PEWARNAAN SISI r-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS SERTA GRAF OPERASI SAKEL DAN GENERALISASINYA

SKRIPSI

Oleh
Viqedina Rizky Noviyanti
NIM 121810101008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PEWARNAAN SISI *r*-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS SERTA GRAF OPERASI SAKEL DAN GENERALISASINYA

SKRIPSI

Disusun guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

Oleh
Viqedina Rizky Noviyanti
NIM 121810101008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Ibunda Titik Resminingsih, Ayahanda Suyanto, Kakakku Viqenina Desycapri Yudhayanti, Amd.Keb dan Abdur Roziq, Amd.Kep yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, dan motivasi;
2. Guru dan dosen-dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
3. Sahabat-sahabat terbaikku dalam keluarga besar matematika angkatan 2012 (BATHICS'12) yang selalu memberi dukungan dan semangat;
4. Sahabatku Anggun Puspitasari, S.ST, Triamei Sinta serta teman-teman kos Az-Zahraa yang selalu memberi semangat;
5. Teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka;
6. Almamater tercinta Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Sesungguhnya, sesudah kesulitan itu ada kemudahan."
(QS. Al-Insyirah : 6) *)

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."
(QS. Al-Mujadilah :11) *)

"Jangan takut kegelapan karena tidak jauh darimu ada cahaya."
(V.R. Noviyanti) **)

---

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

**) Penulis

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Viqedina Rizky Noviyanti

NIM : 121810101008

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pewarnaan Sisi r-Dinamis pada Graf Khusus serta Graf Operasi Sakel dan Generalisasinya adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Viqedina Rizky Noviyanti

NIM. 121810101008

SKRIPSI

PEWARNAAN SISI *r*-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS SERTA GRAF OPERASI SAKEL DAN GENERALISASINYA

Oleh

Viqedina Rizky Noviyanti
NIM 121810101008

Dosen Pembimbing 1 : Kusbudiono, S.Si, M.Si
Dosen Pembimbing 2 : Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pewarnaan Sisi r-Dinamis pada Graf Khusus serta Graf Operasi Sakel dan Generalisasinya" telah diuji dan disahkan oleh Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Kusbudiono, S.Si., M.Si	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 19770430 200501 1 001	NIP.19840801 200801 2 006
Anggota I,	Anggota II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

PEWARNAAN SISI *r*-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS SERTA GRAF OPERASI SAKEL DAN GENERALISASINYA; Viqedina Rizky Noviyanti, 121810101008; 2016: 103 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf berkembang semakin luas. Terdapat banyak topik yang menarik untuk dikaji salah satunya adalah pewarnaan. Pewarnaan graf digolongkan menjadi pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada pewarnaan graf, tidak boleh ada warna yang sama saling bertetangga. Dalam hal ini pewarnaan dengan *k*-warna yang paling minimum pada suatu graf disebut sebagai bilangan kromatik yaang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pada pewarnaan graf, tidak boleh ada warna yang sama saling bertetangga. Pengembangan dari *k*-warna dikembangkan oleh Hong-Jian Lai dan Bruce Montgomory pada tahun 2002 yang memperkenalkan konsep pewarnaan dinamis. Pewarnaan *k*- warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak *k* warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada graf G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik - titik ketetanggaannya. Nilai *k* terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan *k*-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, dinotasikan dengan $\chi(G)$, kemudian digeneralisasikan menjadi pewarnaan titik *r*-dinamis.

Perwarnaan titik *r*-dinamis kemudian mengalami perkembangan yaitu pewarnaan sisi *r*-dinamis yang disesuaikan dengan kondisi atau syarat pada pewarnaan sisi graf. Pewarnaan sisi *r*-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $E(G)$ ke himpunan warna sedemikian sehingga $|C(N(e))| \geq minr, d(u) + d(v) - 2$ untuk setiap $e = uv \in E(G)$, dimana $N(e)$ merupakan himpunan sisi yang bersisian dengan sisi e, dan $d(u)$ merupakan derajat dari titik u. Penggunakan k-warna dinamis yang paling minimal disebut dengan bilangan kromatik sisi *r*-dinamis yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$.

Pewarnaan sisi *r*-dinamis dapat diterapkan pada graf khusus maupun graf operasi. Operasi graf adalah metode yang digunakan untuk memperoleh graf baru dengan cara mengkombinasikan dua atau lebih. Adapun graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu $TL_n, TCL_n, BT_n, shack(H_{2,2}, v, n)$, $shack(Pr_4, e, n), shack$ $(BT_n, v, n), shack(W_6, v, n)$, dan $shack(Wd_{3,3}, v, n)$.

Penelitian ini menggunakan metode deduktif dan pendeteksian pola. Tujuan penelitian ini adalah menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf operasi dan

bilangan kromatik *r*-dinamis pada graf $TL_n, TCL_n, BT_n, shack(H_{2,2}, v, n), shack$ $(Pr_4, e, n), shack(BT_n, v, n), shack(W_6, v, n)$, dan $shack(Wd_{3,3}, v, n)$. Pada penelitian ini dihasilkan 8 teorema baru yaitu 3 teorema graf khusus dan 5 teorema graf operasi sakel dan generalisasinya. Adapun hasil dari teorema yang sudah ditemukan antara lain :

1. **Teorema 4.1.1** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi *r*-dinamis pada graf *triangular ladder* (TL_n) adalah sebagai berikut :

$$\begin{gathered} \lambda(TL_n) = \lambda_d(TL_n) = \lambda_3(TL_n) = 4 \\ \lambda_4(TL_n) = 5 \\ \lambda_5(TL_n) = 7 \\ \lambda_{r\geq 6}(TL_n) = 9 \end{gathered}$$

2. **Teorema 4.1.2** Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik sisi *r*-dinamis pada graf tangga tiga siklus (TCL_n) adalah sebagai berikut :

$$\begin{gathered} \lambda(TCL_n) = \lambda_d(TCL_n) = \lambda_3(TCL_n) = \lambda_4(TCL_n) = 5 \\ \lambda_5(TCL_n) = 7 \\ \lambda_6(TCL_n) = 9 \\ \lambda_7(TCL_n) = 11 \\ \lambda_{r\geq 8}(TCL_n) = 12 \end{gathered}$$

3. **Teorema 4.1.3**Untuk $n \geq 2$ bilangan kromatik pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf triangular book (BT_n) adalah sebagai berikut :

$$\begin{gathered} \lambda_{r\leq n}(BT_n) = n + 1 \\ \lambda_{r\geq n+1}(BT_n) = 2n + 1 \end{gathered}$$

4. **Teorema 4.1.4** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi *r*-dinamis pada graf $G = shack(H_{2,2}, v, n)$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{gathered} \lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_d(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4 \\ \lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) = 6 \\ \lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 7 \\ \lambda_{r\geq 6}(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8 \end{gathered}$$

5. **Teorema 4.1.5** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi *r*-dinamis pada graf $G = shack(Pr_4, e, n)$ adalah sebagai berikut :

$$\lambda(shack(Pr_4,e,n)) = \lambda_d(shack(Pr_4,e,n)) = \lambda_3(shack(Pr_4,e,n)) = 5$$
$$\lambda_4(shack(Pr_4,e,n)) = 6$$
$$\lambda_5(shack(Pr_4,e,n)) = 7$$
$$\lambda_6(shack(Pr_4,e,n)) = \lambda_7(shack(Pr_4,e,n)) = 10$$
$$\lambda_{r\geq 8}(shack(Pr_4,e,n)) = 12$$

6. **Teorema 4.1.6** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi *r*-dinamis pada graf $G = shack(BT_3,v,n)$ adalah sebagai berikut :

$$\lambda_{r\leq 7}(shack(BT_3,v,n)) = 8$$
$$\lambda_8(shack(BT_3,v,n)) = \lambda_9(shack(BT_3,v,n)) =$$
$$\lambda_{10}(shack(BT_3,v,n)) = 11$$
$$\lambda_{11}(shack(BT_3,v,n)) = 12$$
$$\lambda_{12}(shack(BT_3,v,n)) = 13$$
$$\lambda_{13}(shack(BT_3,v,n)) = 14$$
$$\lambda_{r\geq 14}(shack(BT_3,v,n)) = 15$$

7. **Teorema 4.1.7** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi *r*-dinamis pada graf $G = shack(W_6,v,n)$ adalah sebagai berikut :

$$\lambda_{r\leq 5}(shack(W_6,v,n)) = 6$$
$$\lambda_6(shack(W_6,v,n)) = 9$$
$$\lambda_7(shack(W_6,v,n)) = \lambda_8(shack(W_6,v,n)) = \lambda_9(shack(W_6,v,n)) = 11$$
$$\lambda_{r\geq 10}(shack(W_6,v,n)) = 12$$

8. **Teorema 4.1.8** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi *r*-dinamis pada graf $G = shack(Wd_{3,3},v,n)$ adalah sebagai berikut :

$$\lambda_{r\leq 5}(shack(Wd_{3,3},v,n)) = 6$$
$$\lambda_6(shack(Wd_{3,3},v,n)) = 7$$
$$\lambda_7(shack(Wd_{3,3},v,n)) = 8$$
$$\lambda_{r\geq 8}(shack(Wd_{3,3},v,n)) = 9$$

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Pewarnaan Sisi r-Dinamis pada Graf Khusus serta Graf Operasi Sakel dan Generalisasinya”. Penulisan skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan akademik untuk menyelesaikan Sarjana Matematika (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dekan Fakultas MIPA Universitas Jember.
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
3. Kusbudiono, S.Si.,M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Ika Hesti Agustin, S.Si.,M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, serta Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Penguji I dan Dr. Muh. Fattekurrahman, S.Si.,M.Si. selaku Dosen Penguji II.
4. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
5. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan serta dorongan dari semua pihak dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT. Selain itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbagai macam permasalahan di dunia terdapat beberapa yang sulit dipecahkan menggunakan perhitungan dan pertimbangan biasa. Graf dapat dipecahkan menggunakan perhitungan dan pertimbangan biasa. Graf dapat membantu memodelkan permasalahan kemudian dideskripsikan dan digambarkan secara jelas. Penyelesaian dalam graf dapat dilakukan dengan mengubah objek menjadi titik dan titik yang kemudian dihubungkan dengan sisi untuk menggambarkan permasalahan. Teori graf berkembang semakin luas. Terdapat banyak topik yang menarik untuk dikaji salah satunya adalah pewarnaan. Pewarnaan graf digolongkan menjadi tiga macam yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada pewarnaan graf dibutuhkan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi yang berfungsi untuk menunjukkan karakteristik suatu graf dan dapat digunakan sebagai penentuan fungsi pewarnaan yang memetakan c dari titik$(V(G))$ atau sisi $(E(G))$ ke himpunanan warna. Suatu pewarnaan graf tidak boleh memiliki warna yang sama yang saling bertetangga. Dalam hal ini pewarnaan dengan k-warna yang minimum pada suatu graf disebut sebagai bilangan kromatik yaang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pengembangan dari *k*-warna dikembangkan menjadi pewarnaan *r*-dinamis. Terdapat dua macam *r*-dinamis yang telah berkembang yaitu pewarnaan titik *r*-dinamis dan pewarnaan sisi *r*-dinamis.

Penelitian ini akan dikaji salah satu topik yaitu pewarnaan sisi sebuah graf. Hal ini dilakukan karena telah banyak penelitian yang dilakukan oleh peneliti terdahulu mengenai pewarnaan graf. Hingga saat ini para peneliti terkait pewarnaan graf masih dilakukan dengan berbagai pengembangannya yang telah divariasi. Pada tahun 2002,Hong-Jian Lai dan Bruce Montgomory memperkenalkan konsep pewarnaan dinamis yang dituangkan dalam suatu artikel yang berjudul *Dynamic Coloring of Graphs*. Adapun pada tahun 2003, Hong-Jian Lai, B. Montgomery, dan H. Poon juga membuat artikel yang berjudul *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. Dalam kedua artikel ini mengkaji tentang bilangan kromatik dinamis pada graf. Pengembangan konsep pewarnaan dinamis menjadi pewarnaan *r*-dinamis juga dikaji dalam artikel tersebut.

Hasil penelitian terkait pewarnaan *r*-dinamis telah berkembang. Para peneliti mengkaji lebih dalam dan menghasilkan teorema-teorema baru terkait topik tersebut. Beberapa diantaranya membahas Pewarnaan titik *r*-dinamis yaitu Alishahi (2011) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf dan hipergraf, Taherkhani(2014) mengkaji tentang *r-Dynamic Chromatic Number of graph*, dan Wulandari (2015) pada skripsinya membahas analisis *r-Dynamic Vertex Coloring* pada operasi graf khusus. Sedangkan untuk pewarnaan sisi *r*-dinamis penelitian dilakukan oleh dilakukan oleh Dafik dan Meganingtyas(2015) mengkaji *On Edge r-dynamic Coloring of Graphs* dan terdapat pula pada penelitian Meganingtyas (2015) pada tesisnya membahas analisis pewarnaan *r*-dinamis pada graf-graf khusus. Berdasarkan uraian di atas, pada penelitian ini peneliti akan mengkaji lebih dalam mengenai Pewarnaan sisi *r*-dinamis yaitu dengan pengembangan pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf khusus serta operasi sakel pada graf dan generalisasinya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dibahas diatas, maka rumusan masalah adalah sebagai berikut :

a. Bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf operasi $shack(H_{2,2}, v, n)$, $gshack(Pr_4, e, n)$, $shack(BT_3, v, n)$, $shack(W_6, v, n)$,dan $shack(Wd_{3,3}, v, n)$?

b. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi *r*-dinamis graf khusus TL_n, TCL_n, dan BT_n serta graf operasi $shack(H_{2,2}, v, n)$, $gshack(Pr_4, e, n)$, $shack(BT_3, v, n)$, $shack(W_6, v, n)$, dan $shack(Wd_{3,3}, v, n)$?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penulisan skripsi ini yaitu:

a. Graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini yaitu *triangular ladder*, tangga tiga siklus, *triangular book*, *cocktail party*, prisma, roda, dan *windmill* ;

b. Operasi yang digunakan yaitu sakel dan generalisasinya.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan latar belakang, maka tujuan pada penelitian ini antara lain :

a. Menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf operasi $shack(H_{2,2}, v, n)$, $gshack(Pr_4, e, n)$, $shack(BT_3, v, n)$, $shack(W_6, v, n)$, dan $shack(Wd_{3,3}, v, n)$;
b. Menentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf khusus TL_n, TCL_n, dan BT_n serta graf operasi $shack(H_{2,2}, v, n)$, $gshack(Pr_4, e, n)$, $shack(BT_3, v, n)$, $shack(W_6, v, n)$, dan $shack(Wd_{3,3}, v, n)$.

1.5 Manfaat Penelitian

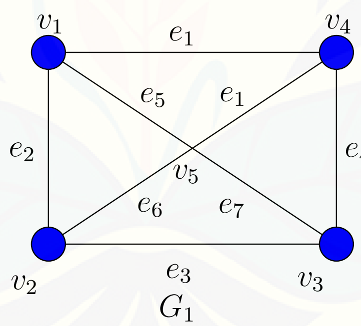
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain adalah :

a. Menambah wawasan dan pengetahuan baru dalam bidang graf, khususnya pada ruang lingkup pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf khusus serta graf operasi sakel dan generalisasinya;
b. Memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih lanjut tentang pewarnaan sisi *r*-dinamis;
c. Hasil penelitian dapat digunakan sebagai referensi dalam pengembangan pewarnaan sisi *r*-dinamis serta aplikasinya dalam kehidupan.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $(G = V, E)$, yang mana V adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik (vertex) dan E adalah himpunan yang anggotanya adalah pasangan tak berurut dari titik V dan disebut sisi (*edge*). Jadi sebuah graf dimungkinkan untuk tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu (Slamin, 2009). Banyaknya titik yang ada pada graf G adalah $|V(G)| = p$, dan disebut orde (*order*) dari G, sedangkan banyak sisi pada graf G adalah $|E(G)| = q$, disebut ukuran(*size*) dari G. Gambar 2.1 menunjukkan sebuah graf, misalkan graf G mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Sehingga $p = 5$ dan $q = 8$.



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Titik v_1 dan v_2 pada graf G dikatakan berdampingan atau tetangga (*adjacent*) jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan antara v_1 dan v_2, yaitu $e = v_1v_2$. Dengan demikian, v_1 dan v_2 dikatakan bersisian *(incident)* dengan sisi e. Gambar 2.1 menunjukkan jika titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, v_3 dan v_5 tetapi tidak bertetangga dengan v_4. Titik v_4 bersisian dengan v_1v_4, v_5v_4 dan v_3v_4. Derajat dari titik v pada G adalah banyaknya sisi yang bertemu pada suatu titik. Jika titik yang mempunyai derajat 0 disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik dengan derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat yang sama maka dikatakan dengan graf re-gular atau teratur. Banyaknya sisi minimal yang bersisian pada suatu titik v di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G disebut derajat terkecil dinotasikan dengan $\delta(G)$. Sedangkan banyaknya maksimal sisi yang bersisian pada suatu titik di graf G disebut derajat terbesar, dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Sikel adalah lintasan yang tertutup. Suatu graf juga dapat disajikan dalam bentuk matriks ketetanggaan. Matriks ketetanggaan (*adjacent matrix*) graf G adalah matrik yang berukuran nxn. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika titik i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika titik i dan j tidak bertetangga . Pada Gambar 2.1 memperlihatkan matriks ketetanggaannya

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2.2 Klasifikasi Graf

Graf dapat diklasifikasikan menjadi beberapa jenis yaitu berdasarkan ada tidaknya gelang (*loop*) atau sisi yang menghubungkan simpul yang sama , jumlah titik, orientasi arah pada sisi, dan keterhubungan titik pada suatu graf. Jika suatu sisi menghubungkan titk yang sama, maka sisi tersebut dinamakan gelang (*loop*). Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis yaitu : graf yang tidak mempunyai gelang atau sisi ganda dinamakan graf sederhana (*simple graph*) dan graf yang mempunyai gelang atau sisi ganda dinamakan graf tidak sederhana (Manongga dan Yessica:2013).

Jumlah titik pada suatu graf dapat dibedakan menjadi graf berhingga dan graf tak berhingga. Graf berhingga *(limited graph)* adalah graf yang jumlah titiknya *n*, berhingga. Sedangkan graf tak berhingga *(unlimited graf)* adalah graf yang memiliki jumlah titik *n*, tidak berhingga banyaknya. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu : graf tak berarah dan graf berarah. Graf yang semua sisinya tidak berarah dinamakan graf tak berarah (*undirected graph*). Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi diperhatikan. Jadi,$(u, v) = (v, u)$. Sedangkan graf yang semua sisinya berarah dinamakan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*. Pada graf berarah (u, v) dan (v, u) menyatakan dua buah sisi berarah yang berbeda. Dengan kata lain,pada graf berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan dengan sisi diperhatikan atau $(u, v) \neq (v, u)$. Keterhubungan titik pada suatu graf dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu graf terhubung (*connected*) dan graf tak terhubung (*disconnected*). Suatu graf dikatakan terhubung jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j didalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Graf yang hanya terdiri dari satu titik tetap disebut graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri. Sedangkan Suatu graf dikatakan tidak terhubung jika ada titik v_i dan v_j didalam himpunan V yang tidak membentuk lintasan dari v_i ke v_j.

2.3 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah sebuah graf yang memiliki karakteristik dan keunikan bentuk khusus. Keunikan yang dimiliki yaitu tidak isomorfis dengan graf yang lainnya. Karakteristik bentuknya memperluas order n tetapi simetris. Macam - macam graf khusus terdiri dari graf lintasan, sikel, roda, lengkap, *Triangular leader*, *triangular book*, dan tangga tiga siklus.

Definisi 2.3.1. Graf lintasan (*Path*) P_n adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik yang dinotasikan dengan P_n, dimana $n \geq 2$ yang terdiri dari $| V(P_n) |= n$ dan $| E(P_n) |= n - 1$ (Damayanti,2011).

Definisi 2.3.2. Graf siklus (*cycle*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan $| V(C_n) |= n$ titik dan $| E(C_n) |= n$ sisi dinotasikan dengan C_n(Harary,2007).

Definisi 2.3.3. Graf roda *(Wheel Graph)* dinotasikan W_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf siklus C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat. Jadi, W_n terdiri dari $\mid V(W_n) \mid= n+1$ titik dan $\mid E(W_n) \mid= 2n$ sisi (Harary*et al*,2007).

Definisi 2.3.4. Graf Lengkap adalah graf yang titiknya terhubung dengan semua titik yang lain dengan hanya satu sisi. Graf lengkap dengan n buah titik dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri n buah titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ (Wibisono,2008).

Definisi 2.3.5. Graf Prisma adalah graf yang terdiri dari sebuah siklus luar n titik $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dan sebuah siklus dalam dengan n titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan diantara siklus luar dan siklus dalam dihubungkan dengan n jari-jari $x_iy_i = 1, 2, \ldots, n$. Graf prisama dinotasikan dengan Pr_4, kardinalitas graf prisma adalah $|V(Pr_4)| = 2n$ dan $|E(Pr_4)| = 3n$ (Rosenfeld dan Xiang,2014).

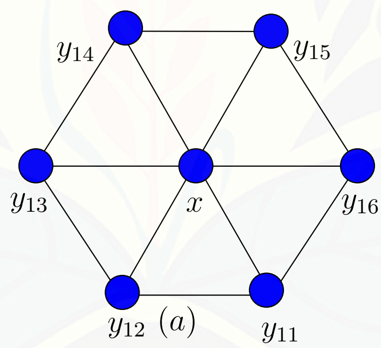
Definisi 2.3.6. *Graf Triangular ladder* TLn adalah graf yang diperoleh dari graf ladder $TL_n = P_n \times P_2 (n \geq 2)$ dengan penambahan sisi $\{u_iu_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1$ dimana titik - titik kedua P_n adalah $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dengan sisi $\{u_iv_i\}$ memiliki $|V(TL_n)| = 2n+2$ dan $|E(TL_n)| = 4n+1$ (Jeyanthi dan Maheswari,2015).

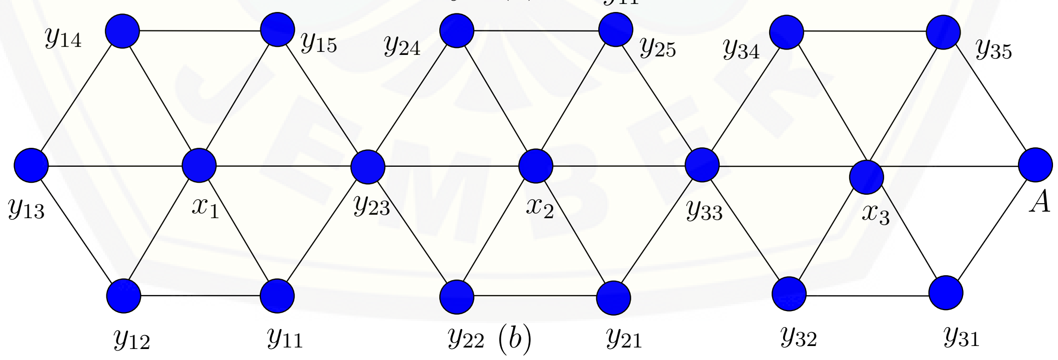
Definisi 2.3.7. Graf buku segitiga (*Triangular Book*) BTn adalah graf yang terdiri dari sejumlah n buah segitiga dimana $n \geq 2$ dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki dua titik yang sama. Graf *Triangular Book* memiliki $|V(BT_n)| = n+2$ dan $|E(BT_n)| = 2n+1$ (Munir,2009).

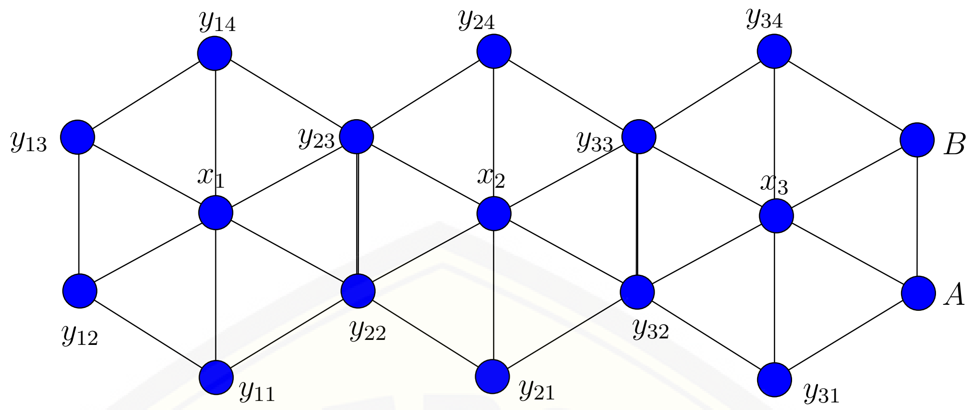
Definisi 2.3.8. Graf tangga tiga siklus (*Triangular Cycle Ladder Graph*) BTn adalah salah satu graf yang merupakan keluarga dari graf *ladder*. Graf ini dinotasikan dengan (TCL_n) yang memiliki himpunan titik $|V(BT_n)| = 3n+2$ dan $|E(BT_n)| = 6n+1$ (Miladiyah,2012).

Operasi graf merupakan suatu cara untuk menghasilkan graf baru dengan mengoperasikan dua buah graf. Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi sakel pada graf dan generalisasinya.

Definisi 2.3.9. Graf sakel (*shackle*) dari H dinotasikan dengan $G = shack(H, v, n)$ adalah graf *G* yang dibangun dari graf non trivial $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n$, H_s dan H_t tidak memiliki penghubung dimana $| s - t | \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n-1$, H_i dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik yang sama v, disebut titik penghubung $k-1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan generalisasi sakel (*generalized shackle*), dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$ (Dafik *et al*,2016).Contoh operasi sakel dan generalisasinya dapat dilihat pada gambar 2.2







(c)

Gambar 2.2 (a) W_6 (b)$shack(W_6, v, 3)$ (c)$gshack(W_6, e, 3)$

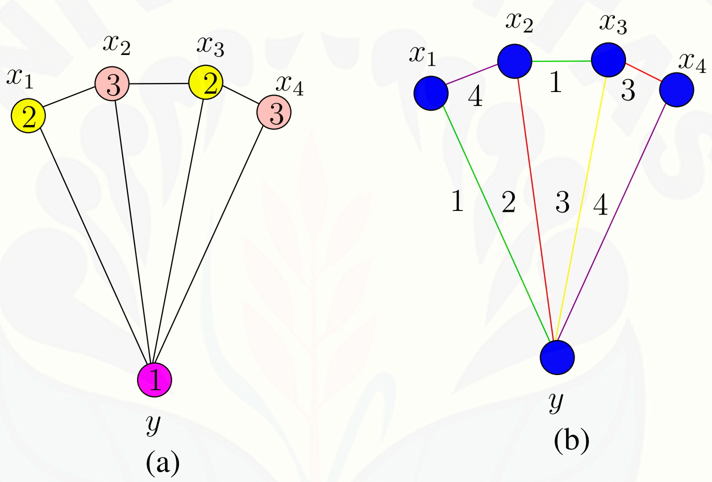
Misal graf H, memiliki titik $|V(H)| = p$ dan sisi $|E(H)| = q$, sedangkan subgraf K, memiliki titik $|V(H)| = p_1$ dan sisi $|E(H)| = q_1$. Maka graf sakel G memiliki titik $|V(G)| = n(p-1)+1$ dan sisi $|E(G)| = np$, sedangkan graf generalisasi sakel G memiliki titik $|V(G)| = n(p-p_1)+p_1$ dan sisi $|E(G)| = n(q-q_1)+q_1$.

2.4 Pewarnaan Graf

Ada tiga macam persoalan pewarnaan graf (*graph coloring*) yaitu, pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*) (Munir,2009). Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik - titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang,2009). Adapun warna yang digunakan dapat berupa elemen dari sembarang himpunan ataupun bilangan positif {1,2,3,...,k}. Dengan demikian pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \rightarrow N$, dimana N adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan titik yang bertetangga.Contoh pewarnaan titk pada Gambar 2.2(a)

Suatu pewarnaan sisi-*k* untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua *k* warna untuk mewarnai semua sisi G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda (Purwanto,1998). Pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai fungsi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ sedemikian sehingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap sisi e dan f yang bertangga pada G. Jika G mempunyai pewarnaan sisi-k, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna. Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Contoh pewarnaan sisi pada Gambar 2.2(b)

♢ **Teorema 2.4.1.** *Jika G adalah graf sederhana, maka bilangan kromatik selalu memenuhi* $\triangle(G) \leq \lambda(G) \leq \triangle(G) + 1$ *(Chartand dan Zhang, 2009)*



Gambar 2.3 Contoh Graf (a)Pewarnaan titik (b)Pewarnaan sisi

2.5 Pewarnaan *r*-Dinamis pada Graf

Pewarnaan *r*-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan *k*-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Lai dan Montgomery pada tahun 2002. Suatu graf G memiliki himpunan titik $V = V(G)$, himpunan sisi $E = E(G)$, dan n menyatakan banyaknya titik, yaitu $|V|$. Himpunan ketetanggaan suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$, merupakan himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik v. e menyatakan sisi yang menghubungkan titik v dan u. $N(e)$ merupakan himpunan sisi-sisi yang bersisian dengan titik u dan v. Derajat dari titik u dinotasikan dengan $d(u)$, derajat yang minimum pada graf G dinotasikan dengan $\delta = \delta(G)$, dan derajat titik yang maksimum pada graf G dinotasikan dengan $\triangle = \triangle(G)$. Pewarnaan *k*- warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak *k* warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada graf G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik - titik ketetanggaannya. Nilai *k* terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan *k*-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, dinotasikan dengan $\chi_d(G)$.

Definisi 2.5.1. Pewarnaan dinamis didefinisikan sebagai pewarnaan yang tepat (*proper*) sehingga setiap titik berderajat minimal dua mempunyai lebih dari satu warna yang berbeda pada setiap titik-titik ketetanggaannya. Pewarnaan dinamis merupakan suatu pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:

1. jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan
2. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{2, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002)

Pewarnaan dinamis pada akhirnya berkembang menjadi pewarnaan *r*-dinamis. Pengertian pewarnaan *r*-dinamis dapat dilihat pada definisi2.5.3.

Definisi 2.5.2. Pewarnaan r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:

1. jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan
2. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002)

Pewarnaan nilai k minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k-warna *r*-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik *r*-dinamis, yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Bilangan kromatik 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\chi(G)$. Untuk mendapatkan nilai dari bilangan kromatik dinamis dirumuskan dalam suatu persamaan pada Observasi 2.4.1 sebagai berikut.

Observasi 2.5.1. *Misalkan G adalah graf terhubung dan λ merpakan bilangan kromatik dinamis maka berlkau $\lambda(G) \leq \lambda_r(G) \leq \lambda_{r+1}(G)$ (Kang et all, 2015)*

Pewarnaan titik *r*-dinamis mengalami perkembangan yaitu pewarnaan sisi *r*-dinamis. Pada penelitian ini akan diteliti pewarnaan sisi *r*-dinamis. Pewarnaan sisi *r*-dinamis merupakan hasil pengembangan dari konsep pewarnaan titik *r*-dinamis. Definisi pewarnaan titik *r*-dinamis dikembangkan sehingga mendapatkan definisi pewarnaan sisi *r*-dinamis yang telah disesuaikan dengan kondisi atau syarat pada pewarnaan sisi graf.

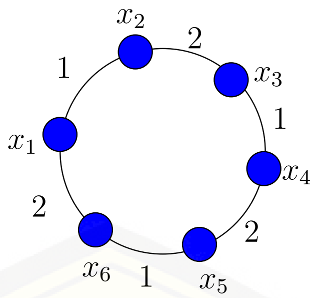
Definisi 2.5.3. *Pewarnaan sisi r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari E ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

1. *jika $e = uv, f = vw \epsilon E(G)$ maka $c(e) \neq c(f)$, dan*
2. $\forall e = uv \epsilon E(G), \mid c(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$.

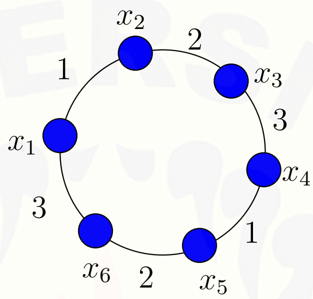
(Dafik dan Meganingtyas,2015)

Nilai *k* warna yang minimum sehingga pada graf G memenuhi pewarnaan *k*-warna sisi *r*-dinamis disebut dengan bilangan kromatik sisi *r*-dinamis, yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewrnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\lambda(G)$. Adapun bilangan kromatik sisi 2-dinamis disebut sebagai bialangan kromatik sisi dinamis, $\lambda_d(G)$. Lebih jelasnya dapat ditunjukkan pada Gambar 2.4 dan Gambar 2.5.

Adapun tabel 2.1 dan 2.2 digunakan sebagai bantuan untuk memastikan keberadaan pewarnaan sisi 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf siklus C_6.



Gambar 2.4 Contoh Pewarnaan sisi 1-dinamis



Gambar 2.5 Contoh Pewarnaan sisi 2-dinamis

Tabel 2.1 Pewarnaan Sisi 1-dinamis pada C_6

$e = uv$	$c(e)$	$\|c(N(e))\|$	r	$d(u)+ d(v) - 2$	$\min\{r, d(u)+ d(v) - 2\}$	$\|c(N(e))\| \geq \min\{r, d(u) d(v) - 2\}$
u_1u_2	1	1	1,2	2	1	Y,T
x_2x_3	2	1	1	2	1	Y
x_3x_4	1	1	1	2	1	Y
x_4x_5	2	1	1	2	1	Y
x_5x_6	1	1	1	2	1	Y
x_6x_1	2	1	1	2	1	Y

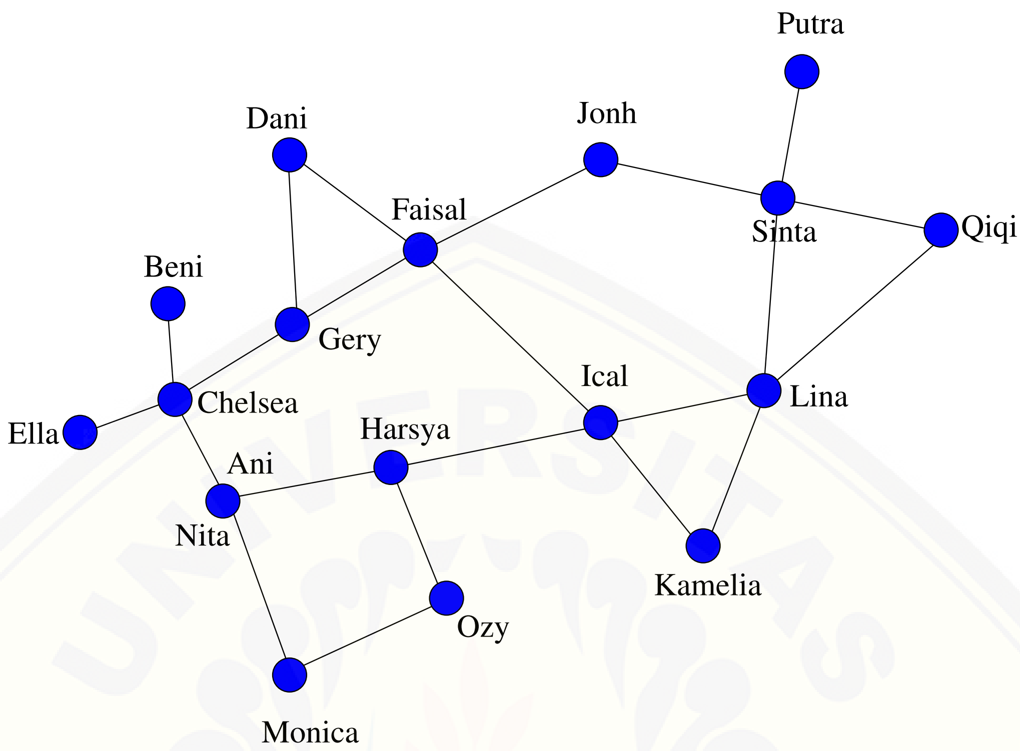
Tabel 2.2 Pewarnaan Sisi 2-dinamis pada C_6

$e = uv$	$c(e)$	$\|c(N(e))\|$	r	$d(u)+ d(v) - 2$	$\min\{r, d(u)+ d(v) - 2\}$	$\|c(N(e))\| \geq \min\{r, d(u) d(v) - 2\}$
x_1x_2	1	2	2,3	2	2	Y,Y
x_2x_3	2	2	2,3	2	2	Y,Y
x_3x_4	3	2	2,3	2	2	Y,Y
x_4x_5	1	2	2,3	2	2	Y,Y
x_5x_6	2	2	2,3	2	2	Y,Y
x_6x_1	3	2	2,3	2	2	Y,Y

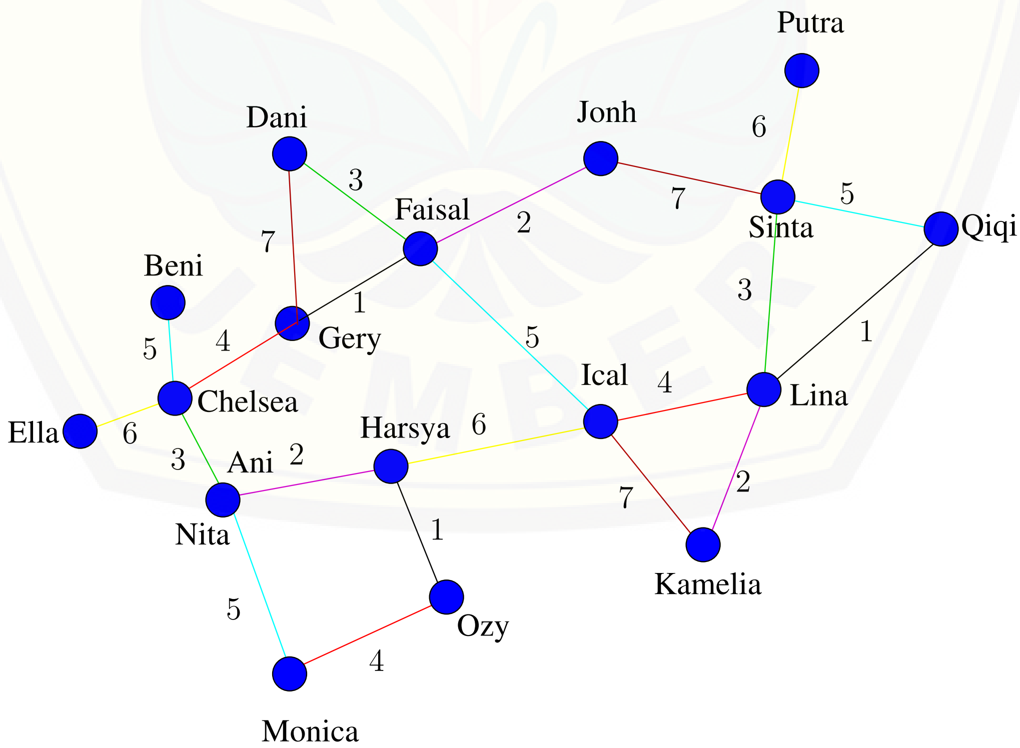
2.6 Aplikasi Graf Pewarnaan sisi *r*-dinamis

Teori graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu kajian graf yang sering diaplikasikan dalam kehidupan adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf dapat digunakan untuk penjadwalan, penyimpanan, dan transportasi. Selanjutnya dalam perkembangannya pewarnaan berkembang menjadi *r*-dinamis. Berikut ini merupakan gambaran aplikasi tentang pewarnaan sisi *r*-dinamis dalam menentukan tugas menyanyidalam suatu kelas musik untuk berduet. Seorang guru dalam les musik memberikan tugas kepada muridnya untuk berduet. Jenis lagu yang akan diberikan yaitu dengan merencanakan tentang siapa saja yang akan berduet dengan ketentuan setiap lagu yang dipraktekkan oleh pasangan yang berbeda. Sehingga guru tersebut akan mengatur judul lagu yang akan dipraktekkan seminimal mungkin. Misalkan dalam sebuah kelas musik terdapat 17 murid yang akan berpasangan dalam menyanyikan sebuah lagu dan setiap murid tersebut mempunyai teman dekat. Untuk menjelaskan kasus tersebut dapat direpresentasikan dalam graf pada Gambar 2.6, dimana stiap teman dekat akan menyanyikan lagu yang berbeda. Sehingga setiap murid pada kasus ini direpresentasikan sebagai titik, dimana titik tersebut dihubungkan dengan sisi yang merepresentasikan hubungan pertemanan yang akan menjadi teman duet.

Jika melihat Gambar 2.6 dapat terlihat bahwa setiap murid telah memiliki teman duet. Sehingga berdasarkan representasi graf diatas maka dapat dilihat maksimum penjumlahan derajat yang bertetangga dikurangi dua adalah faisal dan ical. Hal ini menunjukkan bahwa pewarnaan dinamisnya pada $r \geq 6$. Kemudian jika Gambar 2.6 diwarnai dengan ketentuan tersebut maka diperoleh pewarnaan sisi r-dinamis graf pada Gambar 2.7 dengan $\lambda_{r\geq 6} = 7$, sehingga lagu yang akan dipraktekkan sebanyak 7 lagu. Masing -masing warna pada graf menunjukkan judul lagu yang akan dinyanyikan oleh pasangan murid kelas musik tersebut. Misalkan untuk setiap warna disimbolkan dengan angka, angka 1 menunjukkan lagu cinta dan rahasia, angka 2 menunjukkan lagu yang terbaik bagimu, angka 3 menunjukkan lagu bahagia, angka 4 menunjukkan lagu *all of me*, angka 5 menunjukkan lagu kita se-



Gambar 2.6 Contoh graf pertemanan dalam kelas



Gambar 2.7 Contoh graf teman duet dalam kelas beserta lagu yang telah ditentukan

lamanya, angka 6 menunjukkan lagu *impossible*, dan angka 7 menunjukkan lagu *flashlight*.

Lina akan berpasangan dengan Kamelia, Ical, Sinta, dan Qiqi dengan lagu yang akan dinyanyikan berturut-turut adalah yang terbaik bagimu, *all of me*, bahagia, dan cinta dan rahasia. Sedangkan untuk Qiqi akan berpasangan dengan Lina dan Sinta dengan lagu yang akan dinyanyikan berturut-turut adalah cinta dan rahasia, dan kita selamanya. Sinta akan berpasangan dengan Lina, Qiqi, Putra dan John dengan lagu yang akan dinyanyikan berturut-turut adalah bahagia, kita selamanya, *impossible*, *flashlight*. Begitu juga dengan murid yang lain seperti yang telah direpresentasikan seperti pewarnaan sisi r-dinamis graf pada Gambar 2.7.

2.7 Hasil Penelitian Pewarnaan Sisi *r*-dinamis Sebelumnya

Tabel 2.3 Hasil Pewarnaan Sisi *r*-Dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik *r*-Dinamis	Keterangan
Graf Lintasan (P_n); $n \geq 2$	$\lambda(P_n) = 2; n \geq 2$ $\lambda_2(P_n) = \lambda_r(P_n) = 3;$ $n \geq 2, r \geq 2$	Meganingtyas, 2015
Graf Sikel (C_n); $n \geq 3$	$\lambda(C_n) = 2$; n genap $\lambda(C_n) = 3$; n ganjil $\lambda_{r\geq 2}(C_n) = 3;$ $n = 3k, k \in N$ $\lambda_{r\geq 2}(C_n) = 4;$ $n = 3k + 1, k \in N$ $\lambda_{r\geq 2}(C_n) = 5;$ $n = 3k + 2, k \in N$	Meganingtyas, 2015
Graf Bintang (S_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r\geq 1}(S_n) = n$	Meganingtyas,2015

Graf	Bilangan Kromatik r-Dinamis	Keterangan
Graf Roda (W_n); $n \geq 5$	$\lambda_{r \leq n-1}(W_n) = n$; $1 \leq r \leq n-1$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = 10$; $n = 5, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n+3$; $n = 3k+3, k \in N, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n+4$; n lainnya, $r \geq n$	Meganingtyas, 2015
Graf *Friendship* (F_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r \leq 2n-1}(F_n) = 2n$, $\lambda_{r \geq 2n}(F_n) = 2n+1$,	Meganingtyas, 2015
Graf Amalgamasi Lintasan(P_n); $n \geq 2, m \geq 3$	$\lambda(amal(P_n, v, m)) =$ $\lambda_2(amal(P_n, v, m)) = m$, $\lambda_{r \geq 3n}(amal(P_n, v, m)) = m+1$,	Meganingtyas, 2015
Graf Prisma (P_n); $n \geq 3$	$\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 2$; n genap $\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 3$; n ganjil $\lambda_3(P_n) = 4$; $n = 3$ $\lambda_3(P_n) = 5$; n lainnya $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 9$;$n = 3$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 6$; $n = 4k, k \in N$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 8$; $n = 5, 6, 4k+7k \in N$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 7$; n lainnya	Meganingtyas, 2015
Graf Tangga (L_n); $n \geq 3$	$\lambda(L_n) = \lambda_2(L_n) = 3$, $\lambda_3(L_n) = 5$, $\lambda_4(L_n) = \lambda_r(L_n) = 6$,	Meganingtyas, 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

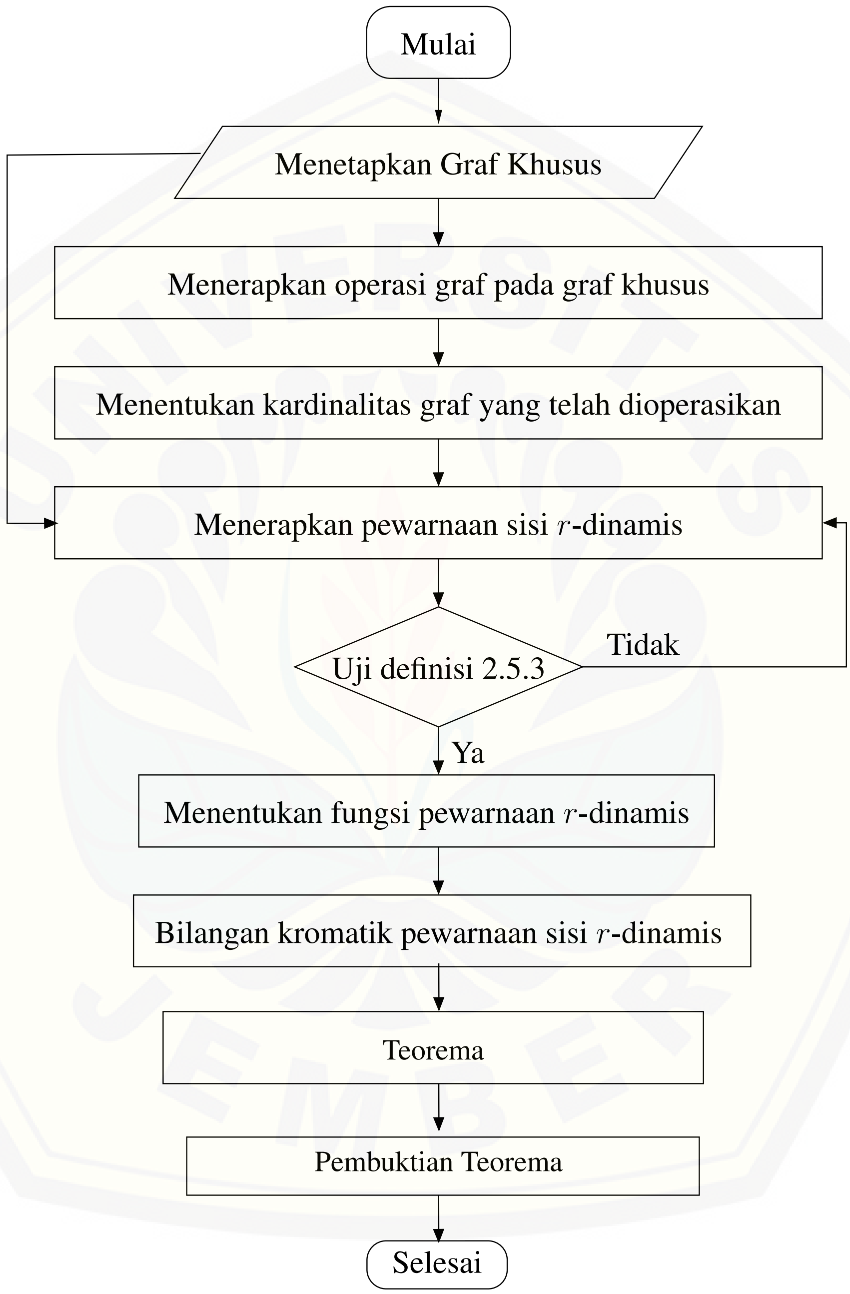
3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif dengan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Adapun teorema yang disusun harus dibuktikan melalui proses deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum. Pada penelitian ini akan didapatkan teorema-teorama ataupun defnisi-definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema-teorema ataupun defnisi-definisi sebelumnya yang telah ada. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan sisi r-dinamis sehingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian ini dilakukan analisis pewarnaan r-dinamis pada graf khusus serta operasi shakel pada graf kusus dan generalisasinya. Adapun rancangan penelitian adalah sebagai berikut:

a. Menentukan graf khusus serta graf operasi sakel dan generalisasinya dan menentukan kardinalitas graf;
b. Menentukan pewarnaan sisi r-dinamis pada masing-masing graf;
c. Memeriksa uji definisi 2.5.3 pewarnaan sisi r-dinamis yang terbentuk. Apabila sudah memenuhi pewarnaan r-dinamis dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila tidak memenuhi pewarnaan r-dinamis akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf;
d. Menentukan fungsi pewarnaan sisi r-dinamis pada masing-masing graf khusus serta graf operasi sakel dan generalisasinya;
e. Menentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi r-dinamis pada masing-masing graf khusus serta graf operasi sakel dan generalisasinya sehingga diperoleh teorema-teorema.



Gambar 3.1 Skema Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

a. Kardinalitas titik dan sisi dari graf operasi sakel dan generalisasinya yang telah didapatkan yaitu : $|V(shack(H_{2,2},v,n))| = 3n+1$ dan $|E(shack(H_{2,2}, v,n))| = 4n$, $|V(gshack(Pr_4,e,n))| = 6n+2$ dan $|E(gshack(Pr_4,e,n))| = 11n+1$, $|V(shack(BT_3,v,n))| = 4n+1$ dan $|E(shack(BT_3,v,n))| = 7n$, $|V(shack(W_6,v,n))| = 6n+1$ dan $|E(shack(W_6,v,n))| = 12n$, dan $|V(shack(Wd_{3,3},v,n))| = 6n+1$ dan $|E(shack(Wd_{3,3},v,n))| = 9n$

b. Bilangan kromatik pewarnaan sisi *r*-dinamis graf khusus serta graf operasi sakel dan generalisasi yang telah didapatkan yaitu : graf *triangular ladder* (TL_n) bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq 6}(TL_n) = 9$, graf tangga tiga siklus (TCL_n) bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq 8}(TCL_n) = 12$, graf *triangular book* bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq n+1}(BT_n) = 2n+1$ graf operasi $shack(H_{2,2},v,n)$ bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq 6}(shack(H_{2,2}, v,n)) = 8$, graf operasi $shack(Pr_4,e,n)$ bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq 8}(shack(Pr_4,e,n)) = 12$, graf operasi $shack(BT_3,v,n)$ bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq 14}(shack(BT_3,v,n)) = 15$, graf operasi $shack(W_6, v,n)$ bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq 10}(shack(W_6,v,n)) = 12$, dan graf operasi $shack(Wd_{3,3},v,n)$ bilangan kromatik *r*-dinamisnya $\lambda_{r\geq 8}(shack (Wd_{3,3},v,n)) = 9$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf khusus serta graf operasi sakel dan generalisasinya dimana graf khusus yang digunakan adalah graf *triangular ladder*, tangga tiga siklus, *triangular ladder*, *cocktail party*, prisma, roda, dan *windmill*, maka peneliti memberikan saran kepada peneliti selanjutnya untuk melakukan penelitian tentang pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf khusus dan graf operasi yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Amalia,Rica dan Darmaji. 2012. Dimensi Partisi pada Graf Serupa Roda dengan Penambahan Anting. *Jurnal Tehnik POMITS* **1**(10):1-6

Alaudin. 2009.*Bilangan kromatik pada graf prisma*. ITS.

Alishasi,M. 2007. On the Dynamic Coloring of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*.

Chartrand, G dan Zhang, P. 2009.*Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.

Dafik dan Meganingtyas. 2015. On Edge r-dynamic Coloring of Graphs. *Graph Master Workshop*. Universitas Jember.

Dafik, Hasan, Moh., Azizah, Y.N., Agustin, Ika Hesti . A Generalized Shackle of Any Graph H Admits a Super H-Antimagic Total Labelling. *Mathematics in Computer Science Journal*, 2016. Submitted.

Damayanti, R. T. 2011. *Automofirsme Graf Bintang dan Graf Lintasan*.Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Brawijaya, pages 1-97.

Harsya, Alfian Yulia. 2014. ”Kajian Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya”. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember:UNEJ

Harsya. A.Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang.*Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember,* **1**(1):498-505.

Harary. 2007. *Graph Theory*. New London: Wesley.

Jeyanti.P , Maheswari A. 2015. One Modulo Three Mean Labeling Of Cycle Related Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **103** (4):625-633.

Kang, R., Muller, T., dan West, D. B. 2015. On r-Dynamic Coloring of Grids. *Discrete Applied Mathematics*. **186**:286-290

Lai,H. dan Montgomery,B. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel(Tidak Dipublikasikan) Morgantown: West Virginia University.

Lai,H. dkk. 2003.*Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. Ars Combin. **68**: 193-201.

Manongga,Danny dan Yessica,N. 2013. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Kencana Prenada Group.

Meganingtyas, Devi E. 2015."Analisis Pewarnaan r-dinamis pada graf-graf khusus". Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.

Miladiyah, Kunti. 2012."Pelabelan Total Super Sisi Graf Tangga Tiga Siklus Konektif dan Diskonektif". Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Universitas Jember.

Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit Edisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Purwanto. 1998.*Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rosenfeld, M., Xiang, Ziqing.2014. Hamiltonian decomposition of prism over cubic graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. **16**(2): 111-124

Slamin. 2009.*Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Taherkhani. 2014.*r-Dynamic Chromatic Number of Graphs*. Departement of Mathematics Institute for Advaced in Basic Science.

Wibisono,Samuel . 2008.*Matematika Diskrit Edisi 2*.Yogyakarta : Graha Ilmu.

Wulandari, Nur Ica. 2015. "Analisis r-Dynamic Vertex Coloring Pada Hasil Operasi Graf Khusus". Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember:Universitas Jember.