KAJIAN *RAINBOW 2-CONNECTED* PADA GRAF EKSPONENSIAL DAN BEBERAPA OPERASI GRAF

SKRIPSI

Oleh

Herninda Lucky Oktaviana

NIM 121810101005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

KAJIAN *RAINBOW 2-CONNECTED* PADA GRAF EKSPONENSIAL DAN BEBERAPA OPERASI GRAF

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Herninda Lucky Oktaviana

NIM 121810101005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Hari Mulyono dan Ibunda Nanik Malikahati, serta Adikku Febby Hani Puspita, yang selalu mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. yang dengar sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. guru dan dosen-dosenku, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabat terbaikku: Agung, Viqe, Winda, Fenty, Kiki, Jejen, Irman, Wafi, dan semua sahabat yang belum disebutkan yang senantiasa membantu dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
5. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
6. teman-teman angkatan 2012 FMIPA Matematika yang selalu menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Usaha tanpa do'a adalah kesombongan, dan do'a tanpa usaha adalah kebohongan."*)

"Hai orang-orang yang beriman, Jadikanlah sabar dan shalatmu sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar."
(Al-Baqarah: 153)**)

* www.motivasi-islami.com.

** Departemen Agama Republik Indonesia. 2014. *Al-Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Herninda Lucky Oktaviana

NIM : 121810101005

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Kajian *Rainbow 2-Connected* pada Graf Eksponensial dan Beberapa Operasi Graf adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Herninda Lucky Oktaviana

NIM. 121810101005

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Kajian *Rainbow 2-Connected* pada Graf Eksponensial dan Beberapa Operasi Graf" telah diuji dan disahkan oleh Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 19840801 200801 2 006

Dosen Pembimbing Anggota

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota I,

Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 19771430 200501 1 001

Anggota II,

Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.
NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Kajian *Rainbow 2-Connected* Pada Graf Eksponensial dan Beberapa Operasi Graf; Herninda Lucky Oktaviana, 121810101005; 2016: 52 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *rainbow connection*. *Rainbow connection* adalah pewarnaan sisi pada graf G dimana setiap dua titik yang berbeda memiliki minimal satu *rainbow path*. Jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan dengan *rainbow path*, maka graf G dikatakan *rainbow connected*. Suatu lintasan $u-v$ di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut yang memiliki warna sama. Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow coloring*. Banyaknya warna minimal yang digunakan agar graf G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow connection number* yang dinotasikan dengan $rc(G)$. Apabila terdapat minimal 2 *rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G, maka graf G dikatakan *rainbow* 2-*connected* yang dinotasikan dengan $rc_2(G)$. Untuk pemberian *rainbow coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya.

Rainbow connection dapat diterapkan pada hasil operasi dari beberapa graf khusus, misalnya graf lintasan (*path*), graf siklus (*cycle*), graf lengkap (*complete*), graf buku segitiga (*triangular book*), dan graf kincir (*windmill*). Operasi graf merupakan cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan operasi terhadap dua graf. Adapun graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini antara lain yaitu ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \Box K_n$, $Bt_3 \Box K_n$, dan $Wd_{(3,2)} \Box K_n$.

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi, *rainbow connection*, dan *rainbow 2-connected* dari graf ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \Box K_n$, $Bt_3 \Box K_n$, dan $Wd_{(3,2)} \Box K_n$. Pada penelitian ini dihasilkan 7 teorema baru, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** Misal G adalah graf eksponensial dari graf siklus dengan graf buku segitiga. Untuk $n \geq 2$, $rc({C_4}^{Bt_n}) = 3$ dan $rc_2({C_4}^{Bt_n}) = 4$.

2. **Teorema 4.1.2** Misal G adalah graf eksponensial dari graf siklus dengan graf lengkap. Untuk $n \geq 4$, $rc({C_4}^{K_n}) = 3$ dan $rc_2({C_4}^{K_n}) = 4$.

3. **Teorema 4.1.3** Misal G adalah graf eksponensial dari graf kincir dengan graf siklus. Untuk $n \geq 2$, $rc({Wd_{(3,n)}}^{C_3}) = 4$ dan rc_2 $({Wd_{(3,n)}}^{C_3}) = 5$.

4. **Teorema 4.1.4** Misal G adalah *joint* dari graf siklus dengan graf kincir. Untuk $n \geq 3$, $rc(C_n + Wd_{(3,2)}) = 2$ dan $rc_2(C_n + Wd_{(3,2)}) = 3$.

5. **Teorema 4.1.5**Misal G adalah *cartesian product* dari graf siklus dengan graf lengkap. Untuk $n \geq 4$, $rc(C_3 \square K_n) = 2$ dan $rc_2(C_3 \square K_n) = 3$.

6. **Teorema 4.1.6** Misal G adalah *cartesian product* dari graf buku segitiga dengan graf lengkap. Untuk $n \geq 4$, $rc(Bt_3 \square K_n) = 3$ dan $rc_2(Bt_3 \square K_n) = 4$.

7. **Teorema 4.1.7** Misal G adalah *cartesian product* dari graf kincir dengan graf lengkap. Untuk $n \geq 4$, $rc(Wd_{(3,2)} \square K_n) = 3$ dan $rc_2(Wd_{(3,2)} \square K_n) = 4$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Kajian *Rainbow 2-Connected* pada Graf Eksponensial dan Beberapa Operasi Graf. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sistem pengamanan sangat diperlukan di dalam distribusi pesan, barang, dokumen rahasia, soal-soal ujian dan lain sebagainya karena semakin banyaknya niat jahat seseorang dalam melakukan kecurangan untuk kepentingan pribadi, misalnya mengambil keuntungan dengan cara membocorkan soal ujian yang merupakan dokumen negara. Salah satu cara untuk meminimalisir terjadinya kebocoran soal adalah dengan memberikan pengawalan oleh tim pengawas dalam proses pendistribusian berlangsung dari pusat penyimpanan soal sampai ke lokasi terselenggaranya ujian, misalnya dalam pendistribusian soal Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Agar kerahasiaan soal tetap terjaga, pada setiap jalur yang akan dilewati dalam proses distribusi akan dijaga oleh tim pengawas yang berbeda. Hal tersebut bertujuan agar setiap tim pengawas dapat fokus pada tugasnya masing-masing di jalur penjagaan yang telah ditentukan sebelumnya. Selain menjaga kerahasiaan soal, kelancaran proses distribusi juga perlu dijaga. Oleh karena itu, adanya jalur alternatif dalam proses distribusi juga sangat diperlukan untuk menghindari kemacetan sehingga proses distribusi dapat berjalan lancar. Salah satu teori graf yang berkaitan dengan solusi untuk menjaga kerahasiaan dokumen dan kelancaran proses pendistribusian tersebut adalah menggunakan konsep *rainbow connection* (koneksi pelangi).

Konsep *rainbow connection* pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk pada tahun 2008. *Rainbow connection* adalah pewarnaan sisi pada graf G dimana setiap dua titik yang berbeda memiliki minimal satu *rainbow path* sehingga bersifat *rainbow connected*. Banyaknya warna minimal yang digunakan agar graf G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow connection number* yang dinotasikan dengan $rc(G)$. Apabila setiap dua titik yang berbeda pada graf G memiliki minimal 2 *rainbow path*, maka graf G bersifat *rainbow* 2-*connected* yang dinotasikan dengan $rc_2(G)$

Rainbow connection dapat diterapkan pada graf khusus maupun operasi graf. Jenis-jenis operasi graf antara lain adalah operasi *joint, cartesian product, tensor product, composition, amalgamation,* dan *shackle.* Beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai *rainbow connection* antara lain Histamedika (2012) telah melakukan penelitian yang mengkaji tentang *rainbow connection* pada beberapa graf, Wijaya (2013) telah melakukan penelitian tentang bilangan *rainbow connection* pada graf komplemen, Alfarisi dan Dafik (2014) telah melakukan pengembangan *rainbow connection* pada sembarang graf khusus, Fajariyanto (2015) telah melakukan penelitian *rainbow connection* pada graf-graf hasil operasi.

Pada penelitian ini, peneliti akan mengembangkan *rainbow connection* yang sebelumnya bersifat *rainbow 1-connected* menjadi *rainbow 2-connected* pada graf eksponensial dan beberapa operasi graf. Oleh karena itu, peneliti memilih judul "Kajian *Rainbow 2-Connected* pada Graf Eksponensial dan Beberapa Operasi Graf".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini diantaranya adalah :

a. Bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \square K_n$, $Bt_3 \square K_n$, $Wd_{(3,2)} \square K_n$?
b. Bagaimana menentukan *rainbow connection number* pada graf ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \square K_n$, $Bt_3 \square K_n$, $Wd_{(3,2)} \square K_n$?
c. Bagaimana menentukan *rainbow 2-connected* pada graf ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \square K_n$, $Bt_3 \square K_n$, $Wd_{(3,2)} \square K_n$?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini diantaranya adalah:

a. Operasi graf yang digunakan adalah operasi graf *joint*, *cartesian product* dan eksponensial.
b. Graf hasil operasi yang digunakan adalah ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \square K_n$, $Bt_3 \square K_n$, $Wd_{(3,2)} \square K_n$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini diantaranya sebagai berikut:

a. Menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \square K_n$, $Bt_3 \square K_n$, $Wd_{(3,2)} \square K_n$.
b. Menentukan *rainbow connection number* pada graf ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \square K_n$, $Bt_3 \square K_n$, $Wd_{(3,2)} \square K_n$.

c. Menentukan *rainbow 2-connected* pada graf ${C_4}^{Bt_n}$, ${C_4}^{K_n}$, ${Wd_{(3,n)}}^{C_3}$, $C_n + Wd_{(3,2)}$, $C_3 \Box K_n$, $Bt_3 \Box K_n$, $Wd_{(3,2)} \Box K_n$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini diantaranya sebagai berikut :

a. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup *rainbow connection*.

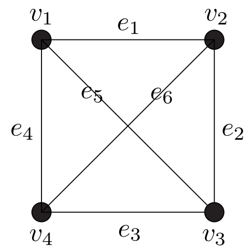
b. Memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih lanjut tentang *rainbow 2-connected* pada graf eksponensial dan operasi graf.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah himpunan berhingga yang tidak kosong dan elemennya disebut titik (*vertex*), sedangkan $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua buah titik atau lebih. Jadi, suatu graf G dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus ada minimal satu titik (Slamin,2009). Banyaknya titik pada graf G disebut *order* dari G yang dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut *size* dari G yang dinotasikan dengan $|E(G)|$ (Harary, 2007).

Jarak (*distance*) antara dua titik v_i dan v_j yang dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j. Jarak maksimum antara dua titik sebarang pada graf G disebut diameter yang dinotasikan dengan $diam(G) = max\{e(v) : v \in V\}$. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 memiliki diameter 1. Jalan (*walk*) pada graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) yang dinotasikan dengan W, dimana $W = (v_0, e_1, v_2, e_3, ..., e_k, v_k)$ sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. W dikatakan jalan dengan v_0 adalah titik awal W dan v_k adalah titik akhir W. Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W yang dinotasikan dengan k. Jalan W dikatakan tertutup apabila titik awal dan titik akhir W sama ($v_0 = v_k$), sedangkan jalan W dikatakan terbuka apabila ($v_0 \neq v_k$). Lintasan (*path*) pada graf G adalah jalan dengan titik dan sisi yang berbeda, dimana tidak ada titik maupun sisi yang digunakan berulang. Suatu graf disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat *path* dari v_i dan v_j. Jika tidak, maka graf tersebut disebut graf tak terhubung (*disconnect graph*) (Purwanto dkk, 2006).Berikut ini adalah contoh graf G dengan $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 6$.



Gambar 2.1 Contoh Graf G dengan $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 6$

Berdasarkan Gambar 2.1, graf tersebut memiliki himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_1v_4$, $e_5 = v_1v_3$, $e_6 = v_2v_4$. Titik v_1 dan v_2 pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) karena terdapat sisi e_1 yang menghubungkan kedua titik tersebut. Titik v_1 dan v_2 dikatakan bersisian (*incident*) dengan sisi e_1 karena titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi e_1.

2.2 Graf Khusus, Graf Eksponensial dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang memiliki keunikan dan karakteristik bentuk khusus.Keunikan graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya,sedangkan karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan tetap simetris. Graf khusus yang akan diteliti pada penelitian ini adalah graf lintasan, graf siklus, graf buku segitiga, graf kincir, dan graf lengkap. Berikut ini pengertian dari graf khusus yang akan digunakan dalam penelitian:

Definisi 2.2.1. Graf Lintasan (*Path Graph*) yang dinotasikan dengan P_n adalah graf sederhana yang memiliki n titik dan $n-1$ sisi, dimana $n \geq 2$ (Munir, 2009).

Definisi 2.2.2. Graf Siklus (*Cycle Graph*) yang dinotasikan dengan C_n adalah graf sederhana yang memiliki derajat dua pada setiap titiknya serta memiliki n titik dan n sisi, dimana $n \geq 3$ (Purwanto dkk,2006).

Definisi 2.2.3. Graf Buku Segitiga (*Triangular Book Graph*) yang dinotasikan dengan Bt_n adalah graf sederhana yang memiliki n buah segitiga ($n \geq 2$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama (Dafik, 2013).

Definisi 2.2.4. Graf Kincir (*Windmill Graph*) yang dinotasikan dengan $Wd_{(n,m)}$, dimana n adalah banyaknya titik ($n \geq 3$) dan m adalah banyaknya salinan dari graf lengkap K_n ($m \geq 2$) dengan pusat sebuah titik yang digunakan bersama dari semua salinan. Graf kincir memiliki $nm-(m-1)$ titik dan $\frac{n(n-1)}{2}m$ (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).

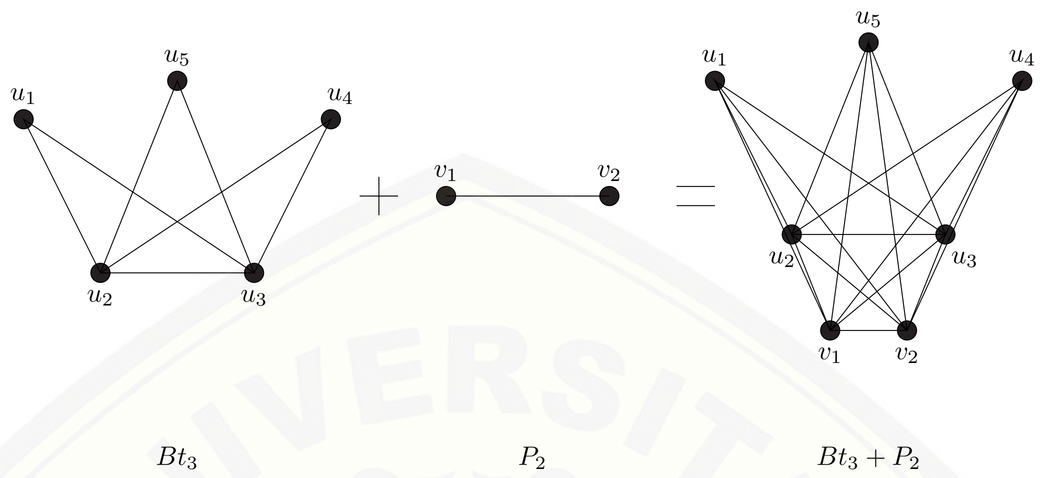
Definisi 2.2.5. Graf Lengkap (*Complete Graph*) yang dinotasikan dengan K_n adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik yang lain. Setiap titik pada K_n berderajat $n-1$, sehingga jumlah sisinya adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ (Wibisono, 2008).

Operasi graf adalah cara untuk menghasilkan suatu graf baru dengan mengoperasikan duah buah graf. Macam-macam operasi graf antara lain yaitu *joint, cartesian product, tensor product, shackle, composition, amalgamation.* Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi graf *joint*, *cartesian product* dan graf eksponensial. Berikut ini pengertian tentang operasi tersebut:

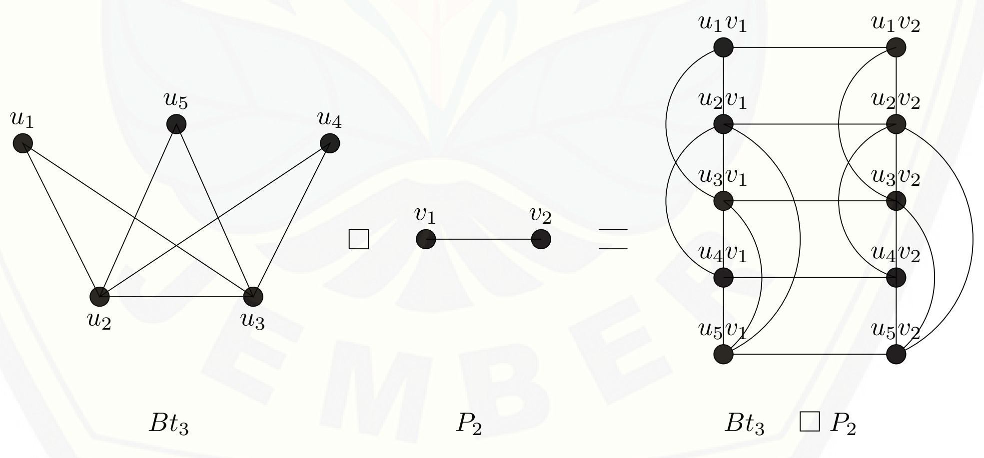
Definisi 2.2.6. *Joint* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ dan dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, misalkan $|V(G_1)| = p_1$ dan $|E(G_1)| = q_1$, sedangkan $|V(G_2)| = p_2$ dan $|E(G_2)| = q_2$ maka $|V(G_1 + G_2)| = p_1 + p_2$ dan $|E(G_1 + G_2)| = q_1 + q_2 + (p_1 p_2)$ (Harary, 2007).

Definisi 2.2.7. *Cartesian product* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G = G_1 \square G_2$ yaitu graf dengan himpunan titik $V(G_1)$ x $V(G_2)$, dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku : $u_1 = v_1$ dan $(u_2 v_2 \in E_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1 v_1 \in E_1)$, misalkan $|V(G_1)| = p_1$ dan $|E(G_1)| = q_1$, sedangkan $|V(G_2)| = p_2$ dan $|E(G_2)| = q_2$ maka $|V(G_1 \square G_2)| = p_1 p_2$ dan $|E(G_1 \square G_2)| = q_1 p_2 + q_2 p_1$ (Harary, 2007).

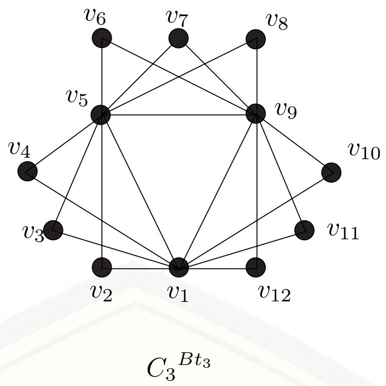
Definisi 2.2.8. Graf Eksponensial yang dinotasikan dengan G^H adalah sebuah graf yang dibangun dari graf G dan H, dimana setiap sisi pada graf G diganti oleh graf H. Apabila $|V(G)| = p_1$ dan $|E(G)| = q_1$, sedangkan $|V(H)| = p_2$ dan $|E(H)| = q_2$ maka $|V(G^H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $|E(G^H)| = q_1 q_2$ (Dafik,2016).



Gambar 2.2 Operasi Graf *Joint* dari $Bt_3 + P_2$



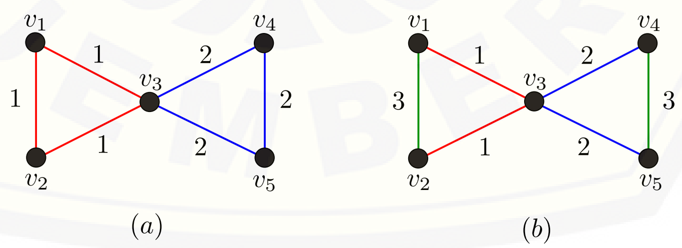
Gambar 2.3 Operasi Graf *Cartesian Product* dari $Bt_3 \square P_2$



Gambar 2.4 Graf Eksponensial dari Graf Siklus dan Graf Buku Segitiga ($C_3^{Bt_3}$)

2.3 ***Rainbow Connection*** (Koneksi Pelangi)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ sebuah graf terhubung tidak trivial. *Rainbow connection* adalah pewarnaan sisi pada graf G dimana setiap dua titik yang berbeda memiliki minimal satu *rainbow path*. *Rainbow connection* didefinisikan sebagai $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., r|r \in N\}$. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan dengan *rainbow path*. Suatu lintasan $u - v$ di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut yang memiliki warna sama. Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow coloring*. Banyaknya warna minimal yang digunakan agar graf G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow connection number* yang dinotasikan dengan $rc(G)$ (Histamedika,2012). Apabila graf G memiliki minimal 2 *rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G, maka graf G dikatakan *rainbow 2-connected* yang dinotasikan dengan $rc_2(G)$.



Gambar 2.5 Graf *Windmill* $rc_(G) = 2$ (a) dan $rc_2(G) = 3$ (b)

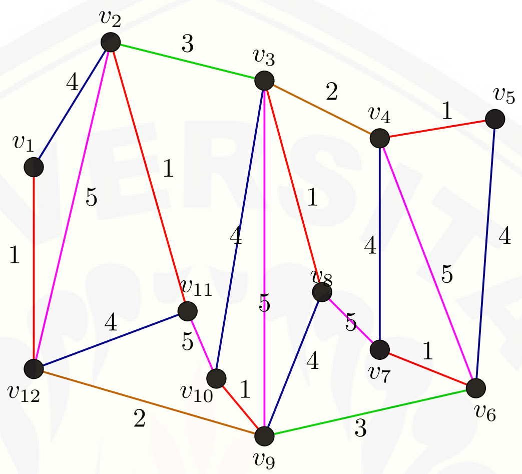
Berikut ini teorema yang telah diperoleh dari penelitian sebelumnya, mengenai batas atas dan batas bawah dari *rainbow connection*. Teorema tersebut akan digunakan untuk membuktikan beberapa teorema dalam penelitian ini.

◊ **Teorema 2.3.1.** *Misalkan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$ sehingga $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G)+1$, dengan d adalah derajat. Misalkan G bersifat rainbow κ-connected dengan $\kappa \geq 1$ sehingga $rc_1(G) \leq rc_2 \leq ... \leq rc_\kappa(G)$, dimana κ adalah banyaknya rainbow path yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G* (Li and Sun, 2012).

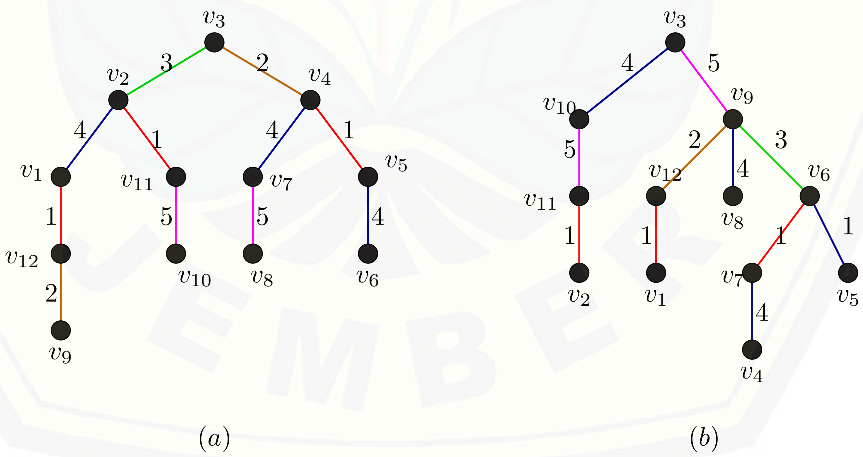
2.4 Aplikasi *Rainbow Connection*

Konsep *rainbow connection* dapat diaplikasikan pada proses distribusi, misalnya digunakan dalam distribusi soal Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) ke lokasi ujian SBMPTN diselenggarakan. Pendistribusian ini memerlukan pengawalan dan pengawasan yang ketat untuk menghindari terjadinya masalah yang tidak diinginkan karena merupakan dokumen negara yang bersifat rahasia. Pendistribusian soal SBMPTN memerlukan pengawasan dari pihak yang berwenang, misalnya dari polres dan panitia penyelenggara agar tidak terjadi penyelewengan oleh salah satu pihak selama pengantaran soal sampai ke tempat diselenggarakannya seleksi. Sehingga, terjadinya kebocoran soal dapat diminimalisir. Dengan demikian, dapat dipilih jalur yang bisa menjangkau kecamatan terbanyak dan jalur yang akan dilewati dalam pendistribusian soal SBMPTN ke setiap lokasi ujian SBMPTN diselenggarakan harus dijaga oleh tim pengawas yang berbeda. Hal tersebut bertujuan agar setiap tim pengawas dapat fokus pada tugasnya masing-masing di jalur penjagaan yang telah ditentukan sebelumnya. Apabila jumlah soal yang didistribusikan tetap, maka kerahasiaan soal dapat terjamin. Selain adanya pengawalan dan pengawasan yang ketat untuk menjaga kerahasiaan soal, adanya jalur alternatif dalam proses distribusi juga sangat diperlukan untuk menghindari kemacetan sehingga proses distribusi dapat berjalan lancar. Situasi inilah yang dapat dimodelkan dalam bilangan *rainbow 2-connected.*

Berdasarkan Gambar 2.7 dapat diketahui $rc_2(G) = 5$, sehingga dapat disimpulkan bahwa dibutuhkan 5 tim pengawas yang disebar sesuai *rainbow coloring* dari $rc_2(G)$ seperti pada Gambar 2.7. Tim tersebut terdiri dari tim pengawas 1, 2, 3, 4 dan 5 dengan kombinasi anggota masing-masing tim berbeda. Kemudian diambil lintasan yang dapat menjangkau titik terbanyak dengan warna sisi yang berbeda. Kondisi tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk *spanning tree*.



Gambar 2.6 *Rainbow 2-Connected* Peta Jalur Distribusi



Gambar 2.7 Jalur I (a) Jalur II (b)

Berdasarkan Gambar 2.8, misalkan pusat pengiriman soal berada di titik v_3. Apabila akan menuju ke lokasi yang berada di titik v_5 melalui jalur I, maka berkas soal SBMPTN akan diperiksa oleh tim pengawas 2 dan selanjutnya akan diperiksa lagi oleh tim pengawas 4. Apabila akan menuju ke lokasi yang berada di titik v_5 melalui jalur II, maka berkas soal SBMPTN akan diperiksa oleh tim pengawas 5, tim pengawas 3 dan selanjutnya akan diperiksa lagi oleh tim pengawas 1 .

2.5 Hasil Penelitian *Rainbow Connection* Sebelumnya

Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, terkait koneksi pelangi yang dapat dijadikan sebagai rujukan pada penelitian ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 2.1: Hasil Penelitian *Rainbow Connection* Sebelumnya

Graf	Hasil	Keterangan
Complete Graph (K_n); $n \geq 2$	$rc(K_n) = 1$	Chartrand, dkk, 2008
Cycle Graph (C_n); $n \geq 4$	$rc(C_n) = \frac{n}{2}$	Chartrand, dkk, 2008
Tree Graph (T_n); $n \geq 2$	$rc(C_n) = m$	Chartrand, dkk, 2008
Wheel Graph (W_n); $n \geq 3$	$rc(W_n) = 1$, untuk $n = 3$ $rc(W_n) = 2$, untuk $4 \leq n \leq 6$ $rc(W_n) = 3$, untuk $n \geq 7$	Chartrand, dkk, 2008
Complete Graph $(K_{2,9})$	$rc(K_{2,9}) = 3$	Histamedika, 2012
Cycle Complement Graph $(\bar{C}_8)$	$rc(\bar{C}_8) = 2$	Wijaya, 2013
Handle Fan $(Kt_n); n \geq 2$	$rc(Kt_n) = 2$, untuk $n = 2$ $rc(Kt_n) = 3$, untuk $n \geq 3$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Spider Web $(Wb_n); n \geq 3$	$rc(Wb_n) = 3$, untuk $3 \leq n \leq 6$ $rc(Wb_n) = 4$,	Alfarisi dan Dafik.,2014

Graf	Hasil	Keterangan
	untuk $n = 7$ $rc(Wb_n) = 5$, untuk $n \geq 8$	
Diamond Ladder $(Dl_n); n \geq 2$	$rc(Dl_n) = n + 1$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Flower Graph $(Fl_n); n \geq 2$	$rc(Fl_n) = 3$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Parachute Graph $(Pc_n); n \geq 2$	$rc(Pc_n) = n + 1$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Windmill Graph $(W_4^n); n \geq 2$	$rc(W_4^n) = 3$	Alfarisi dan Dafik.,2014
Joint Graph $(P_n + C_n); n \geq 3$	$rc(P_n + C_n) = 2$,	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(C_n + S_n); n \geq 3$	$rc(C_n + S_n) = 2$,	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(P_n + W_n); n \geq 3$	$rc(P_n + W_n) = 2$,	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(C_n + W_n); n \geq 3$	$rc(C_n + W_n) = 2$,	Fajariyanto, 2015
Joint Graph $(S_n + W_n); n \geq 3$	$rc(S_n + W_n) = 2$,	Fajariyanto, 2015
Cartesian Graph $(P_n \square W_m)$; $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n \square W_m) = n; m = 6$, $rc(P_n \square W_m) = n + 1$; $4 \leq m \leq 6$ $rc(P_n \square W_m) = n + 2$ $m \geq 6$	Fajariyanto, 2015
Graph Amal$(W_n, v = 1, r) \square P_2$; $n \geq 3; r \geq 3$	$rc(Amal(W_n, v = 1, r)$, $\square P_2) = 4$	Fajariyanto, 2015
Graph $P_n \otimes C_m; n \geq 3$	$rc(P_n \otimes C_m) = n$,	Fajariyanto, 2015
Graph $P_n[C_m]$; $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n[C_m]) = n - 1;$, $n - 1 \geq \frac{m}{2}$ $rc(P_n[C_m]) = 1; m = 3$; $n - 1 < \frac{m}{2}$ $rc(P_n[C_m]) = \frac{m}{2}$; $n - 1 < \frac{m}{2}; m$ genap $rc(P_n[C_m]) = \frac{m-1}{2} + 1$; $n - 1 < \frac{m}{2}; m$ ganjil> 3	Fajariyanto, 2015

Graf	Hasil	Keterangan
Graph $P_n[W_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[W_m]) = 3; n = 3$, $rc(P_n[W_m]) = n - 1$; $n \geq 4$	Fajariyanto, 2015
Graph $P_n[S_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[S_m]) = 3; n = 3$, $rc(P_n[S_m]) = n - 1$; $n \geq 4$	Fajariyanto, 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

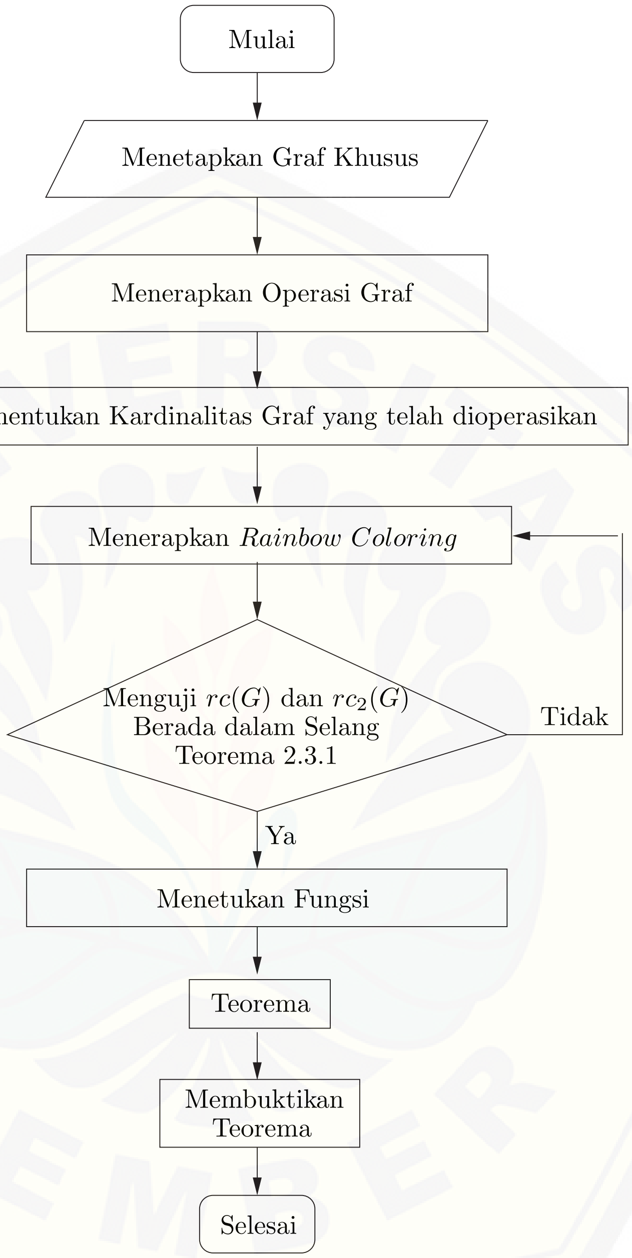
Penelitian ini menggunakan metode deduktif-aksiomatik dalam menyelesaikan masalah. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah.

3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf eksponensial dan beberapa operasi graf khusus. Graf khusus yang akan digunakan dalam penelitian ini antara lain yaitu graf lintasan, graf siklus, graf buku segitiga, graf kincir, dan graf lengkap. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

a. Menentukan graf khusus yang akan dijadikan objek penelitian.
b. Menerapkan operasi graf pada graf khusus yang telah ditentukan.
c. Menentukan kardinalitas graf baru yang telah dibentuk.
d. Menerapkan *rainbow coloring* pada graf baru yang telah dibentuk.
e. Memeriksa keoptimalan $rc(G)$ dan $rc_2(G)$, apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan *rainbow coloring* pada graf baru yang telah dibentuk.
f. Menentukan fungsi berdasarkan keteraturan dari *rainbow coloring* sehingga didapatkan teorema.
g. Membuktikan teorema yang telah didapatkan.

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga dilihat dalam skema pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan sebagai berikut :

a. Kardinalitas titik dan sisi dari graf hasil operasi yang telah diperoleh antara lain yaitu $|V({C_4}^{Bt_n})| = 4n+4$ dan $|E({C_4}^{Bt_n})| = 8n+4$, $|V({C_4}^{K_n})| = 4n-4$ dan $|E({C_4}^{K_n})| = 2n(n-1)$, $|V({Wd_{(3,n)}}^{C_3})| = 5n+1$ dan $|E({Wd_{(3,n)}}^{C_3})| = 9n$, $|V(C_n+Wd_{(3,2)})| = n+5$ dan $|E(C_n+Wd_{(3,2)})| = 6n+6$, $|V(C_3\Box K_n)| = 3n$ dan $|E(C_3\Box K_n)| = 3n+3(\frac{n(n-1)}{2})$, $|V(Bt_3\Box K_n)| = 5n$ dan $|E(Bt_3 \Box K_n)| = 7n+5(\frac{n(n-1)}{2})$, $|V(Wd_{(3,2)}\Box K_n)| = 5n$, $|E(Wd_{(3,2)}\Box K_n)| = 6n+5(\frac{n(n-1)}{2})$.

b. *Rainbow connection* dari graf hasil operasi yang telah diperoleh antara lain yaitu $rc({C_4}^{Bt_n}) = 3$, $rc({C_4}^{K_n}) = 3$, $rc({Wd_{(3,n)}}^{C_3}) = 4$, $rc(C_n+Wd_{(3,2)}) = 2$, $rc(C_3\Box K_n) = 2$, $rc(Bt_3\Box K_n) = 3$, $rc(Wd_{(3,2)}\Box K_n) = 3$.

c. *Rainbow 2-connected* dari graf hasil operasi yang telah diperoleh antara lain yaitu $rc_2({C_4}^{Bt_n}) = 4$, $rc_2({C_4}^{K_n}) = 4$, $rc_2({Wd_{(3,n)}}^{C_3}) = 5$, $rc_2(C_n + Wd_{(3,2)}) = 3$, $rc_2(C_3\Box K_n) = 3$, $rc_2(Bt_3\Box K_n) = 4$, $rc_2(Wd_{(3,2)}\Box K_n) = 4$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *rainbow 2-connected* pada graf eksponensial, *joint* dan *cartesian product* dari beberapa graf khusus yaitu dari graf siklus, lengkap, kincir dan buku segitiga, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar melakukan penelitian tentang *rainbow 2-connected* pada graf hasil operasi yang lainnya serta melakukan penelitian mengenai karakteristik $rc(G)$ dengan $rc_2(G)$.

DAFTAR PUSTAKA

Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The Rainbow Connection Number of Special Graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ,* **1**(1):457-461.

Chartrand, G., G.L. Jhons, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. *Rainbow Connection in Graphs.* Jurnal : *Math. Bohem.*, **133**:85-98.

Dafik.,Slamin.,Tanna,D. 2016. Contructions of H-antimagic graphs using snaller edge-antimagic graphs. *ars Combnatoria, subminted.*

Darmawan, R. N. dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number of Prism and Product of Two Graphs. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika SENDIKMAD UAD*, **1** (1):449-456.

Fajariyanto, A. 2015. *Penerapan Rainbow Connection pada Graf-Graf Hasil Operasi.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Harary, F. 2007. *Graph Theory.* New London : Wesley.

Hartsfield, N. dan Rigel, G. 1994. Pearls in Graph Theory. *United Kingdom : Academic Press Limited.*

Histamedika, G. 2012. Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*, **2**:17-25.

Li, X. and Sun, Y. 2012. *Rainbow Connection of Graphs.* Tiajin: Springer Science.

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3.* Bandung : Informatika Bandung.

Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit.* Jakarta : PT. Ercontara Rajawali.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf.* Jember : Universitas Jember.

Susanti,B.H., Salman,A.N.M., dan Simanjuntak, R. 2015. Upper Bounds for Rainbow 2-Connectivity of the Cartesian Product of a Path and a Cycle. *International Conference on Graph Theory and Information Security*, **74**:151-154.

Syafrizal, Sy., dan Estetikasari, Dewi. 2013. On Rainbow Connection for Some Corona Graphs. *Applied Mathematical Sciences*,**7** (100):4975-4979.

Syafrizal, Sy., Medika, Gh., Yulianti, Lyra. 2013. The Rainbow Connection of Fan and Sun. *Applied Mathematical Sciences*,**7** (64):3155-3159.

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit Edisi 2.* Yogyakarta : Graha Ilmu.

Wijaya, R. 2013. Bilangan Rainbow Connection untuk Graf Komplemen. *Matematika UNAD*, **2**:9-12.

Yulianti, A. dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number pada Operasi Graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, **1**(1):521-525.

LAMPIRAN

Lanjutan Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
Dl_n (*Diamond Ladder*);$n \geq 2$	$rc(Dl_n) = n + 1$.	Alfarisi,dkk,2014
PC_n (*Parachute Graph*);$n \geq 2$	$rc(PC_n) = n + 1$.	Alfarisi,dkk,2014
W_4^n (*Windmill Graph*);$n \geq 2$	$rc(W_4^n) = 3$.	Alfarisi,dkk,2014
$H_{n,m}$ (*Helmet Graph*);$n \geq 3$; $m \geq 1$	$rc(H_{n,m}) = nm + 3$.	Alfarisi,dkk,2014
Graph $P_n + C_n$; $n \geq 3$	$rc(P_n + C_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $C_n + S_n$; $n \geq 3$	$rc(C_n + S_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(P_n + W_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $C_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(C_n + W_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $S_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(S_n + W_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n \square C_n$; $n \geq 2$;$m \geq 3$	$rc(P_n \square C_n) = n; m = 6$. $rc(P_n \square C_n) = n + 1$; $4 \leq m \leq 6$. $rc(P_n \square C_n) = n + 2$; $m \geq 6$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $Amal(W_n, v = 1, r)$ $\square P_2; n \geq 3$;$r \geq 3$	$rc(Amal(W_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = 4$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n \otimes C_m$; $n \geq 3$	$rc(P_n \otimes C_m) = n$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n[C_n]$; $n \geq 2$;$m \geq 3$	$rc(P_n[C_n]) = n - 1$; $n - 1 \geq \frac{m}{2}$. $rc(P_n[C_n]) = 1; m = 3$; $n - 1 < \frac{m}{2}$. $rc(P_n[C_n]) = \frac{m}{2}$; $n - 1 < \frac{m}{2}$; m *genap*. $rc(P_n[C_n]) = \frac{m-1}{2} + 1$; $n - 1 < \frac{m}{2}$; m *ganjil* > 3.	Fajariyanto,dkk,2014

Graf	**Hasil**	**Keterangan**
Graph $P_n[W_m]$; $n \geq 3$;$m \geq 3$	$rc(P_n[W_m]) = 3; n = 3$. $rc(P_n[W_m]) = n - 1$; $n \geq 4$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n[S_m]$; $n \geq 3$;$m \geq 3$	$rc(P_n[S_m]) = 3; n = 3$. $rc(P_n[S_m]) = n - 1$; $n \geq 4$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $Amal(C_n, v = 1, r)$ $\square P_2; n \geq 3$;$r \geq 3$	$rc(Amal(C_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = n + 1$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $Amal(P_n, v = 1, r)$ $\square P_2; n \geq 3$;$r \geq 3$	$rc(Amal(P_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = 2n$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $mP_n + K_1; m \geq 2$; $n \geq 2$	$rc(mP_n + K_1) = 3$.	Darmawan,dkk,2015
Graph $S_n \square P_m; n \geq 3$;	$rc(S_n \square P_m) = n + m - 1$.	Darmawan,dkk,2015
$m \geq 2$ *Graph* $W_n \square P_m; n \geq 3$; $m \geq 2$	$rc(W_n \square P_m) = m; n = 3$. $rc(W_n \square P_m) = m + 1$; $4 \leq n \leq 6$. $rc(W_n \square P_m) = m + 2$; $n \geq 7$.	Darmawan,dkk,2015
Graph $P_n \odot C_m; n \geq 2$; $m \geq 3$	$rc(P_n \odot C_m) = 2n - 1$; $m = 3$. $rc(P_n \odot C_m) = 3n - 1$; $m \geq 4$.	Darmawan,dkk,2015
Graph $Amal[(S_4 \square P_2)$, $v = 1, n]; n \geq 2$	$rc(Amal[(S_4 \square P_2)$, $v = 1, n]) = 5n$.	Darmawan,dkk,2015
Graph $Pr_{(n,m)}; n \geq 3$; $m \geq 1$	$rc(Pr_{(n,m)}) = m; n = 3$. $rc(Pr_{(n,m)}) =$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m - 1); n \geq 4$.	Darmawan,dkk,2015
Graph $AP_n; n \geq 3$; $m \geq 1$	$rc(AP_n) = 2; n = 3$. $rc(AP_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil; n \geq 4$.	Darmawan,dkk,2015

Graf	**Hasil**	**Keterangan**
Graph $P_n \odot C_m; n \geq 2;$ $m \geq 3$	$src(P_n \odot C_m) = rc(P_n \odot C_m)$; $m = 3$. $src(P_n \odot C_m) = rc(P_n \odot C_m)$; $4 \leq m \leq 6$. $src(P_n \odot C_m) = n\left(\lceil \frac{m}{3} \rceil\right) + (n-1)$; $m \geq 7$.	Darmawan,dkk,2015
Graph $shack[(P_2 \otimes W_3), n];$ $n \geq 2$	$rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = src(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = 3n.$	Darmawan,dkk,2015
Graph $shack[(P_3 \otimes C_3), n];$ $n \geq 2$	$rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = src(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = 4n.$	Darmawan,dkk,2015
Graph $Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]; n \geq 2$	$rc(Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]) = 3.$	Darmawan,dkk,2015
Graph $Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]; n \geq 2$	$src(Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]) = 2n.$	Darmawan,dkk,2015
Graph $F_{2,6} \square P_m; m \geq 2;$	$rc(F_{2,6} \square P_m) =, .$ $src(F_{2,6} \square P_m) = m + 1.$	Hasan,dkk,2015
Graph $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2),$ $\square P_m; m \geq 2$	$rc(Amal(F_{1,3},$ $v = 1, 2) \square P_m) = src(Amal(F_{1,3},$ $v = 1, 2) \square P_m) = m + 1,$	Hasan,dkk,2015
Graph $Amal(W_4, v = 1, 2),$ $\square P_m; m \geq 2$	$rc(Amal(W_4,$ $v = 1, 2) \square P_m) = src(Amal(W_4,$ $v = 1, 2) \square P_m) = m + 1,$	Hasan,dkk,2015
Graph $P_2[F_{2,n}]; m \geq 2$	$rc(P_2[F_{2,n}] = src(P_2[F_{2,n}] = 2,$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(K_n, P_2, r),$	$rc(gshack(K_n, P_2, r)) =,$ $src(gshack(K_n, P_2, r)) = r$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(K_n, C_3, r),$	$rc(gshack(K_n, C_3, r)) =,$ $src(gshack(K_n, C_3, r)) = r$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(W_6, C_3, r),$	$rc(gshack(W_6, C_3, r)) =,$ $src(gshack(W_6, C_3, r)) = 2r$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(W_6, {C_4}^1, r),$	$rc(gshack(W_6, {C_4}^1, r)) =,$ $src(gshack(W_6, {C_4}^1, r)) = 2r$	Hasan,dkk,2015