ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA MODEL TOPOLOGI GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

SKRIPSI

Oleh

Reyka Bella Desvandai

NIM 121810101080

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA MODEL TOPOLOGI GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Reyka Bella Desvandai

NIM 121810101080

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Hasbullah, Ayahanda Toriwan dan Ibunda Wa Ode Agustina Arif Megawati, serta kedua Adikku Rio dan Rara, yang senantiasa mengalirkan kasih sayang, perhatian, dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si., yang dengan sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi;
4. Guru dan dosen-dosenku, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Keluarga Besar Matematika Angkatan 2012 (BATHICS'12) yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman hidup yang tak terlupakan;
6. Teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka dan duka untuk menemukan rumus dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat dalam mengerjakan skripsi ini.;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

HALAMAN MOTTO

"Bersabarlah, karena sesungguhnya Allah tiada menyia-nyiakan pahala orang-orang yang berbuat kebaikan"
(Q.S. Huud : 115)

"Bersemangatlah atas apa yang bermanfaat bagimu, meminta tolonglah pada Allah, janganlah engkau lemah"
(HR. Muslim)

"Karena kalimat yang tersusun rapi dengan bunyi motivasi takkan pernah berpengaruh jika kita tak berani mulai berdiri, melangkahkan kaki."

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Reyka Bella Desvandai

NIM : 121810101080

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Reyka Bella Desvandai

NIM. 121810101080

SKRIPSI

ANALISA HIMPUNAN DOMINASI LOKASI PADA MODEL TOPOLOGI GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

Oleh

Reyka Bella Desvandai
NIM 121810101080

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing 2 : Kusbudiono, S.Si., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada :

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.	Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 19840801 200801 2 006	NIP. 19770430 200501 1 001
Anggota I,	Anggota II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19661012 199303 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya; Reyka Bella Desvandai, 121810101080; 2016: 57 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Terapan ilmu pengetahuan meningkat guna mengantisipasi permasalahan yang ditimbulkan baik secara teori maupun metode yang sesuai salah satunya yaitu menggunakan teori graf. Meskipun umurnya relatif muda yaitu pada tahun 1735 dikenalkan oleh seorang matematikawan terkenal Swiss yang bernama Leonhard Euler, teori graf merupakan cabang matematika diskrit yang memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya yaitu penempatan detektor. Penempatan detektor merupakan salah satu penerapan bidang matematika diskrit yaitu teori graf dengan menggunakan konsep himpunan dominasi lokasi.

Himpunan dominasi lokasi atau dalam istilah asing disebut *locating dominating set* penerapannya dimulai pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi atau *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas mini mum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik. Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder berupa graf-graf khusus dan operasinya. Graf-graf khusus yang digunakan antara lain graf lintasan P_n, graf *fan* F_n, graf parasut PC_n, graf *helm* H_n dan graf roda W_n dan operasi yang digunakan yaitu *joint*, *crown product*, amalgamasi, *shackle* dan *power* graf. Pada penelitian ini dihasilkan beberapa teorema sebagai berikut:

1. **Teorema 4.2.1** Misal G adalah graf khusus berupa graf *helm* H_n untuk $n \geq 3$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah γ_L (H_n)=n.

2. **Teorema 4.2.2** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf *helm* H_n, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka γ_L $(Amal(H_n, v, m)) = n \times m$.

3. **Teorema 4.2.3** Misal G adalah graf hasil operasi *shackle* dari graf *helm* H_n, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka γ_L $(Shack(H_n, v, m)) = n \times m$.

4. **Teorema 4.2.4** Misal G adalah graf hasil operasi *power* graf dari graf roda W_n dan graf *fan* $F_{1,2}$, untuk $n \geq 3$, maka γ_L $(W_n^{F_{1,2}}) = n$.

5. **Teorema 4.2.5** Misal G adalah graf hasil operasi *power* graf dari graf lintasan P_n dan graf *helm* H_m, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka γ_L $(P_n^{H_m}) = m(n-1)$.

6. **Teorema 4.2.6** Misal G adalah graf khusus berupa graf parasut PC_n untuk $n \geq 4$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah γ_L (PC_n)=$\lceil \frac{4n}{5} \rceil$.

7. **Teorema 4.2.7** Misal G adalah graf khusus berupa graf kipas F_n untuk $n \geq 4$ dan $n \neq 5$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah γ_L (F_n)=$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

8. **Teorema 4.2.8** Misal G adalah graf hasil operasi joint dari graf lintasan P_n dan graf helm H_m, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka γ_L $(P_n + H_m) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil + m$.

9. **Teorema 4.2.9** Misal G adalah graf hasil operasi crown product dari graf lintasan P_n dan graf helm H_m, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka γ_L $(P_n \odot H_m) =$

$m \times n$.

10. **Teorema 4.2.10** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf parasut PC_n, untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$, maka γ_L $(Amal(PC_n, v, m)) = (\lceil \frac{4n}{5} \rceil) \times m$.

11. **Teorema 4.2.11** Misal G adalah graf hasil operasi *shackle* dari graf kipas F_n, untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 3$, maka γ_L $(Shack(F_n, v, m)) = \lceil \frac{2mn-2m+2}{5} \rceil$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Prof. Dafik M.Sc., Ph.D. , selaku dosen Penguji I dan Rusli Hidayat, M.Sc., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan teknologi saat ini mengakibatkan munculnya beragam permasalahan. Penerapan ilmu pengetahuan pun semakin meningkat guna mengantisipasi permasalahan yang ditimbulkan baik secara teori maupun metode yang sesuai. Matematika merupakan salah satu ilmu dasar yang banyak diterapkan sebagai solusi dari perkembangan jaman salah satunya yaitu teori graf. Meskipun umurnya relatif muda, teori graf sebagai cabang dari matematika diskrit telah berkembang sangat pesat akhir-akhir ini, baik dalam pengembangan teori maupun aplikasi di berbagai bidang. Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1735 oleh seorang matematikawan terkenal Swiss yang bernama Leonhard Euler. Banyak yang dapat dipelajari dari graf, salah satu diantaranya adalah penempatan detektor. Penempatan detektor merupakan salah satu penerapan bidang matematika diskrit yaitu teori graf dengan menggunakan konsep himpunan domi nasi lokasi.

Himpunan dominasi lokasi atau dalam bahasa asing disebut *locating dominating set*. Menurut Foucaud (2016) penerapan teori himpunan dominasi lokasi dimulai pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. Himpunan dominasi lokasi merupakan perluasan teori *dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* bisa mengcover titik yang ada di sekitarnya dan *adjacent*. *Dominating number* merupakan kardinalitas minimum dari *dominating set* yang disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Berdasarkan sejarah, masalah dominasi telah dipelajari dari tahun 1960, akan tetapi tingkat pengkajian tentang dominasi berkembang dan meningkat secara pesat pada pertengahan 1970-an. Salah satunya yaitu teori tentang himpunan dominasi lokasi. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi atau *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$

memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Penelitian sebelumnya tentang himpunan dominasi lokasi telah banyak dilakukan diantaranya pada jaringan komunikasi komputer, penempatan detektor dan masalah serupa lainnya. Salah satunya yaitu penelitian oleh Agustin (2014) menggunakan teori *dominating set* untuk menghitung jumlah minimum yang menghasilkan beberapa kemungkinan untuk instalasi meletakkan client hub untuk jaringan intranet di Universitas Jember. Kemudian Wardani (2014) juga melakukan penelitian tentang *dominating set* pada beberapa graf khusus dan meng aplikasikan teori *dominating set* pada analisis topologi jaringan *Wide Area Network* (WAN). Selanjutnya penelitian tentang *locating dominating set* oleh Chen *et.al* (2011) yang berjudul "*Identifying codes and locating dominating sets on paths and cycles*". Penelitian terbaru oleh Canoy *et.al* (2014) mencari *locating dominating set* pada *corona dan composition graph*, kemudian Argiroffo (2015) yang berjudul "*A polyhedral approach to locating dominating sets in graph*" serta oleh Foucaud(2016) yang berjudul *"Locating dominating set in twin free graph"*.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka peneliti tertarik untuk menganalisa teori himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus yaitu graf kipas F_n, graf *Helm* H_n, graf parasut PC_n, graf roda W_n dan graf lintasan P_n dengan beberapa operasi graf yaitu *joint*, *crown product*, amalgamasi, *shackle* dan *power* graf. Pada penelitian kali ini jenis graf yang digunakan yaitu graf konektif dan tidak berarah. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada hasil operasi graf khusus, kemudian menentukan titik-titik yang memenuhi syarat himpunan dominasi lokasi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. bagaimana menentukan kardinalitas titik (*order*) dan kardinalitas sisi (*size*) pada graf khusus dan operasinya $P_n \odot H_m$, $Shack(H_n, v, m)$, $P_n + H_m$, $(Amal(H_n, v, m))$, $W_n^{F_{1,2}}$, $P_n^{H_m}$?

b. bagaimana menentukan nilai himpunan dominasi lokasi dari hasil graf khusus

PC_n, F_n, H_n, dan operasinya $P_n \odot H_m$, $(Amal(H_n, v, r))$, $(Amal(PC_n, v, m))$, $Shack(H_n, v, m)$, $Shack(F_n, v, m)$, $P_n + H_m$, $W_n^{F_{1,2}}$, $P_n^{H_m}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan kardinalitas titik (*order*) dan kardinalitas sisi (*size*) pada graf khusus dan operasinya $P_n \odot H_m$, $Shack(H_n, v, m)$, $P_n + H_m$, $(Amal(H_n, v, m))$, $W_n^{F_{1,2}}$, $P_n^{H_m}$;

b. menentukan nilai himpunan dominasi lokasi dari hasil graf khusus PC_n, F_n, H_n dan operasinya $P_n \odot H_m$, $(Amal(H_n, v, r))$, $(Amal(PC_n, v, m))$, $Shack(H_n, v, m)$, $Shack(F_n, v, m)$, $P_n + H_m$, $W_n^{F_{1,2}}$, $P_n^{H_m}$

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

a. menambah pengetahuan dan wawasan baru mengenai teori himpunan dominasi lokasi;

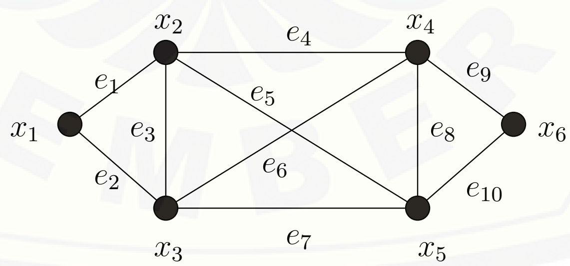
b. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah himpunan dominasi lokasi.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik $(v1, v2)$ dimana $v1, v2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*). V disebut himpunan titik dari G, dan E disebut himpunan sisi dari G. Seringkali kita menuliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G (Hartsfield dan Ringel, 1994). *Vertex* (V) adalah titik pada suatu graf yang dapat dinomori dengan huruf-huruf seperti $\{a, b, c, \ldots, v, w, x, y, z\}$ atau dengan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$ atau dengan menggabungkan keduanya, sedangkan *edge* (E) adalah sisi yang menghubungkan titik-titik (dari titik i ke titik j), sehingga e dapat ditulis sebagai $(v_i,\ v_j)$ atau $e = (v_i v_j)$.

Berdasarkan definisi tersebut maka suatu graf G dimungkinkan tidak mempunyai satu buah sisi $E(G)$ (boleh kosong) namun minimal mempunyai satu buah titik $V(G)$. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial. Secara geometri sebuah graf digambarkan dalam sekumpulan titik (simpul) di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan oleh sekumpulan sisi atau garis. Berikut contoh graf dapat dilihat pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Pada gambar 2.1 graf G merupakan suatu contoh graf dengan $|V(G)| = 6$ dan $|E(G)| = 10$, himpunan titik $V(G) = v_1, v_2, v_3, \cdots, v_6$ dan himpunan sisi $E = e_1, e_2, \cdots, e_{10}$. Jumlah titik pada graf G disebut order dari G dinotasikan $|V(G)|$ sedangkan jumlah sisinya disebut size dari G dinotasikan $|E(G)|$. Graf yang mempunyai order $p = |V(G)|$ dan size $q = |E(G)|$ dapat ditulis (p, q) graf. Suatu graf dengan p buah verteks dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$.

Dua buah titik pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah garis atau sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G. Sedangkan sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Menurut Hartsfield dan Ringel (1994), sebuah titik v_1 dikatakan *incident* dengan sebuah sisi e_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1, demikian juga e_1 dikatakan *incident* dengan v_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1. Sebagai contoh, pada graf G Gambar 2.1, v_1 *adjacent* dengan v_2 dan v_3. Pada graf G Gambar 2.1, v_1 dan v_2 *incident* dengan E_1.

Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dinamakan derajat (*degree*). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat (*degree*) yang sama n maka graf G disebut graf regular n, jika tidak maka graf tersebut dikatakan non-reguler. Derajat terkecil dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Derajat terbesar dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Pada Gambar 2.1 diperoleh bahwa $\Delta\ (G) = 4$.

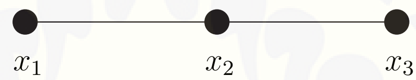
Sebuah *walk* $v_o - v_k$ dari sebuah graf G adalah sebuah barisan berurutan dan berhingga $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_k$ dari titik-titik dan sisi-sisi pada G sedemikian hingga $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk setiap i, $1 \leq i \leq k$. Panjang (*lenght*) dari walk adalah jumlah sisi yang terdapat pada walk tersebut. Jalan (*walk*) dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama atau *identik*. Jika titik jalan yang berbeda maka disebut lintasan (*path*), sedangkan jika semua sisinya yang berbeda maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Sikel (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda (lintasan yang tertutup).

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang memiliki ciri-ciri tertentu yang mudah untuk dikenali serta memiliki keunikan dan karakteristik dalam bentuk khusus. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Graf khusus yang telah populer disebut *well-known special graph*. Berikut beberapa contoh graf khusus :

1. Graf Lintasan

   Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n buah titik dilambangkan dengan P_n dimana $n \geq 2$. Jumlah sisi pada graf lintasan yang terdiri dari n buah titik adalah $n-1$ sisi. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Graf Lintasan P_3

2. Graf Parasut

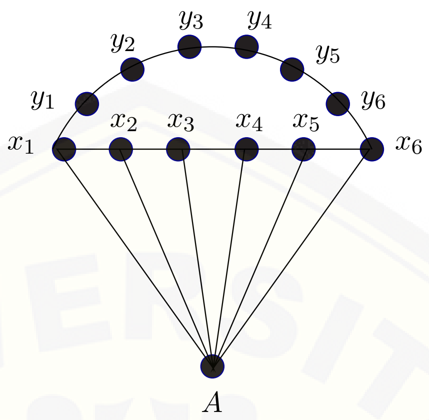
   Graf parasut adalah salah satu jenis graf dari *family* graf kipas yang diperoleh dari hasil pengembangan graf dengan bentuk yang menarik dan menyerupai parasut. Graf parasut dinotasikan dengan $V(PC_n) = x_i, y_i, A; 1 \leq i \leq n$ dan $E(PC_n) = y_n x_1, y_1 x_n, Ax_i; 1 \leq i \leq n \cup x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1$ (Agustin,2014). Contoh graf parasut dapat dilihat pada gambar 2.3.

3. Graf *Helm*

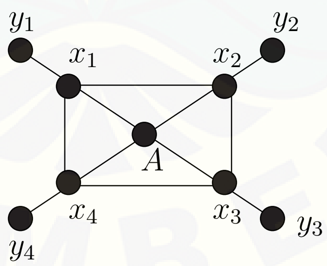
   Graf *helm* adalah jenis graf dari *family* graf roda. Graf *helm* adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan H_n dimana $V(H_n) = A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n$ dan $E(H_n) = x_n x_1, Ax_i, x_i y_i; 1 \leq i \leq n, \cup x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1$. Contoh graf *helm* dapat dilihat pada gambar 2.4.

4. Graf Kipas (*Fan Graph*)

   Graf kipas dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 3$, yaitu graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n pada suatu titik

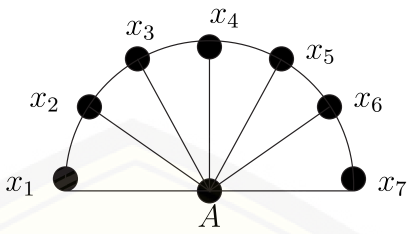


Gambar 2.3 Graf Parasut PC_6



Gambar 2.4 Graf *Helm* H_4

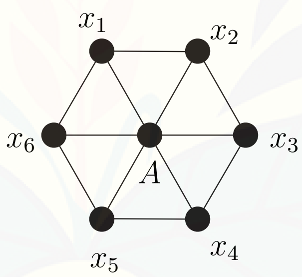
yang disebut titik pusat. Graf kipas F_n terdiri dari $n+1$ titik dan $2n-1$ sisi. Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf Kipas F_7

5. Graf Roda (*Wheel Graph*)

   Graf Roda dinotasikan dengan W_n yaitu sebuah graf yang memuat *cycle* ber-*order* n dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di *cycle* tersebut. Graf roda W_n terdiri dari $n+1$ titik dan $2n$ sisi. Contoh graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.6.

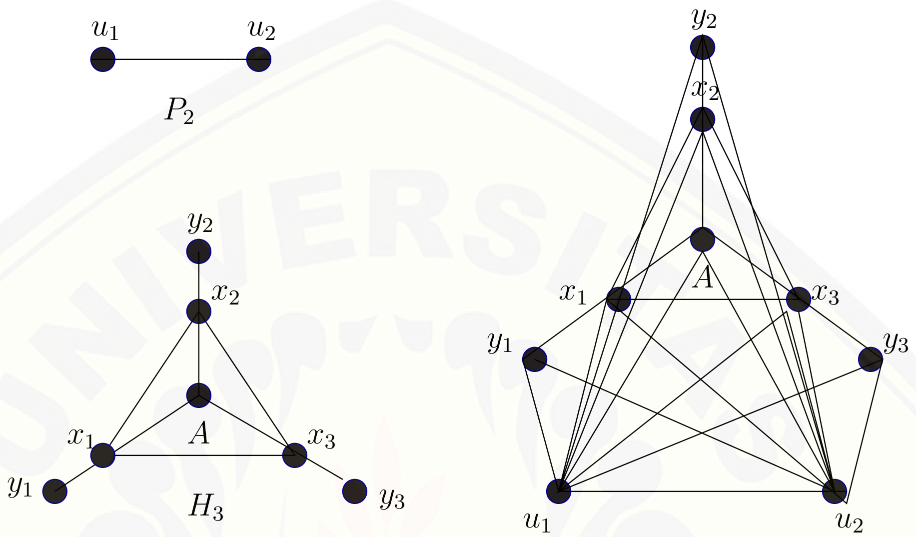


Gambar 2.6 Graf Roda W_6

2.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Terdapat beberapa operasi graf yaitu *Joint*, *Crown Product*, *Cartesian Product*, Amalgamasi, *Tensor*, *Shackle* dan lain sebagainya. Berikut ini beberapa macam operasi graf beserta contohnya.

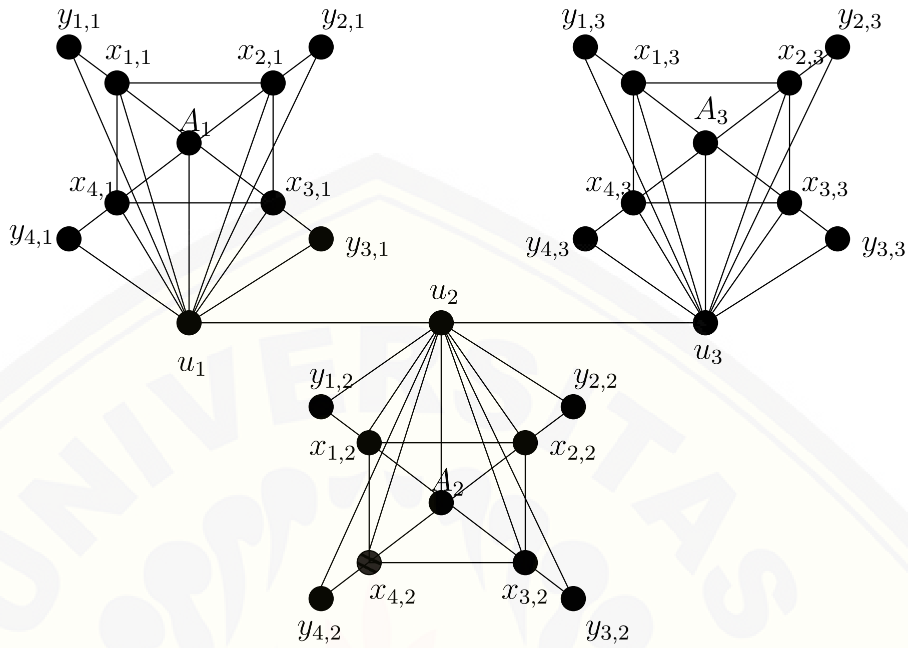
Definisi 2.3.1. *Joint dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *dinotasikan dengan* $G_1 + G_2$*, yaitu graf dengan* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ *(Harsya et al., 2014).* Contoh operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.7



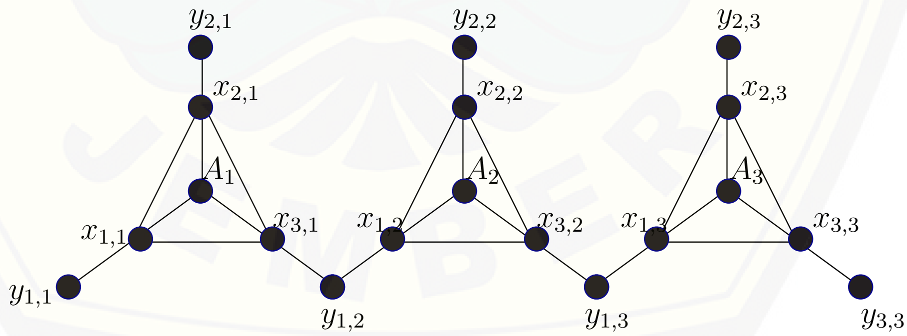
Gambar 2.7 Graf Hasil Operasi *Joint* dari $P_2 + H_3$

Definisi 2.3.2. *Crown product dari dua graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *dinotasikan dengan* $G_1 \odot G_2$*, yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf* G_1 *dan* $|V(G_1)|$ *duplikat dari* $G_2 . G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{2,|V(G_1)|}$*, kemudian menghubungkan titik ke-i dari* G_1 *ke setiap titik di* $G_{2,i}$*,* $i = 1, 2, 3, \ldots, |V(G_1)|$ *(Harsya et al., 2014).* Contoh operasi *crown product* dapat dilihat pada Gambar 2.8

Definisi 2.3.3. *Shackle dari suatu graf* G *dinotasikan dengan* $Shack(G, r)$ *dimana* G *adalah graf terhubung non trivial,* r *menyatakan banyaknya graf* G *yang akan di-shackle, dan untuk setiap* G_i *dan* G_{i+1}*, dimana* $1 \leq i \leq r$ *terdapat tepat satu titik yang sama yang disebut vertex linkage, dimana* $r - 1$ *vertex linkage semua berbeda (Harsya et al., 2014).* Contoh operasi *shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.9

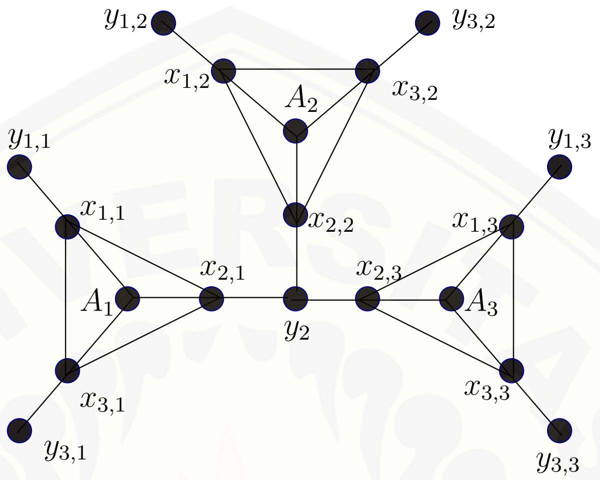


Gambar 2.8 Graf Hasil Operasi *Crown Product* dari $P_3 \odot H_4$



Gambar 2.9 Graf Hasil Operasi *Shackle* dari H_3

Definisi 2.3.4. *Amalgamasi dinotasikan dengan* $Amal(H_i, v_{0i})$. *Misalkan* H_i *adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap* H_1 *mempunyai suatu titik* v_{0i} *yang disebut titik terminal (Ardiyansah, 2013).* Contoh operasi Amalgamasi dapat dilihat pada Gambar 2.10



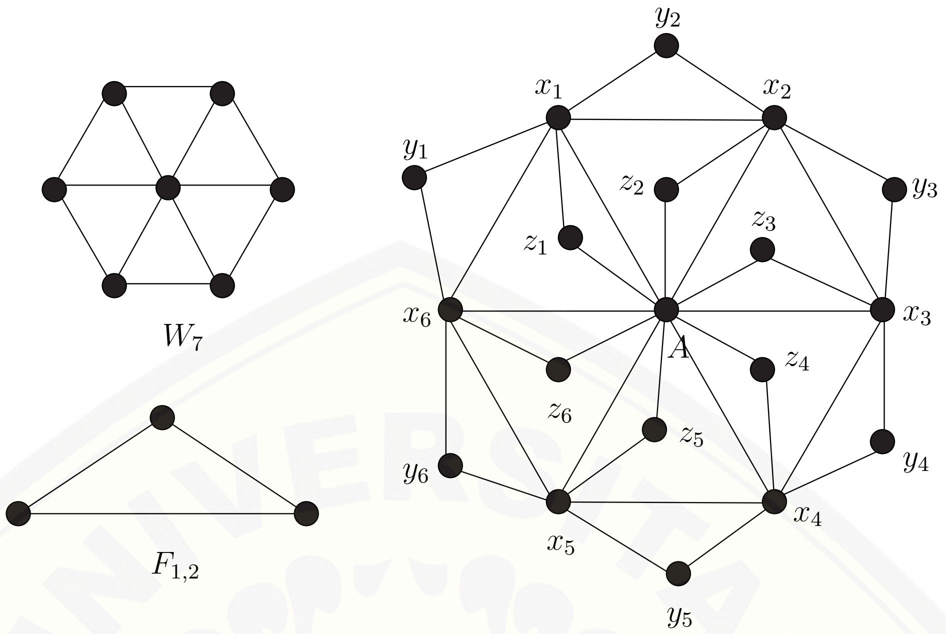
Gambar 2.10 Graf Hasil Operasi Amalgamasi dari PC_6

Definisi 2.3.5. *Misal diberikan graf* G *dan graf* H *maka power graf adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf* G *dengan mengganti semua sisi dari graf* G *dengan graf* H*, dinotasikan dengan* G^H. *Misal graf* G *dengan titik* $|V(G)| = p_1$ *dan sisi* $|E(G)| = q_1$*, serta graf* H *dengan titik* $|V(G)| = p_2$ *dan sisi* $|E(G)| = q_2$. *Maka power graf* G^H *mempunyai titik* $p = |V(G)| = p_2q_1 + p_1$ *dan sisi* $p = |E(G)| = q_1(q_2 + 1)$. *Contoh operasi power graf Gambar 2.11*

2.4 Himpunan Dominasi Lokasi

Menurut Haynes dan Henning dalam Agustin dan Dafik (2014), himpunan D dari titik graf sederhana G dinamakan *dominating set* jika setiap titik $u \in V(G) - D$ *adjacent* ke beberapa titik $v \in D$. Berikut definisi terkait *dominating set*.

Definisi 2.4.1. *Diberikan sebuah graf tidak berarah* $G = (V, E)$*, dominating set merupakan subset* $S \subseteq V$ *dari titik di* G *sedemikian sehingga untuk semua titik*



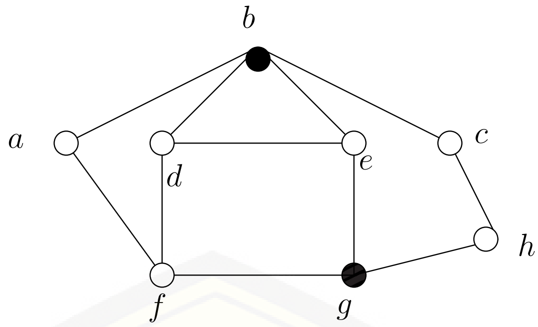
Gambar 2.11 Graf Hasil Operasi *Power* pada graf $W_6^{F_{1,2}}$

$v \in V$, salah satu dari $v \in S$ atau sebuah tetangga u dari v ada di S (Haynes dkk, 2002).

Dominating set merupakan suatu konsep penentuan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan seminimal mungkin. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma\ (G)$. *Dominating set* D dengan $|D| = \gamma\ (G)$ dinamakan *minimum dominating set.* Batas atas dari *domination number* adalah banyaknya titik di graf. Ketika paling sedikit satu titik yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di graf, maka $1 \leq \gamma\ (G) \leq n$ untuk setiap graf ber-*order* n. Nilai dari *domination number* selalu $\gamma\ (G) \leq |V(G)|$.

Berikut adalah contoh *dominating set* pada graf G dapat dilihat pada Gambar 2.12. Titik yang berwarna hitam merupakan *dominating set* dari graf G.

Himpunan dominasi lokasi atau biasa disebut *Locating dominating set* merupakan *dominating set* dengan tambahan syarat. Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi jika himpunan titik dominator D memenuhi syarat



Gambar 2.12 *Dominating Set*

setiap titik yang berbeda diluar D yaitu $V - D$ memiliki irisan yang berbeda dengan D. Misal V himpunan titik dan E himpunan sisi dari graf G sehingga $\{u, v \in V \backslash D\}$ maka berlaku :

1. $N(u) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(v) \cap D \neq \emptyset$.
2. $u \neq v$ maka $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ (Honkala, 2002).

Menurut Foucaud (2016) konsep himpunan dominasi lokasi pertama kali dikenalkan dan dipelajari oleh Slater pada tahun 1987. *Locating domination number* merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. Berikut teorema terkait himpunan dominasi lokasi.

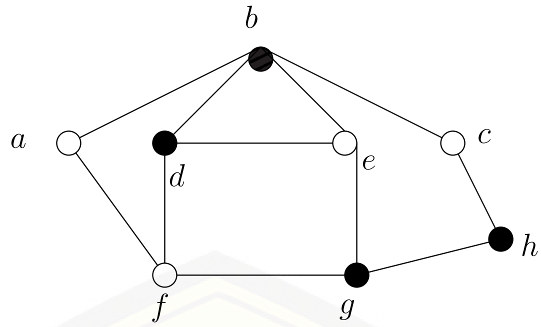
Teorema 2.4.1. *Untuk sebarang graf G, maka $\gamma_L(G) \geq \lfloor \frac{p}{1+\delta(G)} \rfloor$.*

Bukti: Misalkan S adalah sebuah *locating dominating set* dari G. Untuk batas bawahnya, setiap titik dapat sebagai *locating dominating set* dan mempunyai $\delta(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma_L(G) \geq \lfloor \frac{p}{1+\delta(G)} \rfloor$.

Berikut contoh untuk himpunan dominasi lokasi dapat dilihat pada gambar 2.13 dimana titik yang berwarna hitam merupakan titik himpunan dominasi lokasinya. Pada contoh gambar 2.13 diperoleh himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan diperoleh titik dominator $D = \{b, d, g, h\}$, $V - D = \{a, c, e, f\}$ sehingga menurut syarat himpunan dominasi lokasi diperoleh :

$$\{N(a) \cap D = \{b\}, N(c) \cap D = \{b, h\}, N(e) \cap D = \{d, g\}, N(f) \cap D = \{g\}\}.$$

Berdasarkan hasil diatas maka kedua syarat himpunan dominasi lokasi terpenuhi sehingga *locating domination number* $\gamma_L(G) = 4$.



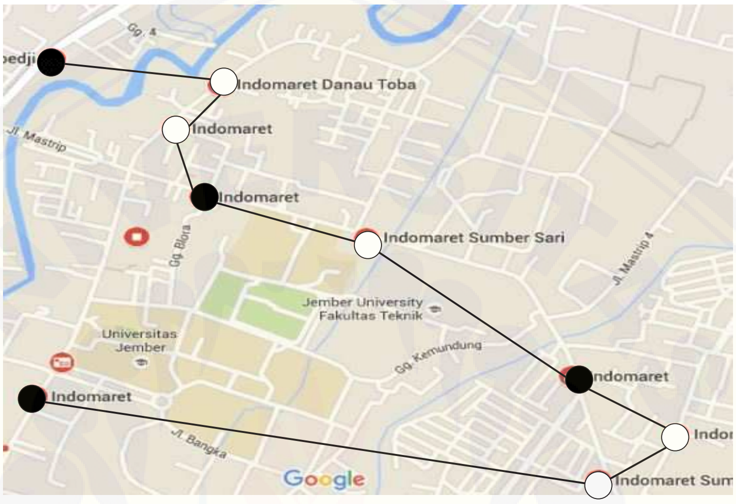
Gambar 2.13 Himpunan Dominasi Lokasi Pada Graf G (Foucaud, 2015)

2.5 Aplikasi Graf

Graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas di dalam teori graf itu sendiri. Masing masing sub bidang teori graf seakan menjadi bidang sendiri yang memiliki kajian dan terapan yang sangat luas. Inti dari pengaplikasian graf adalah bagaimana pemecahan masalah dengan mendefiniskan objek-objek diskrit menjadi titik-titik dan sisi dari graf yang saling terhubung sehingga membentuk suatu pola graf yang memudahkan kita membaca permasalahan.

Salah satu permasalahan yang saat ini sedang berkembang yaitu banyaknya gerai indomaret yang berkembang di setiap daerah. Kenyataannya keberadaan gerai indomaret tidak hanya meningkat disetiap daerah namun jaraknya yang lumayan berdekatan dengan gerai indomaret yang lainnya. Menurut (Indomarco, 2014) Pada mulanya indomaret membentuk konsep penyelenggaraan gerai yang berlokasi di dekat hunian konsumen, menyediakan berbagai kebutuhan pokok maupun kebutuhan sehari-hari melayani masyarakat umum yang bersifat majemuk. Berbekal pengetahuan mengenai kebutuhan konsumen, beberapa karyawan ditugaskan untuk mengamati dan meneliti perilaku belanja masyarakat. Kesimpulan yang didapat adalah bahwa masyarakat cenderung memilih belanja berdasarkan alasan kelengkapan pilihan produk yang berkualitas, harga yang pas dan bersaing, serta suasana yang nyaman. Berdasarkan hal ini perkembangan indomaret sangat pesat sehingga jumlah indomaret mencapai lebih dari 11.285 gerai.

Perkembangan gerai indomaret memunculkan banyaknya situasi negatif salah satunya meningkatnya angka pencurian dan tindak kejahatan lainnya. Tingkat keamanan perlu ditingkatkan untuk mengantisipasi meningkatnya tindak kejahatan dengan memasang sebuah alat deteksi kejahatan pada lokasi indomaret yang sudah ditentukan. Penempatan alat deteksi menggunakan teori himpunan dominasi lokasi sehingga tidak setiap gerai indomaret memiliki alat deteksi. Berdasarkan hal tersebut maka diperoleh salah satu aplikasi graf yaitu penempatan alat deteksi pada gerai Indomaret dengan ketentuan alat deteksi tersebut letaknya tidak boleh bersebelahan dan dapat dijangkau oleh indomaret sekitarnya.



Gambar 2.14 Pola Penempatan Alat Deteksi pada Indomaret Kabupaten Jember

Pada Gambar 2.14 dapat dijelaskan bahwa titik-titik yang berwarna hitam merupakan himpunan dominasi lokasi untuk penempatan alat deteksi pada gerai Indomaret yang dianjurkan agar mendapatkan areal pendeteksi yang baik. Sehingga dengan adanya penetapan pola ini akan mempermudah bagi masyarakat untuk mengurangi meningkatnya tindak kejahatan.

Tabel 2.1 *Locating Domination Number* Pada Sebarang Graf Khusus

Graph	$\gamma_L(G)$	Keterangan
P_2	1	Slater
P_3	2	Slater
P_n	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$, $n > 3$	Slater
C_4, C_5	2	Slater
C_6	3	Slater
C_n	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$, $n > 6$	Slater
Graf Lengkap, K_n	$n-1$, $n > 1$	Slater
$K_{1,n-1}$	$n-1$, $n > 2$	Slater
$K_{r,n-r}$	$n-2$, $r > 1, n > 4$	Slater
Graf Roda $W_{1,4}$	2	Slater
$W_{1,5}$, $W_{1,6}$	3	Slater
$W_{1,n-1}$	$\lceil \frac{2n-2}{5} \rceil$, $n > 7$	Slater
Graf Thin Sun (T_n)	n, $n \geq 4$	Argiroffo *et al.*, 2015
Graf Twin Free (G)	$\gamma_L \leq \frac{2n}{3}$	Foucaud *et al.*, 2016
Graf Trees (T)	$\gamma_L(T) = \frac{n}{2}$, $n \geq 2$	Foucaud *et al.*, 2016

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*).

a. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
b. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik, dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

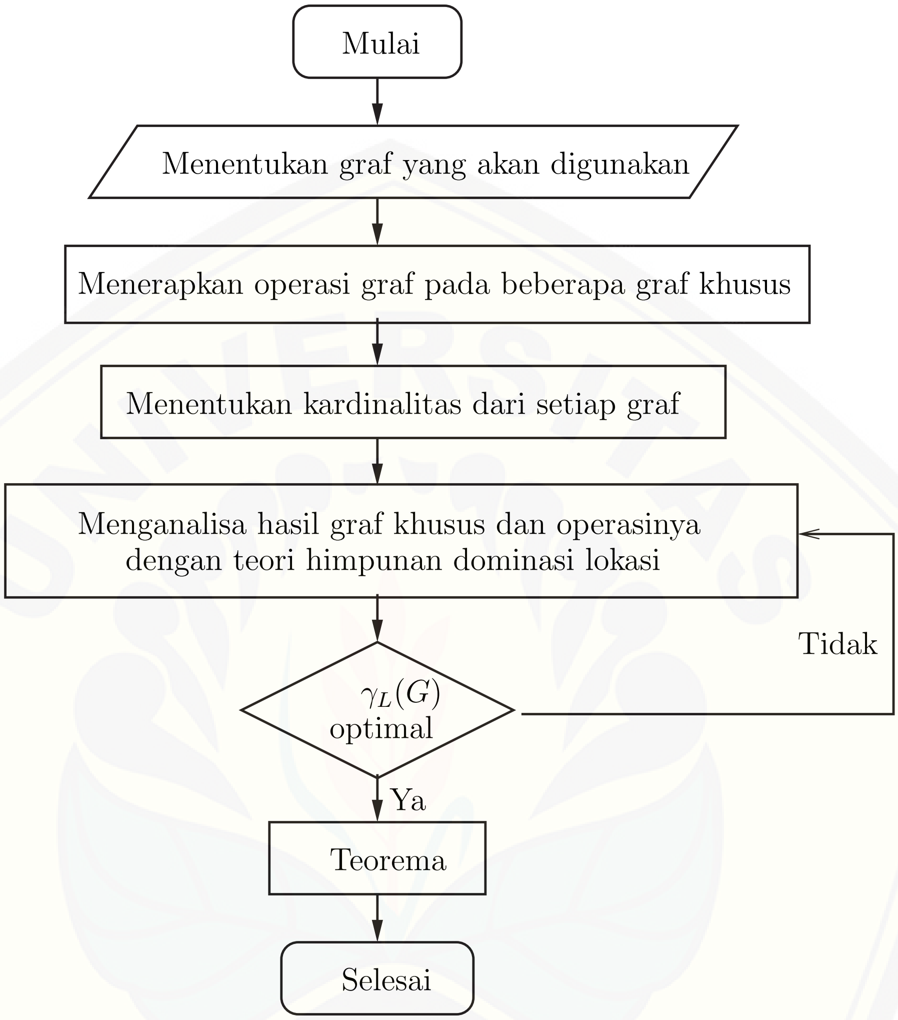
Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf khusus yang digunakan adalah lintasan (*path*), *fan*, parasut, *helm* dan roda.

3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Rancangan penelitian untuk himpunan domi
nasi lokasi pada graf khusus dan operasinya digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini sebagai berikut:

a. menentukan objek penelitian berupa graf-graf khusus dan operasinya;
b. menentukan banyak titik dan banyak sisi pada hasil graf operasi;
c. menentukan himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasinya;
d. menganalisa graf-graf khusus dan operasinya dengan teori himpunan dominasi lokasi, sehingga dihasilkan teorema dan akibat tentang nilai himpunan dominasi lokasi ($\gamma_L(G)$) dari hasil graf khusus dan operasinya;

e. Menganalisa keoptimalan dari nilai himpunan dominasi lokasi.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. Banyaknya titik (*order*) dan banyaknya sisi (*size*) pada beberapa graf khusus dan operasi-nya dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $|V(P_n + H_m)| = n + 2m + 1$ dan $|E(P_n + H_m)| = 2n + 3m + 2mn - 1$.
2. $|V(P_n \odot H_m)| = 2nm + 2n$ dan $|E(P_n \odot H_m)| = 5mn + 2n - 1$.
3. $|V(amal(H_n, v, m))| = 2mn + 1$ dan $|E(Amal(H_n, v, m))| = 3mn$
4. $|V(shack(H_n, v, m))| = 2mn + 1$ dan $|E(Shack(H_n, v, m))| = 3mn$
5. $|V(W_n^{F_{1,2}})| = 3n - 2$ dan $|E(W_n^{F_{1,2}})| = 6n - 6$
6. $|V(P_n^{H_m})| = 2mn - 2m + 1$ dan $|E(P_n^{H_m})| = 3mn$

b. Nilai himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus dan operasinya dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $\gamma_L\ (H_n)=n$, untuk $n \geq 3$.
2. $\gamma_L\ (Amal(H_n, v, m)) = n \times m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
3. $\gamma_L\ (Shack(H_n, v, m)) = n \times m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
4. $\gamma_L\ (W_n^{F_{1,2}}) = n$, untuk $n \geq 3$.
5. $\gamma_L\ (P_n^{H_m}) = m(n - 1)$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
6. $\gamma_L\ (PC_n)=\lceil \frac{4n}{5} \rceil$, untuk $n \geq 4$.
7. $\gamma_L\ (F_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$, untuk $n \geq 4$ dan $n \neq 5$.
8. $\gamma_L\ (P_n + H_m) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil + m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
9. $\gamma_L\ (P_n \odot H_m) = m \times n$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
10. $\gamma_L\ (Amal(PC_n, v, m)) = (\lceil \frac{4n}{5} \rceil) \times m$, untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$.
11. $\gamma_L\ (Shack(F_n, v, m)) = \lceil \frac{2mn-2m+2}{5} \rceil$, untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 3$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian berkaitan himpunan dominasi lokasi pada graf khusus dan operasinya maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk meneliti himpunan dominasi lokasi pada operasi graf yang lainnya seperti operasi *cartesian product*, *t*ensor dan lain sebagainya. Selain itu penerapan aplikasi pada himpunan dominasi lokasi bisa dijadikan bahan untuk penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H. 2014. *Penerapan Teori Dominating Set dalam Instalasi Client Hub untuk Jaringan Intranet di Universitas Jember*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Agustin, I. H. dan Dafik. 2014. *On The Domination Number of Some Families of Special Graphs*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember. **1**(1).

Ardiyansah, R. 2013.*Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf*: Jurnal ITS, vol **2**(1).

Argiroffo, G.R., Bianchi, S.M .2015. "A Polyhedral Approach to Locating-Dominating Sets in Graphs". *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **50**: 89-94.

Canoy, S.R., Jr., Malacas, G.A. 2014. "Locating-Dominating Sets in Graphs". *Journal of Applied Mathematical Sciences*, Vol.**8** (88): 4381-4388.

Chen, C., Lu, C., Miao, Z. 2011. "Identifying Codes and LocatingDominating Sets on Paths and Cycles". *Discrete Applied Mathematics*, **159**: 1540-1547.

Dafik, Mirka, M., Ryan, J., Bača, M. 2009. "On Super (a, d)-Edge-Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs". *Discrete Mathematics*, **309** (15): 4909-4915.

Douglas. W. B. 1996. *Introduction to Graph Theory*.New Jersey: Prentice-Hall.

Foucaud,F. 2015. "Decision and Approximation Complexity for Identifying Codes and Locating-Dominating Sets in Restricted Graph Classes". *Journal of Discrete Algorithms*, **31**: 48-68.

Foucaud,F., Henning,M.A. 2016. "Locating-Dominating Sets in Twin-Free Graphs". *Journal of Discrete Applied Mathematics*, **200**: 52-58.

Harsya. A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. *Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang.* Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, **1** (1).

Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory.* London : Academic Press Limited.

Haynes, T.W. 1998. *Fundamental of Domination in Graphs.* New York: Marcel Dekker, INC.

Haynes, T.W and Henning, M.A. 2002. *Total Domination Good Vertices in Graphs. Australasian Journal of Combinatorics*, **26**: 305-315.

Honkala,I., Laihonen,T., Ranto,S. 2002. "On strongly identifying codes". *Discrete Math*, vol.**254** (13): 191205.

Indomarco. 2014. *indomaret.co.id/korporat/sejarah-dan-visi.html* [27 November 2015].

Munir, R. 2009.*Matematika Diskrit Edisi 3.* Bandung: Informatika Bandung.

Rall, D.F., and Slater,P.J . 1984. *On location-domination numbers for certain classes of graphs.* Congr. Numer. Vol.**45**: 97-106.

Slater, P. J. 1995. *Locating dominating sets and locating-dominating sets, in: Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.).* Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Proceedings of Seventh Quad. International Conference on the Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York.

Slater, P. J. 1998. "Dominating Sets and Reference Sets in a Graph". *Journal of Mathematical and Physical Science*, **22**.

Slater, P. J. 2002. "Fault-Tolerant Locating-Dominating Sets". *Discrete Mathematics*, **249**: 179-189.

Wardani, D. A. R., Agustin, I. H., Dafik. 2014.*Bilangan Dominasi dari Graf-graf Khusus*: Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. Jurnal: UAD Yogyakarta, vol.**1**.