Studi Tentang Masalah Sturm-Liouville

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

Muhammad Sholikuddin

NIM. 981810101047

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
Mei, 2003

MOTTO

ان الله لا يغير ما بقوم حتى يغيروا ما بانفسهم

Sesungguhnya Allah tidak merubah nasib suatu kaum hingga kaum itu merubahnya sendiri
(Ar-ra'd;11)

يا ايها الذين امنوا لا يسخر قوم من قوم عسى ان يكونوا خيرا منهم

Hai orang-orang yang beriman janganlah suatu kaum mengolok-olok atas kaum lain, boleh jadi kaum yang diolok-olok lebih baik dari kamu
(Al-Hujurat;11)

Kesempatan datangnya dengan tiba-tiba dan perginya pun dengan mendadak pula,
siapa yang berani menangkapnya,
dia itulah yang akan menciptakan pekerjaan yang besar
(Muhammad Ali Pasya)

Tak seekor burungpun dapat terbang sangat tinggi hanya dengan sayapnya sendiri
(Pojok Masjid Al-Jauhar)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini kupersembahkan kepada :

- Bapakku Muhammad Khusnu dan Ibuku Suliyah yang karena perantaranya sehingga aku terlahir didunia, serta dengan segenap tenaga, upaya, dan doanya yang mendorong keberhasilan langkahku.
- Adik-adikku Ahmad Faisol Rozi, Lailatul Maghfiroh, dan Ahmad Junaidi yang banyak memberikan kasih sayang, perhatian dan cinta.
- Pengasuh Pondok Pesantren Mahasiswa Al-Jauhar, Prof. KH. Shodiq Machmud SH (almarhum), Drs. Sahilun Ahmad Nasir M.PdI beserta Ibu Lilik Istiqomah SH yang jadi penuntun dan pelita hidupku.
- Keluarga besar PPM Al-Jauhar yang tercinta.
- Istriku dan anak-anakku tercinta dikemudian hari.
- Almamaterku yang senantiasa memberikan siraman ilmu pengetahuan dan pengetahuan.
- Rahma Nurhayati, yang banyak memberikan motivasi.
- Fakir miskin dan orang-orang lemah dan sengaja dilemahkan oleh sistem yang menindas.

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Pebruari 2002 sampai dengan bulan Mei 2003 di Jurusan Matematika FMIPA UNEJ. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain

Jember, Mei 2003

Muhammad Sholikuddin

ABSTRAK

Studi Tentang Masalah Sturm-Liouville, Muhammad Sholikuddin, 981810101047, Skripsi, 2003, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Masalah Sturm-Liouville terdiri atas persamaan diferensial orde kedua

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0\,; \qquad a \le x \le b$$

dengan syarat batas :

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0$$

$$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0$$

Persamaan diferensial orde dua diatas dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu $L[y] = \lambda r(x)y$, dengan $L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$ dengan asumsi bahwa fungsi p, p', q, dan r adalah kontinyu pada interval $a \le x \le b$ dan $p(x) > 0$, $r(x) > 0$, x dalam interval $a \le x \le b$, dan $r(x)$ fungsi bobot. Untuk persamaan diatas, k_1 dan k_2 adalah konstanta bilangan nyata yang salah satu tidak nol, dan begitu juga dengan l_1 dan l_2. Dalam masalah Sturm-Liouville dicari penyelesaian nontrivial yang tergantung pada nilai parameter λ pada persamaan diferensial diatas. Nilai λ diatas disebut sebagai nilai eigen. Nilai-nilai eigen pada masalah Sturm-Liouville merupakan bilangan riil dan dapat di-*generate* oleh fungsi yang disebut fungsi eigen. Pada masalah Sturm Lioville fungsi eigennya adalah ortogonal, dan dapat diekspansikan kedalam deret tak hingga yang konvergen. Sifat keortogonalan dari fungsi eigen pada masalah Sturm-Liouville tersebut dapat digunakan untuk mencari penyelesaian dari masalah nilai batas yang terdiri dari persamaan diferensial parsial dengan syarat batas nonhomogen.

Kata Kunci : Persamaan diferensial, syarat batas, nilai eigen, fungsi eigen, masalah Sturm-Liouville

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : JUM'AT

Tanggal : 13 JUN 2003

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)	Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)
Drs. Rusli Hidayat, M.Sc	Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.S.i
NIP. 132 048 321	NIP. 132 257 933
Anggota I	Anggota II
Drs. Kusno, DEA, Ph.D	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si
NIP. 131 592 357	NIP. 132 206 019

Mengesahkan

Dekan FMIPA Universitas Jember

DEPARTEMEN PENDIDIKAN UNIVERSITAS JEMBER

Ir. Sumadi, MS

NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahnya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Studi Tentang Masalah Sturm Liouville"

Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat guna mendapat gelar Sarjana (S1) Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penyusunan skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya bantuan dari pihak-pihak lain, oleh karena itu pada kesempatan ini panulis ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Ir. Sumadi MS selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember
2. Bapak Drs. Kusno. DEA, PhD selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA dan selaku anggota Tim Penguji skripsi ini
3. Bapak Drs. Rusli Hidayat MSc selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Agustina Pradjaningsih, SSi, MSi selaku dosen wali dan Dosen Pembimbing Anggota yang dengan kesabarannya membimbingku hingga selesai, serta Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si yang berkenan menjadi anggota Tim Penguji skripsi ini
4. Bapak dan Ibu Dosen selaku staf pengajar di fakultas MIPA yang banyak memberikan bekal ilmu pengetahuan.
5. Teman-teman HIMATIKA, khususnya angkatan 1998, terima kasih atas dukungannya sehingga skripsi ini terselesaikan.
6. Sahabat-sahabatku senasib dan seperjuangan di Pondok Pesantren Mahasiswa Al-Jauhar, khususnya sahabat Abdus Syahid, Abdul Manan, Komaraini (Kediri dan Madura), Kholik, pak Agus "pastor", Mahbub "Tempo", Edi "Neka", dan seluruh pengurus PPM Al-Jauhar
7. Sahabat-sahabat di Ayatullah Khumaini yakni, Komaruddin, Rozik, A.Manan, Arif "mo", Aan, Yono, Andis,

8. Sahabati Rahmah Nurhayati beserta teman-temannya, Safi', Wiwik, Khannah, Heni, Uswatun Ekasanah, Munifah, teman-teman "Jasmine" dan semuanya yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
9. Sahabat-sahabat di Arafah, dan Neka Comp, teruslah berinovasi.
10. Teman-teman "didepan" masjid Al-Muhajirin, Hendra dan kawan-kawan.
11. Sahabat-sahabat yang sering berkumpul di masjid Sunan Kalijogo, "Slatem" Harianto, Afifah, Fafan, Masyita', Nanik H, Dawin, Erta, Ika S, Dewi, Arif, Angga, Sujadi S, Sugiono, dan kawan-kawan.
12. Sahabat Akhsan (Hizbut Tahrir), Agus, Bahtiar (LDK), Wawan, Vita, Miftahul R, Indri dan kawan-kawan.
13. Bapak Drs. Burhanuddin, dan keluarga di jalan Mawar (Mbah Rohim) serta Ika Agustina,; Santi terima kasih atas segala bantuannya.
14. Sahabat-sahabati PMII Rayon FMIPA terus "**Dzikir, Fikir, dan Amal Sholeh"** dan Tangan terkepal dan maju kemuka dan Cabang Jember pada umumnya.
15. Dan semua pihak yang langsung atau tidak langsung turut membantu dalam terselesainya skripsi ini

Akhirnya dengan memanjatkan doa kehadirat Allah SWT mudah-mudahan mereka semua senantiasa dalam lindungan-Nya, dan mendapatkan balasan yang setimpal atas seluruh amal baiknya, amiin.

Jember 2003 Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Permasalahan di bidang fisika matematika dan *engineering* pada umumnya sulit diselesaikan secara langsung, sehingga perlu disusun suatu model matematika untuk mendapatkan penyelesaian permasalahan tersebut. Banyak model matematika pada bidang tersebut berbentuk persamaan diferensial biasa (PDB) maupun parsial (PDP). Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial biasa (PDB) apabila turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas dan apabila tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial (PDP).

Model-model persamaan diferensial pada bidang fisika ataupun *engineering* pada umumnya disertai sebuah atau lebih persyaratan yang harus dipenuhi oleh penyelesaian persamaan diferensial tersebut. Dengan demikian banyak penyelesaian persamaan diferensial yang tidak mempunyai penyelesaian tunggal, dan masalah nilai batas tertentu diperlukan untuk menentukan penyelesaian tunggal dalam menyelesaikan persamaan diferensial tersebut [4].

Suatu masalah nilai batas yang terdiri dari sebuah persamaan diferensial order dua linier :

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \qquad ; a \le x \le b \qquad \ldots(1.1)$$

disebut persamaan Sturm-Liouville dan disertai dengan syarat batas:

$$\begin{aligned} k_1 y(a) + k_2 y'(a) &= 0 \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(1.2)$$

dengan asumsi bahwa l_1, l_2 adalah konstanta bilangan riil yang setidak-tidaknya salah satu tidak nol, begitu juga dengan k_1 dan k_2. Persamaan (1.2) tersebut dinamakan syarat batas, sebab syarat itu mengacu pada titik ujung (titik batas) interval, yakni $x=a$ dan $x=b$. Persamaan Sturm-Liouville (1.1) dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu $L[y] = \lambda r(x)y$ dimana $L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$, dengan asumsi bahwa p', q dan r adalah kontinyu pada interval $a \le x \le b$ dan r disebut sebagai fungsi pembobot [4]. Persamaan Sturm-Liouville yang disertai syarat batas dinamakan masalah Sturm-Liouville.

Masalah Sturm-Liouville diatas banyak kita temui dalam bidang fisika maupun mekanika, misalnya persamaan konduksi panas. Mengingat pentingnya masalah Sturm-Liouville tersebut, perlu dipelajari sehingga dapat dirasakan manfaatnya.

1.2. Perumusan Masalah

Permasalahan yang dijadikan studi dalam skripsi ini adalah nilai eigen dan fungsi eigen pada masalah Sturm-Liouville reguler, yang meliputi:

- Menyelidiki sifat-sifat yang dimiliki oleh nilai eigen dan fungsi eigen
- Bagaimana mengekspansi fungsi eigen menjadi sebuah deret
- Bagaimana mencari penyelesaian masalah Sturm-Liouville

1.3. Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mempelajari secara teoritis masalah Sturm-Liouville.

1.4. Manfaat

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah untuk menambah pemahaman tentang masalah Sturm-Liouville yang dipakai khususnya bidang fisika matematika dan bidang teknologi lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Masalah Nilai Batas

Secara umum persamaan diferensial orde dua berbentuk,

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \qquad \ldots(2.1)$$

di mana koefisien $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$, dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinyu di dalam interval $a \leq x \leq b$ dengan $a_2 \neq 0$ di dalam interval ini. Penyelesaian dari persamaan diferensial (2.1) pada titik $x=x_0$ dalam interval $a \leq x \leq b$ memenuhi dua syarat awal yang diberikan, yaitu

$$y(x_0)=y_0 \text{ dan } y'(x_0)=y_1 \qquad \ldots(2.2)$$

Persamaan diferensial (2.1) yang bersama-sama dengan syarat awal (2.2) merupakan suatu masalah nilai awal (MNA) [2].

Banyak masalah nilai awal peubah bebas x dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0 serta y_1 menyatakan syarat awal. Tetapi bila peubah bebas x merupakan peubah yang menyatakan tempat (space variabel), biasanya kita ingin mencari suatu penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial (2.1) yang memenuhi syarat pada titik ujung dari interval $a \leq x \leq b$, sebagai contoh,

$$y(a)=A \text{ dan } y(b)=B \qquad \ldots(2.3)$$

dengan A dan B dua buah konstanta. Syarat (2.3) yang diberikan dari interval $a \leq x \leq b$ disebut syarat batas. Persamaan diferensial (2.1) bersama-sama dengan syarat batas (2.3) merupakan masalah nilai batas (MNB) [2].

Cara kerja untuk menyelesaikan suatu masalah nilai batas serupa dengan cara kerja yang digunakan dalam suatu masalah nilai awal. Mula-mula, kita cari penyelesaian umum dari persamaan diferensial itu dan kemudian kita gunakan syarat batas untuk menemukan konstanta sebarang dalam penyelesaian umum. Tetapi perbedaan yang mencolok antara masalah nilai awal (MNA) dan masalah nilai batas (MNB) ialah bahwa masalah nilai awal (MNA) (2.1) dan (2.2) mempunyai satu penyelesaian, sedang masalah nilai batas (MNB) dapat mempunyai tepat satu penyelesaian, tak berhingga penyelesaian, atau tidak mempunyai penyelesaian.

Syarat-syarat suatu masalah nilai batas (MNB) mempunyai penyelesaian tunggal, tidak mempunyai penyelesaian atau mempunyai tak berhingga penyelesaian umumnya sangat sukar dan memerlukan perhitungan yang rumit [2]. Disini kita hanya membahas masalah nilai batas (MNB) yang terdiri dari persamaan diferensial (2.1) dan syarat batas (2.3) yang sederhana. Misalnya $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ dua buah penyelesaian bebas linier dari persamaan diferensial homogen yang berkaitan dengan persamaan diferensial (2.1), dan misalkan $y_p(x)$ merupakan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial (2.1), maka penyelesaian umum dari persamaan diferensial (2.1) diberikan oleh

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x) \qquad \ldots(2.4)$$

Mengingat syarat batas (2.3), konstanta c_1 dan c_2 dari penyelesaian umum harus membentuk sistem persamaan aljabar yang linier:

$$\left.\begin{aligned} c_1y_1(a)+c_2y_2(a)+y_p(a)=A \\ c_1y_1(b)+c_2y_2(b)+y_p(b)=B \end{aligned}\right\}$$

atau

$$\left.\begin{aligned} c_1y_1(a)+c_2y_2(a)=A-y_p(a) \\ c_1y_1(b)+c_2y_2(b)=B-y_p(b) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.5)$$

sehingga masalah nilai batas (MNB) (2.1) dan (2.3) mempunyai penyelesaian tergantung ada tidaknya nilai c_1 dan c_2.

Teorema 1

Andaikan bahwa $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ dua buah penyelesaian yang bebas linier dari persamaan diferensial homogen dari persamaan diferensial (2.1) dan andaikan $y_p(x)$ suatu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial (2.1). Maka, berlakulah pernyataan berikut:

a) Jika

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \ldots(2.6)$$

MNB (2.1) dan (2.3) mempunyai satu penyelesaian didalam interval $a \le x \le b$.

b) Jika determinan dalam (2.6) sama dengan nol, maka MNB (2.1) dan (2.3):

- tidak mempunyai penyelesaian jika:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{...(2.7)}$$

- mempunyai tak berhingga banyaknya penyelesaian, jika:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{...(2.8)}$$

Bukti :

a. Misal penyelesaian umum dari persamaan diferensial (2.1) diberikan oleh

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \qquad \text{...(2.9)}$$

Dimana c_1 dan c_2 konstanta sebarang. Mengingat syarat batas (2.3), maka konstanta c_1 dan c_2 dari penyelesaian umum harus memenuhi sistem persamaan aljabar linier:

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_p(a) = A$$

$$c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_p(b) = B$$

atau

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = A - y_p(a)$$

$$c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = B - y_p(b) \qquad \text{...(2.10)}$$

Dalam sistem persamaan linier, terdapat kaidah Cramer yang menyatakan bahwa jika:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = y_1(a).y_2(b) - y_1(b)y_2(a) \neq 0 \qquad \text{...(2.11)}$$

maka akan mempunyai penyelesaian:

$c_k = \Delta_k / \Delta$, $k = 1, 2$

sehingga, $c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} A - y_p(a) & y_2(a) \\ B - y_p(b) & y_2(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}}$ dan $c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}}$

substitusikan c_1 dan c_2 ke dalam persamaan persamaan (2.9), maka sistem persamaan linier diatas tepat mempunyai satu penyelesaian.

b. Dalam sistem persamaan linier

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_p(a) = A$$

$$c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_p(b) = B \qquad \ldots(2.12)$$

apabila $\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = y_1(a).y_2(b) - y_1(b)y_2(a) = 0$

- dan jika $\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} = y_1(a).(B - y_p(b)) - y_1(b).(A - y_2(a)) \neq 0$

  dari aturan Cramer diketahui bahwa $c_2 = \Delta_2 / \Delta$; sedangkan diketahui di awal bahwa $\Delta = 0$, maka sistem persamaan (2.12) tidak mempunyai penyelesaian. Jadi dalam kasus ini masalah nilai batas (MNB) tidak mempunyai penyelesaian.

- Dan jika $\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} = y_1(a).(B - y_p(b)) - y_1(b).(A - y_2(a)) = 0$

Dan $c_2 = \Delta_2 / \Delta$; maka sistem persamaan (2.12) mempunyai tak berhingga penyelesaian. Jadi pada kasus ini masalah nilai batas (MNB) mempunyai tak berhingga penyelesaian.[]

Contoh

$$y'' - y = x \quad \text{untuk} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$y(0) = 2, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \ldots(2.13)$$

Penyelesaian

Mula-mula hitung penyelesaian umum persamaan diferensial (2.13). Penyelesaian homogennya adalah berbentuk $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Dengan menggunakan metode koefesien tertentu, didapat bahwa penyelesaian khusus dari persamaan diferensial (2.13) berbentuk $y_p = Ax + B$. Dengan mensubstitusikan y_p kedalam persamaan diferensial (2.13), diketahui bahwa $Ax + B = x$. Jadi, $A=1$ dan $B=0$ dan $y_p = x$ merupakan sebuah penyelesaian khusus. Jadi, penyelesaian umum dari persamaan diferensial (2.13) berbentuk

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \qquad \ldots(2.14)$$

Dengan menggunakan syarat batas (2.13), didapatkan bahwa

$$y(0) = 2 \rightarrow c_1 = 2$$

$$\text{dan } y(\frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow c_2 + \frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow c_2 = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Jadi MNB (2.13) mempunyai penyelesaian tunggal

$$y(x) = 2 \cos x + (1 - \frac{\pi}{2}) \sin x + x \qquad \ldots(2.15)$$

Menurut teorema 1, maka MNB (2.13) mempunyai penyelesaian tunggal, karena

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ne 0$$

Contoh

Selesaikan masalah nilai batas (MNB)

$$\begin{aligned} &y'' + y = x && \text{untuk } 0 \le x \le \pi \\ &y(0) = 2, && y(\pi) = \pi - 2 \end{aligned} \qquad \ldots(2.16)$$

Penyelesaian

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial (2.16) berbentuk

$$y(x)=c_1 \cos x+c_2 \sin x+x$$

Sekarang,

$$y(0)=2 \rightarrow c_1=2$$

dan

$$y(\pi)=\pi-2 \rightarrow -c_1+\pi=\pi-2 \rightarrow c_1=2$$

Jadi , $c_1=2$ sedang c_2 tetap sebarang . Dalam hal ini, MNB (2.16) mempunyai tak berhingga banyaknya penyelesaian:

$$y(x)=2 \cos x +c_2 \sin x +x \qquad \ldots(2.17)$$

Menurut teorema 1, maka MNB (2.16) mempunyai tak berhingga banyaknya penyelesaian karena

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dan

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(0) & 2-0 \\ \cos(\pi) & \pi - 2 - \pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

2.2 Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Dalam matematika terapan, khususnya masalah-masalah dalam fisika matematis, terdapat kelompok MNB yang sangat penting dimana persamaan diferensialnya berbentuk

$$(p(x)y')'+(q(x)+\lambda)y=0 \qquad \ldots(2.18)$$

dimana $p(x)>0$ dan $q(x)$ kontinyu dalam interval $a \le x \le b$, λ sebuah parameter yang riil, dan kedua syarat batas di titik-titik ujung a dan b berbentuk

$$\begin{aligned} k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \qquad \text{....(2.19)}$$

MNB (2.18) dan (2.19) selalu dipenuhi oleh penyelesaian trivial $y(x)=0$. Tetapi, persoalan yang penting dalam tipe MNB ini ialah menentukan λ agar MNB (2.18) dan (2.19) mempunyai suatu penyelesaian tak trivial. Nilai-nilai λ ini disebut nilai eigen dari MNB (2.18) dan (2.19). Penyelesaian taktrivial pautannya disebut fungsi eigen MNB (2.18) dan (2.19), juga disebut masalah nilai eigen.

Definisi 1:

Andaikan f dan g fungsi kontinyu yang terdefinisi didalam interval $a \le x \le b$. Hasil kali dalam fungsi-fungsi f dan g dinyatakan oleh

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad \text{...(2.20)}$$

Bila $(f,g)=0$, kita katakan bahwa fungsi-fungsi f dan g ortogonal.

Contoh himpunan fungsi yang ortogonal:

- Fungsi-fungsi $g_m(x) = \sin mx,\ \ m = 1,2,...$ membentuk sebuah himpunan ortogonal pada interval $-\pi \le x \le \pi$, sebab untuk $m \neq n$ diperoleh :

$$\begin{aligned} (g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = 0 \end{aligned} \qquad \text{...(2.21)}$$

- Fungsi-fungsi: 1, cos x, sin x, cos $2x$, sin $2x$, ...

  Membentuk sebuah himpunan ortogonal pada interval $-\pi \le x \le \pi$, sebab untuk $m \neq n$ diperoleh:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx = 0 \end{aligned} \qquad \text{...(2.22)}$$

Teorema 2:

Masalah nilai batas (2.18) dan (2.19) mempunyai barisan tak hingga dari nilai-nilai eigen

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \to +\infty \qquad \ldots(2.23)$$

dan barisan dari fungsi-fungsi eigen pautannya.

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \qquad \ldots(2.24)$$

Dengan sifat bahwa didalam interval $a \le x \le b$,

$$(y_n, y_m) = \begin{cases} 0, jika, n \neq m \\ 1, jika, n = m \end{cases} \qquad \ldots(2.25)$$

Selanjutnya, sebarang fungsi $f(x)$ yang dua kali terdeferensialkan secara kontinyu dan memenuhi syarat batas (2.19) mempunyai uraian fungsi eigen sebagai berikut

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, y_n) y_n, \qquad \ldots(2.26)$$

di mana deret (2.24) konvergen seragam di dalam interval $a \le x \le b$.

Bukti :

a). Misalkan masalah nilai eigen diatas adalah

$$\begin{aligned} &(p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0 \qquad , a \le x \le b \\ &\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad ; \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \qquad \ldots(2.27)$$

andaikan nilai eigen λ terhingga, dan misalkan λ_n memenuhi masalah nilai eigen (2.27), sehingga terdapat λ_m yang tidak memenuhi persamaan (2.27) dan $\lambda_n \neq \lambda_m$. Substitusikan λ_n dan λ_m kedalam persamaan diatas, sehingga

$$(p(x)y_n')' + (q(x) + \lambda_n)y_n = 0 \qquad \ldots(2.28a)$$

$$\alpha_1 y_n(a) + \alpha_2 y_n'(a) = 0 \quad ; \quad \beta_1 y_n(b) - \beta_2 y_n'(b) = 0 \qquad \ldots(2.28b)$$

$$(p(x)y_m')' + (q(x) + \lambda_m)y_m = 0 \qquad \ldots(2.29a)$$

$$\alpha_1 y_m(a) + \alpha_2 y_m'(a) = 0 \quad ; \quad \beta_1 y_m(b) + \beta_2 y_m'(b) = 0 \qquad \ldots(2.29b)$$

Kalikan persamaan (2.28a) dan (2.29a) diatas masing-masing dengan y_m dan y_n dan kurangkan satu dengan yang lainnya serta integralkan antara $a \le x \le b$, sehingga

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_n y_m dx = 0 \qquad \ldots(2.30)$$

dari persamaan diatas $\int_a^b y_n y_m dx$ adalah sebarang, maka persamaan (2.30) terpenuhi apabila $\lambda_n - \lambda_m = 0$ atau $\lambda_n = \lambda_m$. Maka pengandaian salah, sehingga nilai eigen dalam masalah nilai eigen adalah tak terhingga.

b). Dari persamaan diatas maka apabila $\int_a^b y_n y_m dx \neq 0$ dan misalkan sama dengan I_n^2 sehingga $\int_a^b y_n y_m dx = I_n^2$ dan $y_n^* = \dfrac{y_n}{I_n}$ maka diperoleh persamaan

$$\int_a^b y_n^* y_m^* dx = \int_a^b \frac{y_n y_m dx}{I_n I_m} = (y_n, y_m) = \delta_{nm} \qquad \ldots(2.28)$$

dimana δ_{nm} adalah delta Kronecker dan didefinisikan sebagai

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & jika\ \mathrm{n} \neq \mathrm{m} \\ 1 & jika\ n = m \end{cases}$$

c). Misalkan $y_n(x)$ adalah suatu himpunan ortogonal pada interval $a \leq x \leq b$ dan misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang dapat dituliskan dalam y_n melalui sebuah deret konvergen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x) \qquad \ldots(2.32)$$

dan deret tersebut dinamakan deret Fourier umum. Karena ortogonal, maka (2.32) dapat dikalikan dengan $y_n(x)$ (n tetap) dan mengintegralkan pada interval $a \leq x \leq b$ dan asumsikan bahwa integrasi suku demi suku diperbolehkan [3], sehingga diperoleh:

$$(f, y_n) = \int_a^b f.y_n dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f.y_n \right) y_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} (f.y_n) y_n \qquad \ldots(2.33)$$

Contoh

Hitung nilai eigen dan fungsi eigen dari masalah nilai eigen

$$y''+\lambda y = 0, \quad \text{untuk } 0 \le x \le \pi$$
$$y(0) = 0, \; y(\pi) = 0 \qquad \ldots(2.34)$$

Penyelesaian.

Masalah disini adalah mencari semua nilai eigen parameter λ yang riil, yang untuk nilai λ tersebut masalah nilai eigen (2.34) mempunyai penyelesaian taktrivial dan mencari penyelesaian taktrivial pautannya. Akar karakteristik persamaan diferensial (2.34) adalah $\pm\sqrt{-\lambda}$. Jadi bentuk penyelesaian dari persamaan diferensial tergantung pada apakah λ negatif, nol, atau positif. Karena itu, dalam menyelesaikan masalah nilai eigen dari (2.34) kita harus memeriksa tiga kasus.

Kasus 1. $\lambda<0$. Ambil $\lambda=-k^2$, dimana $k>0$. Maka persamaan diferensial (2.34) menjadi $y''-k^2y=0$, dan mempunyai penyelesaian umum berbentuk

$$y(x) = c_1e^{-kx} + c_2e^{kx} \qquad \ldots(2.35)$$

Selanjutnya, gunakan syarat batas (2.34) untuk menentukan konstanta c_1 dan c_2. Perlu diingat bahwa penyelesaian yang dicari tidak identik nol. Sehingga diperoleh:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \qquad \ldots(2.36)$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1e^{-k\pi} + c_2e^{k\pi} = 0 \qquad \ldots(2.37)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan untuk c_1 dan c_2, dapatkan $c_1=c_2=0$. Jelaslah, dari persamaan (2.36) peroleh $c_2=-c_1$, dan dengan memasukkan nilai ke dalam persamaan (2.37), didapatkan bahwa $c_1(e^{-kx} - e^{kx}) = 0$. Karena $k>0$, $e^{-k} \neq e^k$, dan karena itu $c_1=0$. Jadi $c_2=0$ dan penyelesaian (2.35) identik nol. Ini berarti bahwa masalah nilai eigen (2.34) tidak mempunyai nilai eigen yang negatif.

Kasus 2 $\lambda=0$. Dalam kasus ini persamaan diferensial (2.34) menjadi $y''=0$, dan mempunyai penyelesaian umum berbentuk

$$y(x)=c_1+c_2x \qquad \ldots(2.38)$$

Dengan menggunakan syarat batas (2.34), didapat bahwa

$$y(0)=0 \rightarrow c_1=0$$

dan

$$y(\pi)=0 \Rightarrow c_1 + c_2\pi = 0 \Rightarrow c_2\pi = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Jadi, penyelesaian (2.38) identik nol, yang berarti bahwa bahwa $\lambda=0$ bukan nilai eigen.

Kasus 3. $\lambda>0$. Ambil $\lambda=k^2$, dimana $k>0$. Maka persamaan diferensial (2.34) menjadi $y''+k^2y=0$, dan mempunyai penyelesaian umum berbentuk

$$y(x)=c_1\cos kx+c_2\sin kx \qquad \text{...(2.39)}$$

Sekarang kita gunakan syarat batas

$$y(0)=0 \rightarrow c_1=0$$

Dan

$$y(\pi)=0 \Rightarrow c_1\cos k\pi + c_2\sin k\pi = 0 \Rightarrow c_2\sin k\pi = 0$$

Jadi $c_1=0$ dan $c_2\sin k\pi=0$. Dalam kasus ini, c_1 harus nol; jadi penyelesaian taktrivial dimungkinkan hanya jika c_2 dapat dipilih tidak sama dengan nol. Tentu saja, $c_2 \sin k\pi=0$ jika $\sin k\pi=0$ atau $k\pi=n\pi$ untuk $n=1,2,\ldots$, yaitu , $k=n$ untuk $n=1,2,\ldots$ sekarang $\lambda=k^2$, dan karena itu nilai eigennya diberikan oleh

$$\lambda=n^2 \text{ untuk } n=1,2,\ldots \qquad \text{...(2.40)}$$

Persamaan (2.40) memberikan semua nilai eigen dari masalah nilai eigen (2.34). Untuk mencari fungsi eigen yang berpautan dengan nilai-nilai eigen, digunakan (2.39) dengan $c_1=0$, $c_2\neq0$, dan $k=n$, maka $y=c_2\sin nx$. Jadi, fungsi eigen dari masalah nilai batas (2.34) yang berpautan dengan nilai eigen $\lambda=n^2$, merupakan kelipatan konstanta taknol (yaitu c_2) dari

$$y=\sin nx \quad \text{untuk} \quad n=1,2 \qquad \text{...(2.41)}$$

Jadi, nilai-nilai eigen dan fungsi-fungsi eigen dari masalah nilai eigen (2.34) diberikan oleh

$$\lambda_n=n^2 \quad \text{untuk } n=1,2,\ldots \qquad \text{...(2.42)}$$

dan

$$y_n=\sin nx \text{ untuk } n=1,2,\ldots. \qquad \text{...(2.43)}$$

di mana dibubuhkan indeks nilai untuk menunjukkan pautan antara nilai eigen dan fungsi eigen.

Dalam contoh di atas jelaslah bahwa sifat (2.23) dipenuhi. Dalam masalah nilai eigen (2.34) didapat bahwa (lihat persamaan 2.43)

$y_n = \sin nx$ untuk $n=1, 2, \ldots$

Dengan menghitung hasil kali dalam (y_n, y_m) diperoleh bahwa

$$(y_n, y_m) = \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, \; jika.n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, \; jika.n = m \end{cases}$$

Agar persamaan (2.25) dipenuhi, kita harus mengalikan tiap fungsi eigen dalam (2.43) dari masalah nilai eigen (2.34) oleh

$$y_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin nx, \quad \text{untuk } n=1, 2, \ldots \qquad \ldots(2.44)$$

Terhadap fungsi-fungsi eigen ini, sifat (2.25) menyatakan bahwa jika $f(x)$ merupakan fungsi yang dua kali terdiferensialkan secara kontinyu (dalam perkataan lain, f' ada dan kontinyu) dan memenuhi dua syarat batas (2.34), yaitu $f(0)=f(\pi)=0$, maka

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(f(x), \sin nx)\sin nx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f(x)\sin nx.dx\right)\sin nx, \qquad \ldots(2.45)$$

Dan deret tersebut konvergen seragam didalam interval $0 \leq x \leq \pi$. Deret (2.45) dikenal sebagai deret Fourier sinus dari fungsi $f(x)$ didalam interval $0 \leq x \leq \pi$.

2.3. Deret Fourier

Misal fungsi berperiode $p=2\pi$ adalah

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \qquad \ldots(2.46)$$

maka deret yang diperoleh dari persamaan (2.46) adalah

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots \qquad \ldots(2.47)$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ adalah bilangan nyata. Deret demikian dinamakan deret trigonometrik, sedangkan a_n dan b_n disebut koefesien deret tersebut, dan deret trigonometrik tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \ldots(2.48)$$

Deret Fourier merupakan deret trigonometrik yang koefesien-koefesien yang diperoleh dari suatu fungsi tertentu melalui pengintegralan. [3]

Definisi 2:

Misal $\{\phi_n(x)\}$ himpunan fungsi ortogonal pada interval [a,b] dan $f(x)$ fungsi yang terdefinisi pada interval tersebut, maka jika

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)dx} \qquad \ldots(2.49)$$

maka penyajian ekspresi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)dx, \qquad x \in [a,b] \qquad \ldots(2.50)$$

merupakan deret umum fourier dari $f(x)$ pada interval [a,b] dimana c_n tersebut koefesien Fourier dari $f(x)$ terhadap himpunan ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ untuk n=1,2, ...

Definisi 3:

Jika $\{\phi_n(x)\} = \left\{1, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ yang terdefinisi pada interval [-L,L] maka

$$\phi(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \ldots(2.54)$$

dengan

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \qquad \ldots(2.55)$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

disebut deret Fourier dari $f(x)$ pada interval [-L,L] dengan koefesien-koefisien Fourier a_o, a_n, b_n.

Jika $f(x)$ terdefinisi pada [-L,L] dan $f(x)$ genap maka

$$\phi(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \qquad \ldots(2.56)$$

dimana

$$a_o = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \qquad \ldots(2.57)$$

disebut deret Fourier cosinus.

Jika $f(x)$ terdefinisi pada [-L,L] dan $f(x)$ ganjil maka

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad \ldots(2.58)$$

dimana

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx \qquad \ldots(2.59)$$

disebut deret Fourier sinus.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1. Sifat-sifat Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Masalah Nilai Batas (MNB) yang dinamakan masalah Sturm-Liouville terdiri dari persamaan diferensial:

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0\,; \qquad a \le x \le b \qquad \ldots(3.1)$$

dengan syarat batas :

$$\begin{aligned} k_1 y(a) + k_2 y'(a) &= 0 \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(3.2)$$

Persamaan (3.1) dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu $L[y] = \lambda r(x)y$, dengan $L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$ dengan asumsi bahwa fungsi p, p', q, dan r adalah kontinyu pada interval $a \le x \le b$ dan $p(x) > 0$, $r(x) > 0$, x dalam interval $a \le x \le b$, dan $r(x)$ fungsi bobot. Untuk persamaan (3.2) k_1 dan k_2 adalah konstanta bilangan nyata yang salah satu tidak nol, dan begitu juga dengan l_1 dan l_2.

Sekarang tinjau masalah Sturm-Liouville dari persamaan (3.1) dan (3.2) diatas. Persamaan tersebut terdiri dari persamaan diferensial biasa order dua yang terdapat parameter λ beserta syarat batasnya. Misal penyelesaian umum dari masalah Sturm-Liouville diatas adalah:

$$y(x) = c_1 y_1(x,\lambda) + c_2 y_2(x,\lambda) \qquad \ldots(3.3)$$

mensubstitusikan y kedalam syarat batas (3.2), diperoleh:

$$\begin{aligned} c_1[k_1 y_1(a,\lambda) + k_2 y_1'(a,\lambda)] + c_2[k_1 y_2(a,\lambda) + k_2 y_2'(a,\lambda)] &= 0 \\ c_1[l_1 y_1(b,\lambda) + l_2 y_1'(b,\lambda)] + c_2[l_1 y_2(b,\lambda) + l_2 y_2'(b,\lambda)] &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(3.4)$$

Persamaan diatas merupakan sistem persamaan linier homogen yang dapat ditinjau dari determinannya. Apabila determinan dari koefisien persamaan (3.4) sama dengan nol maka sistem persamaan linier (3.4) mempunyai penyelesaian (penyelesaian nontrivial).

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} k_1 y_1(a,\lambda) + k_2 y_1'(a,\lambda) & k_1 y_2(a,\lambda) + k_2 y_2'(a,\lambda) \\ l_1 y_1(b,\lambda) + l_2 y_1'(b,\lambda) & l_1 y_2(b,\lambda) + l_2 y_2'(b,\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(3.5)$$

Nilai λ yang menjadikan $D(\lambda)=0$ disebut nilai eigen.

Sebelum membahas lebih lanjut tentang sifat-sifat nilai eigen dan fungsi eigen pada masalah Sturm-Liouville, terlebih dahulu dibahas tentang identitas Lagrange yang merupakan dasar untuk mempelajari masalah nilai batas linier. Ambil u dan v yang mempunyai turunan kedua linier pada interval $a \le x \le b$, sehingga

$$\int_a^b L[u]v\,dx = \int_a^b [-(pu')'v + quv]\,dx.$$

$$\int_a^b L[u]v\,dx = -p(x)u'(x)v(x)\Big|_a^b + p(x)u(x)v'(x)\Big|_a^b + \int_a^b \left[-u(pv')' + \text{uqv}\right]dx$$

$$= -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_a^b + \int_a^b uL[v]\,dx$$

dengan mentranspose integral pada ruas kanan diperoleh

$$\int_a^b \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_a^b \qquad ...(3.6)$$

yang disebut sebagai identitas Lagrange.

- **Kasus 1**

Andaikan u dan v pada persamaan (3.6) juga memenuhi kondisi batas (3.2) dan misalkan $k_2 \neq 0$ dan $l_2 \neq 0$, ruas kanan persamaan (3.6) menjadi

$$-p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_a^b$$

$$= -p(b)[u'(b)v(b) - u(b)v'(b)] + p(a)[u'(a)v(a) - u(a)v'(a)]$$

$$= -p(b)[-\frac{l_1}{l_2}u(b)v(b) + \frac{l_1}{l_2}u(b)v(b)] + p(a)[-\frac{k_1}{k_2}u(a)v(a) + \frac{l_1}{l_2}u(a)v(a)] = 0$$

- **Kasus 2**

Hasilnya akan sama jika k_2 dan l_2 keduanya sama dengan nol. Hal tersebut disebabkan karena syarat batas (3.2) menjadi:

$$k_1 y(a) = 0 \quad \text{dan} \quad l_1 y(b) = 0 \qquad ...(3.7)$$

Andaikan u dan v pada persamaan (3.6) juga memenuhi syarat batas (3.2) yang karena k_2 dan l_2 keduanya nol, syarat batasnya menjadi seperti pada persamaan (3.7), ruas kanan persamaan (3.6) menjadi

$$-p(x)[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]\Big|_a^b$$

$$=-p(b)[u'(b)v(b)-u(b)v'(b)]+p(a)[u'(a)v(a)-u(a)v'(a)]$$

$$=-p(b)[u'(b).0-0.v'(b)]+p(a)[u'(a).0-0.v'(a)]=0$$

Jadi untuk diferensial operator L yang didefinisikan oleh persamaan $L[y]=\lambda r(x)y$ dan jika fungsi u dan v memenuhi syarat batas (3.2), identitas lagrange dapat direduksi menjadi:

$$\int_a^b \{L[u]v-uL[v]\}dx=0 \qquad \text{...(3.8)}$$

Sedangkan diketahui bahwa perkalian dalam (*inner product)* pada dua nilai real fungsi u dan v pada interval $a \le x \le b$ diberikan oleh persamaan:

$$(u,v)=\int_a^b u(x)v(x)dx \qquad \text{...(3.9)}$$

Sehingga persamaan (3.8) dapat ditulis menjadi

$$(L[u],v)\text{-}(u,L[v])=0 \qquad \text{...(3.10)}$$

Jika ada nilai eigen lebih dari satu dari masalah Sturm-Liouville, maka korespondensi nilai-nilai eigen tersebut merupakan fungsi eigen. Misalkan λ adalah nilai eigen yang kemungkinan berbentuk bilangan komplek pada masalah Sturm-Liouville, dan berkorespondensi dengan fungsi eigennya ϕ yang juga berbentuk fungsi komplek. Misalkan $\lambda=\mu+i\omega$ dan $\phi(x)=U(x)+iV(x)$, dimana μ, ω, $U(x)$ dan $V(x)$ adalah riil. Ambil $u=\phi$ dan juga $v=\phi$ dalam persamaan (3.10) dan

$$(L[\phi],\phi)=(\phi,L[\phi]) \qquad \text{...(3.11)}$$

Diketahui bahwa $L[\phi]=\lambda r\phi$, sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$(\lambda r\phi,\phi)=(\phi,\lambda r\phi) \qquad \text{...(3.12)}$$

Dengan menggunakan definisi perkalian dalam pada bilangan kompleks yang didefinisikan sebagai : $(u,v)=\int_a^b u(x)\overline{v}(x)dx$, maka persamaan (3.12) dapat ditulis menjadi:

$$\int_a^b \lambda r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)dx=\int_a^b \phi(x)\bar{\lambda}\bar{r}\bar{\phi}(x)dx \qquad \ldots(3.13)$$

selama $r(x)$ real, persamaan (3.13) direduksi menjadi

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)dx=0$$

atau

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b r(x)[U^2(x)+V^2(x)]dx=0 \qquad \ldots(3.14)$$

integran dalam persamaan (3.14) adalah nonnegatif dan tidak identik nol, maka faktor $\lambda-\bar{\lambda}=2i\omega$ harus nol, sehingga ω=0 dan $\lambda=\mu$. Maka dapat disimpulkan bahwa nilai eigen pada masalah Sturm-Liouville adalah bilangan riil.

Misalkan, ϕ_1, dan ϕ_2 adalah fungsi eigen pada masalah Sturm-Liouville sehingga bentuk lain dari persamaan (3.1), yaitu $L[y]=\lambda r(x)y$ fungsi-fungsi eigen tersebut dapat ditulis:

$$\begin{aligned}L[\phi_1]&=\lambda_1 r(x)\phi_1\\ L[\phi_2]&=\lambda_2 r(x)\phi_2\end{aligned} \qquad \ldots(3.15)$$

Dari identitas Lagrange diketahui bahwa:

$$\int_a^b L[u]vdx=\int_a^b[-(pu')'v+quv]dx. \qquad \ldots(3.16)$$

dimana *u, v* fungsi yang kontinyu pada turunan kedua dan *u, v* memenuhi syarat batas (3.2) sehingga identitas Lagrange menjadi:

$$\int_a^b\{L[u]v-uL[v]\}dx=0 \qquad \ldots(3.17)$$

Persamaan (3.17) berbentuk perkalian dalam, sehingga dapat ditulis menjadi:

$$(L[u],v)-(u,L[v])=0 \qquad \ldots(3.18)$$

Misalkan $u=\phi_1$ dan $v=\phi_2$ dan substitusikan pada persamaan (3.18) sehingga diperoleh

$$\lambda_1\int_a^b r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx - \lambda_2\int_a^b \phi_1(x)r(x)\phi_2(x)dx = 0$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0 \qquad \ldots(3.19)$$

dimana $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sehingga

$$\int_a^b r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0 \qquad \ldots(3.20)$$

Persamaan (3.20) tersebut memenuhi kondisi keortogonalan fungsi, sehingga fungsi-fungsi eigen pada masalah Sturm-Liouville adalah ortogonal.

Fungsi-fungsi eigen yang ortogonal diatas dapat dinormalkan:

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b r(x)[\phi_n(x)]^2\,dx} = 1 \qquad \ldots(3.21)$$

atau dapat ditulis dengan $\int_a^b r(x)[\phi_n(x)]^2\,dx = 1$ $\qquad \ldots(3.22)$

3.2. Mengekspansikan Fungsi Eigen kedalam Deret

Fungsi-fungsi eigen dari masalah Sturm Liouville merupakan fungsi-fungsi ortogonal (3.20) pada interval $a \le x \le b$ dan misalkan ada $f(x)$ yang terdefinisi pada interval tersebut maka fungsi-fungsi eigen pada masalah Sturm-Liouville dapat dijadikan suatu deret (definisi deret Fourier)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \qquad \ldots(3.23)$$

dimana ϕ_n merupakan fungsi eigen yang menjadi penyelesaian masalah Sturm-Liouville dan ortogonal, sedangkan koefisien c_n disajikan dalam

$$c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) \phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) dx} \qquad \ldots(3.24)$$

Dari definisi dan teorema 1 (tentang perkalian dalam) pada sub bab 2.2 diketahui bahwa

$(\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x) dx = 1$, jika $n=m$ sehingga $\int_a^b \phi_n^2(x) dx = 1$

Jadi c_n dapat ditulis menjadi:

$$c_n = \int_a^b r(x) f(x) \phi(x) dx, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad \ldots(3.25)$$

Karena fungsi-fungsi eigen persamaan (3.23) merupakan deret Fourier, dan dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\phi(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L}) \qquad \ldots(3.26)$$

dengan asumsi bahwa $\{\phi_n(x)\} = \left\{1, \cos \frac{n\pi}{L} x, \sin \frac{n\pi}{L} x\right\}$ dan dari definisi deret Fourier diketahui bahwa:

$$a_o = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

Substitusikan a_o, a_k, b_k kedalam persamaan (3.26) , sehingga didapat:

$$\phi(x) = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{k\pi}{L}x.\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\frac{k\pi}{L}tdt + \sin\frac{k\pi}{L}x.\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\sin\frac{k\pi}{L}tdt$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^{2L}\left[\frac{1}{2}f(t) + \sum_{k=1}^{n} f(t)\left(\cos\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi t}{L} + \sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{k\pi t}{L}\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi(x-t)}{L}\right)dt$$

dan diketahui bahwa $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$, maka persamaan diatas dapat diubah menjadi:

$$\phi(x) = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\frac{\sin\frac{(n+1/2)\pi(x-t)}{L}}{2\sin\frac{\pi(x-t)}{2L}}dt \qquad \ldots(3.27)$$

Panjang interval pada integran diatas adalah $2L$ sehingga intervalnya dapat dirubah dengan syarat panjang interval tetap sama yakni $2L$, sehingga persamaan (3.23) dapat ditulis menjadi:

$$\phi(x) = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L}\left(f(t)\frac{x-t}{2\sin\frac{\pi(x-t)}{2L}}\right)\frac{\sin\frac{(n+1/2)\pi(x-t)}{L}}{x-t}dt \qquad \ldots(3.28)$$

dan diketahui dalam suatu teorema bahwa:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{f(t)\sin n(x-t)}{x-t}dt = \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \qquad \ldots(3.29)$$

kita ambil $\lim n\to\infty$ dan

$F(t) = f(t)\dfrac{x-t}{2\sin\frac{\pi(x-t)}{2L}}$ kontinyu pada interval $a \le t \le a+2L$ dan turunan pada $t=x$ ada, maka:

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\int_a^{a+2L}\left(f(t)\frac{x-t}{2\sin\frac{\pi(x-t)}{2L}}\right)\frac{\sin\frac{(n+1/2)\pi(x-t)}{L}}{x-t}dt$$

$$=\frac{\pi}{L}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2L}F(t).\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi(x-t)}{2L}}{x-t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2L}\left[F(x+)+F(x-)\right]$$

diketahui bahwa $F(x+)=\lim_{t\to x^-}F(t)=f(x+)(L/\pi)$, demikian juga $F(x\text{-})$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)&=\frac{\pi}{2L}\left(\frac{L}{\pi}f(x+)+\frac{L}{\pi}f(x-)\right)\\&=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\end{aligned}\qquad\ldots(3.30)$$

Jadi deret dari fungsi-fungsi eigen pada masalah Sturm-Liouville konvergen ke $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

3.3. Menyelesaikan Masalah Sturm-Liouville

Masalah Sturm-Liouville, dapat diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. **Langkah pertama**

   Menentukan Penyelesaian nontrivial dari penyelesaian umum yang memenuhi syarat batas yang telah ditentukan dari ketiga kemungkinan nilai λ, yaitu nol, negatif, dan positif

2. **Langkah kedua**

   Menentukan nilai eigen (λ) dan fungsi eigen ($\phi_n(x)$) dari penyelesaian nontrivial

3. **Langkah ketiga**

   Penyelesaian atau fungsi-fungsi eigen diperluas kedalam deret tak hingga yaitu deret Fourier.

Menyelesaikan Masalah Sturm-Liouville yang Terdiri dari PDP atau Syarat Batas Non Homogen

Dalam menyelesaikan masalah Sturm-Liouville diatas apabila persamaan diferensialnya berbentuk persamaan diferensial parsial (PDP) homogen dengan sarat batas homogen, maka persamaan diferensial parsial (PDP) tersebut dapat diubah menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) dengan metode pemisahan peubah, sehingga didapat persamaan persamaan diferensial biasa (PDB) dan syarat batas homogen dan memenuhi masalah Sturm-Liouville, dan penyelesaiannya dapat ditempuh langkah-langkah seperti diatas.

Namun, apabila dijumpai persamaan diatas berbentuk persamaan diferensial parsial atau syarat batasnya nonhomogen, maka untuk mengubah menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) dengan metode pemisahan peubah tidak dapat dilakukan. Dalam kasus ini, hal yang perlu dikerjakan adalah bagaimana menghomogenkan dahulu persamaan diferensial parsial (PDP) atau syarat batasnya. Untuk menghomogenkan syarat batas dapat dilakukan dengan mengurangkan fungsi yang sesuai dan memenuhi syarat batas tersebut. Langkah selanjutnya adalah bagaimana mengubah persamaan diferensial parsial (PDP) menjadi persamaan diferensial biasa (PDB), sehingga memenuhi masalah Sturm-Liouville. Misal, pada adalah perpindahan panas dalam sebatang logam dengan titik ujung tetap dengan bentuk persamaannya adalah

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\alpha \partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u_L, \quad u(L,t) = u_R \qquad \text{...(3.31)}$$

untuk persamaan diatas pemisahan peubah tidak dapat digunakan karena syarat batasnya nonhomogen, sehingga kita asumsikan penyelesaian persamaan (3.31) adalah

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \qquad \text{...(3.32)}$$

dimana v adalah solusi *transient* yang mengakibatkan syarat batas menjadi nol dan mentransfer *state* awal menjadi *steady state* dan w adalah solusi *steady state*. Persoalannya sekarang adalah menghomogenkan syarat batas sehingga metode pemisahan peubah dapat dilaksanakan. Turunkan persamaan (3.32) terhadap t sehingga didapat:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^2 (u-w)}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad ...(3.33)$$

langkah selanjutnya adalah menghomogenkan syarat batas, sehingga

$$\begin{aligned} v(0,t) &= u(0,t)-w(0,t)=u_L-u_L=0 \\ v(L,t) &= u(l,t)-w(L,t)=u_R-u_R=0 \end{aligned} \qquad ...(3.34)$$

Jadi persamaan (3.31) sekarang menjadi:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\ \ v(0,t)=0,\ v(L,t)=0\text{, dan} \qquad ...(3.35)$$

$$w''=0,\ \ w(0)=u_L \text{ dan } w(L)=u_R \qquad ...(3.36)$$

Solusi pada persamaan (3.35) (solusi *transient*) dapat selesaikan dengan pemisahan variabel, sehingga diperoleh persamaan diferensial order 2 dan beserta syarat batasnya yang homogen, sehingga memenuhi masalah Sturm-Liouville, langkah selanjutnya dapat ditempuh langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah Sturm-Liouville tersebut. Untuk penyelsaian persamaan (3.36) dapat diintegralkan dua kali dan disubstitusikan dengan syarat batasnya. Jadi persamaan (3.31) penyelesaiannya dapat dinyatakan dalam penyelesaian *steady state* w dan *transient* v.

Bentuk persamaan diferensial yang non homogen ataupun syarat batasnya tidak selalu dapat dihomogenkan, misal persamaan konduksi panas dengan syarat batas non homogen yang tergantung pada waktu. Dalam kasus ini untuk mencari solusinya akan sulit. Dalam pencarian solusi pada kasus ini, masalah Sturm-Liouville digunakan untuk menggenerate himpunan ortogonal fungsi-fungsi eigen, yang mana bentuk umum dari fungsi-fungsi eigen tersebut digunakan untuk mencari solusi aproksimasi dari permasalahan diatas yang dicari dengan menggunakan kombinasi metode pemisahan peubah dengan deret *Fourier*.

Misal persamaan diferensial dengan syarat batasnya non homogen dan tergantung waktu adalah:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\qquad u(0,t)=g_1(t),\quad u(L,t)=g_2(t) \qquad ...(3.37)$$

Maka solusi dari persamaan diatas adalah $u(x,t)=\sum_n a_n(t)\phi_n(x)$, dengan $\phi_n(x)$ adalah kumpulan fungsi-fungsi yang terdefinisi pada domain yang dibahas dan $a_n(t)$ adalah fungsi-fungsi dari koefisien yang tidak diketahui. Bila persamaan diatas dikalikan dengan $\phi_m(x)$, kemudian diintegralkan terhadap domain ruang x

$$\int_0^L u(x,t)\phi_m(x)dx=\sum_n a_n\int_0^L \phi_n(x)\phi_m(x)dx \qquad ...(3.38)$$

untuk sebarang fungsi $\phi_n(x)$, solusi (3.38) menjadi sangat kompleks. Oleh karena itu pemilihan terbaik untuk $\phi_n(x)$ adalah fungsi yang merupakan kumpulan fungsi-fungsi ortogonal dalam domain yang didefinisikan yang merupakan solusi dari masalah Sturm-Liouville.

Untuk menambah pemahaman dari pembahasan diatas sebaiknya tinjau dua contoh berikut ini:

Contoh:

$$y''+\lambda y=0 \qquad ...(3.39)$$

$$y(0)=0, \quad y(\pi)=0 \qquad ...(3.40)$$

Tentukan penormalan fungsi eigen pada masalah tersebut dan ekspansikan fungsi $f(x)=x$, $0<x<1$ kedalam bentuk penormalan fungsi eigen $\phi_n(x)$.

Jawab

1. Langkah pertama

Penyelesaian persamaan diferensial diatas dapat menjadi beberapa bentuk tergantung pada nilai λ, sehingga perlu memperhatikan beberapa kasus:

a. λ=0

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial (3.39) adalah:

$$y=c_1x+c_2 \qquad ...(3.41)$$

Dengan memasukkan syarat batas (3.40) maka diperoleh:

$$c_2=0, \text{ dan } c_1\pi+c_2=0 \qquad ...(3.42)$$

Penyelesaian persamaan (3.42) tersebut adalah $c_1=c_2=0$ sehingga pada kasus ini tidak mempunyai penyelesaian nontrivial, sehingga λ=0 dan bukan merupakan penyelesaian yang dicari.

b. $\lambda<0$

misal $\lambda=-v^2$, penyelesaian dari persamaan diferensial (3.39) adalah

$$y = c_1 e^{vx} + c_2 e^{-vx} \qquad \ldots(3.43)$$

dengan memasukkan syarat batas (3.40) diperoleh:

$$c_1 + c_2 = 0 \; ; \; c_1 e^{\pi k} + c_2 e^{-\pi k} = 0 \qquad \ldots(3.44)$$

dari kedua persamaan tersebut diperoleh $c_1=c_2=0$ dan $y=0$, sehingga pada kasus ini juga tidak diperoleh penyelesaian nontrivial, sehingga $\lambda=-k^2$ bukan penyelesaian yang dicari (bukan nilai eigen)

c. $\lambda>0$

misal $\lambda=v^2$ penyelesaian umum dari persamaan diferensial (3.39) adalah:

$$y=c_1 \cos vx + c_2 \sin vx \qquad \ldots(3.45)$$

dari syarat batas yang pertama dari (3.40), diperoleh $y(0)=c_1=0$, dan syarat batas kedua dari (3.40) menghasilkan

$$y(\pi)=c_2 \sin v\pi=0 \text{ atau } v=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \ldots(3.46)$$

untuk $v=0$, diperoleh $y\equiv 0$; dan untuk $\lambda=1, 4, 9, 16, \ldots$ dengan mengambil $c_2=c_n$ diperoleh

$$y(x)=k_n \sin vx \; , \; v=1,2,\ldots$$

2. Langkah kedua

Jadi nilai eigen pada masalah ini adalah $\lambda=v^2$, dengan $v=1,2, \ldots$, dengan fungsi eigennya adalah

$$y(x)=k_n \sin vx, \quad v=1,2, \ldots \qquad \ldots(3.47)$$

Untuk menormalkan fungsi eigen (3.47) kita gunakan:

$$\int_0^{\pi} r(x)\phi_n(x)dx = 1$$

$$\int_0^{\pi} 1.k_n^2 \sin^2 vxdx = k_n^2 \int_0^{\pi} \sin^2 vx\, dx = k_n^2 \int_0^{\pi} \sin^2 vx\, dx = k_n^2 \int_0^{\pi} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2vx)dx = 1$$

$$k_n^2\left\{\frac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{2}\sin 2vx}{2v}\Bigg|_0^\pi\right\}=1$$

$$k_n^2.\frac{1}{2}\pi=1$$

$$k_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Jadi penormalan fungsi eigen pada masalah ini adalah:

$$\phi_n(n)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin vx,\quad v=1,2,\ldots \qquad \ldots(3.48)$$

3. Langkah ketiga

Untuk mengekspansi f kedalam fungsi eigen ϕ_n kita tulis:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$$

dimana koefisien c_n diberikan dalam persamaan:

$$c_n=\int_0^\pi f(x)\phi_n(x)dx=k_n\int_0^\pi x\sin vxdx$$

$$=k_n\left|-\frac{x}{v}\cos vx+\frac{1}{v^2}\sin vx\right|_0^\pi$$

$$=k_n\left(-\frac{\pi}{v}\cos v\pi+\frac{1}{k^2}\sin v\pi\right)$$

$$=-k_n\frac{\pi}{}\cos v\pi$$

Jadi ekspansi f kedalam fungsi eigen ϕ_n adalah

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{\pi}{v}\cos v\pi.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin vx \qquad \ldots(3.49)$$

Contoh

Misalkan sebatang logam dengan panjang L=2 m yang diisolasi kedua ujungnya dengan distribusi temperatur $f(x)$. Pada saat t=0 ujung sebelah kanan didinginkan sehingga temperatur akan turun menjadi nol secara eksponensial sebagai $u_R(t) = u_{R_0} e^{-\mu t}$; dimana u_{Ro}=500°C adalah suhu pada sebelah kanan mula-mula, difusivitas thermal $\frac{k}{C_p \rho} = 0{,}0001\ m^2/\text{detik}$ dan $f(x) = \left[\frac{u_{R_0} - u_L}{L}\right] x + u_L$.

Ujung sebelah kiri temperaturnya dipertahankan pada u_L=200°C. Tentukan penyelesaian permasalahan diatas.

Penyelesaian:

Langkah-langkah untuk menyelesaikan persoalan diatas adalah:

1. Mencari Bentuk Umum dari Persoalan atau Permasalahan

Bentuk umum dari permasalahan diatas adalah:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \ldots(3.50)$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = u_L = 200^o C,\ \ u(L,t) = u_R(t) = u_{R_0} e^{-\mu t},\ u_{R_0} = 500^o C \qquad \ldots(3.51)$$

dan distribusi awal

$$u(x,0) = f(x) = \left(\frac{u_{R_0} - u_L}{L}\right) x + u_L \qquad \ldots(3.52)$$

2. Menggunakan Pemisahan Peubah untuk Mencari Masalah *Steady State* dan Masalah *Transient*

Misalkan penyelesaiannya adalah $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, yang mana w adalah penyelesaian *steady state* yang menunjukkan hilangnya profil awal akibat bertambahnya waktu sehingga penyelesaian ini memenuhi persamaan diferensial beserta syarat batas yang diberikan dan v adalah fungsi *transient* yang mengakibatkan syarat batas menjadi nol dan mentransfer *state* awal menjadi *steady state*. Substitusikan penyelesaian tersebut kedalam persamaan diferensial (3.50) dan (3.51) memberikan

- masalah *transient*

  $v_t = \alpha v_{xx}$ dengan $v(0,t) = 0$; $v(L,t) = u_{R_0} e^{-\mu t}$ dan $v(x,0) = f(x) - w(x)$,

- masalah *steady state*

  $w'' = 0$ dengan $w(0) = u_L$ dan $w(L) = 0$.

Dengan mengintegralkan dua kali pada masalah *steady State* diatas, diperoleh:

$$w(x) = C_1 x + C_2 \qquad \ldots(3.53)$$

Kemudian masukkan syarat batasnya untuk $x = 0 \rightarrow w(0) = u_L = C_1(0) + C_2$ atau $C_2 = u_L$, dan untuk $x = L \rightarrow w(L) = C_1 L + u_L = 0$ atau $C_1 = -\frac{u_L}{L}$, maka penyelesaian *steady state*nya adalah:

$$w(x) = \frac{u_L}{L}(L - x) \qquad \ldots(3.54)$$

3. Merepresentasikan Masalah *Transient* kedalam Deret

Dalam kasus ini masalah *transient* masih memiliki syarat batas yang tidak homogen, jadi metode pemisahan peubah belum dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan ini. Misalkan penyelesaian dari masalah *transient* $v(x,t)$ adalah $v(x,t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(x)$ dimana $\phi_n(x)$ merupakan fungsi-fungsi eigen ortogonal sesuai dengan masalah Sturm-Liouville dengan syarat batas homogen dinyatakan oleh $\phi''(x) + \lambda^2\phi(x) = 0$, dengan $\phi(0) = 0$ dan $\phi(L) = 0$ dan penyelesaiannya (mencari penyelesaian masalah Sturm-Liouville ini dapat ditempuh langkah-langkah seperti pada contoh 1) $\phi_n(x) = \sin \lambda_n x$ dimana $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$; $n = 0,1,2,3,\ldots$. Syarat batas dan syarat awalnya adalah $v(0,t) = g_1(t) = 0$, $v(L,t) = g_2(t) = u_{R_0} e^{-\mu t}$ dan

$$v(x,0) = h(x) = f(x) - w(x) = \left(\frac{u_{R_0} - u_L}{L}\right)x + u_L - \frac{u_L}{L}(L - x) = \frac{u_{R_0}}{L}x$$

4. Mencari Koefisien dari Masalah *Transient* (a_n)

Karena pada masalah *transient* diatas solusinya adalah $v(x,t) = \sum_n a_n(t) \sin \lambda_n x$, maka $a_n(t)$ adalah koefisien dalam deret Fourier sinus yang didefinisikan sebagai

$$a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L v(x,t) \sin \lambda_n x dx \,. \qquad \ldots(3.55)$$

Turunkan persamaan (3.55) terhadap t; yaitu $\frac{\partial}{\partial t} a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L v_t(x,t) \sin \lambda_n x dx$, kemudian ganti $v_t(x,t)$ dengan $\alpha v_{xx}(x,t)$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_n(t) = \frac{2\alpha}{L} \int_0^L v_{xx}(x,t) \sin \lambda_n x dx \qquad \ldots(3.56)$$

Integralkan ruas kanan dengan integral parsial $\int w dz = wz - \int z dw$ dimana $w = \sin \lambda_n x$, $dz = \frac{\partial}{\partial x}[v_x(x,t)]dx$, $dw = \lambda_n \cos \lambda_n x dx$ dan $z = v_x(x,t)$ diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_n(t) = \frac{2\alpha}{L} \left\{ [v_x(x,t) \sin \lambda_n x]_0^L - \lambda_n \int_0^L v_x(x,t) \cos \lambda_n x dx \right\}$$

$$= -\frac{2\alpha\lambda_n}{L} \int_0^L v_x(x,t) \cos \lambda_n x dx$$

Integralkan ruas kanan sekali lagi dengan menggunakan integral parsial; $w = \cos \lambda_n x$, $dz = \frac{\partial}{\partial x}[v(x,t)]dx$, $dw = -_n \sin \lambda_n x dx$ dan $z = v(x,t)$ menghasilkan:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_n(t) = -\frac{2\alpha\lambda_n}{L} \left\{ [v(x,t) \cos \lambda_n x]_0^L + \lambda_n \int_0^L v(x,t) \sin \lambda_n x dx \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a_n(t) = -\frac{2\alpha\lambda_n}{L} \left\{ [v(L,t) \cos n\pi x - v(0,t)] + \lambda_n a_n(t) \frac{L}{2} \right\}$$

Dengan memasukkan syarat batas untuk menggantikan $v(0,t)$ dan $v(L,t)$ akan didapat bentuk lebih sederhana sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_n(t) = -\frac{2\alpha\lambda_n}{L} \left\{ [g_2(t) \cos n\pi x - g_1(t)] + \lambda_n a_n(t) \frac{L}{2} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}a_n(t) = -\frac{2\alpha\lambda_n}{L}\left[(-1)^n g_2(t) - g_1(t)\right] - \alpha\lambda_n^2 a_n(t)$$

atau $\frac{\partial}{\partial t}a_n(t) + \alpha\lambda_n^2 a_n(t) = \beta_n g_n(t)$ dengan $\beta_n = -\frac{2\alpha\lambda_n}{L}$ dan $g_n(t) = (-1)^n g_2(t) - g_1(t) = (-1)^n u_{R_0} e^{-\mu t}$. Syarat awalnya untuk $a_n(t)$ adalah $a_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L v(x,0)\sin\lambda_n x dx = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\lambda_n x dx$ merupakan persamaan diferensial linier biasa order satu dengan faktor integrasi $e^{\alpha\lambda_n^2 t}$, sehingga persamaan yang akan dicari penyelesaiannya $\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{\alpha\lambda_n^2 t}a_n(t)\right] = e^{\alpha\lambda_n^2 t}\frac{\partial}{\partial t}a_n(t) + \alpha\lambda_n^2 e^{\alpha\lambda_n^2 t}a_n(t) = C_n\left[e^{\alpha\lambda_n^2 t - \mu t}\right]$, dimana $C_n = \beta_n(-1)^n u_{R_0}$. Integralkan persamaan terakhir dengan batas 0 sampai t menghasilkan

$$a_n(t) = a_{n_0}e^{\alpha\lambda_n^2 t} + C_n\frac{e^{-\mu t} - e^{\alpha\lambda_n^2 t}}{\alpha\lambda_n^2 - \mu} \text{ dengan } a_{n_0} = \frac{2}{L}\frac{u_{R_0}}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2u_{R_0}}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Dengan diperolehnya $v(x,t)$ dan $w(x)$ maka hasil akhir dari $u(x,t)$ untuk permasalahan ini adalah $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ dimana:

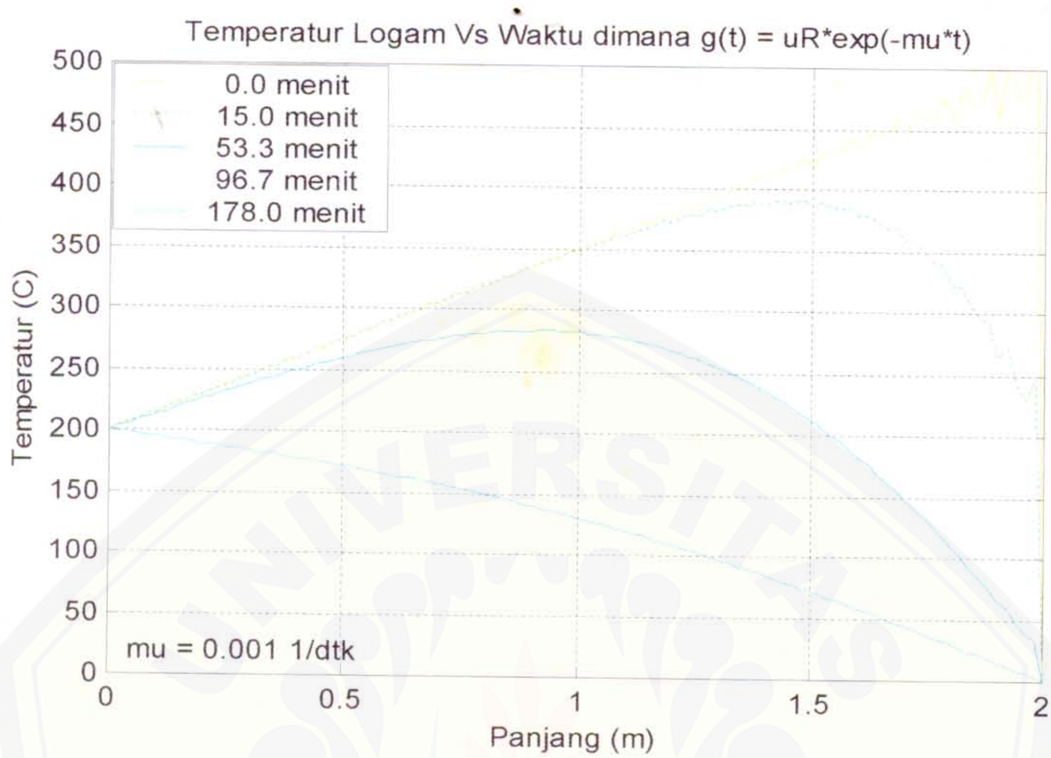
$$v(x,t) = \sum_n\left[a_{n_0}e^{\alpha\lambda_n^2 t} + C_n\frac{e^{-\mu t} - e^{\alpha\lambda_n^2 t}}{\alpha\lambda_n^2 - \mu}\right]\sin\lambda_n x,$$

$$w(x) = \frac{u_L}{L}(L - x),$$

$$a_{n_0} = \frac{2u_{R_0}}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

$$C_n = \frac{2\alpha\lambda_n^2 u_{R_0}}{L}(-1)^{n+1}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Untuk nilai μ=0,001 ujung kanan dari logam akan turun temperaturnya setelah 178 menit, seperti terlihat pada gambar dibawah ini.


Temperatur Logam Vs Waktu dimana g(t) = uR*exp(-mu*t)
0.0 menit
15.0 menit
53.3 menit
96.7 menit
178.0 menit
Temperatur (C)
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
mu = 0.001 1/dtk
0
0.5
1
1.5
2
Panjang (m)

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyce,W.E, DiPrima,R.C. (1996). *Elementary Differential Equation And Boundary Value Problem*. John Wiley & Sons.Inc. New York.

[2] Finizio dan Ladas. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern* (alih bahasa Dra. Widiarwati Santoso). Erlangga. Jakarta.

[3] Kreyszig.E (1993). *Matematika Teknik Lanjutan*.(alih bahasa Bambang Sumantri) PT.Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

[4] O'Neil, Peter V. (1991). *Advance Engineering Mathematics*. Wadsworth Inc. California.

[5] Trim, Donald W. (1989). *Applied Partial Differential Equation*. PWS Publishing Company. Boston.

LAMPIRAN

```
%
% Panas3.M   Perpindahan panas pada sebatang logam dimensi satu
%
% Penyelesaian analitik menggunakan metode pemisahan peubah :
%   ut(x,t) = alf*uxx(x,t)
% dimana
%   u(L,t) = g(t) = ur*exp(-mu*t)    Penurunan suhu ujung kanan
%   u(0,t) = ul                      Ujung kiri dipertahankan suhunya
%   u(x,0) = f(x) = (ur-ul)x/L + ul  Profil linier dengan solusi
%   u(x,t) = v(x,t) + w(x)
% dimana v(x,t) solusi transient dan w(x) solusi steady state.
%
% NB: Metode Ekspansi Fungsi Eigen digunakan untuk mengaproksimasi
% solusi v(x,t)
%
%
% Mulai
  clear all,   close all
%
% Diketahui Input sebagai berikut
  alf = 0.0001;     % m^2/dtk difusivitas panas
  L = 2;            % m      panjang logam
  ul = 200;         % C      suhu uj. kiri
  ur = 500;         % C      suhu awal ujung kanan
  maxt =  80;       % maksimum ekspansi
  tol = 0.001;      % toleransi utk menghentikan ekspansi deret
  nfig = 0;         % penghit. gambar
  imu = menu('Pilih nilai penurunan suhu ujung kanan', ...
           'Gunakan Penurunan Perlahan (mu = 0.001 1/s)', ...
           'Gunakan Penurunan cepat (mu = 0.005 1/s)');
  if imu == 1,   mu = .001;   end
  if imu == 2,   mu = .005;   end
%
% vektor titik-titik untuk mengevaluasi fungsi
  Nx = 101;   x = linspace(0,L,Nx)';
%
% w(x) solusi steady state
  w = ul*(L-x)/L;
%
% Menghitung ln, ano and cn
  for n = 1:maxt
    ln(n) = n*pi/L;    ano(n) = (2*ur/(pi*n))*(-1)^(n+1);
    cn(n) = (2*alf*ur*ln(n)/L)*(-1)^(n+1);
  end
%
% def. nilai waktu dan distribusi ruang-waktu
```

```
    Nt = 5;   tt = [0 900 3200 5800 10680];   %(waktu dalam detik)
    u = zeros(Nx,Nt);
%
%   Memulai loop nilai waktu
    for j = 1:Nt
     t = tt(j);   bb = -mu*t;  cc = -alf*t;  v = zeros(Nx,1);
     n = 0;   mrerr = 1.0;
      while mrerr > tol   &   n < maxt
        n = n+1;  k1 = exp(bb);  k2 = exp(cc*ln(n)*ln(n));  k3 = alf*ln(n)*ln(n);
        vn = (ano(n)*k2 + cn(n)*(k1-k2)/(k3-mu))*sin(ln(n)*x);
        v = v + vn;   rerr = vn(2:Nx-1)./v(2:Nx-1);   mrerr = max(abs(rerr));
      end
     u(:,j) = v + w;
     disp([' Diperlukan ',num2str(n),' suku agar konvergen pada t = ',num2str(t),'
dtk'])
    end
%
%   set color and marker code for creating plots
    Ncm = 6;
    scm = ['r-';      % magenta solid
           'g:';      % cyan dotted
           'b-';      % red solid
           'm:';      % green dotted
           'c-';      % blue solid
           'y:'];     % yellow dotted
%
%   Memplot Kurva u variasi waktu
   st = zeros(Nt,9);
    if Nt < 6
     nfig = nfig+1;   figure(nfig)
     for j = 1:Nt
       h(j) = plot(x,u(:,j),scm(j,:)); hold on
       st(j,:) = sprintf('%5.1f min',tt(j)/60);
     end
     hold off
     axis([0 2 0 500]);
     title('Temperatur Logam Vs Waktu dimana g(t) = uR*exp(-mu*t)')
     grid,xlabel('Panjang (m)'),ylabel('Temperatur (C)')
     legend(h,char(st))
     text(0.04,20,['mu = ',num2str(mu),' 1/dtk'])
   end
%
%   Selesai
%
```