



**NILAI KROMATIK PEWARNAAN SISI r -DINAMIS
PADA GRAF EKSPONENSIAL DAN GRAF OPERASI**

SKRIPSI

Oleh

Kiki Kurdianto

NIM 1218101041

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016



**NILAI KROMATIK PEWARNAAN SISI r -DINAMIS
PADA GRAF EKSPONENSIAL DAN GRAF OPERASI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Kiki Kurdianto
NIM 121810101041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Ahmad dan Ibunda Kusniati yang tercinta;
2. Adikku Hafiza Khaira Lubna yang tersayang;
3. Guru dan dosen-dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.



MOTTO

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang berilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan."

(Al-Mujadillah:11)*

"Jika pikiran saya bisa membayangkannya, hati saya bisa meyakinkannya, saya tahu saya akan mampu menggapainya."

(Jesse Jackson)**

* Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-Qur0an dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

** Jesse Jackson, politikus dan pemimpin masyarakat sipil Amerika Serikat.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Kiki Kurdianto

NIM : 121810101041

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Nilai Kromatik Pewarnaan Sisi r -Dinamis pada Graf Eksponensial dan Graf Operasi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Kiki Kurdianto

NIM. 121810101041

SKRIPSI

**NILAI KROMATIK PEWARNAAN SISI r -DINAMIS
PADA GRAF EKSPONENSIAL DAN GRAF OPERASI**

Oleh

Kiki Kurdianto
NIM 121810101041

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Nilai Kromatik Pewarnaan Sisi r -Dinamis pada Graf Ekspensial dan Graf Operasi" telah diuji dan disahkan oleh Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19840801 200801 2 006

NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota II,

Kusbudiono, S.Si., M.Si.

Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.

NIP. 19771430 200501 1 001

NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Nilai Kromatik Pewarnaan Sisi r -Dinamis pada Graf Eksponential dan Graf Operasi; Kiki Kurdianto, 121810101041; 2016: 88 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan salah satu topik matematika yang banyak dikaji oleh peneliti, salah satu topik dalam teori graf yang sering diteliti yaitu pewarnaan graf. Pewarnaan graf digolongkan menjadi pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada perkembangannya pewarnaan graf telah mengalami variasi, diantaranya yaitu pewarnaan dinamis yang dikembangkan oleh Bruce Montgomery pada tahun 2001. Pewarnaan k -warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada G memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k warna pada graf G yang memiliki k -warna dinamis disebut dengan bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_d(G)$. Pewarnaan titik r -dinamis kemudian digeneralisasi menjadi pewarnaan titik r -dinamis.

Pewarnaan titik r -dinamis pada akhirnya mengalami perkembangan yaitu pewarnaan sisi r -dinamis yang disesuaikan dengan kondisi/syarat pada pewarnaan sisi graf. Pewarnaan sisi r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $E(G)$ ke himpunan warna sedemikian hingga $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ untuk setiap $e = uv \in E(G)$, dimana $N(e)$ merupakan himpunan sisi yang bersisian dengan sisi e , dan $d(u)$ merupakan derajat dari titik u . Penggunaan k -warna dinamis yang paling minimal disebut dengan bilangan kromatik sisi r dinamis yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$.

Pewarnaan sisi r -dinamis dapat diterapkan pada hasil operasi dari graf beberapa graf khusus, misalnya seperti hasil operasi graf *cycle*, *windmill*, *star*, *stecked book*, dan *triangular book*. Sedangkan operasi graf adalah suatu metode yang digunakan untuk memperoleh graf baru dengan cara mengombinasikan dua graf atau lebih. Adapun graf-graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini yaitu $gshack(Wd_3^2, e, n)$, $gshack(B_{3,2}, e, n)$, $gshack(H_3, e, n)$, $amal(Bt_3, v, n)$,

$amal(H_{2,2}, v, n)$, $amal(S_4, v, n)$, $C_n^{S_3}$, dan $C_n^{H_{2,2}}$.

Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola dan metode deduktif aksiomatik. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi serta bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $gshack(Wd_3^2, e, n)$, $gshack(B_{3,2}, e, n)$, $gshack(H_3, e, n)$, $amal(Bt_3, v, n)$, $amal(H_{2,2}, v, n)$, $amal(S_4, v, n)$, $C_n^{S_3}$, dan $C_n^{H_{2,2}}$. Penelitian ini dihasilkan 8 teorema baru, antara lain:

- a. **Teorema 4.1.1** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = gshack(Wd_3^2, e, n)$ adalah

$$\begin{aligned}\lambda(gshack(Wd_3^2, e, n)) &= \lambda_d(gshack(Wd_3^2, e, n)) = \\ \lambda_3(gshack(Wd_3^2, e, n)) &= 4 \\ \lambda_4(gshack(Wd_3^2, e, n)) &= 5 \\ \lambda_{r \geq 5}(gshack(Wd_3^2, e, n)) &= 7\end{aligned}$$

- b. **Teorema 4.1.2** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = gshack(H_3, e, n)$ adalah:

$$\begin{aligned}\lambda(gshack(H_3, e, n)) &= \lambda_d(gshack(H_3, e, n)) = \lambda_3(gshack(H_3, e, n)) = 4 \\ \lambda_4(gshack(H_3, e, n)) &= 6 \\ \lambda_5(gshack(H_3, e, n)) &= 7 \\ \lambda_{r \geq 6}(gshack(H_3, e, n)) &= 9\end{aligned}$$

- c. **Teorema 4.1.3** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = gshack(B_{3,2}, e, n)$ adalah:

$$\begin{aligned}\lambda(gshack(B_{3,2}, e, n)) &= \lambda_d(gshack(B_{3,2}, e, n)) = \lambda_3(gshack(B_{3,2}, e, n)) = 4 \\ \lambda_4(gshack(B_{3,2}, e, n)) &= 6 \\ \lambda_5(gshack(B_{3,2}, e, n)) &= 7 \\ \lambda_{r \geq 6}(gshack(B_{3,2}, e, n)) &= 8\end{aligned}$$

- d. **Teorema 4.1.4** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = amal(H_{2,2}, v, n)$ adalah:

$$\lambda_{r \leq 2n-1}(\text{amal}(H_{2,2}, v, n)) = 2n$$

$$\lambda_{r \geq 2n}(\text{amal}(H_{2,2}, v, n)) = 2n + 2$$

- e. **Teorema 4.1.5** Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = \text{amal}(Bt_3, v, n)$ adalah:

$$\lambda_{r \leq n}(\text{amal}(Bt_3, v, n)) = 2n$$

$$\lambda_{n+1 \leq r \leq 2n-1}(\text{amal}(Bt_3, v, n)) = \begin{cases} 2n + 1, & n = 3 \\ 2n, & n > 3 \end{cases}$$

$$\lambda_{r=2n}(\text{amal}(Bt_3, v, n)) = 2n + 1$$

$$\lambda_{r=2n+1}(\text{amal}(Bt_3, v, n)) = 2n + 3$$

$$\lambda_{r \geq 2n+2}(\text{amal}(Bt_3, v, n)) = 2n + 5$$

- f. **Teorema 4.1.6** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = \text{amal}(S_4, v, n)$ adalah:

$$\lambda_{r \leq n-1}(\text{amal}(S_4, v, n)) = \begin{cases} 4, & n = 3 \\ n, & n > 3 \end{cases}$$

$$\lambda_{r=n}(\text{amal}(S_4, v, n)) = n + 1$$

$$\lambda_{r=n+1}(\text{amal}(S_4, v, n)) = n + 2$$

$$\lambda_{r \geq n+2}(\text{amal}(S_4, v, n)) = n + 3$$

- g. **Teorema 4.1.7** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = C_n^{S_3}$ adalah:

$$\lambda(C_n^{S_3}) = \lambda_d(C_n^{S_3}) = \lambda_3(C_n^{S_3}) = 4$$

$$\lambda_4(C_n^{S_3}) = 5$$

$$\lambda_5(C_n^{S_3}) = 6$$

$$\lambda_{r \geq 6}(C_n^{S_3}) = \begin{cases} 7, & n \equiv 0(\text{mod}6) \\ 8, & n \equiv 1(\text{mod}3) \text{ dan } n \equiv 2(\text{mod}3) \\ 9, & n = 3 \end{cases}$$

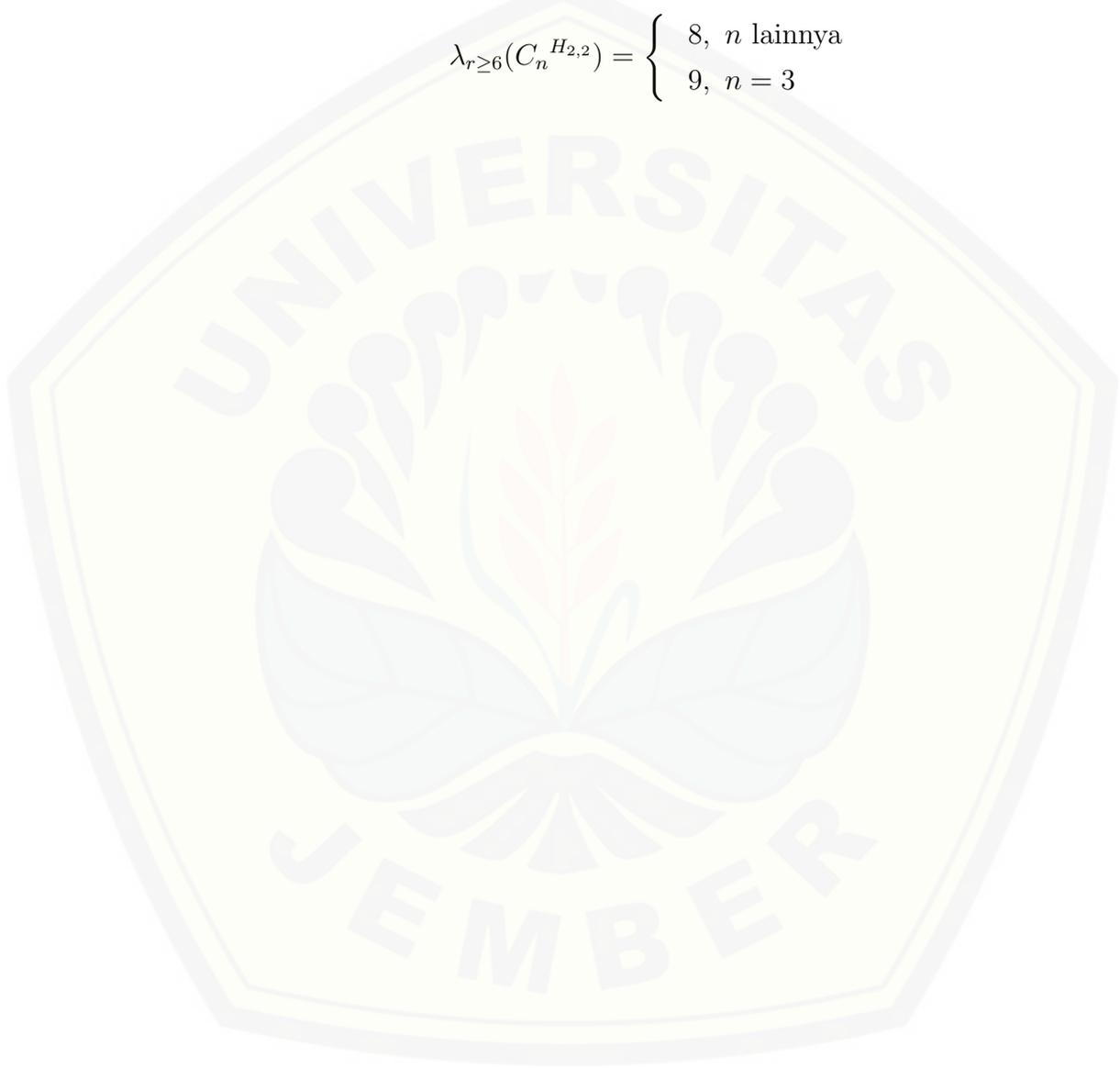
- h. **Teorema 4.1.8** Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = C_n^{H_{2,2}}$ adalah:

$$\lambda(C_n^{H_{2,2}}) = \lambda_d(C_n^{H_{2,2}}) = \lambda_3(C_n^{H_{2,2}}) = 4$$

$$\lambda_4(C_n^{H_{2,2}}) = 6$$

$$\lambda_5(C_n^{H_{2,2}}) = 7$$

$$\lambda_{r \geq 6}(C_n^{H_{2,2}}) = \begin{cases} 8, & n \text{ lainnya} \\ 9, & n = 3 \end{cases}$$



KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Nilai Kromatik Pewarnaan Sisi r -Dinamis pada Graf Eksponensial dan Graf Operasi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Sujito, Ph.D, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Dr. Mohamad Fatekurrahman, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama menjadi mahasiswa;
5. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. sahabat-sahabat terbaikku: Maulida Erni Wati, Esti Raftiarian, Firdauzi U N, Hanan Pratama dan Viqedina dkk yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
7. keluarga besar CGANT, BHATICS12 dan ALPHA yang selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
8. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga

menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Definisi dan Terminologi Graf	4
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf	6
2.3 Pewarnaan Graf	9
2.4 Pewarnaan r -Dinamis Graf	11
2.5 Aplikasi Pewarnaan Sisi Graf	13
2.6 Hasil-Hasil Pewarnaan Sisi r -Dinamis	16
3 METODE PENELITIAN	18
3.1 Metode Penelitian	18
3.2 Rancangan Penelitian	18
4 HASIL DAN PEMBAHASAN	20
4.1 Bilangan Kromatik Sisi r -dinamis dan Fungsi Pewarnaan Sisi r - dinamis	21

4.2 Pembahasan	83
5 KESIMPULAN DAN SARAN	87
5.1 Kesimpulan	87
5.2 Saran	88
DAFTAR PUSTAKA	89



DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh Graf G	4
2.2	(a) Wd_3^2 (b) $Gshack(Wd_3^2, e, n)$	8
2.3	(a) S_4 (b) $Amal(S_4, v, n)$	8
2.4	(a) S_3 (b) C_4 (c) $C_4^{S_3}$	9
2.5	(a) Pewarnaan Titik pada L_3 (b) Pewarnaan Sisi pada L_3	10
2.6	(a) Pewarnaan Sisi 1-dinamis pada P_6 (b) Pewarnaan Sisi 2-dinamis pada P_6	13
2.7	Graf Hubungan Pertemanan dalam Sanggar Tari	14
2.8	Graf Hubungan Pertemanan dalam Sanggar Tari dengan Pewarnaan Sisi r -Dinamis	15
3.1	Rancangan Penelitian	19
4.1	(a) Wd_3^2 (b) $Gshack(Wd_3^2, e, 4)$	22
4.2	Pewarnaan Sisi r -dinamis dengan 5 Warna pada $gshack(Wd_3^2, e, n)$	24
4.3	Pewarnaan Sisi 1, 2, 3-dinamis pada $Gshack(Wd_3^2, e, 4)$	26
4.4	Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada $Gshack(Wd_3^2, e, 4)$	27
4.5	Pewarnaan Sisi r -dinamis dengan $r \geq 5$ pada $Gshack(Wd_3^2, e, 4)$.	28
4.6	(a) H_3 (b) $Gshack(H_3, e, 3)$	30
4.7	Pewarnaan Sisi 4-dinamis dengan 5 Warna pada $Gshack(H_3, e, 3)$	31
4.8	Pewarnaan Sisi 6-dinamis dengan 8 Warna pada $gshack(H_3, e, 3)$.	33
4.9	Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada $Gshack(H_3, e, 3)$	34
4.10	Pewarnaan Sisi $r \geq 6$ -dinamis pada $Gshack(H_3, e, 3)$	36
4.11	(a) $B_{3,2}$ (b) $Gshack(B_{3,2}, e, 3)$	38
4.12	Pewarnaan Sisi 4-dinamis dengan 5 Warna pada $gshack(B_{3,2}, e, 3)$	40
4.13	Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada $Gshack(B_{3,2}, e, 3)$	43
4.14	(a) $H_{2,2}$ (b) $Amal(H_{2,2}, v, 4)$	45
4.15	Pewarnaan Sisi $2n$ -dinamis dengan $2n+1$ Warna pada $Amal(H_{2,2}, v, 4)$	47
4.16	Pewarnaan Sisi $2n$ -dinamis pada (a) $Amal(H_{2,2}, v, 3)$ (b) $Amal(H_{2,2}, v, 4)$	48

4.17 (a) Bt_3 (b) $Amal(Bt_3, v, 4)$	50
4.18 Pewarnaan Sisi $2n+1$ -dinamis dengan $2n+2$ Warna pada $Amal(Bt_3, v, 4)$	56
4.19 Pewarnaan Sisi $2n+2$ -dinamis dengan $2n+4$ Warna pada $Amal(Bt_3, v, 4)$	57
4.20 Pewarnaan Sisi (a) 3-dinamis pada $Amal(Bt_3, v, 3)$ (b) 4-dinamis pada $Amal(Bt_3, v, 4)$	58
4.21 Pewarnaan Sisi (a) 4-dinamis pada $Amal(Bt_3, v, 3)$ (b) 5-dinamis pada $Amal(Bt_3, v, 3)$	59
4.22 (a) S_4 (b) $Amal(S_4, v, 4)$	61
4.23 Pewarnaan Sisi $n - 1$ -dinamis pada $Amal(S_4, v, 8)$	66
4.24 Pewarnaan Sisi $n + 2$ -dinamis pada $Amal(S_4, v, 8)$	66
4.25 (a) S_3 (b) C_4 (c) $C_4^{S_3}$	68
4.26 Pewarnaan Sisi r -dinamis pada $C_4^{S_3}$ dengan 7 Warna	71
4.27 Pewarnaan Sisi r -dinamis pada $C_3^{S_3}$ dengan (a) 7 Warna (b) 8 Warna	72
4.28 Pewarnaan Sisi 6-dinamis pada (a) $C_3^{S_3}$ (b) $C_4^{S_3}$ (c) $C_5^{S_3}$	74
4.29 (a) $H_{2,2}$ (b) C_4 (c) $C_4^{H_{2,2}}$	76
4.30 Pewarnaan Sisi r -dinamis pada $C_4^{H_{2,2}}$ dengan 5 Warna	78
4.31 Pewarnaan r -dinamis pada $C_4^{H_{2,2}}$ dengan 8 Warna	80
4.32 Pewarnaan 6-dinamis pada (a) $C_3^{H_{2,2}}$ (b) $C_4^{H_{2,2}}$	82

DAFTAR TABEL

2.1	Pewarnaan Sisi 1-dinamis pada P_6	13
2.2	Pewarnaan Sisi 2-dinamis pada P_6	13
2.3	Jenis Tarian yang Digunakan	15
2.4	Hasil Pewarnaan Sisi r -Dinamis Penelitian Terdahulu	16
4.1	Pewarnaan Sisi 1, 2, 3-dinamis pada $Gshack(Wd_3^2, e, 4)$	26
4.2	Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada $Gshack(Wd_3^2, e, 4)$	27
4.3	Pewarnaan Sisi $r \geq 5$ -dinamis pada $Gshack(Wd_3^2, e, 4)$	28
4.4	Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada $Gshack(H_3, e, 3)$	35
4.5	Pewarnaan Sisi $r \geq 6$ -dinamis pada $Gshack(H_3, e, 3)$	36
4.6	Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada $Gshack(B_{3,2}, e, 3)$	43
4.7	Pewarnaan Sisi 8-dinamis pada $Amal(H_{2,2}, v, 4)$	48
4.8	Pewarnaan Sisi 4-dinamis $Amal(Bt_3, v, 3)$ pada Gambar 4.21(a)	59

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Seiring perkembangan teknologi, graf banyak diminati oleh peneliti. Hal ini disebabkan oleh kesederhanaan objek yang diteliti yaitu titik dan sisi, akan tetapi memiliki banyak manfaat dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh kasusnya yaitu menentukan jadwal pertandingan bola voli Pertamina Proliga dengan menggunakan sistem pertandingan kompetisi, yaitu dengan tim direpresentasikan oleh titik yang dihubungkan oleh sisi-sisi yang merepresentasikan tim yang akan bertanding. Sistem pertandingan kompetisi mengharuskan semua tim bertanding dengan tim lain minimal satu kali pertandingan, sehingga hal ini membutuhkan jadwal yang tepat agar tim yang bertanding tidak akan bertanding dengan tim yang lain pada waktu yang sama.

Permasalahan tersebut dapat dipecahkan menggunakan teori graf, yaitu topik pewarnaan graf. Pewarnaan digolongkan menjadi pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada pewarnaan graf, titik atau sisi yang bertetangga diberi dengan warna yang berbeda. Selain itu, pemberian warna tersebut harus menggunakan k warna yang minimal, yang disebut bilangan kromatik dan dilambangkan dengan $\chi(G)$.

Pewarnaan graf telah banyak mengalami variasi, diantaranya yaitu pewarnaan dinamis. Pewarnaan dinamis pertama kali diperkenalkan pada tahun 2001 oleh Bruce Montgomery yang menjadi topik kajian dalam tesisnya. Selanjutnya, Lai dan Montgomery (2002) menuangkan konsep pewarnaan tersebut dalam sebuah artikel yang berjudul *Dynamic Coloring of Graphs*.

Selanjutnya, peneliti-peneliti lain berusaha mengkaji lebih dalam pewarnaan r -dinamis dan menghasilkan teorema-teorema baru. Beberapa diantaranya adalah Alishahi (2011) meneliti pewarnaan dinamis pada graf dan hipergraf, Kim *et al.* (2013) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf planar, Kang *et al.* (2015) meneliti tentang pewarnaan r -dinamis pada graf *grid*. Kemudian Wu-

landari (2015) menganalisis *r-dynamic vertex coloring* pada hasil operasi graf khusus. Tarmidzi (2015) melakukan penelitian yaitu menentukan nilai kromatik pada pewarnaan titik *r*-dinamis pada graf khusus dan operasi shakel. Selanjutnya, pada tahun yang sama, Meganingtyas melakukan pewarnaan *r*-dinamis pada sisi melalui tesisnya yang berjudul analisis pewarnaan *r*-dinamis pada graf-graf khusus. Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, maka peneliti tertarik melakukan penelitian lebih dalam terhadap pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf eksponensial dan graf operasi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

- a. Bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf eksponensial $C_n^{S_3}$ dan $C_n^{H_{2,2}}$ serta graf operasi $gshack(Wd_3^2, e, n)$, $gshack(B_{3,2}, e, n)$, $gshack(H_3, e, n)$, $amal(Bt_3, v, n)$, $amal(H_{2,2}, v, n)$, dan $amal(S_4, v, n)$?
- b. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf eksponensial $C_n^{S_3}$ dan $C_n^{H_{2,2}}$ serta graf operasi $gshack(Wd_3^2, e, n)$, $gshack(B_{3,2}, e, n)$, $gshack(H_3, e, n)$, $amal(Bt_3, v, n)$, $amal(H_{2,2}, v, n)$, dan $amal(S_4, v, n)$?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut :

- a. Graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini yaitu *cycle*, *helm*, *windmill*, *star*, *triangular book*, dan *cocktail party*;
- b. Operasi yang digunakan adalah amalgamasi dan *shackle*.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan pada penelitian ini antara lain :

- a. Menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf eksponensial $C_n^{S_3}$ dan $C_n^{H_{2,2}}$ serta graf operasi $gshack(Wd_3^2, e, n)$, $gshack(B_{3,2}, e, n)$, $gshack(H_3, e, n)$, $amal(Bt_3, v, n)$, $amal(H_{2,2}, v, n)$, dan $amal(S_4, v, n)$;
- b. Menentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi r -dinamis pada graf eksponensial $C_n^{S_3}$ dan $C_n^{H_{2,2}}$ serta graf operasi $gshack(Wd_3^2, e, n)$, $gshack(B_{3,2}, e, n)$, $gshack(H_3, e, n)$, $amal(Bt_3, v, n)$, $amal(H_{2,2}, v, n)$, dan $amal(S_4, v, n)$.

1.5 Manfaat Penelitian

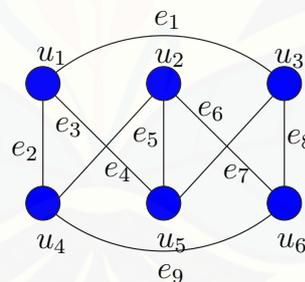
Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini, antara lain :

- a. Meningkatkan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya pewarnaan sisi r -dinamis;
- b. Memberi motivasi pada peneliti lain untuk memperluas penelitian pewarnaan sisi r -dinamis;
- c. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah pewarnaan sisi.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yaitu himpunan V dan E . Himpunan V merupakan himpunan yang elemen-elemennya dinamakan titik (*vertex*). Himpunan E merupakan himpunan yang elemen-elemennya dinamakan sisi (*edge*). Sehingga suatu graf G dapat disimbolkan $G(V, E)$ (Lipschutz dan Lipson, 2007). Slamir (2009) menyebutkan bahwa sebuah graf G dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut dengan graf trivial. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut, yaitu dengan merepresentasikan objek tersebut dengan noktah atau titik, sedangkan hubungan antar objek direpresentasikan sebagai garis atau sisi.



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Order merupakan banyaknya anggota himpunan titik dalam graf G dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya anggota himpunan sisi dari graf G disebut dengan *size* dan dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$. Gambar 2.1 adalah graf dengan $|V(G)| = 6$ dan $|E(G)| = 9$. Misal graf G memiliki titik u dan v , kedua titik tersebut dikatakan berdampingan atau bertetangga jika terdapat suatu sisi $e = uv$ yang menghubungkan kedua titik tersebut, dengan kata lain sisi

e bersisian (*incident*) terhadap titik u dan v . Graf Gambar 2.1 titik u_1 bersisian dengan e_1 , e_2 , dan e_3 .

Munir (2012) menyatakan derajat dari suatu titik v pada G , ditulis $d(v)$ merupakan banyaknya titik dalam G yang insiden pada v . Graf pada Gambar 2.1 memiliki $d(u_1)=3$, $d(u_2)=3$, $d(u_3)=3$, $d(u_4)=3$, $d(u_5)=3$, dan $d(u_6)=3$. Suatu titik dengan derajat nol disebut sebagai titik terisolasi (*isolated vertex*). Derajat terbesar dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$ merupakan banyaknya maksimal sisi yang *adjacent* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya, sedangkan derajat minimum pada G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Graf pada Gambar 2.1 memiliki $\Delta(G) = 3$. Suatu graf G yang memiliki derajat yang sama disebut dengan graf reguler. Sebuah titik yang memiliki derajat satu disebut dengan anting-anting (*pendant vertex*).

Menurut Hartsfield dan Ringel (1990) jalan pada suatu graf G adalah barisan titik dan sisi yang berhingga dan saling bergantian dengan ketentuan setiap sisi *incident* pada titik yang mengapitnya pada barisan tersebut, dimana setiap titik ataupun sisinya boleh berulang serta diawali dan diakhiri oleh titik. Bilangan yang menyatakan banyaknya sisi yang terdapat dalam jalan disebut dengan panjang dari suatu jalan. Suatu jalan dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$, dengan kata lain jalan yang diawali dan berakhir di titik yang sama. Jejak (*trail*) adalah jalan dengan sisi yang dilalui tidak berulang, tetapi titik yang dilalui boleh berulang. Suatu jalan dengan titik yang dilalui tidak berulang disebut dengan lintasan. Lintasan yang berawal dan berakhir di titik yang sama disebut dengan *cycle* atau lintasan tertutup.

Suatu graf juga dapat disajikan dalam bentuk matriks ketetanggaan (*matriks adjacency*). Misal G adalah suatu graf dengan n titik, maka matriks ketetanggaan $A = [a_{ij}]$ berordo $n \times n$ yang didefinisikan oleh:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Graf pada Gambar 2.1 jika dinyatakan dalam matriks ketetanggaan yaitu sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

Suatu graf disebut dengan graf khusus apabila memiliki keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikan tersebut tidak isomorfis dengan graf yang lain. Karakteristik bentuknya diperluas sampai order n tetapi simetris. Contoh dari graf khusus diantaranya yaitu graf lintasan, *cycle*, lengkap, kipas, *helm*, *triangular book* dan *windmill*.

Graf lintasan dan *cycle* merupakan graf sederhana. Graf lintasan memiliki n titik dan $n - 1$ sisi dan dinotasikan dengan P_n dimana $n \geq 2$. Sedangkan graf *cycle* terdiri dari n titik yang setiap titiknya berderajat 2, dan dinotasikan dengan C_n dimana n adalah jumlah titik dengan $n \geq 3$. Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya terhubung dengan titik lain dengan tepat satu sisi (Wibisono, 2008). Graf lengkap dilambangkan dengan K_n , dimana n menunjukkan jumlah titik. Graf lengkap memiliki $|V(K_n)| = n$ dan $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$.

Graf kipas dinotasikan dengan F_n dengan $n \geq 3$, yaitu graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari lintasan P_n pada suatu titik yang disebut dengan titik pusat. Graf kipas F_n memiliki $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Graf bintang (S_n) adalah graf pohon yang terdiri dari suatu titik pusat yang berderajat n , $n + 1$ titik, dan n sisi. Graf *helm* merupakan graf yang diperoleh dari graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik di *cycle*. Graf *helm* dinotasikan dengan H_n dan memiliki $2n + 1$ titik serta $3n$ sisi (Rosyidah dan Dafik, 2014).

Triangular Book yaitu graf yang terdiri dari sejumlah n buah segitiga ($n \geq 3$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki dua titik yang sama. Graf ini dinotasikan dengan Bt_n dan terdiri dari $n + 2$ titik serta $2n + 1$ sisi. Graf kincir (*windmill*) dinotasikan de-

ngan Wd_n^m merupakan graf yang diperoleh dari m salinan graf komplit K_n dengan sebuah titik yang digunakan secara bersama. Graf *windmill* memiliki kardinalitas titik $m(n-1)+1$ dan kardinalitas sisi $m\binom{n-1}{2}$ (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).

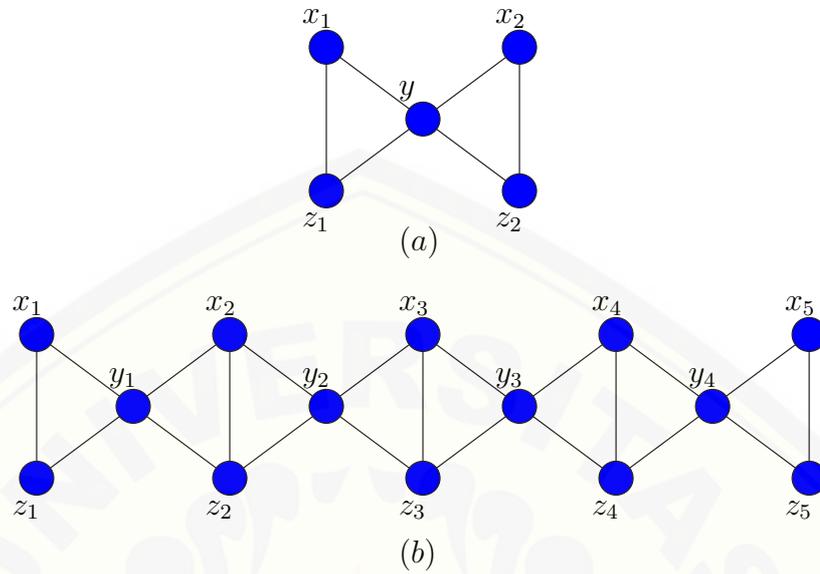
Operasi graf adalah suatu metode yang digunakan untuk memperoleh sebuah graf baru dengan cara mengombinasikan dua graf atau lebih. Ada beberapa macam jenis operasi graf yang telah dikembangkan oleh peneliti. Berikut ini adalah penjelasan dari beberapa operasi graf yang dilengkapi dengan contoh.

Definisi 2.2.1 *Shackle* dari graf H dinotasikan dengan $G = shack(H, v, n)$ adalah graf G yang dibangun dari graf non trivial H_1, H_2, \dots, H_n sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n$, H_s dan H_t tidak memiliki titik penghubung dimana $|s-t| \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n-1$, H_i dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik bersama v , disebut dengan titik penghubung dan $k-1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan *generalized shackle*, dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$ (Dafik et al., 2016).

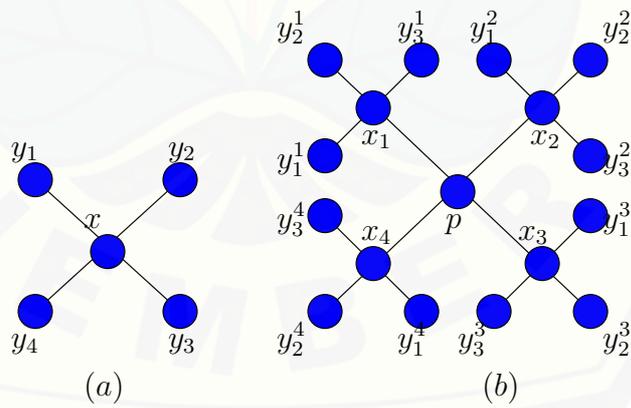
Misal graf H , memiliki titik $|V(H)| = p$ dan sisi $|E(H)| = q$, sedangkan subgraf K , memiliki titik $|V(K)| = p_1$ dan sisi $|E(K)| = q_1$. Maka graf *shackle* G memiliki titik $|V(G)| = n(p-1)+1$ dan sisi $|E(G)| = np$, sedangkan graf *generalized shackle* G memiliki titik $|V(G)| = n(p-p_1)+p_1$ dan sisi $|E(G)| = n(q-q_1)+q_1$. Contoh operasi *generalized shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.2.

Definisi 2.2.2 Amalgamasi dinotasikan dengan $G = Amal(H, v, n)$ dimana setiap H memiliki sebuah titik v yang menjadi titik terminal, dan n menyatakan banyaknya graf H yang diamalgamasi (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).

Misal graf H , memiliki titik $|V(H)| = p$ dan sisi $|E(H)| = q$, sedangkan n menyatakan banyak graf yang diamalgamasi, maka graf G memiliki titik $|V(G)| = n(p-1)+1$ dan sisi $|E(G)| = nq$. Contoh operasi amalgamasi dapat dilihat pada Gambar 2.3.

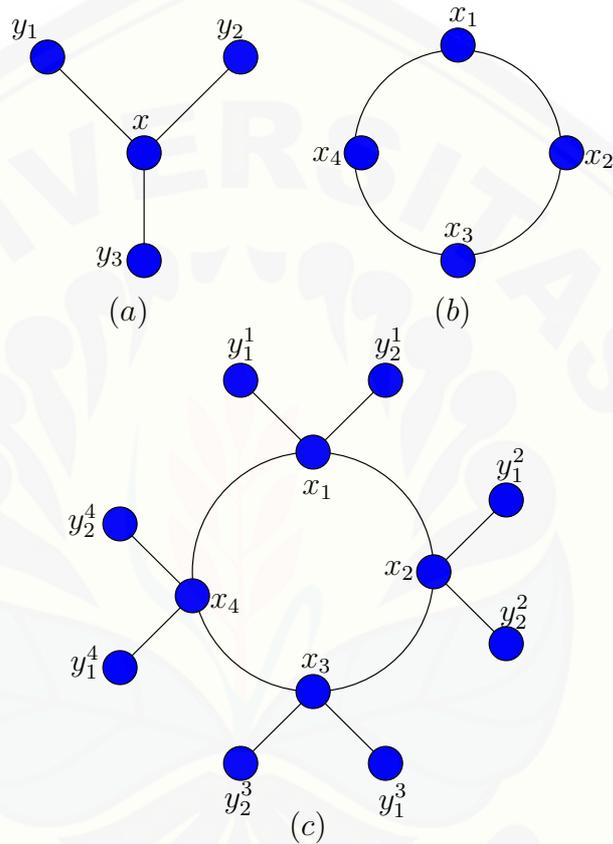


Gambar 2.2 (a) Wd_3^2 (b) $Gshack(Wd_3^2, e, n)$



Gambar 2.3 (a) S_4 (b) $Amal(S_4, v, n)$

Definisi 2.2.3 Misal diberikan graf G dan H , maka graf eksponensial adalah graf yang dibentuk G dengan mengganti semua sisi dari graf G dengan graf H dan dinotasikan dengan G^H . Misal graf G memiliki titik $|V(G)| = p_1$ dan sisi $|E(G)| = q_1$, sedangkan graf H memiliki titik $|V(H)| = p_2$ dan sisi $|E(H)| = q_2$, maka graf G^H memiliki titik $p = |V(G^H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan sisi $q = |E(G^H)| = q_1q_2$ (Dafik *et al.*, 2016). Contoh graf eksponensial dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.4 (a) S_3 (b) C_4 (c) $C_4^{S_3}$

2.3 Pewarnaan Graf

Menurut Munir (2012) terdapat tiga macam pewarnaan graf (*graph coloring*), yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), sisi (*edge coloring*), dan wilayah (*region coloring*). Pewarnaan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke suatu sembarang himpunan. Jika daerah asal adalah

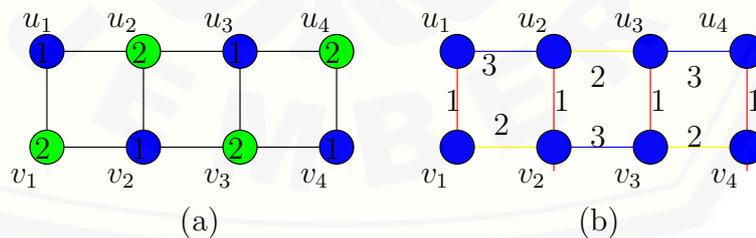
sebuah sisi disebut dengan pewarnaan sisi. Jika daerah asal adalah titik maka disebut dengan pewarnaan titik.

Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna yang berbeda pada setiap titik yang bertetangga (Chartrand dan Zhang, 2009). Pemberian warna pada suatu graf G dapat dilakukan dengan menggunakan bilangan bulat positif ataupun dengan menggunakan warna (seperti: merah, kuning, biru). Jika setiap warna yang digunakan merupakan salah satu dari sejumlah k yang diberikan, maka pewarnaannya disebut dengan k -warna. Dalam pewarnaan titik suatu graf G dimungkinkan memiliki warna yang sama pada titik yang tidak bertetangga. Penggunaan k warna yang paling minimum disebut dengan bilangan kromatik graf G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Pewarnaan sisi pada graf G merupakan pewarnaan dengan sejumlah k warna yang digunakan untuk mewarnai semua sisi pada graf G dengan setiap sisi yang memiliki satu titik persekutuan diwarnai dengan warna yang berbeda (Budayasa, 2007). Sama halnya dengan pewarnaan titik, pada pewarnaan sisi penggunaan warna haruslah seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik graf G dan dinotasikan dengan $\lambda(G)$. Contoh pewarnaan graf dapat dilihat pada Gambar 2.5

Bilangan kromatik yang diperoleh dari mewarnai suatu graf G selalu memenuhi Teorema 2.3.1 sebagai berikut.

Teorema 2.3.1. *Jika G adalah graf sederhana, maka $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G) + 1$ (Chartrand dan Zhang, 2009)*



Gambar 2.5 (a) Pewarnaan Titik pada L_3 (b) Pewarnaan Sisi pada L_3

2.4 Pewarnaan r -Dinamis Graf

Terdapat beberapa variasi dalam memberikan warna pada suatu graf. Salah satunya yaitu pewarnaan r -dinamis. Pewarnaan r -dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k -warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002 dengan cara menggeneralisasikan konsep pewarnaan dinamis.

Suatu graf G memiliki himpunan titik $V = V(G)$, himpunan sisi $E = E(G)$, dan n menyatakan banyaknya titik, yaitu $|V|$. Himpunan ketetanggaan suatu titik v , dinotasikan dengan $N(v)$, merupakan himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik v . e menyatakan sisi yang menghubungkan titik v dan u . $N(e)$ merupakan himpunan sisi-sisi yang bersisian dengan sisi e . Derajat dari suatu titik v dinotasikan dengan $d(v)$, derajat yang minimum pada graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$, dan derajat titik yang maksimum pada graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Pewarnaan k -warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada G memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k warna pada graf G yang memiliki k -warna dinamis disebut dengan bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_d(G)$. Adapun pengertian dari pewarnaan r -dinamis dapat dilihat pada Definisi 2.4.1.

Definisi 2.4.1 Pewarnaan titik r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $V(G)$ ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:

1. Jika $u, v \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$ dan
2. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$

(Lai dan Montgomery, 2002).

Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k -warna r -dinamis disebut dengan bilangan kromatik r dinamis yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\chi(G)$. Untuk mendapatkan nilai dari bilangan kromatik dinamis

dirumuskan dalam satu persamaan pada Observasi 2.4.1 sebagai berikut.

Observasi 2.4.1 Misal G adalah graf terhubung dan λ merupakan bilangan kromatik dinamis maka berlaku $\lambda_r(G) \leq \lambda_{r+1}(G)$. (Kang *et al.*, 2015)

Pewarnaan titik r -dinamis pada akhirnya mengalami perkembangan yaitu pewarnaan sisi r -dinamis. Pewarnaan sisi r -dinamis merupakan hasil perkembangan dari pewarnaan titik r -dinamis yang disesuaikan dengan kondisi/syarat pada pewarnaan sisi graf. Pewarnaan sisi r -dinamis merupakan topik dalam penelitian ini. Adapun pengertian dari pewarnaan sisi r -dinamis dapat dilihat pada Definisi 2.4.2.

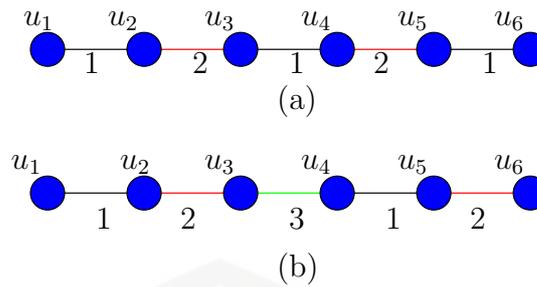
Definisi 2.4.2 Pewarnaan sisi r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $E(G)$ ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut :

1. Jika $e = uv, f = vw \in E(G)$ maka $c(e) \neq c(f)$ dan
2. $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$

(Dafik dan Meganingtyas, 2015).

Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k -warna sisi r -dinamis disebut dengan bilangan kromatik sisi r dinamis yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\lambda(G)$. Adapun bilangan kromatik sisi 2-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik sisi $\lambda_d(G)$. Pewarnaan sisi r -dinamis dapat dilihat pada Gambar 2.6

Adapun Tabel 2.1 dan 2.2 digunakan sebagai bantuan untuk memastikan keberadaan pewarnaan sisi 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf lintasan P_6 .



Gambar 2.6 (a) Pewarnaan Sisi 1-dinamis pada P_6 (b) Pewarnaan Sisi 2-dinamis pada P_6

Tabel 2.1 Pewarnaan Sisi 1-dinamis pada P_6

$e = uv$	$c(e)$	$ c(S(e)) $	r	$d(u) + d(v) - 2$	$\min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$	$ c(S(e)) \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$
u_1u_2	1	1	1	3	3	YA
u_2u_3	2	1	1	3	3	YA
u_4u_5	1	1	1	3	3	YA
u_5u_6	2	1	1	3	3	YA

Tabel 2.2 Pewarnaan Sisi 2-dinamis pada P_6

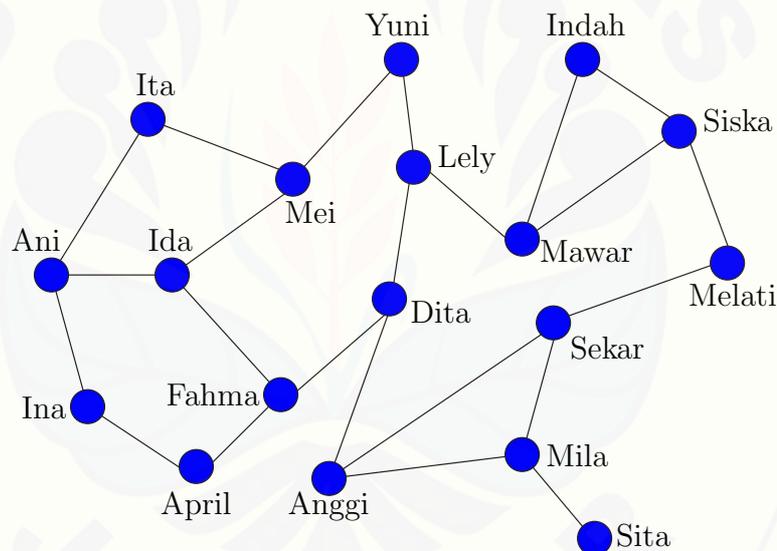
$e = uv$	$c(e)$	$ c(S(e)) $	r	$d(u) + d(v) - 2$	$\min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$	$ c(S(e)) \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$
u_1u_2	1	2	2	3	3	YA
u_2u_3	2	2	2	3	3	YA
u_4u_5	3	2	2	3	3	YA
u_5u_6	1	2	2	3	3	YA

2.5 Aplikasi Pewarnaan Sisi Graf

Berbagai macam permasalahan sulit dipecahkan menggunakan perhitungan dan pertimbangan biasa. Graf dapat membantu memodelkan suatu masalah kemudian dideskripsikan dan digambarkan secara jelas. Penyelesaian dalam graf dapat dilakukan dengan mengubah objek diskrit menjadi titik-titik yang kemudian dihubungkan dengan sisi untuk menggambarkan permasalahan. Salah satu

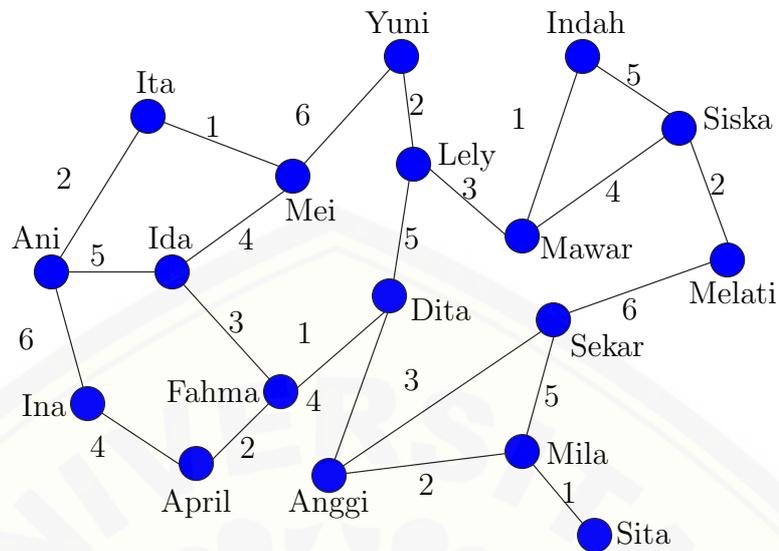
manfaat dari pewarnaan sisi yaitu membantu dalam penentuan tugas dalam sebuah kelompok, misalnya dalam kasus menentukan tugas menari dalam suatu sanggar tari.

Seorang guru dalam sanggar tari akan memberikan tugas kepada 18 muridnya untuk menari dengan cara berpasangan. Pasangan tari ditentukan berdasarkan kedekatan pertemanan seperti yang direpresentasikan oleh graf pada Gambar 2.7. Setiap murid yang memiliki lebih dari satu pasang harus menarikan jenis tarian yang berbeda dan setiap pasangan harus menarikan jenis tarian yang berbeda pula. Guru tersebut akan mengatur tugas tari tersebut supaya jenis tari yang akan dipraktekkan seminimal mungkin. Kasus tersebut dapat dipecahkan dengan menggunakan pewarnaan sisi r -dinamis. Pada kasus ini murid direpresentasikan oleh titik, dimana titik tersebut dihubungkan oleh sisi yang merepresentasikan hubungan pertemanan yang akan menjadi pasangannya.



Gambar 2.7 Graf Hubungan Pertemanan dalam Sanggar Tari

Jika graf pada Gambar 2.7 diwarnai dengan ketentuan tersebut maka diperoleh pewarnaan sisi r -dinamis graf pada Gambar 2.8 dengan $\lambda_{r \geq 4} = 6$, sehingga tarian yang akan dipraktekkan sebanyak 6 tarian. Masing-masing warna pada graf tersebut merupakan jenis tarian yang akan ditarikan oleh pasangan anak. Adapun jenis tarian berdasarkan warnanya disajikan dalam Tabel 2.3.



Gambar 2.8 Graf Hubungan Pertemanan dalam Sanggar Tari dengan Pewarnaan Sisi r -Dinamis

Tabel 2.3 Jenis Tarian yang Digunakan

$c(e)$	Nama Tarian
1	Tari Pendet
2	Tari Jaipong
3	Tari Topeng
4	Tari Gandrung
5	Tari Piring
6	Tari Legong

Graf pada Gambar 2.8 menjelaskan bahwa Ani akan berpasangan dengan Ita, Ida, dan Ina dengan tarian berturut-turut adalah tari jaipong, tari pring, dan tari legong. Dita akan berpasangan dengan Fahma, Lely, dan Anggi dengan tarian berturut-turut adalah tari pendet, tari piring, dan tari gandrung. Mila akan berpasangan dengan Anggi, Sekar, dan Sita dengan tarian berturut-turut adalah tari jaipong, tari piring, dan tari pendet. Begitu juga dengan murid yang lain untuk menentukan jenis tarian yang akan digunakan melihat pewarnaan sisi r -dinamis graf pada Gambar 2.8.

2.6 Hasil-Hasil Pewarnaan Sisi r -Dinamis

Penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan sisi r -dinamis yang digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian tersebut bisa dilihat pada Tabel 2.4

Tabel 2.4 Hasil Pewarnaan Sisi r -Dinamis Penelitian Terdahulu		
Graf	Bilangan Kromatik r -Dinamis	Keterangan
Graf Lintasan (P_n); $n \geq 2$	$\lambda(P_n) = 2; n \geq 2$ $\lambda_2(P_n) = \lambda_r(P_n) = 3;$ $n \geq 2, r \geq 2$	Meganingtyas, 2015
Graf Sikel (C_n); $n \geq 3$	$\lambda(C_n) = 2; n$ genap $\lambda(C_n) = 3; n$ ganjil $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 3;$ $n = 3k, k \in N$ $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 4;$ $n = 3k + 1, k \in N$ $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 5;$ $n = 3k + 2, k \in N$	Meganingtyas, 2015
Graf Bintang (S_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r \geq 1}(S_n) = n$	Meganingtyas, 2015
Graf Roda (W_n); $n \geq 5$	$\lambda_{r \leq n-1}(W_n) = n;$ $1 \leq r \leq n - 1$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = 10;$ $n = 5, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n + 3;$ $n = 3k + 3, k \in N, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n + 4;$ n lainnya, $r \geq n$	Meganingtyas, 2015
Graf <i>Friendship</i> (F_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r \leq 2n-1}(F_n) = 2n,$ $\lambda_{r \geq 2n}(F_n) = 2n + 1,$	Meganingtyas, 2015
Graf Amalgamasi Lintasan(P_n); $n \geq 2, m \geq 3$	$\lambda(amal(P_n, v, m)) =$ $\lambda_2(amal(P_n, v, m)) = m,$ $\lambda_{r \geq 3n}(amal(P_n, v, m)) = m + 1,$	Meganingtyas, 2015

Graf	Bilangan Kromatik r -Dinamis	Keterangan
Graf Prisma (P_n); $n \geq 3$	$\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 2$; n genap $\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 3$; n ganjil $\lambda_3(P_n) = 4$; $n = 3$ $\lambda_3(P_n) = 5$; n lainnya $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 9$; $n = 3$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 6$; $n = 4k, k \in \mathbb{N}$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 8$; $n = 5, 6, 4k + 7k \in \mathbb{N}$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 7$; n lainnya	Meganingtyas, 2015
Graf Tangga (L_n); $n \geq 3$	$\lambda(L_n) = \lambda_2(L_n) = 3$, $\lambda_3(L_n) = 5$, $\lambda_4(L_n) = \lambda_r(L_n) = 6$,	Meganingtyas, 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

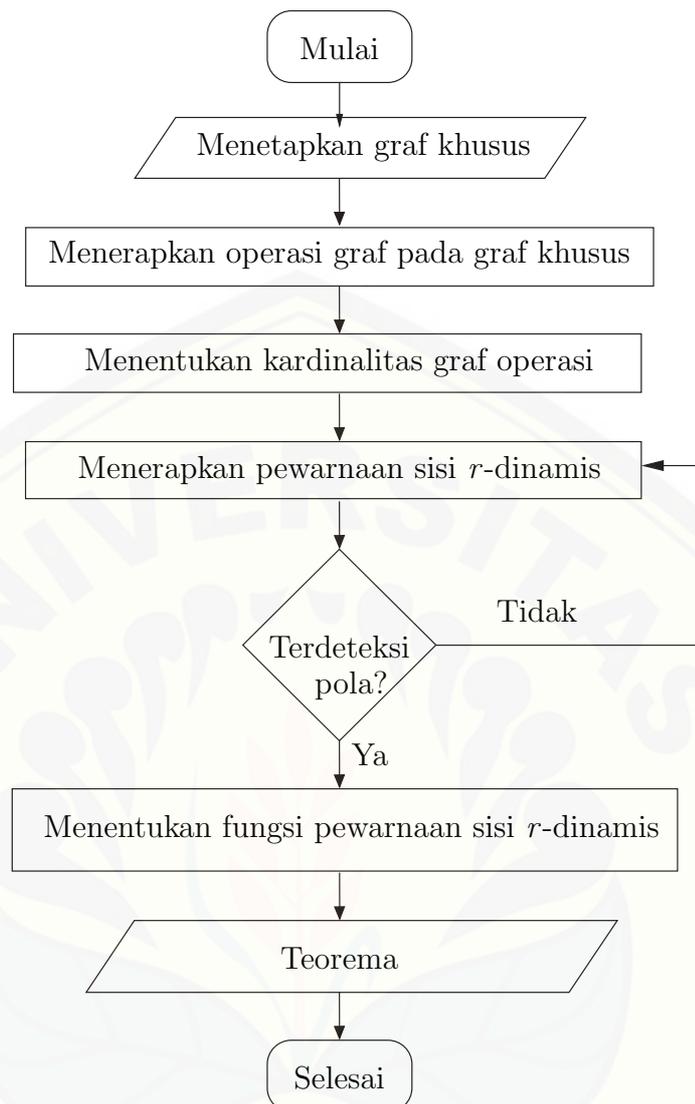
Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan metode deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola yaitu mencari pola pewarnaan sisi r -dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya, yang kemudian digunakan untuk menentukan fungsi pewarnaan sisi r -dinamis. Sedangkan metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf hasil operasi dari graf khusus. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. Memilih graf khusus sebagai objek penelitian;
- b. Menerapkan operasi graf pada graf khusus yang telah ditentukan, lalu tentukan kardinalitas graf;
- c. Menentukan pewarnaan sisi r -dinamis pada graf operasi;
- d. Memeriksa pola pewarnaan sisi r -dinamis yang terbentuk. Apabila sudah terbentuk suatu pola pewarnaan dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila tidak terbentuk pola pewarnaan akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan sisi r -dinamis pada graf;
- e. Menentukan fungsi pewarnaan sisi r -dinamis pada masing-masing graf operasi sehingga diperoleh teorema-teorema .

Secara umum, langkah-langkah penelitian diatas dapat juga disajikan dalam skema pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa pada $gshack(Wd_3^2, e, n)$ diperoleh $|V(gshack(Wd_3^2, e, n))| = 3n + 2$ dan $|E(gshack(Wd_3^2, P_2, n))| = 5n + 1$. $Gshack(B_{3,2}, e, n)$ diperoleh $|V(gshack(B_{3,2}, e, n))| = 6n + 2$ dan $|E(gshack(B_{3,2}, e, n))| = 9n + 1$. $Gshack(H_3, e, n)$ diperoleh $|V(gshack(H_3, e, n))| = 5n + 2$ dan $|E(gshack(H_3, e, n))| = 8n + 1$. $Amal(H_{2,2}, v, n)$ diperoleh $|V(amal(H_{2,2}, v, n))| = 3n + 1$ dan $|E(amal(H_{2,2}, v, n))| = 4n$. $Amal(Bt_3, v, n)$ diperoleh $|V(amal(Bt_3, v, n))| = 4n + 1$ dan $|E(amal(Bt_3, v, n))| = 7n$. $Amal(S_4, v, n)$ diperoleh $|V(amal(S_4, v, n))| = 4n + 1$ dan $|E(amal(S_4, v, n))| = 4n$. $C_n^{S_3}$ diperoleh $|V(C_n^{S_3})| = 3n$ dan $|E(C_n^{S_3})| = 3n$, sedangkan $C_n^{H_{2,2}}$ diperoleh $|V(C_n^{H_{2,2}})| = 3n$ dan $|E(C_n^{H_{2,2}})| = 4n$.

Selain itu, diperoleh bilangan kromatik pewarnaan sisi r -dinamis yaitu pada $gshack(Wd_3^2, e, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(gshack(Wd_3^2, e, n)) = \lambda_d(gshack(Wd_3^2, e, n)) = \lambda_3(gshack(Wd_3^2, e, n)) = 4$, $\lambda_4(gshack(Wd_3^2, e, n)) = 5$, dan $\lambda_{r \geq 5}(gshack(Wd_3^2, e, n)) = 7$. Graf $gshack(H_3, e, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(gshack(H_3, e, n)) = \lambda_d(gshack(H_3, e, n)) = \lambda_3(gshack(H_3, e, n)) = 4$, $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) = 6$, $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) = 7$, dan $\lambda_{r \geq 6}(gshack(H_3, e, n)) = 9$. Graf $gshack(B_{3,2}, e, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(gshack(B_{3,2}, e, n)) = \lambda_d(gshack(B_{3,2}, e, n)) = \lambda_3(gshack(B_{3,2}, e, n)) = 4$, $\lambda_4(gshack(B_{3,2}, e, n)) = 6$, $\lambda_5(gshack(B_{3,2}, e, n)) = 7$, dan $\lambda_{r \geq 6}(gshack(B_{3,2}, e, n)) = 8$. Graf $amal(H_{2,2}, v, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda_{r \leq 2n-1}(amal(H_{2,2}, v, n)) = 2n$ dan $\lambda_{r \geq 2n}(amal(H_{2,2}, v, n)) = 2n + 2$.

Graf $amal(Bt_3, v, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda_{r \leq n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$, $\lambda_{n+1 \leq r \leq 2n-1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 1$, untuk $n = 3$ dan $\lambda_{n+1 \leq r \leq 2n-1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$ untuk $n > 3$, $\lambda_{r=2n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+1$, $\lambda_{r=2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+3$, serta $\lambda_{r \geq 2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+5$. Graf $amal(S_4, v, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda_{r \leq n-1}(amal(S_4, v, n)) = 4$ untuk $n = 3$ dan $\lambda_{r \leq n-1}(amal(S_4, v, n)) =$

n untuk $n > 3$, $\lambda_{r=n}(\text{amal}(S_4, v, n)) = n+1$, $\lambda_{r=n+1}(\text{amal}(S_4, v, n)) = n+2$, Serta $\lambda_{r \geq n+2}(\text{amal}(S_4, v, n)) = n+3$. Graf $C_n^{S_3}$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(C_n^{S_3}) = \lambda_d(C_n^{S_3}) = \lambda_3(C_n^{S_3}) = 4$, $\lambda_4(C_n^{S_3}) = 5$, $\lambda_5(C_n^{S_3}) = 6$, serta $\lambda_{r \geq 6}(C_n^{S_3}) = 7$ untuk $n \equiv 0(\text{mod}6)$, $\lambda_{r \geq 6}(C_n^{S_3}) = 8$ untuk $n \equiv 1(\text{mod}6)$ dan $n \equiv 2(\text{mod}3)$, $\lambda_{r \geq 6}(C_n^{S_3}) = 9$ untuk $n = 3$. Graf $C_n^{H_{2,2}}$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(C_n^{H_{2,2}}) = \lambda_d(C_n^{H_{2,2}}) = \lambda_3(C_n^{H_{2,2}}) = 4$, $\lambda_4(C_n^{H_{2,2}}) = 6$, $\lambda_5(C_n^{H_{2,2}}) = 7$, serta $\lambda_{r \geq 6}(C_n^{H_{2,2}}) = 9$ untuk $n = 3$ dan $\lambda_{r \geq 6}(C_n^{H_{2,2}}) = 8$ untuk $n > 3$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai nilai kromatik pewarnaan sisi r -dinamis pada graf eksponensial dan graf operasi dimana graf khusus yang digunakan adalah, graf *cycle*, *star*, *windmill*, *triangular book*, dan *cocktail party*, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar melakukan penelitian di bidang ini, yaitu diantaranya mencari bilangan kromatik pewarnaan sisi r -dinamis dengan menggunakan operasi yang lainnya. Kemudian terkait hasil dari peniltian pada operasi *shackle* dapat disarankan untuk menggunakan subgraf yang lainnya .

DAFTAR PUSTAKA

- Alishahi, M. 2011. On The Dynamic Coloring of Graph. *Discrete Applied Mathematics*. **159**: 152-156.
- Ardiansyah, R dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*. **2**(1): 2337-3520.
- Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.
- Chartrand, G. dan Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.
- Dafik dan Meganingtyas, D. E. W. 2015. On Edge r -Dynamic Coloring of Graphs. *Graph Master Workshop*. Universitas Jember.
- Dafik, Slamun, Tanna, Fenovcikova, dan Baca. 2016. Contructions of H -antimagic Graphs Using Smaller Edge-antimagic Graphs. *Ars combinatoria*. **100**. In Press.
- Dafik, Hasan, Azizah dan Agustin. 2016. A Generalized Shackle of Any Graph H Admits a Super H -Antimagic Total Labelling. *Mathematic in Computer Science Journal*, submitted.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Teory*. USA: Academic Press.
- Kang, R., Muller, T., dan West, D. B. 2015. On r -Dynamic Coloring of Grids. *Discrete Applied Mathematics*. **186**: 286-290.
- Kim, S., Lee, S. J., dan Park, W. 2013. Dynamic Coloring and List Dynamic Coloring of Planar Graph. *Discrete Applied Mathematics*. **161**: 2207-2212.
- Lai, H. dan Montgomery, B. 2002. *Dynamic Colouring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Morgantown: West Virginia University.
- Lipschutz, S. dan Lipson, M. 2007. *Schaum's Outlines Discrete Mathematics, Third Edition*. New York: The McGraw-Hill Companies.
- Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

- Meganingtyas, D. E. W. 2015. "Analisis Pewarnaan r -Dinamis pada Graf Khusus". Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.
- Rosyidah, K., dan Dafik. 2014. Super (a,d) - H Total Decomposition of Graph Helm. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*. 1(1): 594-599.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.
- Tarmidzi, M. D. 2015. "Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi shakel". Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Universitas Jember.
- Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Wulandari, N. I. 2015. "Analysis r -Dynamic Vertex pada hasil Operasi Graf Khusus". Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Universitas Jember.