ANALISIS SUPER (a, d)-S_3 ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI GRAF HELM UNTUK PENGEMBANGAN *CIPHERTEXT* DAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Skripsi

Oleh

Kholifatur Rosyidah

NIM 120210101026

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS JEMBER

2016

ANALISIS SUPER (a, d)-S_3 ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI GRAF HELM UNTUK PENGEMBANGAN *CIPHERTEXT* DAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Skripsi

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Kholifatur Rosyidah
NIM 120210101026

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Segala puji bagi Allah, Tuhan yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat dan salam semoga terlimpah kepada makhluk ciptaan-Mu yang paling mulia, Nabi Muhammad S.A.W., kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda Aknan Riyadi dan ibunda Kusmiyati yang senantiasa mengalirkan rasa cinta, kasih sayang, dan cucuran keringat serta doa yang tiada pernah putus untuk anak semata wayangmu ini, selalu mendukung setiap perjalanan hidupku, selalu menghiasi hariku dengan canda tawa dan penuh kasih sayang. Bagiku, kalian laksana surgaku;

2. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., dan Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsi ini;

3. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;

4. Keluarga besar di Situbondo, dan keluarga besar di Bondowoso, terutama bude Intan sekeluarga dan bude Rif sekeluarga yang selalu mendoakan dan menyayangiku;

5. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

HALAMAN MOTTO

وَمَن جَٰهَدَ فَإِنَّمَا يُجَٰهِدُ لِنَفۡسِهِۦٓۚ إِنَّ ٱللَّهَ لَغَنِيٌّ عَنِ ٱلۡعَٰلَمِينَ ٦

"Barangsiapa bersungguh-sungguh, sesungguhnya kesungguhannya itu adalah untuk dirinya sendiri"
(Q.S. Al-Ankabut [29] : 6)

"Tak ada sesuatu keadaan yang lebih dekat pada diri manusia melebihi kemauan."
(Mario Teguh)

"Jika nasib adalah titik, dan usaha adalah sisi; maka hidup adalah sebuah graf. Tantangan kita adalah bagaimana merangkai titik dan sisi tersebut agar tercipta sebuah graf yang keindahannya dapat dinikmati bersama"
(Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Kholifatur Rosyidah

NIM : 120210101026

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisis Super (a, d)-S_3 Antimagic Total Dekomposisi Graf Helm untuk Pengembangan Ciphertext dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 06 Januari 2016

Yang menyatakan,

Kholifatur Rosyidah

NIM. 120210101026

HALAMAN PENGAJUAN

ANALISIS SUPER (a, d)-S_3 ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI GRAF HELM UNTUK PENGEMBANGAN *CIPHERTEXT* DAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaiakan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama	: Kholifatur Rosyidah
NIM	: 120210101026
Tempat dan Tanggal Lahir	: Situbondo, 26 Desember 1993
Jurusan / Program Studi	: Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D	Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19700307 199512 2 001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul : Analisis Super (a,d)-S_3 Antimagic Total Dekomposisi Graf Helm untuk Pengembangan Ciphertext dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Rabu

Tanggal : 06 Januari 2016

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D	Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19700307 199512 2 001
Anggota I,	Anggota II,
Arika Indah Kristiana, S.Pd, M.Si	Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
NIP. 19760502 200604 2 001	NIP. 19820529 200912 1 003

Mengetahui,
Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd
NIP. 19540501 198303 1 005

RINGKASAN

Analisis Super (a, d)-S_3 Antimagic Total Dekomposisi Graf Helm untuk Pengembangan Ciphertext dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi; Kholifatur Rosyidah, 120210101026; 2015: 119 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Graf adalah salah salah kajian dalam matematika diskrit. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi, dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda.

Graf helm H_n adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel. Gabungan graf Helm diskonektif merupakan gabungan saling lepas isomorfis yang identik yang dinotasikan dengan (mH_n) dimana $m \geqslant 2$, $n \geqslant 3$. Penelitian sebelumnya yaitu Farisandri (2012) menggunakan graf Helm untuk mencari nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan graf tersebut. Sedangkan tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui pelabelan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada graf Helm H_n konektif dan diskonektif, untuk mengetahui pengembangan *ciphertext* dengan menggunakan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada graf Helm H_n, untuk mengetahui hubungan antara super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm konektif dan diskonektif dengan mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu metode menurunkan aksioma atau teorema yang sudah ada, kemudian diterapkan dalam super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm dan juga dikenalkan beberapa teorema mengenai super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm secara konektif maupun diskonektif. Hasil penelitian ini adalah

teorema baru dan batas atas, *ciphertext* dari suatu pesan rahasia, serta keterkaitan keterampilan berpikir tingkat tingggi dengan pelabelan dekomposisi pada graf Helm H_n.

Graf Helm konektif H_n memiliki super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Graf helm H_n memiliki super $(\frac{26n-dn+d+20}{2}, d)$-$S_3$, antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$ dan $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$. Graf Helm diskonektif mH_n memiliki super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 17\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Ada pelabelan super $(\frac{19}{2}mn+\frac{29}{2}m+12n-21, 1)$-$S_3$, $(\frac{21}{2}mn+\frac{29}{2}m+12n-22, 3)$-$S_3$, $(\frac{23}{2}mn+\frac{29}{2}m+12n-23, 5)$-$S_3$, $(\frac{19}{2}mn-\frac{1}{2}m+7, 7)$-$S_3$, $(\frac{37}{2}mn+6m^2-\frac{13}{2}+16, 11)$-$S_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf Helm mH_n untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.

Ciphertext untuk pesan "dua␣nol␣satu␣dua␣tujuh␣adalah pin␣kartu␣kredit␣anda" dengan menggunakan pelabelan super $(13n + 10, 0)$ dengan $d = 0$ yaitu "yiatrfsthaoityiatoidiutayasautqbrtcapoitcpxybotarya". Sedangkan *Ciphertext* untuk pesan "dua␣nol␣satu␣dua␣tujuh␣adalah pin␣kartu␣kredit␣anda" dengan menggunakan pelabelan super $(\frac{15n+31}{2}, 11)$ dengan $d = 11$ yaitu "oqxtdeztmxpqtoqxtpqvqltxoxzxltgrdtyxkpqtykkuorptxdox".

Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengenali graf yang akan dibangun, menjelaskan kesesuain graf Helm dan definisi dari graf Helm, menunjukkan batas atas yang ada pada graf Helm, menduga bahwa pelabelan graf Helm berpola pada tunggal maupun gabungannya, mengkaji ulang dan mengecek pola tersebut pada setiap ekspannya, memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi teorema yang baru.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Super (a, d)-S_3 Antimagic Total Dekomposisi Graf Helm untuk Pengembangan *Ciphertext* dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Matematika Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Sahabat-sahabatku "Soulmath16": Farah Rezita N., Puspita Maya M., Afni Nihayah, Novia Dian P., Siska Binastuti, Mika Wahyuning U., Zainul Arifin, Anas Ma'ruf A., Wara Titi Manda, Yoyok Yuda W., Desi Ayu, Heri Eka W., Ruli Andriani, Ragawang Hasiyan P., dan Dian Bagus Eka P. yang senantiasa membantuku dan menorehkan pengalaman-pengalaman hidup yang indah dan tak terlupakan;
7. Teman seperjuanganku (CGANT): Farah Rezita N., Siska Binastuti, Yuli Nur A., Arnasyita, Irma, Dessy Tri P., Artanti, Nindya Laksmita, Novri

Anggraeni dan pecinta graf lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga;

8. Keluarga besar Mathematic Students Club (MSC) yang luar biasa, terutama teman seperjuangan angkatan 2012 yang selalu mengisi tawaku dan pengalaman berharga;
9. Tim PKM-P "Fraktal Boxpori": Soleh Chudin, Puspita Maya M., Yuli Nur A., dan Dahlan Irawan, tim PKM-M "Omah Dolen": Alfiah Islamiah dan Farah Rezita N., serta tim KKMT MA Darus Sholah;
10. Keluargaku di kos Amanah Jl. Jawa 4c no 9: Intania, Muslimatin, mbak Diah, mbak Veni, mbak Shita, Iis, Hening, Refani, Devi, Ibu Tatang sekeluarga yang telah memberikan warna dalam hidupku selama beberapa tahun ini, terimakasih atas kehangatan keluarga yang telah kalian berikan. Kalian adalah keluarga kedua bagiku;

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 06 Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

ζ	=	Pelabelan dekomposisi *(a,d)-H* anti ajaib
G	=	Graf G
$G(V,E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
T	=	Graf pohon yang memiliki pelabelan graceful
H_n	=	Graf Helm berorder n
W_n	=	Graf Roda berorder n
$K_{m1,m2,m3,\ldots,mn}$	=	Graf n-partit lengkap
K_{2m+1}	=	Graf lengkap
$K_{m,m}$	=	Graf bipartit lengkap
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf G dan disebut sebagai *order*
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf G dan disebut sebagai *size*
N_n	=	Graf Kosong berorder n
C_n	=	Graf Lingkaran berorder n
S_n	=	Graf Star berorder n
d	=	Nilai beda barisan bobot total dekomposisi
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot total dekomposisi
f	=	Fungsi untuk graf Helm konektif
g	=	Fungsi untuk graf Helm diskonektif
w	=	Bobot sisi super *(a,d)*
W	=	Bobot total sisi super *(a,d)*

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ilmu pengetahuan dan teknologi akan selalu berkembang seiring dengan kebutuhan manusia di era globalisasi. Berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi tidak lepas dari permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan yang muncul sering kali sulit dipecahkan oleh manusia sehingga mendorong manusia untuk mencari solusi. Oleh karena itu, diperlukan ilmu pengetahuan yang mampu menyelesaikan masalah tersebut. Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi, mempunyai peran penting dalam berbagai ilmu dan meningkatkan keterampilan daya pikir manusia.

Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu diantaranya matematika aplikasi, matematika analisis, matematika komputerisasi, matematika diskrit, matematika statistik, matematika ekonomi, dan lain sebagainya. Cabang matematika terkait dengan sains komputer diantaranya adalah Teori Graf yang merupakan aplikasi dalam Matematika Diskrit.

Teori Graf merupakan ilmu matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh L. Euler, matematikawan asal Swiss pada tahun 1736. Idenya muncul sebagai upaya dalam menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg menggunakan graf. Ide inilah yang mengundang banyak ilmuan mengembangkan Teori Graf untuk memecahkan berbagai masalah yang muncul dalam kehidupan sehari-hari. Masalah yang muncul tidak hanya di dalam satu bidang ilmu melainkan di berbagai bidang ilmu. Graf dapat dikaitkan dengan berbagai bidang ilmu, sampai saat ini sudah banyak masalah yang dapat dipecahkan oleh graf, diantaranya masalah jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, ilmu kimia, sosiologi, kartograph, teknik konstruksi, peningkatan keterampilan daya pikir dan lain sebagainya. Graf memiliki definisi struktur diskrit yang terdiri dari elemen simpul dan sisi yang menghubungkan simpul tersebut.

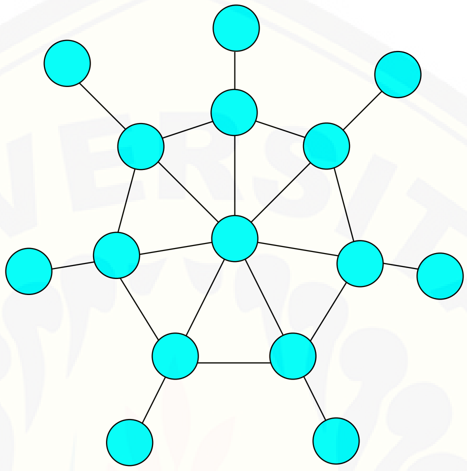
Pelabelan graf merupakan suatu topik yang menarik dalam teori graf. Pelabelan graf pertama kali muncul pada pertengahan tahun 1960-an yang diawali sebuah hipotesis oleh Ringel dan Rosa (dalam Dafik, 2007:17). Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Elemen graf meliputi himpunan titik, himpunan sisi, himpunan titik dan sisi.

Pelabelan graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf yaitu titik atau sisi dengan bilangan bulat positif. Misal $G(V, E)$ atau disingkat dengan graf G adalah graf sederhana yang tak berarah dengan V dan E yang berturut-turut adalah himpunan titik dan himpunan sisi. Graf G mempunyai jumlah titik (*order*) dan jumlah sisi (*size*). Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Pelabelan anti ajaib dikenal juga dengan pelabelan total $(a, d)-$titik anti ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total $(a, d)-$sisi anti ajaib, dan pelabelan total sisi ajaib super.

Teori pelabelan graf ini sangat bermanfaat untuk sektor transportasi, navigasi, sistem komunikasi, pengkodean dan lain-lain. Ilmu pengkodean sangat dibutuhkan untuk merahasiakan suatu pesan. Teknik untuk membuat pesan rahasia ini dikenal dengan kriptosistem. Kriptosistem merupakan suatu teknik menjaga keamanan data dan informasi agar tidak diketahui dan dibaca oleh pihak yang tidak berwenang. Penelitian ini akan membuat suatu *ciphertext* yang didasari pada pelabelan dekomposisi graf Helm H_n. Kalimat yang akan diubah yaitu kalimat yang mengandung huruf saja. Jika terdapat kalimat yang mengandung angka maka angka tersebut akan diubah ke dalam bentuk alfabet.

Jika selimut$-H$ dari graf G memiliki sifat yaitu sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i \in 1, 2, ..., k$, maka selimut-H disebut dekomposisi-H. G dikatakan memuat dekomposisi$-H$ atau G terdekomposisi atas H.

Graf Helm H_n adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik pada sikel. Penelitian ini menggunakan graf Helm H_n karena graf helm merupakan graf *well known*, graf yang mudah dilabeli titik dan sisinya, peneliti sebelumnya belum ada yang menggunakan graf Helm H_n untuk pelabelan dekomposisi, dan jika graf Helm akan digunakan untuk pembuatan *ciphertext* maka dalam pembuatan diagram pohon tidak membutuhkan layer yang panjang yaitu cukup dengan mengekspan sebanyak n. Farisandri (2012) menggunakan graf Helm untuk mencari nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan graf tersebut. Graf Helm H_n dapat dilihat pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Graf Helm (H_7)

Pelabelan graf yang akan digunakan dalam penelitian ini, yaitu pelabelan dekomposisi. Hal ini karena jarangnya penelitian graf yang menggunakan pelabelan dekomposisi, belum ada pelabelan dekomposisi yang dikaitkan dengan pengembangan *ciphertext*, serta untuk menambah wawasan baru tentang pelabelan suatu graf. Penelitian tentang pelabelan dekomposisi pernah dilakukan oleh Inayah, dkk (2012). Inayah telah membuktikan bahwa graf lengkap K_{2m+1} dan graf bipartit lengkap $K_{m,m}$ memiliki pelabelan dekomposisi $(a, d)-T-$anti ajaib untuk $1 \leq d \leq m+1$, dan T adalah graf pohon yang memiliki pelabelan graceful. Liang memberikan hasil lain yang berhubungan dengan pelabelan dekomposisi yaitu pelabelan dekomposisi $K_{r,r}$-ajaib dan pelabelan dekomposisi $C_{2r}-$ajaib pada graf n-partit lengkap $K_{m1,m2,m3,\ldots,mn}$, untuk r bilangan genap. Berdasarkan konsep dekomposisi-H dan terinspirasi penelitian tersebut, penelitian ini akan dibahas suatu pelabelan dekomposisi $(a, d) - H-$antimagic untuk graf Helm (H_n). Selain itu, pelabelan dekomposisi ini akan dikaitkan dengan terciptanya keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Arends (2000), berpikir merupakan kemampuan untuk menganalisis, mengkritik, dan mencapai kesimpulan berdasarkan pada inferensi atau pertimbangan yang seksama. Hal senada juga dikemukakan oleh Plato, berpikir adalah berbicara dalam hati, sedangkan Geiles mengartikan berpikir adalah berbicara dengan diri sendiri dalam batin, yaitu mempertimbangkan, merenungkan, menganalisis, membuktikan sesuatu, menunjukkan alasan-alasan, menarik kesimpulan, meneliti sesuatu jalan pikiran, dan mencari bagaimana berbagai hal itu berhubungan satu sama lain (Saragih, 2007). Ini berarti , berpikir merupakan suatu proses kegiatan untuk menemukan kebenaran.

Berpikir merupakan keterampilan kognitif untuk memperoleh pengetahuan. Taksonomi Bloom merupakan suatu teori yang membahas keterampilan berpikir tingkat tinggi. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif dalam enam tingkatan, yaitu pengetahuan (*knowledge*), pemahaman (*comprehension*), penerapan (*application*), analisis (*analysis*), sintesin (*synthesis*), dan evaluasi (*evaluation*). Setelah direvisi taksonomi Bloom berubah menjadi mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi,dan menciptakan. Mengingat, memahami, dan menerapkan merupakan tiga ranah yang termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat rendah. Sedangkan tiga ranah lainnya seperti menganalisis, mengevaluasi,dan menciptakan termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat tinggi. Hal ini berarti untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi tetap harus melewati tiga ranah dasar yaitu mengingat, memahami, dan menerapkan.

Keterampilan berpikir tingkat tinggi (*High Order Thinking Skill*) merupakan salah satu keterampilan berpikir dalam pemecahan masalah matematika. Keterampilan berpikir ini tidak hanya membutuhkan kemampuan mengingat saja akan tetapi juga membutuhkan kemampuan lain yang lebih tinggi yaitu menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi. Contoh kemampuan berpikir tingkat tinggi dalam matematika yaitu kemampuan berpikir kreatif dan memecahkan masalah matematis. Berpikir tingkat tinggi sangat diperlukan bagi setiap orang, hal ini karena terdapat berbagai masalah yang memerlukan pemecahan masalah dengan menggunakan pemikiran tingkat tinggi. Oleh karena itu, keterampilan berpikir tingkat tinggi dapat membantu kita dalam memecahkan masalah yang tidak mudah untuk diselesaikan.

Penelitian ini akan mengkaji keterkaitan antara menciptakan teorema dari pelabelan dekomposisi dari graf Helm dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi yang menggunakan acuan taksonomi Bloom serta pengembangan *ciphertext* pada suatu kalimat. Sehingga dalam penelitian ini penulis memilih judul " ***Analisis Super*** (a, d)***-***S_3 ***Antimagic Total Dekomposisi Graf Helm untuk Pengembangan Ciphertext dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi***"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. bagaimana pelabelan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada graf Helm H_n konektif dan diskonektif?

2. bagaimana pengembangan *ciphertext* dengan menggunakan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada graf Helm H_n?

3. bagaimana hubungan antara super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm konektif dan diskonektif dalam mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

1. graf berhingga yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop, tidak mempunyai sisi ganda(paralel), dan tidak berarah;

2. graf Helm konektif disimbolkan dengan H_n dan graf Helm diskonektif disimbolkan dengan mH_n dengan $n \geq 3$ dan n ganjil serta $m \geq 2$. n merupakan banyaknya expand graf Helm dan m merupakan banyaknya gabungan graf Helm;

3. $d = 0$ dan $d = 11$ untuk *ciphetext*;

4. *ciphertext* yang digunakan hanya 26 karakter;

5. Taksonomi Bloom yang digunakan telah direvisi oleh Anderson.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. untuk mengetahui pelabelan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada graf Helm H_n konektif dan diskonektif;

2. untuk mengetahui pengembangan *ciphertext* dengan menggunakan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada graf Helm H_n;

3. untuk mengetahui hubungan antara super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm konektif dan diskonektif dengan mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi.

1.5 Manfaat Penelitian

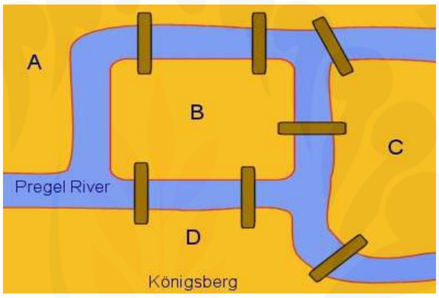
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai dekomposisi graf salah satunya adalah pengembangan super (a, d)-antimagic total dekomposisi pada graf Helm H_n;
2. menambah wawasan baru dalam menciptakan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam dekomposisi graf Helm H_n;
3. menambah pengetahuan tentang *ciphertext* dan mengubah *plaintext* (kalimat pesan) ke *ciphertext* (kalimat rahasia);
4. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai perluasan ilmu atau pengembangan ilmu dalam masalah pelabelan super (a, d)-antimagic total dekomposisi.

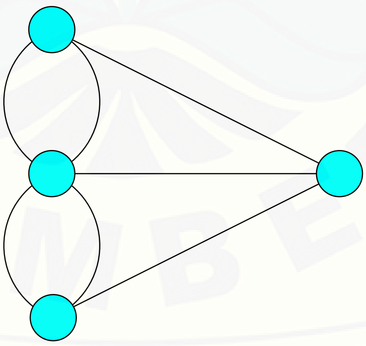
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Jerman. Masalah jembatan Konigsberg tersebut dapat dinyatakan dalam istilah graf dengan menentukan keempat daerah itu sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai.



Gambar 2.1 Jembatan Konigsberg



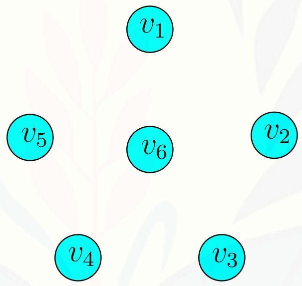
Gambar 2.2 Representasi Jembatan Konigsberg

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 *Sebuah graf G merupakan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut u, v dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G (Slamin, 2009: 11)*

Berdasarkan definisi tersebut, maka dapat dikatakan bahwa sebuah graf G minimal terdiri dari himpunan titik (tanpa sisi), graf tanpa sisi ini disebut dengan graf kosong (*nullgraph*) dinotasikan dengan N_n, dimana n adalah jumlah titik pada graf.

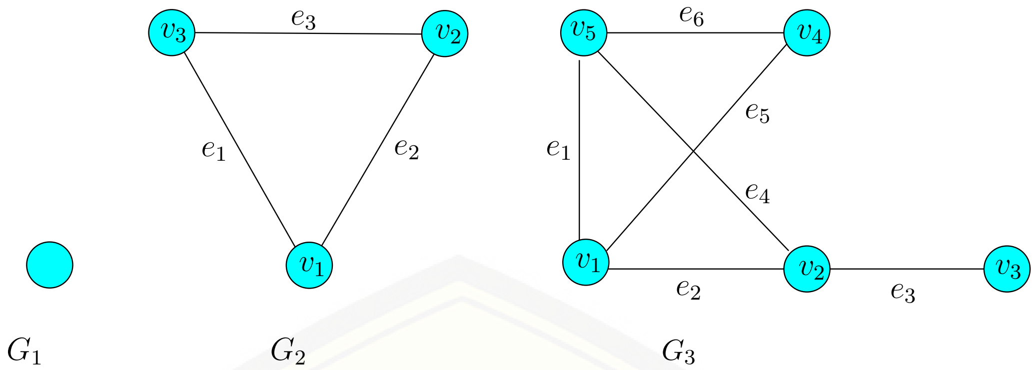
Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) dinotasikan dengan N_n, dimana n adalah jumlah titik pada graf, adalah graf dengan E merupakan himpunan kosong. Gambar 2.3 mempresentasikan contoh graf kosong dengan 6 titik yang dinotasikan dengan N_6.



Gambar 2.3 Graf Kosong N_6

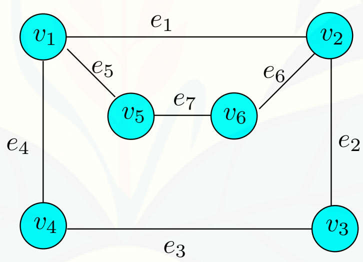
Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Misalkan v_i dan v_j adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i, v_j) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$. Berikut diberikan contoh graf pada Gambar 2.4 yang menyatakan komponen umum terbentuknya sebuah graf.

Graf yang hanya terdiri dari satu titik disebut graf trivial, sedangkan graf dikatakan non-trivial jika paling sedikit terdiri dari dua titik. apabila terdapat dua titik yang dihubungkan dengan sebuah garis, maka dua titik ini disebut de-



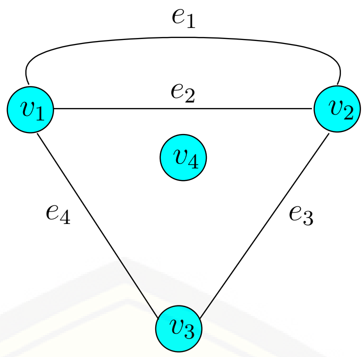
Gambar 2.4 Contoh Graf secara Umum

ngan titik yang berhubungan. Sedangkan untuk titik yang memiliki garis yang berhubungan dengannya disebut dengan titik terasing. Jumlah titik pada suatu graf G sering disebut dengan order atau dinotasikan dengan $|G|$, sedangkan jumlah sisi dari suatu graf G sering disebut dengan *size* atau dinotasikan dengan $||G||$. Gambar 2.5 merupakan contoh graf dengan order 6 dan size 7, dan Gambar 2.6 merupakan contoh graf tak terhubung.



Gambar 2.5 Graf Terhubung

Sebuah graf disebut graf terhubung *(connected graph)* jika semua titik pada graf tersebut dihubungkan oleh sisi. Jika tidak demikian, maka G disebut graf tak terhubung *(diconnected graph)*, Gambar 2.5 merupakan contoh graf terhubung, sedangkan Gambar 2.6 merupakan contoh graf tak terhubung. Suatu graf terhubung dapat dijadikan graf tak terhubung dengan cara melakukan penghapusan sisi atau titik pada graf tersebut. Sebuah sisi dari suatu graf terhubung G yang jika dihapus membuat graf G menjadi graf tak terhubung disebut sebagai jem-



Gambar 2.6 Graf Tak Terhubung

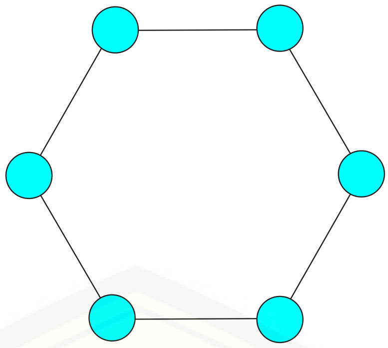
batan graf G. Selain penghapusan sisi, pada graf juga terdapat penghapusan titik yaitu penghapusan titik tertentu pada graf sehingga titik da semua sisi yang *adjacent* dengan titik tersebut juga ikut terhapus. Jika penghapusan sebuah titik menyebabkan graf menjadi tak terhubung, maka titik tersebut dinamakan titik potong *(cut-vertex)*.

2.2 Graf Khusus

Dari definisi graf secara umum, terdapat beberapa jenis graf, diantaranya adalah graf Helm. Sebelum membahas tentang graf Helm dijelaskan beberapa graf yang berhubungan dengan graf Helm.

Definisi 2.2 *Graf siklus dinotasikan dengan C_n adalah graf reguler yang berderajat dua, artinya pada graf siklus untuk setiap titiknya mempunyai derajat dua, sehingga dalam graf siklus jumlah titik dan jumlah sisinya sama. Graf siklus C_n hanya dapat dibentuk dengan $n \geq 3$. (Munir, 2001)*

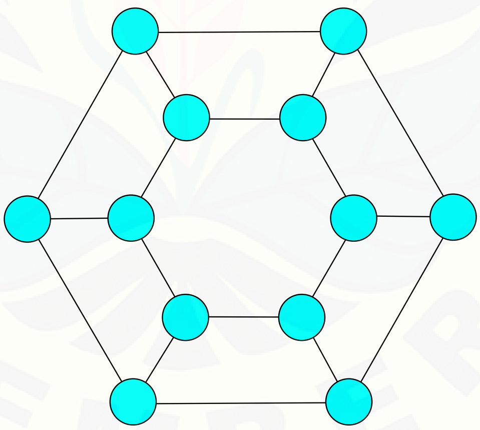
Gambar 2.7 menunjukkan graf siklus C_n dengan 6 titik yang dinotasikan dengan C_6.



Gambar 2.7 Graf Siklus (C_6)

Definisi 2.3 *Graf prisma adalah sebuah graf yang terdiri dari sebuah siklus luar dengan n titik* $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ *dan sebuah siklus dalam dengan n titik* $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ x_n *dan antara siklus luar dengan siklus dalam dihubungkan n jari-jari* x_iy_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$. *(Slamin, 2001)*

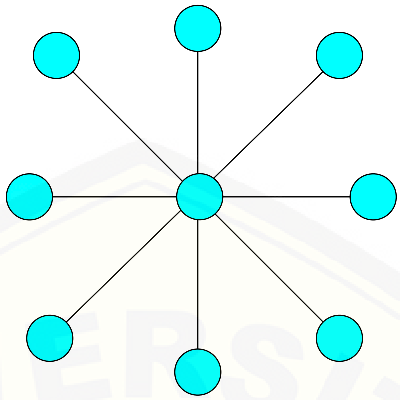
Graf prisma mempunyai $2n$ titik dan $2n$ sisi serta merupakan generalisasi graf Petersen $P(n, m)$ dengan $m = 1$. Gambar 2.8 menunjukkan contoh graf prisma D_6.



Gambar 2.8 Graf Prisma (D_6)

Definisi 2.4 *Graf bintang dinotasikan dengan* S_n *adalah sebuah graf yang terdiri dari* n *sisi dan* $n + 1$ *titik, dimana satu titik sebagai titik pusat, yaitu titik yang berderajat* n. *(Wijaya, 2000)*

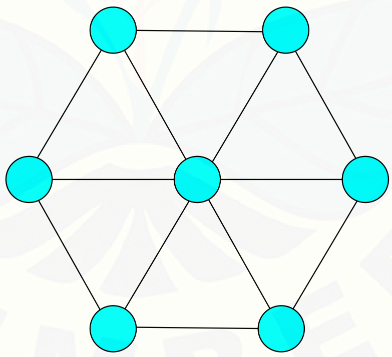
Graf bintang S_n merupakan bentuk khusus dari graf dua partisi lengkap $K_{m,n}$ dengan $m = 1$. Gambar 2.9 menunjukkan contoh graf bintang S_8.



Gambar 2.9 Graf Bintang (S_8)

Definisi 2.5 *Graf roda, dinotasikan dengan W_n adalah sebuah graf yang memuat n siklus dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di n siklus. Sehingga graf roda W_n terdiri dari $n+1$ titik yaitu: $c, x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ dan $2n$ sisi, yaitu: cx_i, $1 \leq i \leq n, x_i, x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$ dan $x_n x_1$. (Slamin, 2001)*

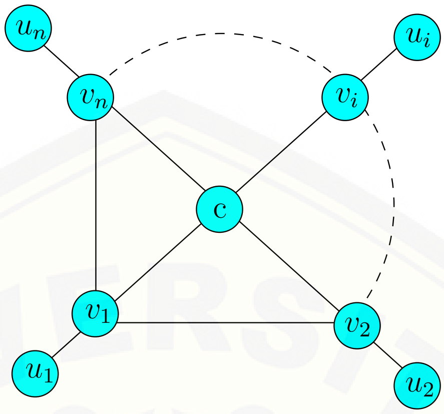
Gambar 2.10 menunjukkan contoh dari graf roda W_6.



Gambar 2.10 Graf Roda (W_6)

Definisi 2.6 *Graf helm H_n adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel. (Gallian, 2007: 7)*

Jika v_j adalah titik ke$-j$ dari W_n dan u_j adalah titik pada bandul ke$-j$, maka u_jv_j adalah sisi bandul ke-j untuk setiap $j = 1, 2, ..., n$. Graf Helm H_n mempunyai $2n + 1$ titik dan $3n$ sisi.



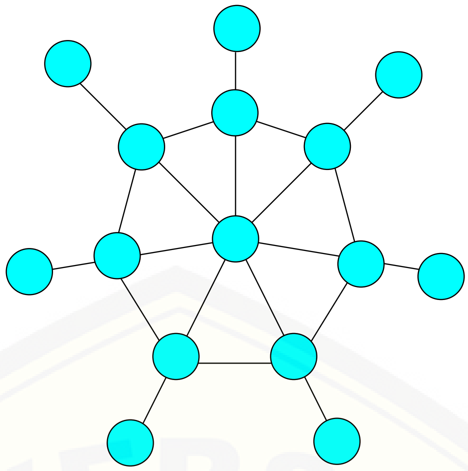
Gambar 2.11 Graf Helm H_n

Pada Gambar 2.11 terdapat garis putus-putus yang memiliki makna ialah sebagai garis bantu untuk menyederhanakan gambar, sehingga titik-titik yang dimunculkan pada graf tidak harus sebanyak n titik. Pengilustrasian Graf Helm H_n seperti pada gambar tersebut dapat dibentuk lebih spesifik dengan mengganti nilai n dengan bilangan bulat positif. Sehingga akan didapatkan kenampakan Graf Helm yang lebih spesifik, seperti contoh Graf Helm H_3. Gambar 2.12 menunjukkan contoh dari graf helm H_7.

Definisi 2.7 *Sebuah graf H merupakan subgraf dari graf G jika setiap titik pada graf H adalah titik pada graf G dan setiap sisi pada graf G. Dengan kata lain $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$. (Harfield dan Ringel,1994:13)*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah subgraf, $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G, jika $V_1 \subset V$ dan $E_1 \subset E$. Dan jika G_1 mengandung semua titik dari G, maka G_1 disebut subgraf perentang. Berikut ini dinyatakan definisi dari subgraf perentang.

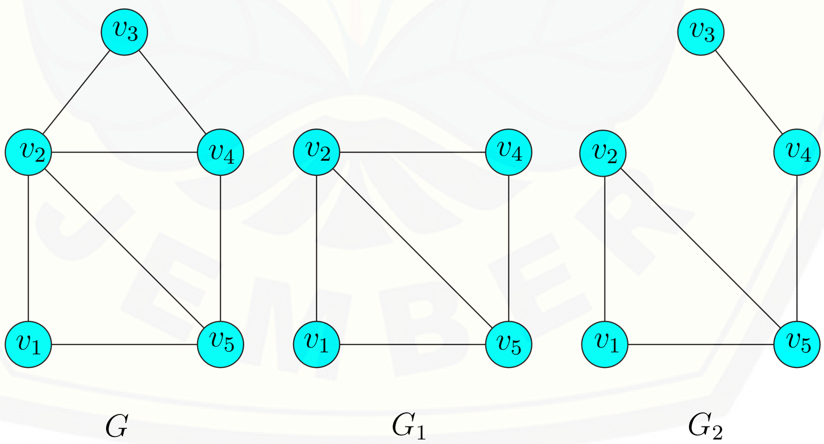
Definisi 2.8 *Sebuah subgraf H merupakan subgraf perentang (spaning subgraf)*



Gambar 2.12 Graf Helm (H_7)

dari graf G jika graf H memuat semua titik dari graf G. Dengan kata lain, $V(H) = V(G)$. (Harfield dan Ringel,1994:20)

Gambar 2.13 menunjukkan contoh graf, subgraf perentang *(spaning subgraf)* dan subgraf. Graf G_2 merupakan subgraf perentang dari graf G karena mengandung semua titik dari graf G. Graf G_1 merupakan subgraf dari graf G tetapi bukan subgraf perentang karena tidak memuat titik v_3.



Gambar 2.13 Contoh subgraf (G_1) dan subgraf perentang (G_2)

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan elemen-elemen dalam graf (titik, sisi, maupun titik dan sisi) ke dalam himpunan bilangan asli yang disebut dengan label. Jika pelabelan diberikan pada himpunan titik, maka pelabelannya disebut dengan pelabelan titk (*vertex labeling*), sedangkan pelabelan yang diberikan pada himpunan sisi disebut dengan pelabelan pelabelan sisi (*edge labeling*). Apabila setiap elemen graf (titik dan sisi) diberi label, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (*total labeling*). Jadi, penamaan jenis pelabelan bergantug pada elemen-elemen graf yang diberi label.

Konsep pelabelan graf mendapat apresiasi yang sangat baik dan sangat terkenal dalam lingkup teoi graf. Pelabelan graf tidak hanya terkenal dalam pemanfaatannya untuk memecahkan masalah matematika saja tetapi juga terkenal dalam pemanfaatan aplikasinya terhadap cabang-cabang ilmu sains, misalnya: sinar-X, kristalografi, kristografi, teori pengkodean, astronomi, desain sirkuit, dan desain jaringan komunikasi. Beberapa pelabelan graf yang dikenal sampai saat ini diantaranya, pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib (*magic*), dan pelabelan anti-ajaib (*antimagic*).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gambar 2.14 Contoh Persegi Ajaib

Konsep tentang pelabelan graf berawal dari konsep tentang bujursangkar (persegi) ajaib (*magic square*) yang merupakan salah satu aplikasi matematika dalam teori bilangan. Persegi ajaib berderajat n terdiri atas n^2 bilangan, biasanya bilangan bulat, yang disusun sedemikian hingga ke-n bilangan tersebut memiliki jumlah yang konstan dalam setiap baris, kolom, dan diagonalnya. Bilangan yang konstan tersebut dinamakan dengan konstanta ajaib. Pada umumnya persegi ajaib berderajat n berisi bilangan bulat dari 1 sampai dengan n^2 dengan nilai konstanta $\lambda = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Gambar 2.14 menunjukkan contoh persegi ajaib berderajat 3.

Salah satu variasi dari persegi ajaib adalah persegi anti-ajaib (*antimagic square*). Pada dasarnya konsep persegi anti-ajaib sama dengan konsep persegi ajaib, yaitu mengisi persegi-persegi tersebut dengan bilangan 1 sampai dengan n^2, namun dalam persegi anti-ajaib penyusunan bilangan-bilangannya diatur sedemikian hingga semua baris, kolom dan diagonal membentuk barisan dengan sebanyak $2n+2$ bilangan bulat berurutan. Gambar 2.15 menunjukkan contoh persegi anti-ajaib berderajat 4.

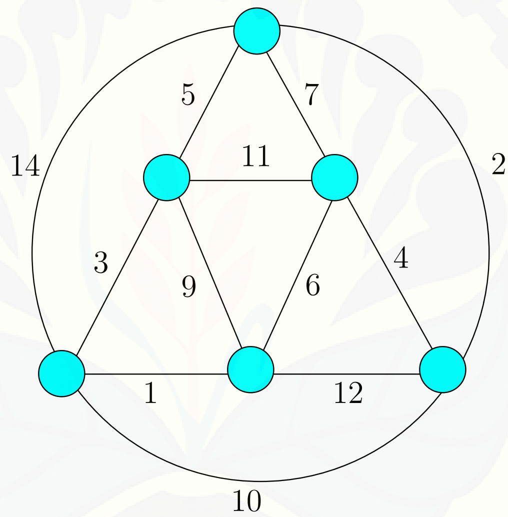
4	13	12	1
11	6	2	14
5	15	10	8
16	3	7	9

Gambar 2.15 Contoh Persegi Anti-Ajaib

Persegi ajaib dan persegi anti-ajaib memiliki perbedaan. Perbedaan keduanya yaitu pada persegi ajaib setiap baris, kolom, dan diagonalnya memiliki jumlah yang konstan sedangkan pada persegi anti-ajaib setiap baris, kolom, dan diagonalnya memiliki jumlah yang berbeda namun setiap jumlah tersebut berbentuk barisan aritmatika. Contoh persegi ajaib menunujukkan bahwa jumlah setiap baris, kolom, dan diagonalnya adalah 15. Contoh persegi anti-ajaib menunujukkan bahwa jumlah setiap baris, kolom, dan diagonalnya membentuk barisan aritmatika yaitu $\{29, 30, 31, \ldots, 38\}$.

2.3.1 Pelabelan Magic dan Pelabelan Antimagic

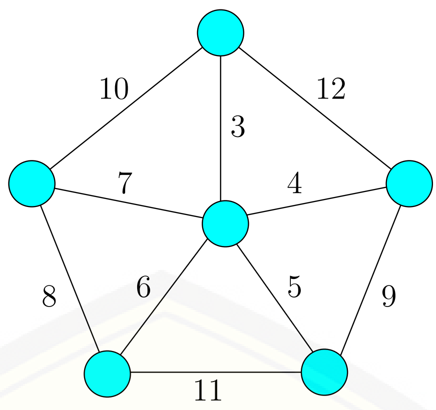
Konsep persegi ajaib dan anti-ajaib pada teori bilangan melatarbelakangi konsep pelabelan ajaib (*magic*) dan anti-ajaib (*antimagic*) untuk pelabelan graf dalam teori graf. Pelabelan magic diperkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963. Dia menyebutkan bahwa suatu graf dengan pelabelan sisi menjadi magic apabila hasil penjumlahan label sisi yang bersisian pada setiap titik adalah konstan (disebut indeks label). Gambar 2.16 merupakan pelabelan magic pada graf oktahedron dengan indeks label 28. Misal titik v_1 bersisian dengan sisi yang berlabel $14, 5, 7$, dan 2. Jika label sisi tersebut dijumlah maka akan menghasilkan nilai 28. Demikian juga untuk titik v_1 sampai v_6, seluruh titik tersebut berindeks label 28.



Gambar 2.16 Contoh pelabelan magic pada graf oktahedron

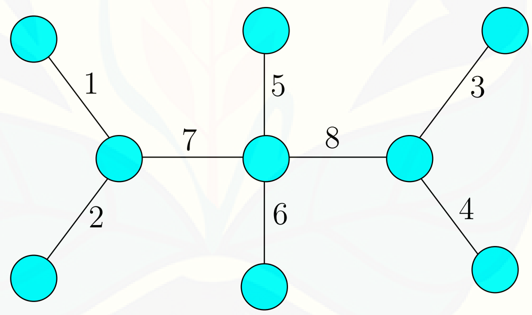
Pelabelan magic pada graf G disebut super-magic apabila label sisi-sisinya merupakan bilangan bulat positif yang berurutan. Graf super-magic diperkenalkan oleh Stewart. Contoh graf dengan pelabelan super-magic dapat dilihat pada Gambar 2.17 Selain pelabelan super-magic, terdapat juga pelabelan total titik magic dan pelabelan total sisi magic.

Konsep pelabelan antimagic diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel. Mere-



Gambar 2.17 Contoh pelabelan super-magic

ka mendefinisikan suatu graf G dengan p titik dan q sisi disebut antimagic jika sisi-sisinya dilabeli dengan $1, 2, 3, ...q$ sedemikian hingga bobot titik-titiknya berbeda. Bobot titik pada titik v adalah jumlah label sisi yang bersisian pada titik v, disimbolkan dengan $w(v)$. Gambar 2.18 memperlihatkan pelabelan antimagic pada graf tree.



Gambar 2.18 Contoh pelabelan antimagic pada graf tree

Pelabelan antimagic kemudian berkembang menjadi pelabelan $(a, d)-$anti-magic. Konsep ini diperkenalkan oleh Bodendiek dan Walther dengan pembatasan pada bobot titik. Konsep ini muncul karena terkadang ditemukan pelabelan an-timagic yang berbeda-beda dalam satu graf. Pelabelan $(a, d)-$antimagic tersebut adalah pelabelan sisi $(a, d)-$titik antimagic.

Sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2,$

$3, \ldots, p\}$ disebut pelabelan titik (a,d)-sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya $w(uv) = f(u) + f(v)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya adalah bilangan bulat, sedangkan Pelabelan total (a,d)-sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, ...p+q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(t)(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya bilangan bulat serta t merupakan simbol dari total pelabelan titik dan sisi. Sebuah pelabelan total (a,d)- sisi antimagic disebut pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, ...p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, ...p+q\}$.

Dengan kata lain, pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic pada sebuah graf $G = (V, E)$ adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat $\{1, 2, 3, ...p\}$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat $\{p+1, p+2, ...p+q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G, sedemikian hingga himpunan bobot dari sisinya adalah $W = \{w(x,y)|xy \in E(G)\} = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$, dimana $\alpha(u)$ adalah label dari titik $u, \alpha(v)$ adalah label dari titik v dan $\alpha(uv)$adalah label dari sisi uv. Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a,d)-antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut ini seperti (dalam Dafik: 2007: 26-27).

Lema 2.1 Jika graf Helm $H_n(V, E)$ adalah super $(a,d) - S_3$ antimagic total dekomposisi maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$ (Dafik, 2007)

$Keterangan:$

$V : Vertex(titikpadagrafHelm)$

$E : Edge(sisipadagrafHelm)$

$G : GrafHelm$

$H : SubgrafS_3$

Proof.

$f(V) = \{1, 2, 3, .., p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, .., p_G + q_G\}$. Misalkan graf (p_G,q_G) mempunyai pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$ antimagic total covering dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \ldots + (p_G + q_H) &\leq a \\
\frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\
\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

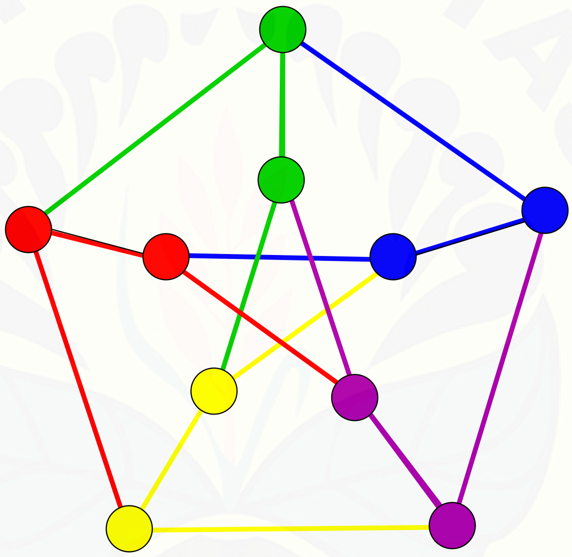
$$\begin{aligned}
a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + ... + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
&\quad +(p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + ... + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\
&\quad -\frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
&\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
&\quad (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}) \\
&= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
&= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
&= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut dari berbagai famili graf. (Dafik, 2014) $\square$

2.4 Dekomposisi pada Graf

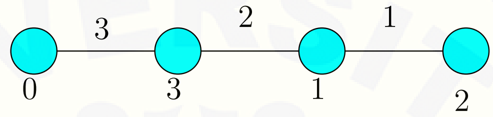
Jika selimut-H dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk semua $i\epsilon 1,2,...,k$, maka selimut-H disebut dekomposisi-H. Dalam hal ini, G dikatakan memuat dekomposisi-H atau G terdekomposisi atas H. Pada Gambar 2.19 terlihat bahwa graf Petersen terdekomposisi atas P_4, tetapi graf Petersen tidak terdekomposisi atas P_3 karena $E(grafPetersen) = 15$ dan $|E(P_3)| = 2$. (Inayah, 2012)



Gambar 2.19 Pelabelan dekomposisi-P_4 pada graf petersen

Misalkan H adalah suatu dekomposisi-H dengan $|H| = k$. Inayah dkk (2012) memperkenalkan suatu pelabelan total $(a,d)-H$-anti ajaib yang terkait dengan suatu dekomposisi-H. Misalkan $\zeta : V(G) \cup E(G) \rightarrow 1,2,...,v_G + e_G$ adalah suatu fungi injektif. Definisi bobot-$H - i$, $\zeta(H_i)$, sebagai $\zeta(H_i) = \sum_{v\epsilon V(H_i)} \zeta(v) + \sum_{e\epsilon E(H_i)} \zeta(e)$. Fungsi ζ disebut pelabelan $(a,d){-}H{-}$anti ajaib, jika $\zeta(H_i)|H_i\epsilon H = a, a+d, a+2d, ..., a+(k-1)d$ untuk suatu bilangan bulat positif a dan d. Kemudian, ζ dikatakan pelabelan $(a,d)-H-$anti ajaib super, jika $\zeta(V_G)=1,2,...,v_G$. Dalam hal H merupakan suatu dekomposisi-H, ζ disebut *pelabelan dekomposisi* $(a,d)-H-$*anti ajaib*.

Suatu pelabelan *graceful* dari graf pohon T dengan m sisi adalah suatu fungsi injektif $g: V_T \rightarrow 0,1,...,m$, dan untuk setiap sisi $e=uv$ dilabeli dengan $|g(u)-g(v)|$, sehingga label setiap sisiny berbeda. Untuk contoh pelabelan graceful dari graf T dapat dilihat pada Gambar 2.20. Inayah dkk. (2012) membuktikan bahwa graf lengkap K_{2m+1} dan graf bipartit lengkap $K_{m,m}$ memiliki suatu pelabelan dekomposisi $(a,d)-T-$anti ajaib yang tertuang dalam teorema dibawah ini.



Gambar 2.20 Pelabelan *graceful* dari graf pohon T

Teorema 2.1 *Misalkan T adalah suatu graf pohon graceful dengan m sisi. Graf lengkap K_{2m+1} memuat suatu pelabelan dekomposisi $(a,d)-T-$anti ajaib untuk suatu a bilangan bulat positif dan $0 \leq d \leq m+1$. (Inayah, N., Llado, A., dan Moragas, J., 2012)*

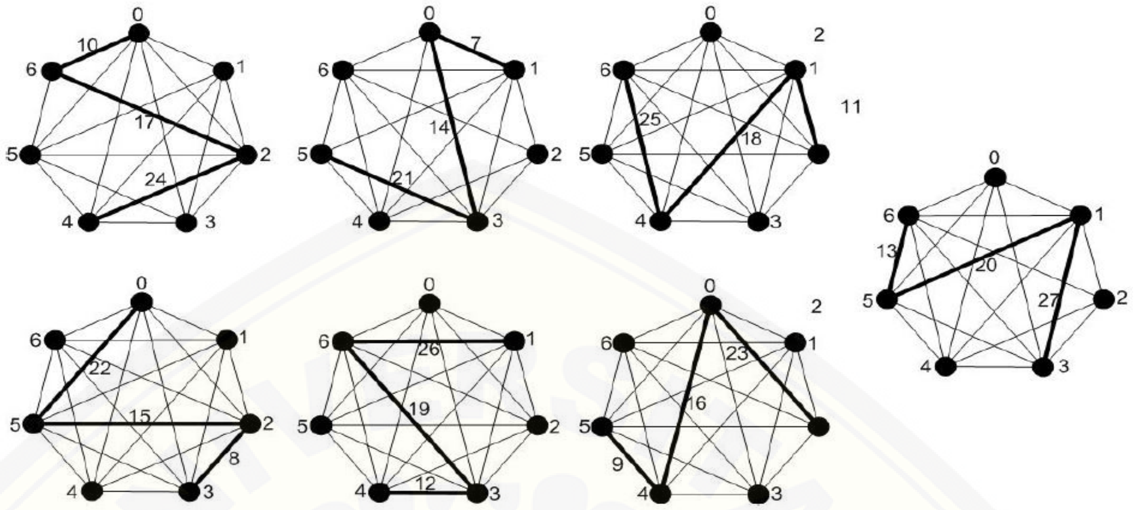
Untuk contoh pelabelan dekomposisi $(a,d)-T-$anti ajaib super pada graf lengkap K_{2m+1} dapat dilihat pada Gambar 2.21

Teorema 2.2 *Misalkan T adalah suatu graf pohon dengan m sisi. Graf bipartit lengkap $K_{m,m}$ memuat suatu pelabelan dekomposisi $(a,d)-T-$anti ajaib untuk suatu a bilangan bulat positif dan $0 \leq d \leq m$. (Inayah, N., Llado, A., dan Moragas, J., 2012)*

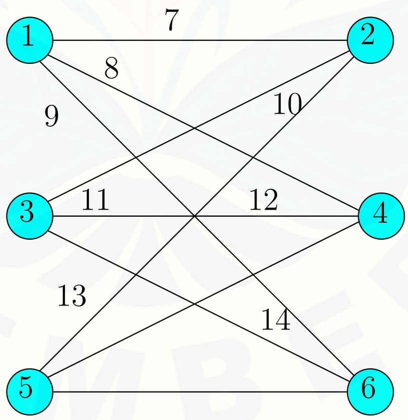
Untuk contoh pelabelan dekomposisi $(a,d)-H-$anti ajaib super pada graf $K_{m,m}$ dapat dilihat pada Gambar 2.22.

2.5 *Ciphertext*

Kriptografi berasal dari kata Yunani kripto (tersembunyi) dan grafia (tulisan). Secara harfiah, kriptografi dapat diartikan sebagai tulisan yang tersembunyi atau



Gambar 2.21 Pelabelan dekomposisi $(51, 4) - P_4-$anti ajaib super pada graf lengkap K_7



Gambar 2.22 pelabelan dekomposisi $(43, 5) - K_{1,3}-$anti ajaib super pada graf bipartit lengkap $K_{3,3}$

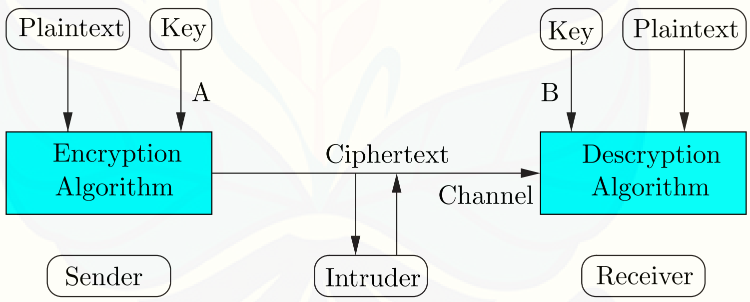
tulisan yang dirahasiakan. Tujuannya adalah supaya tulisan tersebut tidak dapat dibaca oleh setiap orang. Hanya orang-orang tertentu, yaitu orang yang mengetahui cara menyembunyikan tulisan tersebut yang dapat membacanya. Bruce Schneier (1996) menyatakan bahwa kriptografi adalah ilmu dan seni untuk menjaga keamanan pesan (Cryptography is the art and science of keeping messages secure). Sistem kriptografi (cryptosystem) adalah kumpulan yang terdiri dari algoritma kriptografi, semua *plaintext*, *ciphertext*, dan kunci yang mungkin. *Plaintext* atau pesan adalah data yang dapat dibaca dan dimengerti maknanya, sedangkan *ciphertext* adalah bentuk pesan yang tersandi ke bentuk lain yang tidak dapat dipahami.

Dalam perkembangannya, kriptografi didefinisikan sebagai ilmu yang berhubungan dengan prinsip-prinsip atau metode-metode mentransformasikan pesan ke dalam bentuk yang tidak dimengerti, kemudian ditransformasikan kembali ke dalam bentuk pesan asli yang dimengerti. Kriptografi adalah ilmu yang mempelajari bagaimana membuat suatu pesan yang dikirim dapat disampaikan kepada penerima dengan aman (Schneier, 1996). Pesan asli yang dimengerti isinya/ maknanya ini dinamakan *plaintext*. Pesan yang tidak dimengerti, yang merupakan hasil transformasi dari *plaintext*, disebut *ciphertext*.

Kriptosistem merupakan suatu teknik di dalam menjaga keamanan data dan informasi supaya tidak dapat diketahui dan dibaca oleh pihak yang tidak berwenang. Kriptosistem kunci asimetrik menggunakan dua kunci yang berbeda yaitu kunci publik untuk melakukan enkripsi dan kunci privat untuk melakukan dekripsi. Setiap orang dapat mengirimkan pesan rahasia hanya dengan menggunakan kunci publik, tetapi pesan hanya dapat didekripsi dengan kunci privat, yang merupakan milik penerima yang dituju (Palupi, 2008).

Kriptosistem adalah algoritma kriptografi, yang terdiri dari beberapa komponen, yaitu (1) Enkripsi merupakan cara pengamanan data yang dikirimkan sehingga terjaga kerahasiaannya. (2) Deskripsi merupakan kebalikan dan enkripsi. Pesan yang telah dienkripsi dikembalikan ke bentuk asalnya. (3) Kunci adalah kunci yang dipakai untuk melakukan enkripsi dan deskripsi. (4) *Ciphertext* merupakan suatu pesan yang telah melalui proses enkripsi. (5) *Plaintext* sering disebut dengan *cleartext*. Teks-asli atau teks-biasa ini merupakan pesan yang ditulis atau diketik yang memiliki makna. Teks-asli inilah yang diproses menggunakan algoritma kriptografi untuk menjadi *ciphertext* (teks-kode). (6) Pesan dapat berupa data atau informasi yang dikirim (melalui kurir, saluran komunikasi data, dsb) atau yang disimpan di dalam media perekaman (kertas, storage, dsb). (7) Cryptanalysis atau kliptanalisis bisa diartikan sebagai analisis kode atau suatu ilmu untuk mendapatkan teks-asli tanpa harus mengetahui kunci yang sah secara wajar (Ariyus, 2008).

Cryptograhic system atau Cryptosystem (Kriptosistem) adalah suatu fasilitas untuk mengkonversikan *Plaintext* ke dalam bentuk *Ciphertext* dan sebaliknya. Dalam sistem ini, seperangkat parameter yang menentukan transformasi pencipheran tertentu yang biasa disebut dengan set kunci. Maksudnya kunci telah ditentukan sebelumnya dan ciphertext mengacu kepada kunci yang telah dibuat. Proses enkripsi dan dekripsi diatur oleh satu atau beberapa kunci kriptografi. Secara umum kunci-kunci yang digunakan untuk proses pengenkripsian dan pendekripsian tidak perlu identik dan tergantung pada sistem yang digunakan (Pearson, 2006.). Gambar 2.23 merupakan alur kerja kriptosistem.



Gambar 2.23 Alur kerja kriptosistem

Beberapa istilah yang berhubungan dengan transformasi dari *plaintext* ke *ciphertext* di antaranya adalah cipher, kunci, encipher, decipher, kriptanalisis, dan kriptologi. Cipher adalah algoritma yang digunakan untuk melakukan transformasi *plaintext* ke *ciphertext*. Kunci adalah beberapa informasi kritis yang diperlukan cipher, di mana kunci ini hanya diketahui oleh pengirim dan penerima pesan. Encipher adalah proses mengkonversikan *plaintext* ke *ciphertext* dengan menggunakan cipher dan kunci. Decipher adalah mengkonversikan *ciphertext* kembali ke plaintext dengan menggunakan cipher dan kunci. Kriptanalisis (cryptanalysis) adalah studi yang berkenaan dengan prinsip-prinsip atau metode-metode mentransformasikan *ciphertext* kembali ke plaintext tanpa mengetahui kunci untuk decipher. Sedangkan kriptologi (cryptologi) adalah bidang ilmu yang berhubungan dengan kriptografi dan kriptanalisis.

Kriptografi dikategorikan menjadi dua yaitu kriptografi klasik dan kriptografi modern. Kriptografi klasik adalah kriptografi yang berbasis karakter (enkripsi dan dekripsi dilakukan pada setiap karakter) dan kriptografi modern adalah kriptografi yang beroperasi dalam mode bit (dinyatakan dalam 0 dan 1) (Juliadi, dkk. 2012). Ada beberapa macam algoritma kriptografi klasik, yaitu: Shift Chiper, Monoalphabetic Chiper, Polyalphabetic Chiper, Subtitution Chiper, dll.

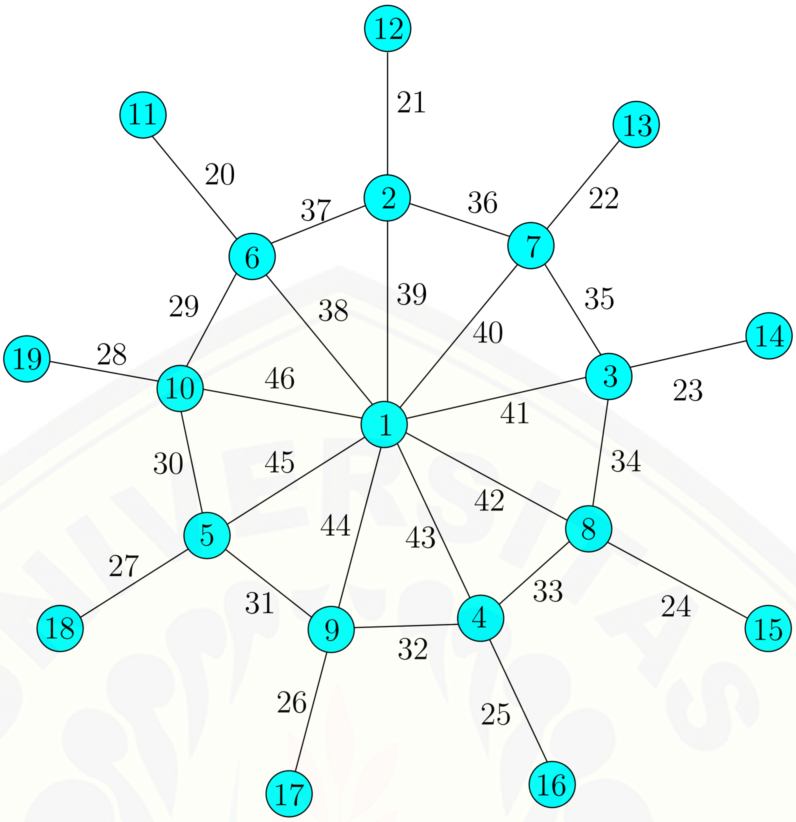
Pengenkripsian data bermula dari monoalphabetic cipher. Salah satunya adalah caesar cipher, yaitu mengganti huruf semula dengan huruf ke tiga setelahnya. Teknik ini sangat mudah untuk dipecahkan karena setiap huruf yang sama pada plainteks akan menjadi huruf yang sama pula pada *ciphertext*. Ada teknik yang lebih bagus dalam pengenkripsian huruf alfabet, yaitu *polyalphabetic* cipher. Kriptografi *polyalphabetic* cipher adalah cipher yang dikonstruksi berdasarkan substitusi, secara lebih khusus menggunakan banyak substitusi huruf alfabet. Contohnya adalah V igenere cipher. Huruf yang sama pada *plaintext* akan sangat mungkin berbeda pada *ciphertext*. Hal ini membuat data lebih rahasia (Muktyas dan Sugeng, 2014).

Metode kriptografi Shift Chipper mula-mula digunakan oleh kaisar Romawi, Julius Caesar untuk menyandikan pesan yang dikirim kepada para gubernurnya, sehingga metode ini disebut caesar chiper. Dalam kriptografi, shift chiper dikenal dengan beberapa nama seperti: code caesar atau caesar shift. Shift chiper merupakan teknik enkripsi yang paling sederhana dan banyak digunakan. Chiper ini berjenis chiper substitusi, dimana setiap huruf pada plaintext digantikan dengan huruf lain yang tetap pada posisi alfabet. Misalnya diketahui bahwa pergeseran $= 3$, maka huruf A akan digantikan oleh huruf D, huruf B menjadi huruf E, dan seterusnya (Fairuzabadi, 2010).

Metode Substitusi merupakan perkembangan lebih lanjut dari Caesar Cipher. Pada metode substitusi, pengirim pesan bisa menentukan kunci berupa sebuah kata dengan syarat tidak ada karakter berulang dalam kata itu. Bila ada, maka karakter yang muncul pertama yang akan disimpan, dan karakter berulang akan ditiadakan. Plaintext dalam metode substitusi akan dienkripsi berdasarkan kunci yang dimasukkan. Kunci akan menjadi peubah dalam enkripsi, menggantikan setiap karakter dengan barisan abjad ya ng telah disusun sesuai kunci. Proses ini hampir sama dengan Caesar Cipher, namun prosesnya terikat pada kunci yang dimasukkan sebelumnya itu (Ongko, 2013).

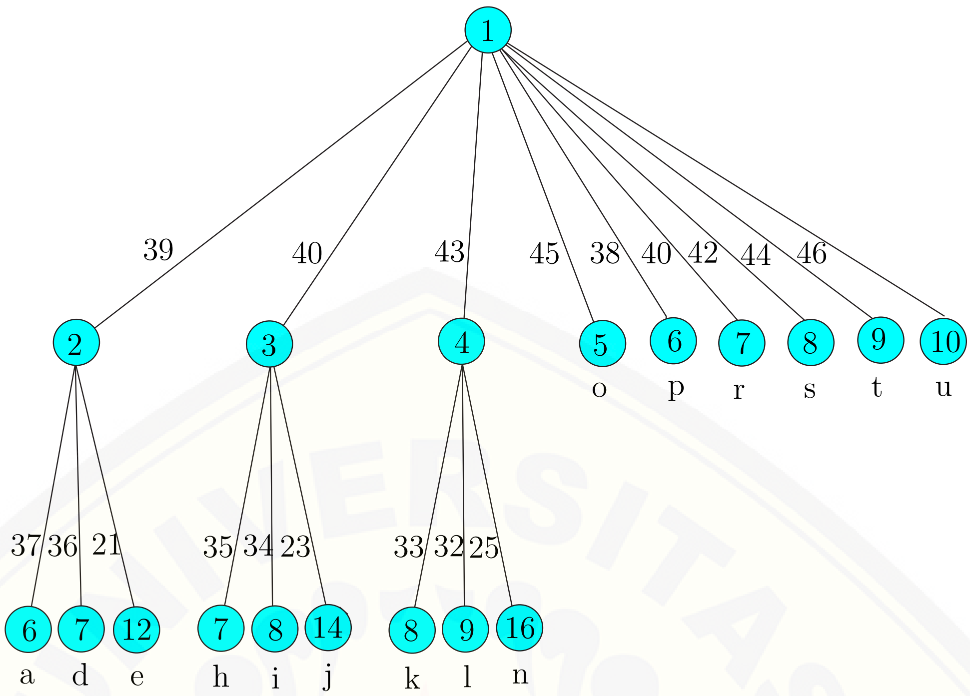
2.6 Aplikasi Graf

Salah satu aplikasi pelabelan graf seperti pelabelan total dekomposisi dapat digunakan dalam pengembangan kriptosistem *polyalpabhetic*. Misalnya kalimat rahasia yang akan dikirim adalah "20127 adalah PIN kartu kredit anda". Permasalahan ini adalah termasuk bagian aplikasi total dekomposisi dalam *cryptography*. *Cryptography* adalah sebuah teknik merubah dari *plaintext* (kalimat pesan) ke dalam ciphertext (kalimat rahasia yang akan dikembangkan)(Pearson, 2006). Ciphertext merupakan bentuk pesan yang tersandi ke bentuk lain yang tidak dapat dipahami. Pelabelan yang digunakan untuk mengubah pesan tersebut yaitu pelabelan total dekomposisi pada graf Helm H_n seperti pada Gambar 2.24 dengan $d = 3$.



Gambar 2.24 Dekomposisi Graf Helm H_9

Setelah melabeli graf Helm, dilanjutkan dengan mendata huruf dan angka yang digunakan dalam pesan dengan mengabaikan spasi dan tanda baca. Angka yang digunakan dalam pesan di ubah dalam bentuk alphabet yaitu menjadi "dua nol satu dua tujuh adalah PIN kartu kredit anda". Huruf yang digunakan adalah a, d, e, h, i, j, k, l, n, o, p, r, s, t, dan u. Gambar 2.25 adalah diagram pohon yang berakar di label 1 dengan dilengkapi label sisinya.



Gambar 2.25 Diagram Tree untuk membangun ciphertext

Letakkan huruf-huruf yang digunakan dalam pesan sesuai dengan abjad (abjad awal diletakkan di cabang terpendek), dan urutkan label sisinya. Kemudian pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi $a = mod(3937, 26) = 11$, $d = mod(3936, 26) = 10$, $e = mod(3921, 26) = 5$, $h = mod(4035, 26) = 5$, $i = mod(4034, 26) = 4$, $j = mod(4023, 26) = 19$, $k = mod(4333, 26) = 17$, $l = mod(4332, 26) = 16$, $n = mod(4325, 26) = 9$, $o = mod(45, 26) = 19$, $p = mod(38, 26) = 12$, $r = mod(40, 26) = 14$, $s = mod(42, 26) = 16$, $t = mod(44, 26) = 18$, dan $u = mod(46, 26) = 20$.

Kemudian hasil modulo tersebut dikombinasikan dengan label titik terakhir untuk menghindari terjadinya kesamaan bilangan diantara *ciphertext*. Dituliskan sebagai berikut $a = mod(611, 26) = 13$, $d = mod(710, 26) = 8$, $e = mod(125, 26) = 21$, $h = mod(75, 26) = 23$, $i = mod(84, 26) = 6$, $j = mod(1419, 26) = 15$, $k = mod(817, 26) = 11$, $l = mod(916, 26) = 6$, $n = mod(169, 26) = 13$, $o = mod(519, 26) = 25$, $p = mod(612, 26) = 14$, $r = mod(714, 26) = 12$,

$s = mod(816, 26) = 10$, $t = mod(918, 26) = 8$, $u = mod(1020, 26) = 6$. Kombinasi titik dan sisi tersebut di ubah dalam bentuk modulo 26, sehingga diperoleh *ciphertext* yaitu a=n, d=i, e=v, h=x, i=g, j=p, k=l, l=g, n=n, o=z, p=o, r=m, s=k, t=i, dan u=g. Oleh karena itu, dengan menggunakan proses substitusi pesan kedalam *ciphertext* tanpa spasi dan tanda baca, maka *ciphertext* dari pesan "duanolsatuduatujuhadalahpinkartukreditanda" adalah "ignnzgignknigigpgxningnxognlnmiglmviginnin".

2.7 Fungsi dan Barisan Aritmatika

2.7.1 Fungsi

Fungsi seringkali disebut dengan pemetaan. Fungsi f dari himpunan X ke himpunan Y dinotasikan dengan $f : X \rightarrow Y$ adalah aturan korespondensi satu-satu yang menghubungkan setiap $x \epsilon X$ dengan tepat satu ke anggota Y. Himpunan X disebut domain dari fungsi f sedangkan himpunan Y disebut kodomain dari fungsi f.

Berikut ini beberapa jenis fungsi khusus:

1. Fungsi Injektif

   Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi (pemetaan) injektif jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2 \epsilon X$ berlaku apabila $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ yaitu bila dua elemen dalam domain mempunyai bayangan (peta) yang sama, maka kedua elemen itu adalah elemen yang sama. Secara simbolis dapat dinyatakan: f adalah fungsi injektif $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \epsilon X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Secara ekivalen, juga dapat dinyatakan bahwa: f adalah fungsi injektif $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \epsilon X) x_1 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ yaitu jika dua elemen dalam domain adalah dua elemen yang tidak sama, maka bayangan (peta) kedua elemen itu juga tidak sama.

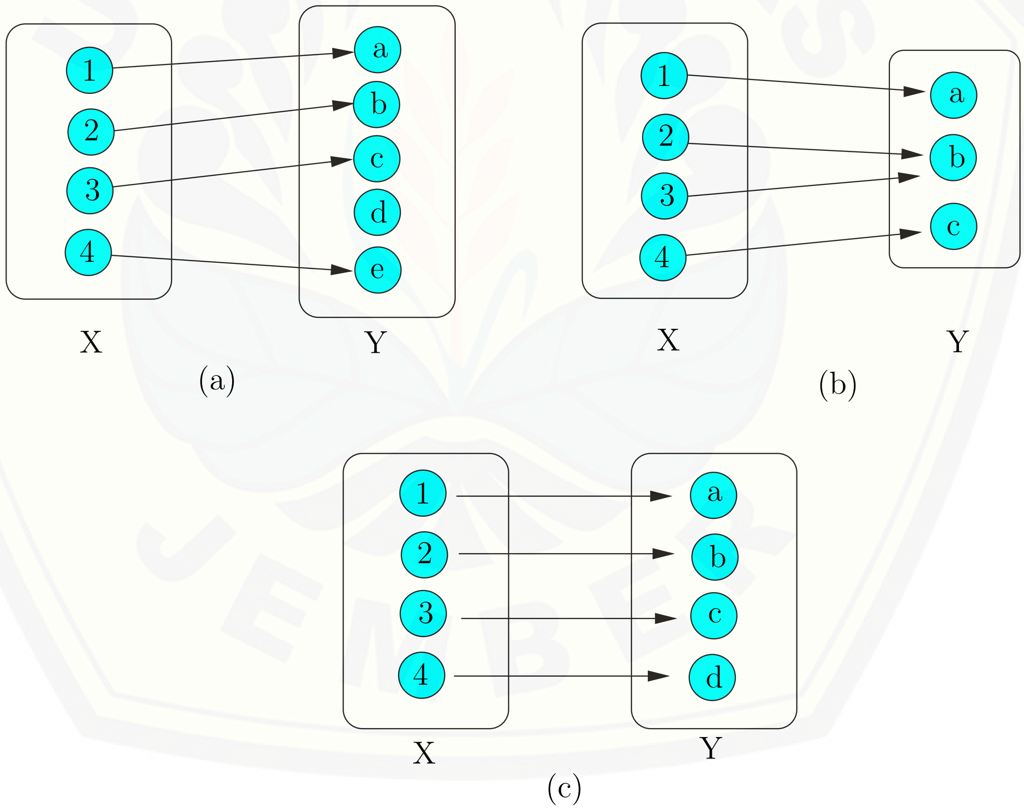
2. Fungsi Surjektif Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi (pemetaan) surjektif jika dan hanya jika kisaran dari fungsi f tersebut sama dengan kodomain dari fungsi f, yaitu $f(X) = Y$. Dengan perkataan lain, fungsi $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap $y \epsilon Y$ terdapat

$x \epsilon X$ sedemikian sehingga $y = f(x)$, yaitu setiap elemen dalam kodomain mempunyai prabayangan (prapeta). Secara simbolis dapat dinyatakan: f adalah fungsi surjektif $\Leftrightarrow (\forall y \epsilon Y)(\exists x \epsilon X) y = f(x)$.

3. Fungsi Bijektif

   Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi (pemetaan) bijektif jika dan hanya jika fungsi f tersbut adalah fungsi yang injektif da sekaligus surjektif. Pada fungsi bijektif, setiap elemen dalam domain mempunyai tepat satu bayangan dan setiap elemen dalam kodomain juga mempunyai tepat satu prabayangan. Oleh karena itu, fungsi bijektif seringkali juga disebut korespondensi satu-satu.

   Contoh dari ketiga fungsi khusus tersebut adalah dapat dilihat pada Gambar 2.26.



Gambar 2.26 Fungsi-fungsi khusus: (a) injektif, (b) surjektif, (c) bijektif

2.7.2 Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang memiliki beda (selisih) antaradua suku berurutan tetap. Berikut adalah beberapa contoh barisan bilangan:

1. $1, 5, 9, 13, ...$
2. $3, 6, 9, 12, ...$
3. $50, 45, 40, 35, ...$

Berdasarkan contoh barisan tersebut, didapat bahwa untuk contoh 1, suku pertama $(U_1) = 1$, suku kedua $(U_2) = 5$ yang diperoleh dari suku pertama ditambah 4, dan seterusnya. Selisih dari setiap suku berurutan dari barisan ini adalah tetap, yaitu sebesar 4. Barisan ini disebut barisan aritmatika dan selisih yang tetap dari barisan ini disebut beda barisan yang dilambangkan dengan b. Demikian halnya dengan contoh 2 dan 3, contoh-contoh tersebut juga disebut barisan aritmatika meskipun memiliki nilai beda yang tidak sama dengan contoh 1. Contoh 2 memiliki nilai beda $b = 3$, sedangkan contoh 3 memiliki beda $b = -5$.

Rumus suku ke$-n$ dari barisan aritmatika, yaitu jika suku pertama barisan aritmatika U_1 disimbolkan a, maka diperoleh:

$U_1 = a$

$U_2 - U_1 = b \Leftrightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$

$U_3 - U_2 = b \Leftrightarrow U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$

$U_4 - U_3 = b \Leftrightarrow U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$

dan seterusnya, sehingga diperoleh barisan aritmatika dalam bentuk:

$a, a + b, a + 2b, a + 3b, ..., a + (n - 1)b$

Dari barisan tersebut kita dapatkan bentuk umum rumus suku ke-n barisan aritmatika yaitu:

$U_n = a + (n - 1)b.$

2.8 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan *corolarry* (akibat). Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual. Corollary (akibat) adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan corollary adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Konjektur adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Konjektur bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, konjektur adalah proposisi yang tidak terbuktikan atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. *Open problem* (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh *open problem* dalam matematika, yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad kedua puluh, adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta. Sedangkan *open problem* yang belum terselesaikan contohnya adalah permasalahan jembatan Königsberg.

2.9 Hasil - hasil Penelitian Pelabelan Selimut $\mathcal{H}$-Antimagic

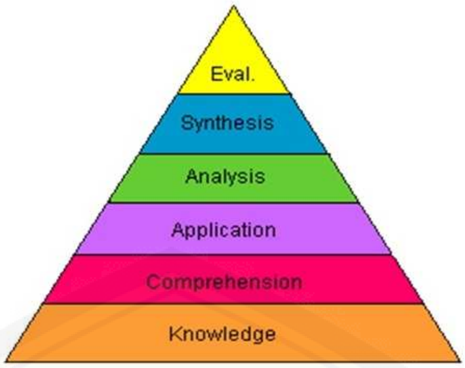
Suatu selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H, maka H dikatakan suatu selimut-H dari G. Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut-H. Suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan deret aritmatika $a, a+d, a+2d, ..., a+(t-1)d$. Beberapa ringkasan hasil penelitian pelabelan selimut H-Antimagic yang juga dapat digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini akan disajikan sebagai berikut:

2.10 Keterampilan Berfikir Tingkat Tinggi

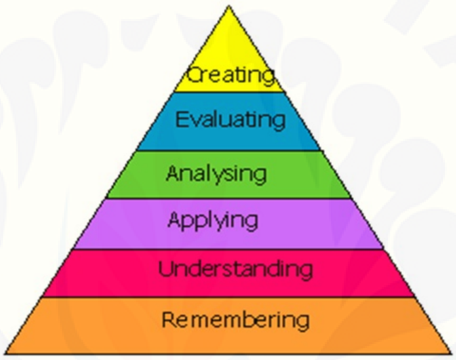
Menurut Santrock (2008) berpikir melibatkan kegiatan memanipulsasi dan mentransformasi informasi dalam memori. Keterampilan berpikir dapat didefinisikan sebagai proses kognitif yang dipecah-pecah ke dalam langkah-langkah nyata yang kemudian digunakan sebagai pedomak berpikir. Satu contoh keterampilan berpikir adalah menarik kesimpulan, yang didefinisikan sebagai kemampuan untuk menghubungkan berbagai petunjuk dan fakta atau informasi dengan pengetahuan yang telah dimiliki untuk membuat suatu prediksi hasil akhir yag terumuskan. Untuk mengajarkan keterampilan berpikir menarik kesimpulan tersebut yaitu proses kognitif harus dipecah ke dalam langkah-langkah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi pertanyaan atau fokus kesimpulan yang akan dbuat;
2. mengidentifikasi fakta yang diketahui;
3. mengidentifikasi pengetahuan yang relevan yang telah diketahui sebelumya;
4. membuat perumusan prediksi hasil akhir, berdasarkan Taksonomi Bloom yang telah direvisi terdapat enam tahapan ranah kognitif yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi.

Taksonomi Bloom dianggap merupakan dasar bagi proses berpikir. Taksonomi Bloom yang digambarkan dalam Gambar 2.28 memuat enam level : mengingat(*remembering*),memahami (*understanding*), menerapkan (*applying*), menganalisis (*analysing*), mengevaluasi (*evaluating*) dan mencipta (*creating*). Kebiasaan berpikir akan memacu munculnya kreativitas, inovasi, dan kecerdasan. Semakin tinggi level berpikir seseorang dikatakan semakin tinggi pula keterampilan berpikir. Sebaliknya semakin rendah level berpikir seseorang dikatakan semakin rendah pula keterampilan berpikirnya.



Gambar 2.27 Tahapan Taksonomi Bloom (gurupembaharu.com)



Gambar 2.28 Tahapan Taksonomi Bloom yang Telah Direvisi (gurupembaharu.com)

Aspek mengingat, memahami, dan menerapkan merupakan kategori berpikir tingkat rendah, sedangkan aspek menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi termasuk kategori berpikir tingkat tinggi. Hal tersebut bukan berart bahwa aspek mengingat, memahami, dan menerapkan tidak penting, namun untuk menuju dalam berpikir tingkat tinggi seseorang harus melalui tiga aspek tersebut. Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja kunci dari ranah kognitif yang telah direvisi: (Utari, R :10)

1. Mengingat adalah Kemampuan menyebutkan kembali informasi/ pengetahuan yang tersimpan di dalam ingatan. Kata kerja kuncinya: mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, menemukan

kembali, menyatakan, mengulang, mengurutkan, menamai, menempatkan, menyebutkan.

2. Memahami adalah Kemampuan memahami instruksi dan menegaskan pengertian/ makna ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk lisan, tertulis maupun grafik/ diagram. Kata kerja kuncinya: Menerangkan, menjelaskan, menterjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, mengubah, memperkirakan.

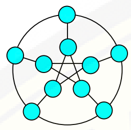
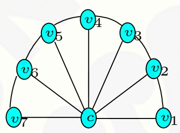
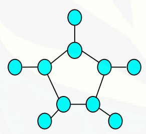
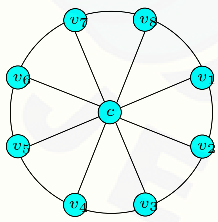
3. Menerapkan adalah Kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kata kerja kuncinya: memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, mempraktekkan.

4. Menganalisis adalah Kemampuan memisahkan konsep kedalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata kerja kuncinya: mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan, menunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisihkan menjadi beberapa bagian, mengorganisir, mengkerangkakan.

5. Mengevaluasi adalah Kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja kuncinya: menilai, mengevaluasi, menjustifikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, menyeleksi.

6. Mengkreasi adalah Kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinil. Kata kerja kuncinya: merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengmbangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya.

Tabel 2.1 Ringkasan pelabelan selimut super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic.

Graf	a	d	Hasil
$GP_{n,k}$(*Generalized Petersen*)  (Karyanti, 2012)	$3 + 14n - 3\lfloor n/2 \rfloor$	$d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
F_n(*Fan*)  (Karyanti, 2012)	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$ $8 + 6n + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 4$ $d = 2$	$\mathcal{H} = C_3$
S_n(*Matahari*)  (Karyanti, 2012)	$13n + 4$ $12n + 5 + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$ $d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
W_n(*Graf Roda*)  (Inayah, 2009)	$3hn + 5$ $2hn + 3h + n$	$d = 3$ $d = 1$	$\mathcal{H} = C_3$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deskriptif aksiomatik yaitu metode menurunkan aksioma atau teorema yang sudah ada, kemudian diterapkan dalam super (a,d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm dan juga dikenalkan beberapa teorema mengenai super (a,d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm secara konektif maupun diskonektif. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk mendapatkan pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf Helm. Setelah ditemukan pelabelan total dekomposisi dari graf tersebut, maka dilanjutkan ke metode pendeteksian pola. Tujuan dari metode pendeteksian pola ini yaitu untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi graf helm secara umum, sehingga akan didapat rumus super (a,d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm. Penelitian ini juga menggunakan tahapan-tahapan Taksonomi Bloom yang telah direvisi yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Setiap langkah dalam penelitian ini akan dikaitkan dengan tahapan-tahapan tersebut untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi. Selain itu akan dikembangkan penggunaan *ciphertext* pada pesan rahasia dari pelabelan yang ditemukan.

3.2 Definisi Operasional

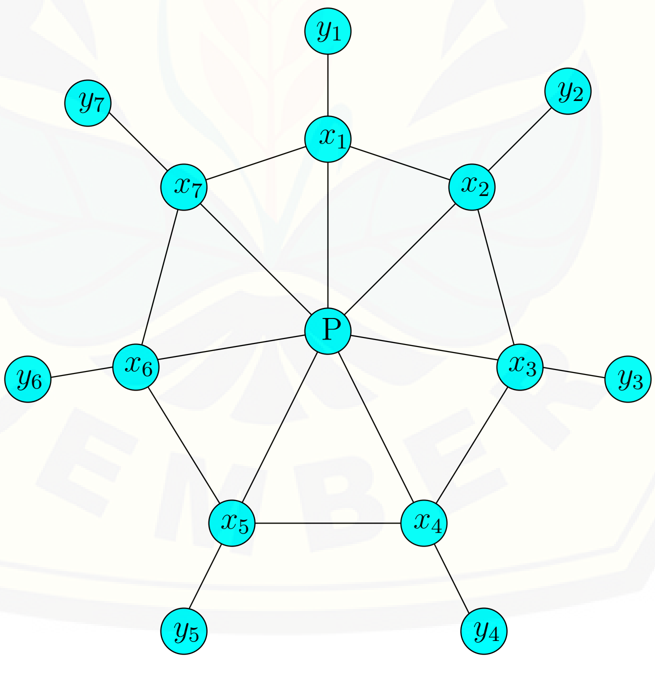
Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna.

3.2.1 Super (a,d)-S_3 Antimagic Total Dekomposisi

Super (a,d) antimagic total dekomposisi pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai selimut dari G yaitu $H = \{H_1, H_2, H_3, ..., H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H, maka H dikatakan selimut-H dari G. Selanjutnya, jika selimut-H dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., k\}$, maka selimut-H disebut dekomposisi-H. Dalam hal ini, G dikatakan memuat dekomposisi-H atau G terdekomposisi atas H. Sebuah graf $G(V, E)$ memiliki (a, d)-H total dekomposisi jika setiap sisi E merupakan sub graf dari G yang isomorfik dengan H. Pada penelitian ini akan digunakan graf Helm yang terdekomposisi atas graf star (S_3).

3.2.2 Graf Helm Konektif

Graf Helm dinotasikan H_n dengan $n \geq 3$ dan n ganjil. Graf helm ini merupakan sebuah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik pada sikel. Titik $V(H_n) = \{P\} \cup \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(H_n) = \{Px_i, x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nx_1\}$. Graf helm ini disebut juga graf helm konektif. Gambar 3.1 merupakan graf Helm H_7.



Gambar 3.1 Graf Helm (H_7)

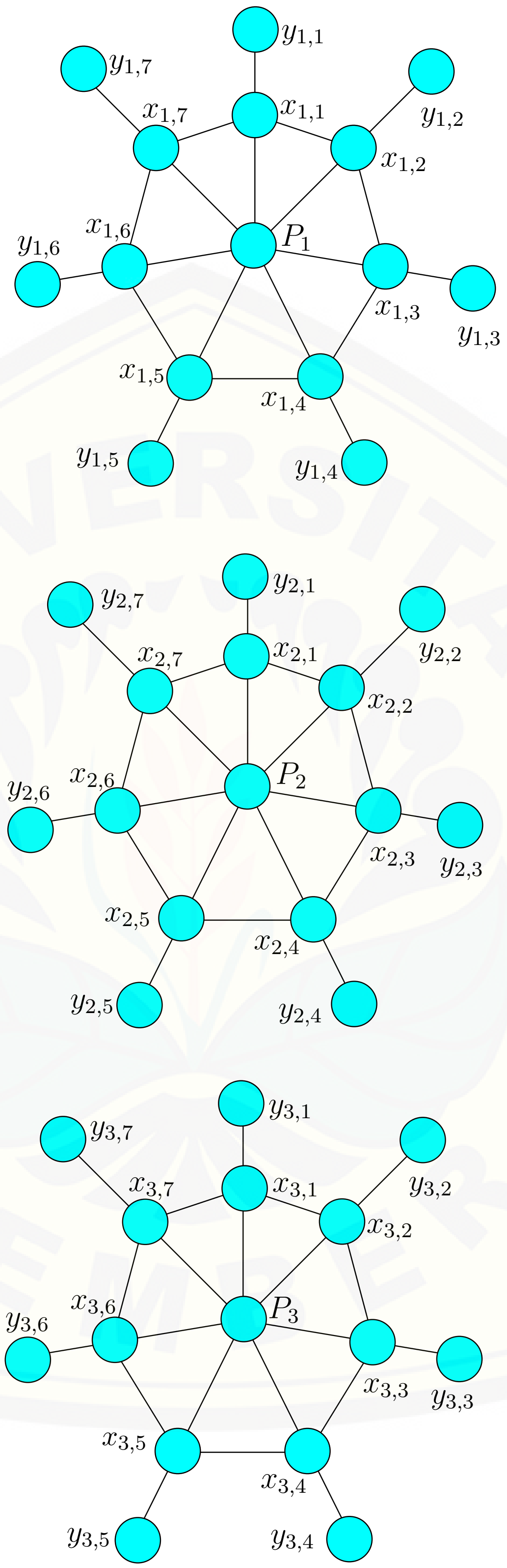
3.2.3 Gabungan Saling Lepas Graf Helm

Gabungan saling lepas graf helm H_n didefinisikan sebagai gabungan diskonektif sebanyak m salinan graf helm yang mempunyai titik $V(H_n) = \{P_k\} \cup \{x_{i,k}; y_{i,k}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$ dan sisi $E(H_n) = \{P_k x_{i,k}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{i,k} x_{(i+1),k}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{i,k} y_{i,k}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{n,k} x_{1,k}; 1 \leq k \leq m\}$. Penelitian ini dibatasi pada mH_n dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Gambar 3.2 adalah gabungan saling lepas graf helm dengan $n = 7$ dan $m = 3$.

3.3 Teknik Penelitian

Teknik penelitian untuk super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm adalah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi famili pada graf Helm;
2. menghitung jumlah titik p dan jumlah sisi q pada graf Helm;
3. menentukan batas atas nilai beda d pada graf Helm;
4. menentukan label titik pada graf Helm;
5. apabila label dekomposisi berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *deterministik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan dengan mengembangkan fungsi bijektif dekomposisi pada graf Helm;
6. menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi pada graf Helm;
7. mengembangkan fungsi sisi dan bobot total pada graf Helm;
8. membuktikan kebenaran fungsi pada graf Helm;
9. menemukan teorema;
10. membentuk *ciphertext* sesuai pesan.



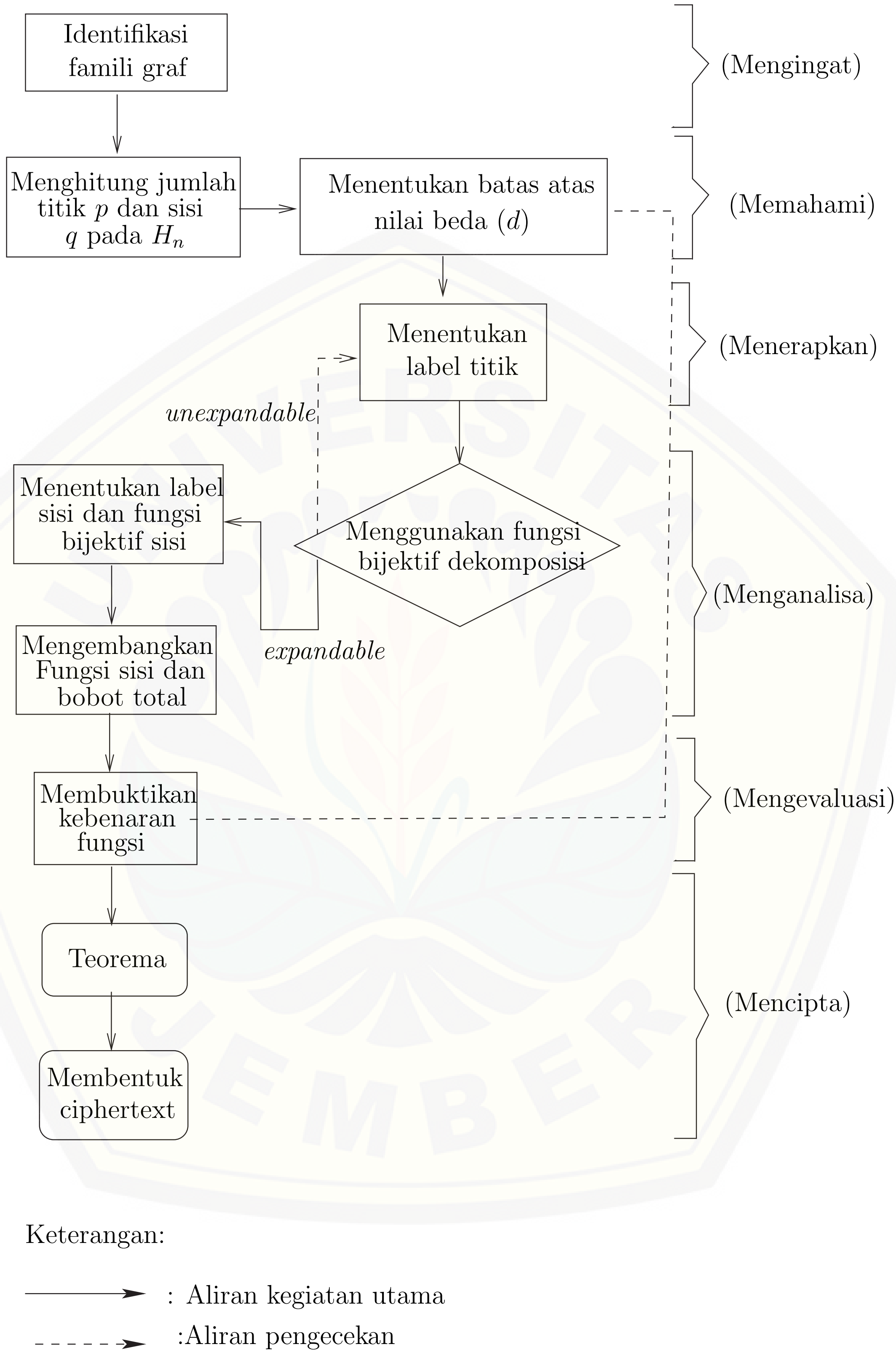
Gambar 3.2 Graf Helm ($3H_7$)

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi dengan berbagai nilai awal a dan nilai beda d yang ditentukan. Teknik penelitian untuk gabungan saling lepas pada graf Helm sama dengan teknik penelitian yang telah disebutkan di atas namun teknik tersebut ditetapkan pada gabungan saling lepas graf Helm. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas akan disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.3.

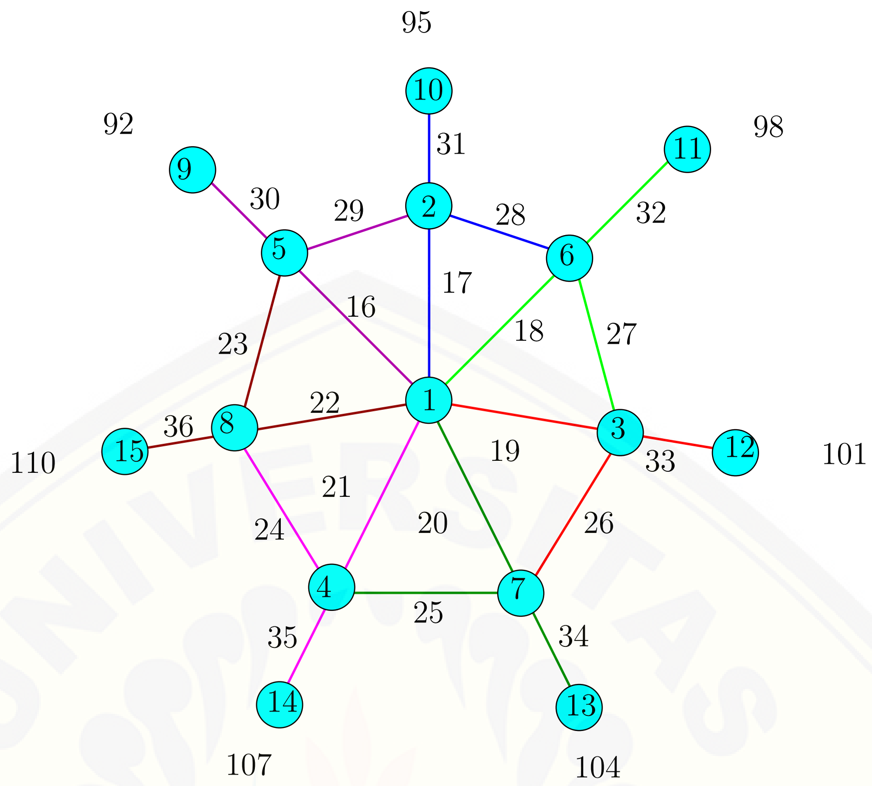
3.4 Observasi

Sebelum penelitian lanjutan pada graf helm, telah dilakukan observasi awal untuk nilai m dan n tertentu sebagai pedoman untuk menduga super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi serta menentuka pola pelabelannya. Setelah melakukan observasi awal, peneliti menemukan pola pelabelan titik tunggal pada graf Helm, antara lain dengan beberapa tahapan berikut beserta kaitannya dengan proses berpikir berdasarkan Taksonomi Bloom: 1) mengingat definisi dan teorema yang telah dibuktikan pada pelabelan dekomposisi (tahap mengingat), 2) memahami definisi dan teorema tersebut (tahap memahami), 3) menggunakan definisi dan teorema pada pelabelan dekomposisi yaitu mencari pelabelan titik dan pelabelan sisi graf Helm (tahap menerapkan), 4) tahap penerapan ini dimulai dengan melabeli titik pusat p, 5) kemudian titik x_2, x_4, x_6, 6) label selanjutnya yaitu titik x_1, x_3, x_5, x_7, 7) dilanjutkan dengan pelabelan titik $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$, 8) tahapan pelabelan diskonektif graf Helm sama dengan tahapan pelabelan konektif hanya berbeda pengurutannya.

Berdasarkan tahapan-tahapan tersebut, penulis menemukan pelabelan total dekomposisi untuk Graf Helm tunggal (konektif) secara berurutan, maka penulis dapat melanjutkan observasinya untuk menemukan beberapa pelabelan dekomposisi yang lain. Gambar 3.4 merupakan observasi awal yaitu pelabelan dekomposisi pada graf Helm konektif (H_7) dengan nilai $d = 3$ dan Gambar 3.5 pelabelan dekomposisi pada graf Helm diskonektif $(3H_7)$ dengan nilai $d = 5$.



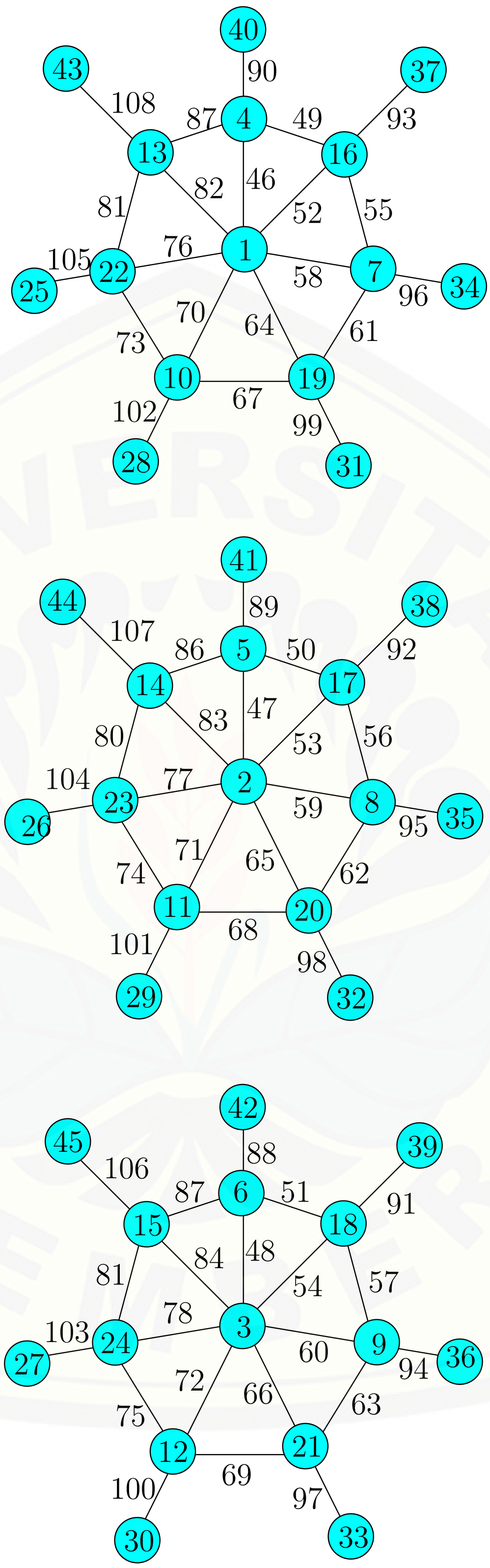
Gambar 3.3 Rancangan penelitian



Gambar 3.4 Observasi awal pada graf helm konektif (H_7)

Pelabelan titik pada graf Helm konektif H_7 dimulai dari titik pusat dengan label 1, kemudian titik x_i dengal label 2 sampai 8, pelabelan titik ini dimulai dari i genap kemudian ke i ganjil. Setelah itu pelabelan pada titik y_i, dimulai dari y_1 sampai y_7 dengan label 9 sampai 15. Pelabelan selanjutnya yaitu pelabelan sisi pada graf Helm. Pelabelan sisi ini dimulai dari sisi Px_i dengan label 16 sampai 22 kemudian sisi x_ix_{i+1} dengan pelabelan mundur dari 29 sampai 23, pelabelan sisi yang terakhir yaitu label sisi x_iy_i dengan label 30 sampai 36. Langkah-langkah pelabelan graf Helm diskonektif sama dengan pelabelan graf Helm konektif. Hanya saja perbedaan terletak pada banyaknya graf yang dilabeli.

Oleh karena itu, Penulis dapat melanjutkan observasinya untuk pelabelan total dekomposisi graf Helm konektif (H_n) dan diskonektif (mH_n) untuk nilai m dan n tertentu. Observasi selanjutnya akan mengikuti tahapan-tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi.



Gambar 3.5 Observasi awal pada graf helm diskonektif ($3H_7$)

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf Helm konektif H_n memiliki super (a,d)-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $d \in \{0,1,2,\ldots,16\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Graf helm H_n memiliki super $(\frac{26n-dn+d+20}{2},d)$-$S_3$, antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$ dan $d \in \{0,1,2,\ldots,16\}$. Graf Helm diskonektif mH_n memiliki super (a,d)-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $d \in \{0,1,2,\ldots,17\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Ada pelabelan super $(\frac{19}{2}mn+\frac{29}{2}m+12n-21,1)$-$S_3$, $(\frac{21}{2}mn+\frac{29}{2}m+12n-22,3)$-$S_3$, $(\frac{23}{2}mn+\frac{29}{2}m+12n-23,5)$-$S_3$, $(\frac{19}{2}mn-\frac{1}{2}m+7,7)$-$S_3$, $(\frac{37}{2}mn+6m^2-\frac{13}{2}+16,11)$-$S_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf Helm mH_n untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.

2. Pembuatan pesan rahasia (*Ciphertext*) dari sebuah kalimat di awali dengan melabeli graf Helm H_n, menjumlahkan banyak titik yang digunakan pada graf tersebut dengan 26 alfabet dan 1 spasi (⊔), dan jumlahnya adalah 47. Pelabelan pada graf yang melebihi 47 harus di eliminasi dan tidak dimasukkan dalam diagram pohon graf helm. Setelah pembuatan diagram pohon dilanjutkan dengan penempatan alfabet a sampai z dan spasi (⊔). Kemudian menghitung nilai modulo dari setiap cabang atau label sisi sesuai dengan letak alfabet dan spasi (⊔). Maka akan diperoleh sebuah kode pada setiap alfabet dan spasi (⊔). Pesan rahasia "dua⊔nol⊔satu⊔dua⊔tujuh⊔adalah pin⊔kartu⊔kredit⊔anda" yang terbentuk dari pelabelan super $(13n+10,0)$ dengan $d=0$ yaitu "yiatrfsthaoityiatoidiutayasautqbrtcapoitcpxybotarya". Sedangkan untuk pelabelan super $(\frac{15n+31}{2},11)$ dengan $d=11$ yaitu "oqxtdeztmxpqtoqxtpqvqltxoxzxltgrdtyxkpqtykkuorptxdox".

3. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi menurut Anderson dengan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi graf Helm yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengenali graf yang akan di bangun, menjelaskan kesesuaian graf Helm dan definisi dari graf Helm, menunjukkan batas atas yang ada pada graf Helm, menduga bahwa pelabelan graf Helm berpola pada tunggal maupun gabungannya, mengkaji ulang dan mengecek pola tersebut pada setiap ekspannya, dan yang terakir memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi teorema yang baru.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada Graf Helm (H_n) serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran agar pembaca dapat melakukan penelitian pada super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada Graf Helm konektif (H_n) untuk nilai $d \in \{12, 13, \ldots, 16\}$. Sedangkan super (a, d)-S_3 antimagic total dekomposisi pada Graf Helm dikonektif (mH_n), untuk $d \in$ genap dan untuk $d \in \{13, 15, 17\}$.

DAFTAR PUSTAKA

Abidin, Z. 2010. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Firecracker.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Arends, R.I. 2000. Learning to Teach. Fifth Edition. New York: McGraw Hill Companies, Inc.

Ariyus, Dony. 2008. *Pengantar Ilmu Kriptografi.* Yogyakarta: Andi Yogyakarta.

Bača dkk. 2013. *On d-Antimagic Labelings of Plane Graphs.* Electronic Journal of Graph Theory and Applications 1, 28-39.

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph.* Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).

Dafik, M. Miller, J.Ryan and M.Baca. *On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs.* Discrite Math. (To appear).

Erni Novianti. 2012. *Dekomposisi Cyclic dari Graf Lengkap, Graf Graceful, dan Aplikasinya dalam Telecommand Codes.* Artikel.

Fairuzabadi, Muhammad. 2010. *Implementasi Kriptografi Klasik Menggunakan Borland Delphi.* (Vol 4 No 2)

Farisandri, R.O. 2012. *Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Gabungan Graf Helm.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Gallian, J.A. 2007. "dynamic Survey DS6: Graph Labeling" Electronic J. Combinatorics. DS6. (online): http://mathword.wolfram.com/www.combinatorics.-org/surveys/ds6.pdf. Diakses tanggal 27 Juni 2015.

Harfield N, and G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory, A Comprehensive Introduction.* London: Academic Press.

Inayah, N. 2013. *Pelabelan* $(a,d)-H$*-Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf.* Disertasi. Not Publicated. Institut Teknologi Bandung.

Inayah, N., Llado, A., dan Moragas, J. 2012. *Magic and antimagic H-dekomposition. Discrete Mathematics.* 312, 137-1371.

Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2009. *On (a,d)-H-Antimagic Covering of Graph.* The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 71, 273-281.

Juliadi, dkk. 2012. *Kriptografi Klasik dengan Metode Modifikasi Affine Chipper yang di Perkuat dengan Vigenere Chipper.* (Vol 2 No 2)

Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut (a,d)-H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.

Liang, Z. 2012. *Cycle-supermagic decompositions of complete multipartite graphs, Discrete Mathematics.*

Lin Y, Slamin, Bača M, and M. Miller. 2000. *On-d Antimagic Labeling of Prisms.* The university of Newcastle, Australia.

Luthfiana, Ulfa dan Eddy Budiono. 2013. *Penerapan Strategi Brain Based Learning yang dapat Meningkatkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi.* Malang: Tidak Dipublikasikan.

Muktyas, I.B. dan Sugeng, K. A. 2014. *Pemanfaatan Pelabelan Graceful pada Symmetric Tree untuk Kriptografi Polyalphabetic.* (Vol 1 No 1).

Munir R. 2001. *Matematika Diskrit. Buku Teks Ilmu Komputer.* Bandung: Penerbit Informatika.

Ongko, Erianto. 2013. *Aplikasi Pembelajaran Kriptografi Klasik dengan Visual Basic .NET.* Medan: STMIK IBBI.

Palupi, Retno. 2008. *Kriptosistem Kunci Asimetrik Menggunakan Algoritma Genetika Pada Data Citra.* (Vol 1 No 1)

Pearson, E. 2006. *Introduction To Cryptography With Coding Theory.* America: United States of America

Rahmawati, N. 2014. *Dekomposisi graf sikel, graf roda, graf gir dan graf persahabatan, Skripsi.* Not Publicated. Universitas Negeri Surabaya.

Saragih, S. 2007. *Pengembangan Kemampuan Berpikir Logis dan Komunikasi Matematika Siswa Sekolah Menengah Pertama melalui PMR.* Disertasi tidak diterbitkan. Bandung : PPS UPI

Schneier, B. 1996. *Applied Cryptography: protocols, algorithms, and source code in C,* John Wiley and Sons, Inc.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf.* Jember: Universitas Jember.

Slamin. 2001. *Diregularity of Digraphs Close to Moore Bound,* Ph.D. Stud. Thesis. The University of Newcastle. Australia.

Slamin, M. Bača, Y.Lin, M. Miller, and R. Simanjuntak. 2002. *Edge-magic total labelings of wheels, fans and friendship graphs. Bull. Inst. Combin. Appl.*, **35** 89-98.

Utari, R. 2008. *Taksonomi Bloom: Apa dan Bagaimana Cara Menggunakannya.* Pusdiklat KNPK, Widyaiswara Madya.

Wijaya, K. 2000. *Pelabelan Total Sisi Ajaib.* Bandung. Thesis ITB.