  jumlah garis  $G_2$  (jumlah sisi yang sama),
3. jumlah garis yang mempunyai derajat tertentu dalam graf  $G_1$  dan  $G_2$  sama (mempunyai simpul yang sama berderajat tertentu).

Ketiga syarat tersebut belum cukup menjamin bahwa kedua graf isomorfis. Untuk menunjukkan bahwa kedua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis maka dapat dilihat dari matriks bertetanggaan kedua graf tersebut sama. Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar 2.2



Gambar 2.2  $G_1$  isomorfik dengan  $G_2$

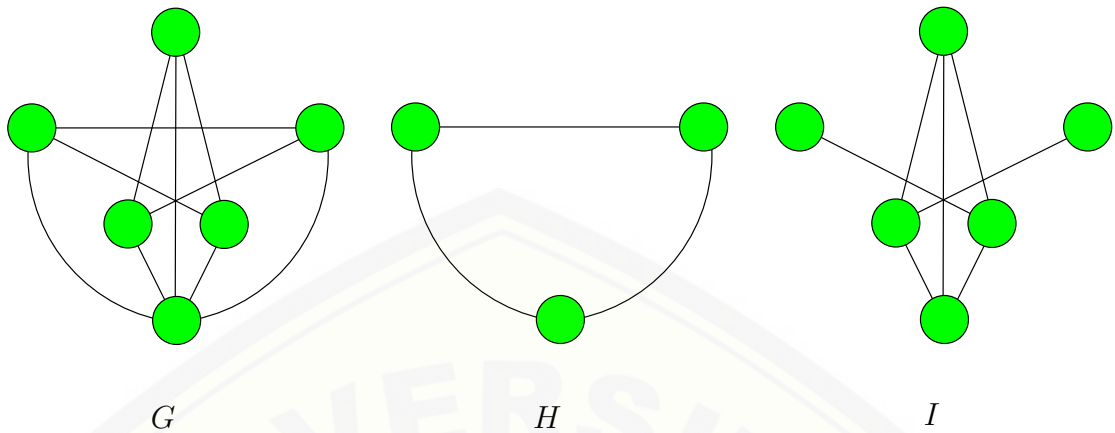
Matriks  $G_1$  dari gambar 2.2 adalah :  $M = [G_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matriks  $G_2$  dari gambar 2.2 adalah :  $M = [G_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Graf  $H$  adalah subgraf dari  $G$  jika dari setiap titik dan sisi dari graf  $G$  adalah titik dari graf  $H$ . Graf  $H$  adalah subgraf dari  $G$  dapat dinotasikan dengan  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ . Spanning subgraf dari graf  $G$  adalah subgraf yang dihasilkan dari graf  $G$  dengan menghapus sisi. Contoh gambar 2.3 adalah graf  $G$  dan graf  $I$  adalah spanning dari subgraf dari subgraf  $G$ .

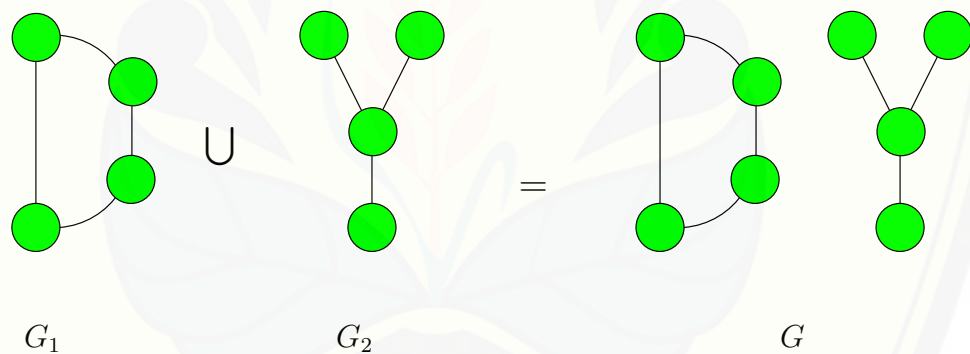
Gabungan dari dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  dan dinotasikan dengan  $G_1 \cup G_2$ , didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik  $V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi

$E(G_1) \cup E(G_2)$  (Chartrand dan Ollermann, 1993:29).



Gambar 2.3 Graf  $G$ , Subgraf  $G$ , dan Spanning Subgraf  $G$

Pada Gambar 2.4, graf  $G$  merupakan gabungan graf  $G_1$  dan  $G_2$  yaitu  $G = G_1 \cup G_2$ .



Gambar 2.4 Contoh gabungan graf

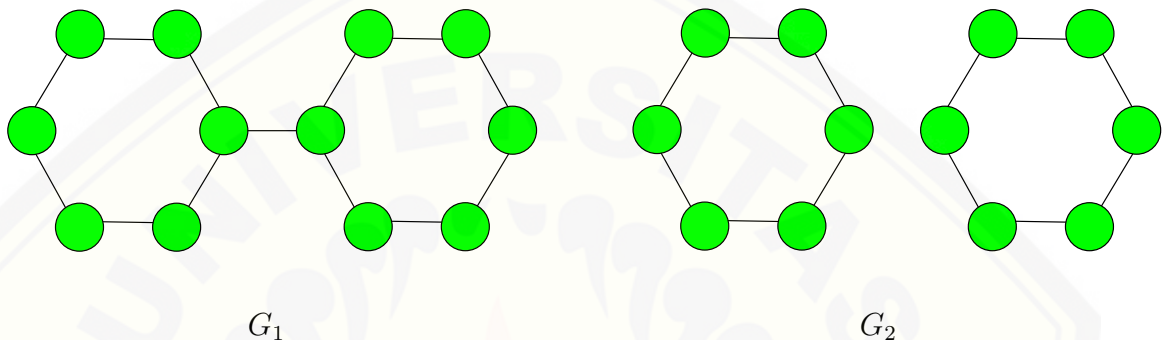
## 2.2 Jenis-Jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori bergantung pada sudut pandang pengelompokannya.

Berdasarkan hubungan tiap titik dalam graf maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu:

1. Graf terhubung (*connected graph*)
2. Graf tak terhubung (*disconnected graph*)

Suatu graf dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap pasang titik di  $G$  dihubungkan dengan suatu *path*. Jika tidak terdapat titik di  $G$  yang dihubungkan dengan suatu *path* maka graf  $G$  dikatakan tidak terhubung (*disconnected*). Contoh graf terhubung dan graf tak terhubung dapat dilihat pada gambar 2.5



Gambar 2.5 Graf terhubung dan graf tak terhubung

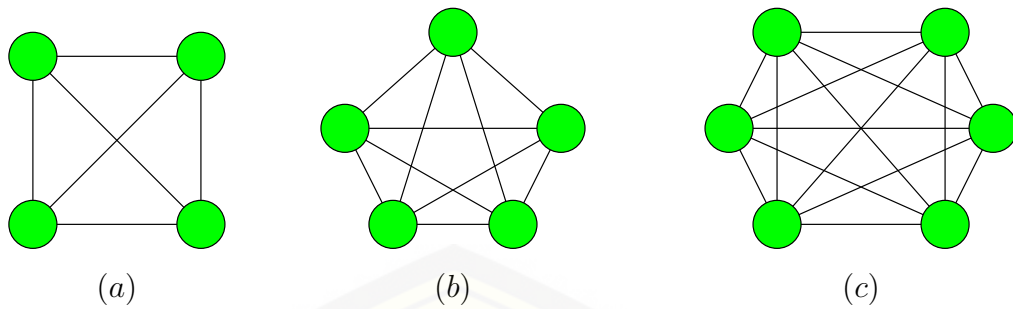
### 2.3 Graf Khusus

Graf khusus dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis, diantaranya graf lengkap, graf regular, graf bipartit, graf siklus (*cycle*), graf lintasan (*path graph*), graf rantai, graf siklus dengan busur, dan masih banyak yang lainnya. Berikut akan dijelaskan beberapa graf tersebut.

Suatu graf  $G$  dikatakan lengkap jika setiap titik dalam  $G$  terhubung ke setiap titik lainnya dalam  $G$ . Jadi suatu graf lengkap  $G$  pasti terhubung. Graf lengkap dengan  $n$  titik dinotasikan oleh  $K_n$ . Graf  $K_4$ ,  $K_5$ , dan  $K_6$  adalah contoh graf lengkap yang ditunjukkan pada Gambar 2.6.

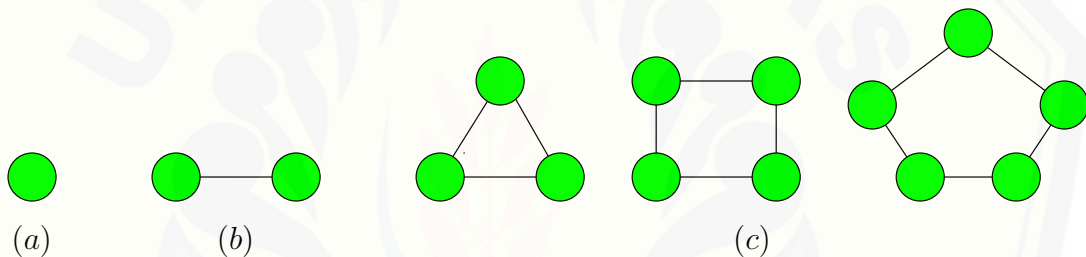
Suatu graf  $G$  adalah regular dengan derajat  $k$  atau regular- $k$  jika setiap titiknya memiliki derajat  $k$ . Dengan kata lain, suatu graf adalah regular jika setiap titiknya memiliki derajat yang sama. Graf terhubung regular-0 adalah graf trivial dengan satu titik dan tanpa sisi. Graf terhubung regular-1 adalah graf





Gambar 2.6 (a). Graf  $K_4$ ; (b). Graf  $K_5$ ; (c). Graf  $K_6$

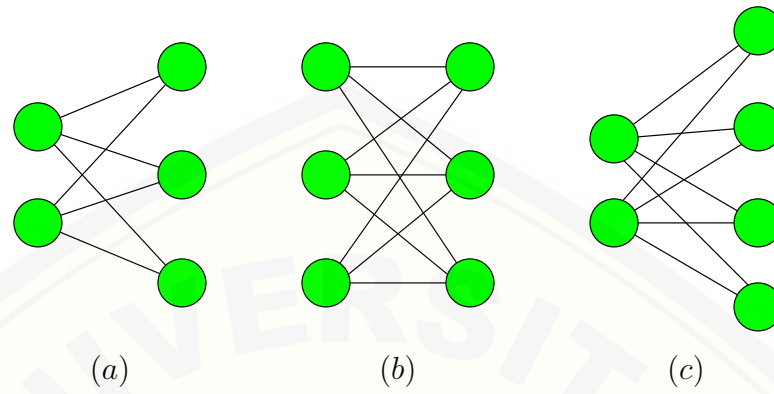
dengan dua titik dan satu sisi yang menghubungkan keduanya. Graf terhubung regular-2 dengan  $n$  titik adalah graf yang terdiri dari suatu siklus- $n$  tunggal. Gambar 2.7 adalah contoh graf regular.



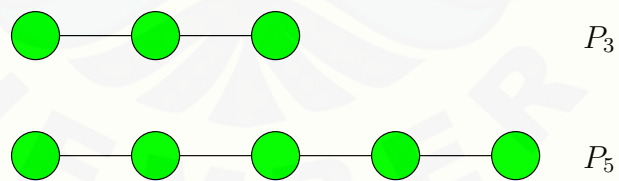
Gambar 2.7 (a). Regular-0; (b). Regular-1; (c). Regular-2

Suatu graf  $G$  disebut bipartit jika titiknya  $V$  dapat dibagi menjadi dua subhimpunan  $M$  dan  $N$  sedemikian sehingga setiap sisi  $G$  menghubungkan suatu titik dari  $M$  ke suatu titik dari  $N$ . Graf bipartit lengkap adalah setiap titik dari  $M$  terhubung ke setiap titik dari  $N$ ; graf ini dinotasikan oleh  $K_{m,n}$  dimana  $m$  adalah jumlah titik dalam  $M$  dan  $n$  adalah jumlah titik dalam  $N$  dan untuk standarisasi kita akan mengansumsikan  $m \leq n$ . Contoh graf bipartit ditunjukkan pada Gambar 2.8.

Graf lintasan atau *path graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan  $n$  titik dinotasikan  $P_n$  dengan  $n \geq 2$ . Contoh graf lintasan  $P_3$  dan  $P_5$  ditunjukkan pada Gambar 2.9.

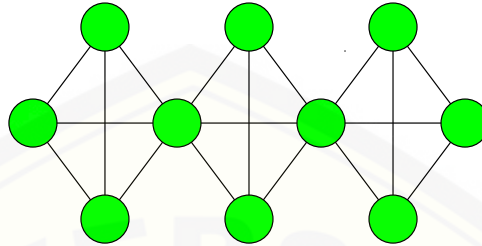


Gambar 2.8 (a).  $K_{2,3}$ ; (b).  $K_{3,3}$ ; (c).  $K_{2,4}$



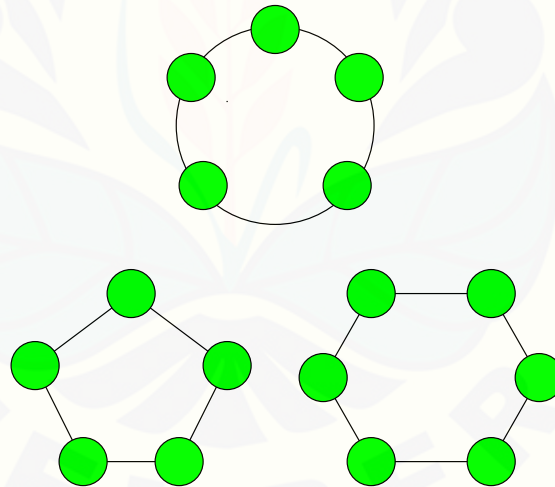
Gambar 2.9 Graf lintasan  $P_3$  dan  $P_5$

Gracelia, R. (2013) menjelaskan bahwa graf rantai didefinisikan sebagai  $kK_n$ -lintasan yaitu graf yang dapat dilihat sebagai graf lintasan, di mana setiap titik pada lintasan berupa graf lengkap  $K_n$ . Contoh graf rantai ditunjukkan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Graf rantai  $3K_4$ -lintasan

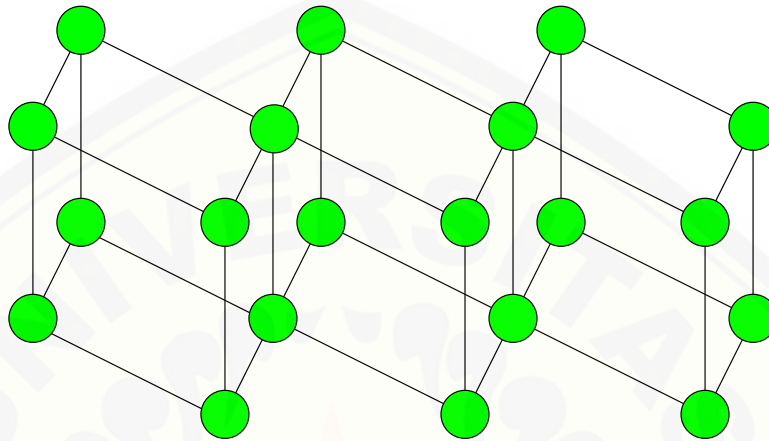
Graf siklus (*Cycle*) adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf siklus dengan  $n$  simpul dilambangkan dengan  $C_n$ . Gambar 2.11 adalah contoh graf siklus.



Gambar 2.11 Graf siklus

Pada penelitian ini graf prisma merupakan suatu graf regular yang diperoleh dari hasil kali Cartesius graf lintasan (*path*) di 2 titik dan graf lingkaran (*cycle*) di setiap titiknya. Shackle dari graf prisma dinotasikan dengan  $Shack (P_{2,t}, P_2, n)$

dimana  $e = 1$  yaitu 1 sisi yang digunakan bersama-sama oleh graf  $(P_{c_a}^2)$  yang pertama dan graf  $(P_{2,t})$  yang kedua, begitu pula oleh  $(P_{2,t})$  yang kedua dan graf  $(P_{2,t})$  yang ketiga, dan seterusnya. Jadi, shackle ini termasuk kategori shackle sisi karena ada 1 sisi yang digunakan oleh dua buah graf  $(P_{2,t})$ . Contoh graf *Shack*  $(P_{2,t}, P_2, n)$  dapat dilihat pada Gambar 2.12.

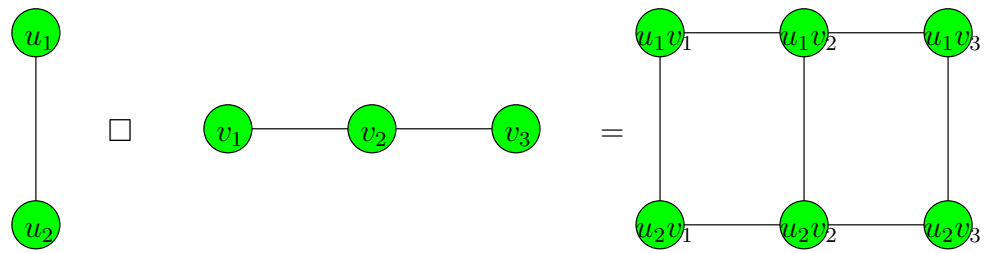


Gambar 2.12  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$

#### 2.4 Operasi Graf

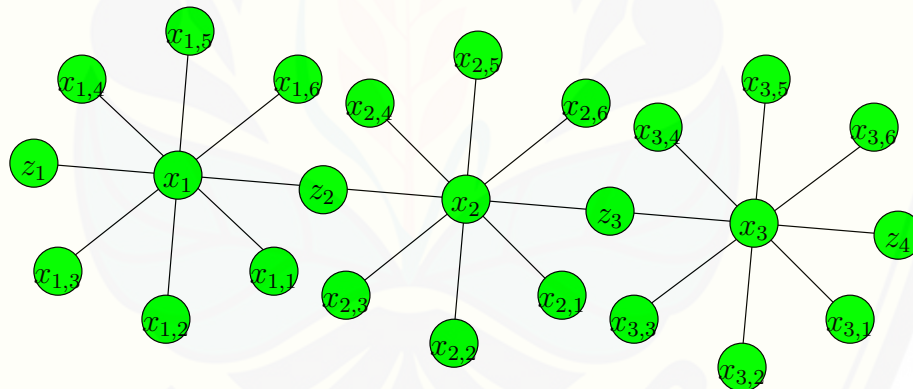
Operasi graf adalah suatu teknik untuk menghasilkan graf baru dengan cara melakukan operasi pada dua graf atau lebih. Dalam penelitian ini, operasi graf yang digunakan yaitu perkalian katesius dan shackle.

Perkalian kartesius dari  $G_1$  dan  $G_2$  ditulis  $G = G_1 \times G_2$  adalah graf dengan  $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik pada  $(v_1, v_2)$  dan  $(u_1, u_2)$  dari  $G$  terhubung langsung (adjacent) jika hanya jika  $u_1 = v_1$  dan  $(u_2, v_2) \in E(G_2)$  atau  $u_2 = v_2$  dan  $(u_1, v_1) \in E(G_1)$ . (Harary, 1994)



Gambar 2.13 Perkalian Cartesius

Istilah lain dari shackle adalah belenggu yang berarti sesuatu yang mengikat. Graph Shackle dari  $G_1, G_2, \dots, G_k$  dinotasikan dengan  $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$  merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf  $G_1, G_2, \dots, G_k$  sedemikian hingga untuk setiap  $1 \leq i, j \leq k$  dengan  $|i - j| \leq k - 1, G_i, G_{i+1}$  tepat satu titik yang sama, disebut *vertex linkage* dimana  $k - 1$  linkage titik semua berbeda. Graf shackle ada 2 yaitu shackle titik dan shackle sisi (Maryati,2010). Gambar 2.14 adalah contoh graf  $Shack(S_m, n)$  yang merupakan salah satu contoh shackle titik.



Gambar 2.14 Graf shack ( $S_m, n$ )

## 2.5 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Fungsi sering kali dikenal dengan pemetaan. Secara umum fungsi "f" dari himpunan "A" ke himpunan "B", ditulis dengan notasi  $f : A \rightarrow B$  adalah aturan pemetaan yang menghubungkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota

$B$ . Himpunan  $A$  yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam  $f$ , disebut *domain*  $f$  dan dapat dinyatakan sebagai  $D_f$ . Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa kata, orang atau objek lain, namun sering kali yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Himpunan  $B$  yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam  $f$ , disebut *range*  $f$  dan dinyatakan sebagai  $R_f$ . Jenis-jenis fungsi diantaranya fungsi genap, fungsi ganjil, fungsi injektif, fungsi surjektif, fungsi bijektif, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi modulus, fungsi tangga, dan fungsi konstan.

Menurut Susilo (2012:115), ada tiga fungsi khusus yaitu:

### 1. Fungsi Injektif

Suatu fungsi  $f : X \rightarrow Y$  disebut fungsi (pemetaan) injektif jika dan hanya jika untuk setiap  $x_1, x_2 \in X$  berlaku apabila  $f(x_1) = f(x_2)$  maka  $x_1 = x_2$ , yaitu bila dua elemen dalam domain mempunyai bayangan (peta) yang sama, maka kedua elemen itu adalah elemen yang sama. Secara simbolis dapat dinyatakan:

$f$  adalah fungsi injektif  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Secara ekivalen, juga dapat dinyatakan bahwa:

$f$  adalah fungsi injektif  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

yaitu bila dua elemen dalam domain adalah dua elemen yang tidak sama, maka bayangan (peta) kedua elemen itu juga tidak sama.

### 2. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi  $f : X \rightarrow Y$  disebut fungsi (pemetaan) surjektif jika dan hanya jika kisaran dari fungsi  $f$  tersebut sama dengan kodomain dari fungsi  $f$ , yaitu  $f(X) = Y$ . Dengan perkataan lain, fungsi  $f : X \rightarrow Y$  adalah fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap  $y \in Y$  terdapat  $x \in X$  sedemikian sehingga  $y = f(x)$ , yaitu setiap elemen dalam kodomain mempunyai prabayangan (prapeta). Secara simbolis dapat dinyatakan:

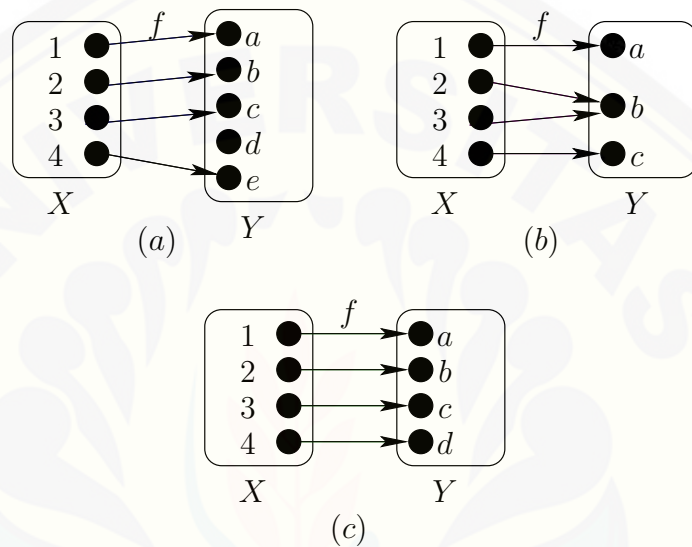
$f$  adalah fungsi surjektif  $\Leftrightarrow (\forall y \in Y) (\exists x \in X) y = f(x)$ .

### 3. Fungsi Bijektif

Suatu fungsi  $f : X \rightarrow Y$  disebut fungsi (pemetaan) bijektif jika dan hanya

jika fungsi  $f$  tersebut adalah fungsi yang injektif dan sekaligus surjektif. Pada fungsi bijektif, setiap elemen dalam domain mempunyai tepat satu bayangan dan setiap elemen dalam kodomain juga mempunyai tepat satu prabayangan. Oleh karena itu, fungsi bijektif seringkali juga disebut korespondensi satu-satu.

Contoh dari ketiga fungsi khusus tersebut adalah dapat dilihat pada Gambar 2.15.



Gambar 2.15 Fungsi-fungsi khusus: (a) injektif; (b) surjektif; (c) bijektif

Barisan Aritmatika adalah barisan bilangan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu dan mempunyai beda atau selisih yang tetap antara dua suku barisan yang berurutan. Sebagai contoh yaitu :

(a)  $5, 10, 15, 20, 25, \dots$

(b)  $23, 20, 17, 14, 11, \dots$

Barisan (a) mempunyai beda,  $b = 5$ . Barisan (a) disebut barisan aritmetika naik karena nilai suku-sukunya makin besar. Barisan (b) mempunyai beda,  $b = -3$ . Barisan (b) disebut barisan aritmetika turun karena nilai suku-sukunya makin kecil. Suatu barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku

yang berurutan adalah tetap. Nilai untuk menentukan suku ke- $n$  dari barisan aritmetika. perhatikan kembali contoh barisan  $(a)$ . 5, 10, 15, 20, 25,  $\dots$ . Misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  adalah barisan aritmetika tersebut maka

$$U_1 = 5 = 5 + 5(0)$$

$$U_2 = 10 = 5 + 5 = 5 + 5(1)$$

$$U_3 = 15 = 5 + 5 + 5 = 5 + 5(2)$$

$\dots$

$$U_n = 5 + 5(n - 1)$$

Secara umum, jika suku pertama  $(U_1) = a$  dan beda suku yang berurutan adalah  $b$  maka dari rumus  $U_n = 5 + 5(n - 1)$  diperoleh 25 adalah  $a$  dan 5 adalah  $b$ . Oleh sebab itu, suku ke- $n$  dapat dirumuskan

$$U_n = a + b(n - 1)$$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun.

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  disebut barisan aritmatika, jika  $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$ .

## 2.6 Partisi

Partisi dari sebuah himpunan  $A$  merupakan sebuah keluarga himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan tak kosong dari  $A$  yang saling asing (*disjoint*) satu sama lain dan gabungan dari semua himpunan bagian tersebut akan kembali membentuk himpunan  $A$ . Misalkan terdapat sebuah keluarga himpunan  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  maka keluarga himpunan tersebut dikatakan partisi dari himpunan  $A$  apabila  $\forall_{i,j} \in 1, 2, 3, n, i \neq j$  maka  $A_i \cap A_j = \phi$  dan  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ . (Prihandoko, 2003).

## 2.7 Pelabelan Graf

### 2.7.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan bijektif yang memetakan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. Fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. Jadi, fungsi yang memetakan himpunan elemen pada graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi



bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dilabeli dengan bilangan bulat positif yang berbeda.

### 2.7.2 Pelabelan Super- $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering

Gutiérrez dan Lladó (2005) menyatakan bahwa pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  pada graf  $G$  dengan  $v$  titik dan  $e$  sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  dengan sifat bahwa setiap subgraf dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$  dimana  $H$  juga subgraf dari  $G$  mempunyai total label  $\omega(H)$  yang berbeda,  $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ . Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$ -antimagic super jika himpunan titik  $V(G)$  merupakan pemetaan bijektif  $f$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ .

Pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic merupakan sebuah kombinasi dari pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic dan selimut  $\mathcal{H}$ . Menurut Dafik (2014) pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic graf  $G$  adalah pelabelan total  $\lambda$  dari  $V(G) \cup E(G)$  pada bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup E(G)|\}$ , untuk setiap subgraf  $H$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  dimana  $\sum H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$  merupakan barisan aritmatika. Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  antimagic super jika  $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, \dots, |V|\}$ .

Dapat diartikan bahwa pelabelan selimut super  $(a, d)$ -antimagic total pada sebuah graf  $G = (p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total selimut dengan fungsi total  $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot selimut terkecil dan  $d$  batas atas nilai beda. Jika  $G$  memuat suatu selimut- $\mathcal{H}$ , maka pelabelan total  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super dikatakan *pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super* (Inayah, 2013).

### 2.7.3 Lemma untuk batas atas $d$

◇ **Lemma 2.7.1.** *Jika sebuah graf  $G(V, E)$  adalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  – antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk  $s = |H_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$

**Bukti.**  $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$  dan  $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$ . Misalkan graf  $(p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering dengan fungsi total  $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot covering sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot covering terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \\ (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\ &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\ &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left( \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} \right) \\
 &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H) p_H + (q_G - q_H) q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H) p_H + (q_G - q_H) q_H}{(s - 1)}
 \end{aligned}$$

Persamaan diatas membuktikan bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H) p_H + (q_G - q_H) q_H}{s - 1}$  jika graf  $G$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering dari berbagai famili graf (Dafik, 2007).  $\square$

## 2.8 Partisi pada Pelabelan Graf

Untuk mengkonstruksi pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super pada sebuah graf dapat diterapkan teknik partisi dari himpunan bilangan bulat dengan menetapkan  $d$ . Misalkan  $n, c$  merupakan bilangan bulat positif dengan  $n$  adalah banyaknya selimut,  $c$  adalah banyaknya titik dalam suatu subgraf. Partisi  $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$  dari himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, cn\}$  adalah partisi pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic bila sebanyak  $n$  kolom dan  $c$  baris dengan  $n \geq 2$  jumlah bilangan-bilangan sebanyak  $c$  baris untuk masing-masing kolom berbentuk barisan aritmatik dengan beda  $d$  dan  $k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Jika partisi bilangan bulat dinotasikan  $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$  maka  $\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$  adalah jumlah bilangan pada  $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ ,  $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) \oplus b$ , dengan  $b$  sembarang konstanta adalah hasil penjumlahan  $b$  dengan masing-masing elemen pada  $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ . Jika terdapat partisi dengan beda  $d$  maka pasti ada partisi dengan beda  $-d$  (Baca dkk, 2013).

Terdapat beberapa partisi yang sudah ditemukan oleh Azizah (2016) diantaranya menghasilkan  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$  dengan  $d = m$ ,  $d = m^2$ ,  $d = \frac{m}{2}$  dan Agustin (2016)  $d = -m$ ,  $d = -m^2$ ,  $d = \frac{-m}{2}$  untuk yang disajikan dalam Lemma. Adapun Lemma tersebut adalah sebagai berikut:

**Lema 2.8.1.** *Diberikan  $n$  and  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \{(i-1)n+k, 1 \leq i \leq m\}$*

membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_1 = m$

**Bukti.** Dengan perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  maka  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \left\{ \frac{m^2n-nm}{2} + mk \right\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \left\{ \frac{m^2n-nm}{2} + m, \frac{m^2n-nm}{2} + 2m, \dots, \frac{m^2n-nm}{2} + (n-1)m, \frac{m^2n-nm}{2} + nm \right\}$ . Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_1 = m$ .  $\square$

**Lema 2.8.2.** Diberikan  $n$  and  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \{(k-1)m+i; 1 \leq i \leq m\}$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_2 = m^2$ .

**Bukti.** Dengan perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  maka  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \left\{ \frac{(m-m^2)}{2} + m^2k \right\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \left\{ \frac{(m-m^2)}{2} + m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + 2m^2, \dots, \frac{(m-m^2)}{2} + (n-1)m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + nm^2 \right\}$ . Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_2 = m^2$ .  $\square$

**Lema 2.8.3.** Diberikan  $n$  and  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \begin{cases} \{(i-1)n + \frac{k+1}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{\frac{k-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{k+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{(i-1)n + \frac{k}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_3 = \frac{m}{2}$ .

**Bukti.** Dengan perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  maka  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \left\{ \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}k \right\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \left\{ \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + m, \dots, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m(n-1)}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{mn}{2} \right\}$ . Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_3 = \frac{m}{2}$ .  $\square$

**Lema 2.8.4.** Misal  $n$  dan  $m$  bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda  $d$ . Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) = \{1 + ni - k; 1 \leq i \leq m\}$  membentuk baris aritmatika dengan beda  $d_4 = -m$ .

**Bukti.** Melalui proses perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_4}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m) + m - mk \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m), \frac{n}{2}(m^2 + m) - m, \frac{n}{2}(m^2 + m) - 2m, \dots, \frac{n}{2}(m^2 + m) - m(n-1) \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_4 = -m$ .

□

**Lema 2.8.5.** Misal  $n$  dan  $m$  bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda  $d$ . Untuk  $\{k = 1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) = \{mn + i - mk; 1 \leq i \leq m\}$  membentuk baris aritmatika dengan beda  $d_5 = -m^2$ .

**Bukti.** Melalui proses perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_5}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - 2m^2, \dots, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2(n-1) \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_5 = -m^2$ . □

**Lema 2.8.6.** Misal  $n$  dan  $m$  bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda  $d$ . Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$ . jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) = \begin{cases} \left\{ ni - \frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ ganjil} \right\} \\ \left\{ ni - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ ganjil} \right\} \\ \left\{ ni + \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ genap} \right\} \\ \left\{ ni - \frac{k}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ genap} \right\} \end{cases}$$

membentuk baris aritmatika dengan beda  $d_6 = \frac{-m}{2}$ .

**Bukti.** Melalui proses perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_6}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - m, \dots, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}(n - 1), \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan  $d_6 = \frac{-m}{2}$ .

□

Tabel 2.1 Klasifikasi partisi  $d = m$ .

$i \setminus k$	1	2	...	$n$	
1	1	2	...	$n$	
2	$n + 1$	$n + 2$	...	$n + n$	
3	$2n + 1$	$2n + 2$	...	$2n + n$	
...	...	...	...	...	
$m$	$(m - 1)n + 1$	$(m - 1)n + 2$	...	$(m - 1)n + n$	+
	$a$	$a + m$	...	$a + (n - 1)m$	$d = m$

Tabel 2.2 Klasifikasi partisi  $d = m^2$ .

$i \setminus k$	1	2	3	4	...	$n$	
1	1	$m + 1$	$2m + 1$	$3m + 1$	...	$(n - 1)m + 1$	
2	2	$m + 2$	$2m + 2$	$3m + 2$	...	$(n - 1)m + 1$	
3	3	$m + 3$	$2m + 3$	$3m + 3$	...	$(n - 1)m + 1$	
...	...	...	...	...	.....	...	
$m$	$m$	$m + m$	$2m + m$	$3m + m$	...	$(n - 1)m + 1$	+
	$a$	$a + m^2$	$a + 2m^2$	$a + m^3$	...	$a + (n - 1)m^2$	$d = m^2$

Tabel 2.3 Klasifikasi partisi  $d = \frac{m}{2}$ .

$i \setminus k$	1	2	3	4	5	
1	1	4	2	5	3	
2	8	6	9	7	10	
3	11	14	12	15	13	
4	18	16	19	17	20	+
	38	40	42	44	46	$d = \frac{m}{2}$

Suatu partisi yang didefinisikan dengan  $\mathcal{P}_{m,d}^n(k)$  dapat dibentuk dengan mengkombinasikan partisi lain sehingga diperoleh beda  $d$  yang bervariasi. Konstruksi partisi tersebut mengikuti fakta di bawah ini:

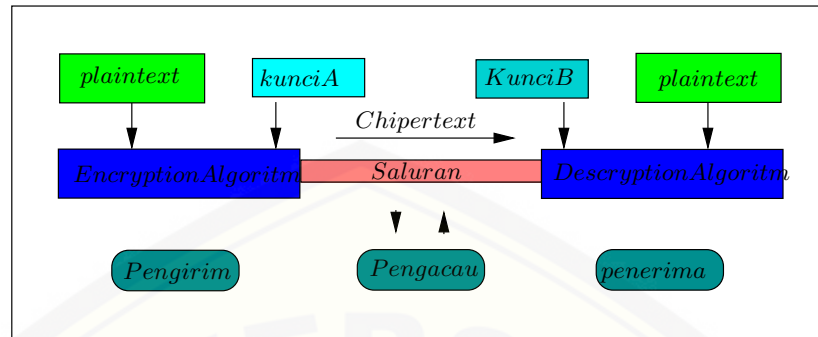
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m,d}^n(k) &= \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(i, k) \cup (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(i, k) \oplus (nm_1)); \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ \sum \mathcal{P}_{m,m}^n(k) &= \sum \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(k) + \sum (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(k) \oplus nm_1), \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ &= \sum \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(k) + \sum (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(k) \oplus nm_1m_2), \text{ } 1 \leq i \leq m \} \end{aligned}$$

dimana  $m = m_1 + m_2$  dan  $d = d_1 + d_2$  (Baca dkk, 2013).

## 2.9 Aplikasi Graf

Aplikasi pada graf meliputi berbagai macam, yaitu dalam dalam transparansi, komunikasi, ikatan kimia, desain arsitektur. Untuk aplikasi graf yang lain adalah kristografi, pengaturan jadwal, astronomi dan sebagainya. Aplikasi graf mulai berkembang lagi pada pengembangan *chipertext*. *Chipertext* merupakan proses pengembangan dari *cryptosystem*. *Chipertext* adalah kalimat rahasia yang dikembangkan. Sedangkan *cryptosystem* adalah suatu fasilitas yang mengkonversikan *plaintext* ke dalam bentuk *chipertext* dan sebaliknya. Di dalam *cryptosystem* menyangkut *cryptography* yang merupakan skema yang mungkin untuk *encrypt* dan *decrypt* (kak.2015). *Encrypt* adalah proses perubahan *plaintext*(pesan yang akan dikirim) menjadi *chipertext*(pesan rahasia) sedangkan *decrypt* adalah proses untuk memperoleh kembali *plaintext* dari *chipertext*. Dalam proses ini dibutuhkan sebuah kunci rahasia untuk mengatur beberapa atau semua yang digunakan dalam proses *encrypt* maupun *decrypt*. Secara umum kunci-kunci yang digunakan untuk proses pengenkripsian dan pendeskripsian tidak perlu iden-

tik dan tergantung pada sistem yang digunakan (Pearson,2006).Berikut adalah alur kerja pada pengembangan *chipertext* yang ditunjukkan pada gambar 2.16



Gambar 2.16 Alur Kerja Kriptografi

Terdapat banyak metode yang dapat digunakan untuk memperoleh *chipertext* seperti *affine chipers*, *vigenere chipers*, *the one – time pad*, *Caesar system*, dan sebagainya. Metode yang digunakan pada penelitian ini merupakan aplikasi pelabelan total dekomposisi. Metode ini merujuk pada *Caesar system* yaitu menggunakan sistem (mod 26) dengan aturan sebagai berikut:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

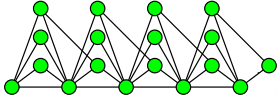
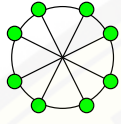
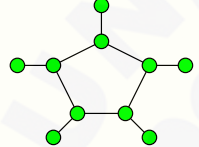
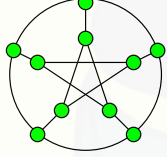
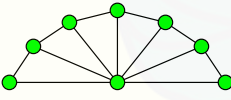
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

### 2.10 Hasil Pelabelan Selimut $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Super pada Beberapa Graf

Pada bagian ini disajikan beberapa pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super pada beberapa jenis graf yang akan digunakan sebagai rujukan pada penelitian ini. Adapun ringkasan pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf tunggal yang dapat dilihat pada Tabel 2.4.



Tabel 2.4: Ringkasan pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf tunggal.

Notasi Graf	$a$	$d$	Hasil
$SBt_n$ 	$36n + 84$	$d = 96$  (Rizky, P.,2014)	$(a, d) - Bt_3 + 2e -$  -
$W_n$ 	$3hn + 5$	$d = 1$  (Inayah,2009)	$(a, d) - C_3 -$  -
$S_n$ 	$13n + 4$	$d = 1$  (Ismiyati,2013)	$(a, d) - K_{1,3} -$  -
$GP_{n,k}$ 	$13n + 4 - \frac{n}{2}$	$d = 2$  (Ismiyati,2013)	$(a, d) - K_{1,3} -$  -
$F_n$ 	$12 + 4n + \frac{n}{2}$	$d = 4$  (Ismiyati,2013)	$(a, d) - C_3 -$  -

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu menurunkan aksioma atau teorema yang sudah ada kemudian di terapkan dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada *shackle* dari graf prisma. Langkah yang dilakukan terlebih dahulu pada penelitian ini adalah menentukan nilai beda  $(d)$ , selanjutnya nilai beda  $(d)$  tersebut diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada *shackle* dari graf prisma. Jika terdapat super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada *shackle* dari graf prisma, maka dapat dirumuskan pola super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada *shackle* dari graf prisma dengan menggunakan metode partisi untuk menentukan pola umumnya.

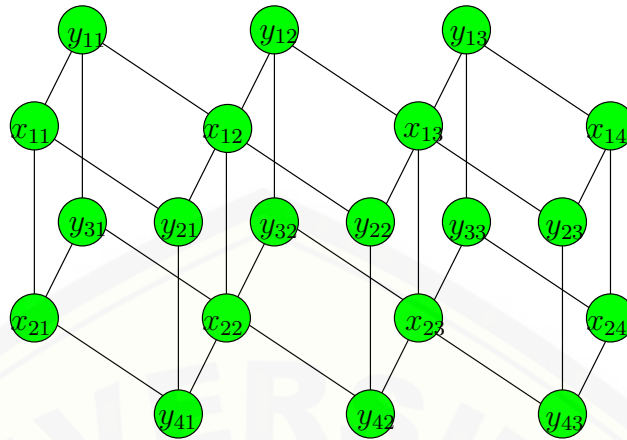
### 3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian dimaksudkan untuk memberikan pandangan mengenai penelitian ini. Adapun rancangan penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

#### 3.2.1 Penotasian Titik dan sisi

Adapun objek dari penelitian ini adalah *shackle* dari graf prisma. *Shackle* dari graf prisma merupakan graf yang terbentuk dari beberapa graf prisma. *Shackle* dari graf prisma dinotasikan dengan  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n \geq 2$ .  $e = 1$  merupakan 1 sisi yang digunakan bersama-sama oleh graf prisma yang pertama dan graf prisma yang kedua, 1 sisi dari graf prisma yang kedua juga digunakan bersama-sama dengan graf prisma yang ketiga, dan seterusnya. Graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$  yang memiliki himpunan titik  $V(Shack(P_{2,t}, P_2, n)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n + 1\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(Shack(P_{2,t}, P_2, n)) = \{u_{1,j}u_{2,j}; 1 \leq j \leq n + 1\} \cup \{e_{l,j}; 1 \leq l \leq r, 1 \leq j \leq n\}$  maka didapat

kan  $|V(Shack(P_{2,t}, P_2, n))| = 2(n+1) + mn$  dan  $|E(Shack(P_{2,t}, P_2, n))| = n+1 + rn$ .



Gambar 3.1 Penotasian pada  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$

### 3.2.2 Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada graf prisma adalah:

a Label titik berbeda semua

Label titik untuk pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada *shackle* dari graf prisma ialah fungsi bijektif dari himpunan sisi ke bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah sisi;

b Label sisi berbeda semua

Label sisi untuk pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada *shackle* dari graf prisma ialah fungsi bijektif dari himpunan titik pada *shackle* graf lengkap ke bilangan bulat dari banyaknya sisi ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi;

c Bobot total selimut

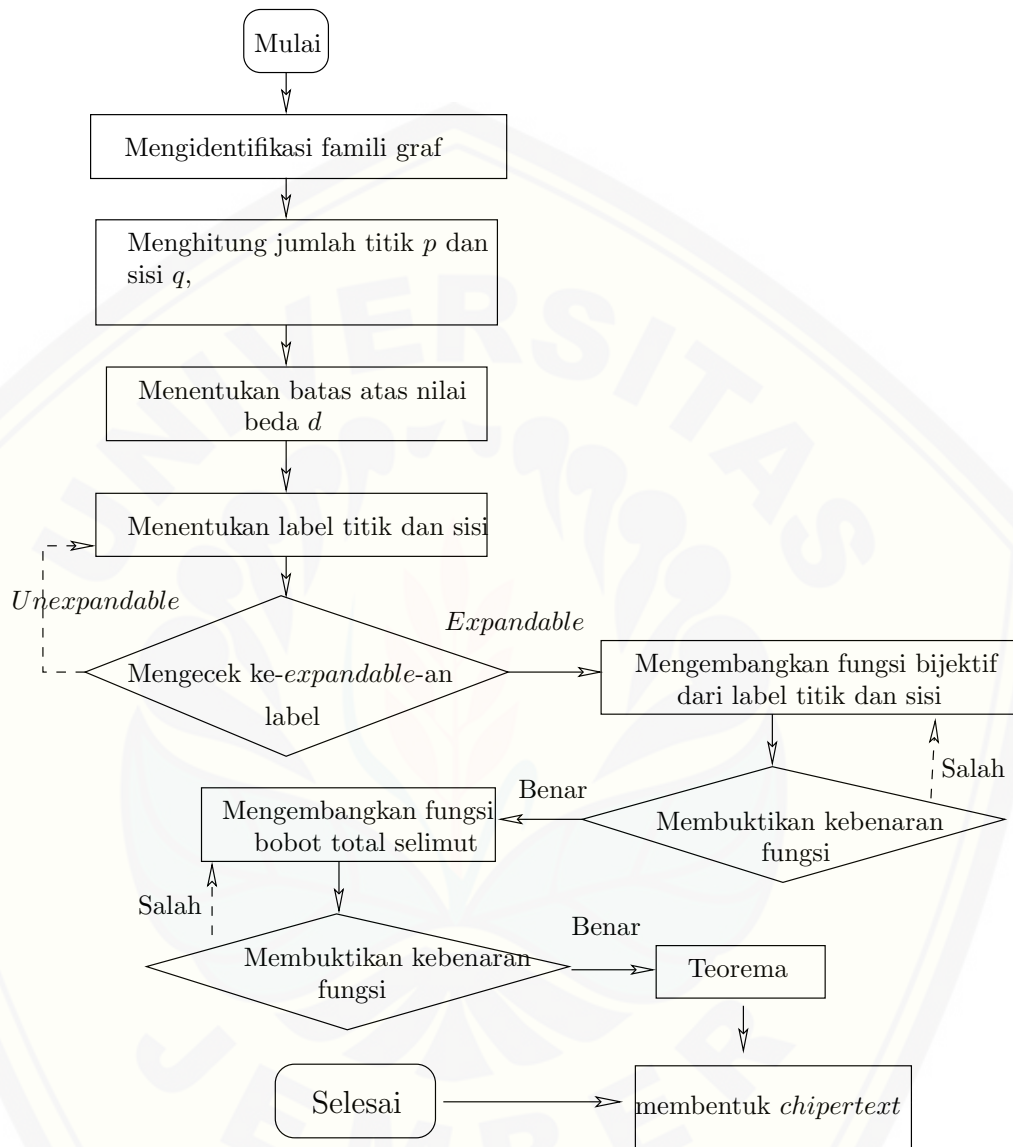
Bobot total selimut ialah jumlah label titik dan label sisi pada setiap selimut. Dimana pada penelitian ini, bobot total selimut harus membentuk barisan aritmatik;

### 3.2.3 Teknik penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ . Dengan teknik penelitian sebagai berikut:

- a. mengidentifikasi famili graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ;
- b. menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ;
- c. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ;
- d. menentukan label titik dan label sisi pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$  dengan menggunakan metode partisi;
- e. apabila label titik dan label sisi berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable*;
- f. menentukan fungsi bijektif label titik dan label sisi pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ;
- g. mengembangkan fungsi bobot selimut pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ;
- h. membuktikan kebenaran fungsi pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ;
- i. menemukan teorema;
- j. membentuk *chipertext* dengan cara mengaplikasikan pola pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ;

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic super* dengan berbagai nilai awal ( $a$ ) serta nilai beda ( $d$ ) yang ditentukan. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam diagram alir pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Diagram Alir Penelitian

Adapun pada penelitian ini langkah-langkah untuk membentuk *chipertext* sebagai berikut:

- a. Menentukan graf, pilihlah graf yang memiliki sisi lebih dari banyaknya karakter *plaintext*, misalkan 26.
- b. Melabeli titik dan sisi menggunakan super  $(a, d) - H - antimagic$  total *covering*.
- c. Mengeliminasi sisi yang memiliki label  $f_{uv} > |V| + 26$ .
- d. Membuat graf pohon dengan utama merupakan salah satu label titik, sedangkan akar selanjutnya mengikuti pola graf. Sisi yang sudah dieliminasi tidak perlu digunakan.
- e. Mencantumkan label sisi pada graf pohon sesuai pelabelan pada graf yang digunakan. Mengubah bilangan tersebut menjadi mod 26.
- e. Memasangkan setiap karakter *plaintext* dengan sisi pada graf pohon. Pemasangan diurutkan dari kiri mulai dari layer teratas.
- f. Membuat aturan untuk mentransformasi bilangan modulo 26 ke karakter yang digunakan sebagai *ciphertext*, aturan yang digunakan adalah *caesar system*.
- g. Membuat tabel yang terdiri dari *plaintext*, label sisi (mod 26) yang bersesuaian dengan *plaintext*, dan *ciphertext* yang bersesuaian dengan aturan *caesar system*.

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

- graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$  memiliki himpunan titik  $V_1 = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n + 1\}$  dan  $V_2 = \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  serta himpunan sisi  $E_1 = \{u_{1,j}u_{2,j}; 1 \leq j \leq n + 1\}$  dan  $E_2 = \{e_{l,j}; 1 \leq l \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ . Sedangkan jumlah titik dan sisi  $|V_1| = 2(n + 1)$  dan  $|V_2| = mn$  maka  $pG = |V_1| + |V_2|$  dan jumlah sisi  $|E_1| = n + 1$  dan  $|E_2| = qn$  maka  $qG = |E_1| + |E_2|$  sedangkan  $pH$  dan  $qH$  merupakan selimut ketika  $n = 1$ .
- batas atas dari super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* pada *shackle* dari graf prisma ( $shack(P_{2,t}, P_2, n)$ ) adalah  $d \leq p_H^2 - 2p_H + q_H^2 - q_H$ .
- Misalkan  $m, n \geq 3$ , graf  $G = shack(P_{2,t}, P_2, n)$  mempunyai super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* dengan nilai beda  $d = \frac{m_1}{3} - \frac{m_2}{3} + \frac{m_3}{2} - \frac{m_4}{2} + m_5^2 - m_6^2 + m_7 - m_8 + \frac{r_1}{3} - \frac{r_2}{3} + \frac{r_3}{2} - \frac{r_4}{2} + r_5^2 - r_6^2 + r_7 - r_8 + 10$ .
- Dari pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* pada Graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$  dapat dibentuk aplikasi *ciphertext* alfabet dengan aturan pengkodean sebagai berikut.

Tabel 5.1 *Chiphertext* alfabet dari graf  $shack(P_{2,8}, P_2, 4)$  dengan  $d=12$ .

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>Chiphertext</i>	B	I	O	W	L	V	C	H	P	Z	M	S	D	G
<i>Plaintext</i>	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	sp	
<i>Chiphertext</i>	Q	Y	N	T	E	J	R	X	K	U	A	F	@	

*Stream chiphertext* merupakan salah satu jenis dari kriptografi simetris yang *plainteks* tidak dipotong menjadi blok-blok namun *enkripsi* dan kuncinya dilakukan secara mengalir sehingga *stream chiphertext* ini disebut juga dengan sandi aliran. *Stream chiphertext* menggunakan fungsi *chaos*. Diberikan *plainteks*  $x_1, x_2, x_3, \dots$  dengan  $x_i \in \mathbb{Z}_{26}$  dan kunci  $k_1, k_2, \dots, k_n$  dengan  $k_i \in \mathbb{Z}_{26}$ . *Chiphertext*  $y_1, y_2, y_3, \dots$  diperoleh dengan melakukan penjumlahan modulo 26 sehingga sebagai berikut  $y_i = x_i + k_i \pmod{26}$ .

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anatimagic total covering pada shackle dari graf prisma karena yang ditemukan pada graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$  konektif saja serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anatimagic total covering pada shackle dari graf prisma untuk graf  $shack(P_{2,t}, P_2, n)$  diskonektif.



## DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, I, H. 2016. *Super Complete-Antimagicness of amalgamation of Complete Graf*. Working Paper. CGANT-Universitas Jember.
- Azizah, Y.N. 2016. *Super  $(a, d)$ - $A_p^o$ -Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Antiprisma Untuk Pengembangan Ciphertext dan Ketrampilan Berfikir Tingkat Tinggi*. Tidak dipublikasikan. Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Chartrand. G. dan Oellermann. 1993. *applied and Algorithmic Graph Theory*. Newyork. MacGraw-Hill, Inc.
- Citra, S., Agustin, I, H., dan Dafik, M. 2014. *Super  $(a, d)$  –  $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill*. CGANT-Universitas Jember. Vol. 1(1): 1-8.
- Dafik, M., Ryan, J., and Baca, M. 2008. *Antimagic labeling of union of stars*. The Australian Journal of Combinatorics, 42, 35-44.
- Dafik, M. 2014. *Batas Atas  $d$  dari Sebuah graf yang memiliki super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ - Antimagic Covering*. Working Paper. Jember: FKIP Unej.
- Dafik, M. 2015. *Pidato Ilmiah Pengukuhan Guru Besar*. Jember: Repository Unej.
- Guitierrez and Llado. 2005. *Magic Coverings Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55-451-461.
- Harary, F. 1994. *Graph Theory*. Addison: Wesley.
- Hartfied, N., Ringel, G. 1990. *Pearl in Graph Theory*. San Diego: Academic Press.
- Hartsfield, N., dan Ringel, G. 1994. *Pearl in Graph Theory*. San Diego: Academic Press.
- Inayah, N. 2013. *Pelabelan  $(a, d)$ -Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf*. Desertasi Not Publicated. Bandung: Institut Teknologi Bandung
- Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J., dan Miller, M. 2010. *On  $\mathcal{H}$ -supermagic Labelings for Certains Shakcles and Amalgamations of a*

*Connected Graph*. Jurnal: Utilitas Mathematica 83:333-342

Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit. Buku Tes Ilmu Komputer*. Bandung: Penerbit Informatika.

Purwanto, H., Indriani, G., and Dayanti, E. 2006. *Matematika diskrit*. PT. Ercontara Rajawali Jakarta, 50:157..

Saoni, O. 2003. *Teori Graf*. Serang: Rumah Buku Press.

Sedlacek, J. 1963. *Problem 27 in theory of graphs and Its Aplications*. Proceeding of the Symposium Held in Smolenice Praha. 163, 163-167.

Susilo, F . 2012. *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Yuli, N . 2015. *Supern(a, d) –  $A_p^0$  Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Generalisasi Anti Prisma Untuk Pengembangan ciphertext Dan Keterampilan berpikir Tingkat Tinggi*. Jember: Universitas Negeri Jember.