ANALISIS *VERTEX r-DYNAMIC COLORING* PADA BEBERAPA OPERASI GRAF KHUSUS

SKRIPSI

Oleh

Devita Arum Seruni
NIM 121810101015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

ANALISIS *VERTEX r-DYNAMIC COLORING* PADA BEBERAPA OPERASI GRAF KHUSUS

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan
memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Devita Arum Seruni
NIM 121810101015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Pada lembar persembahan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada pihak-pihak yang sangat mendukung penulis dalam pembuatan dan penyusunan skripsi ini, adapun yang dimaksud adalah sebagai berikut:

1. Kepada kedua orang tua penulis Bapak Keni Indranes dan Ibu Trisnawati yang selalu memberikan dukungan berupa materi dan do'a kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Kepada adik Mohammad Dio Saputra yang memberi motivasi dan semangat kepada penulis.

3. Kepada guru-guru mulai dari Sekolah Dasar hingga Madrasah Aliyah yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang sudah membimbing dan memberikan motivasi hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Kepada Saiful Fadilah yang selalu memberi dukungan dan semangat kepada penulis.

5. Kepada sahabat Elvin, Faridatus dan Dian yang selalu ada disaat penulis membutuhkan bantuan dan motivasi.

6. Kepada keluarga besar Lembaga Pers Mahasiswa MIPA (LPMM ALPHA), CT dan BATHICS'12 teman seperjuangan dari jurusan Matematika Universitas Jember, yang selalu memberikan dukungan dan semangat kepada penulis.

MOTTO

”Musuh yang paling berbahaya di atas dunia ini adalah penakut dan bimbang.”
(Andrew Jackson)

”Banyak kegagalan dalam hidup ini dikarenakan orang-orang tidak menyadari betapa dekatnya mereka dengan keberhasilan saat mereka menyerah.” (Thomas Alva Edison)

”Tiadanya keyakinanlah yang membuat orang takut menghadapi tantangan dan saya percaya pada diri saya sendiri.” (Muhammad Ali)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Devita Arum Seruni

NIM :121810101015

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”Analisis *Vertex r-Dynamic Coloring* pada Beberapa Operasi Graf Khusus” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Devita Arum Seruni

NIM 121810101015

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Analisis *Vertex r-Dynamic Coloring* pada Beberapa Graf Khusus” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 197704302005011001	NIP. 198408012008012006
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Dr. Mohammad Fatekurohman, S.Si., M.Si.
NIP. 196808021993031004	NIP. 196906061998031001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

ANALISIS *VERTEK r-DYNAMIC COLORING* PADA BEBERAPA OPERASI-GRAF KHUSUS; Devita Arum Seruni, 121810101016; 2016: 86 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf berkembang sangat pesat, perkembangan yang sangat pesat membuat banyak topik-topik yang dapat dikaji dalam teori graf, salah satu topiknya adalah pewarnaan. Macam-macam pewarnaan yang dapat dikaji dalam teori graf yaitu pewarnaan titik (*Vertex Coloring*), pewarnaan sisi (*Edge Coloring*), dan pewarnaan total (*Total Coloring*). Pewarnaaan titik adalah pewarnaan yang diberikan kepada titik-titik graf. Pewarnaan sisi adalah pewarnaan yang diberikan kepada sisi-sisi graf. Sedangkan pewarnaan total adalah pewarnaan yang diberikan pada titik dan sisi graf. Pewarnaan pada graf haruslah berbeda di mana tidak boleh ada warna sama yang berdekatan namun pewarnaan haruslah seminimum mungkin disebut bilangan kromatik biasanya dinotasikan $\chi(G)$. Topik-topik yang dapat dikaji dalam lingkup pewarnaan, salah satunya adalah topik dari perwarnaan titik adalah pewarnaan titik r-dinamis yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Pewarnaan titik r-dinamis pada graf G adalah pemetaan $c : V(G) \rightarrow (1, 2, \ldots, k)$, dengan kata lain pewarnaan titik r-dinamis adala pemetaan himpunan titik graf G ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v_i)\}$.

Pewarnaan titik r-dinamis diterapkan pada graf khusus hasil operasi. Operasi yang digunakan adalah operasi *shackle*, operasi *crown product* dan operasi *joint*. Graf operasi yang digunakan dalam penelitian ini yaitu: $shack(Wd_4^2, v, m)$, $shack(B_{3,2}, v, m)$, $shack(H_4, 2v, m)$, $W_4 \odot P_m$, $Bt_4 \odot P_m$, $H_4 \odot P_m$, dan $Bt_4 + P_2$. Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan kardinalitas titik dan sisi, bilangan kromatik titik r-dinamis, dan fungsi pewarnaan titik r-dinamis. Pada penelitian ini dihasilkan 7 teorema baru antara

lain:

1. **Teorema 4.1.1** Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $shack(Wd_4^2, v, m)$ untuk $m \geq 2$ adalah:
$$\chi(shack(Wd_4^2, v, m)) = \chi_d(shack(Wd_4^2, v, m)) = \chi_3(shack(Wd_4^2, v, m)) = 4$$
$$\chi_4(shack(Wd_4^2, v, m)) = 5$$
$$\chi_5(shack(Wd_4^2, v, m)) = 6$$
$$\chi_{r\geq 6}(shack(Wd_4^2, v, m)) = 7$$

2. **Teorema 4.1.2** Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $(shack(H_4, 2v, m))$ untuk $m \geq 2$ adalah:
$$\chi(shack(H_4, 2v, m)) = \chi_d(shack(H_4, 2v, m)) = 3$$
$$\chi_3(shack(H_4, 2v, m)) = 4$$
$$\chi_{r\geq 4}(shack(H_4, 2v, m)) = 6$$

3. **Teorema 4.1.3** Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $(shack(B_{3,2}, v, m))$ untuk $m \geq 2$ adalah:
$$\chi(shack(B_{3,2}, v, m)) = 3$$
$$\chi_d(shack(B_{3,2}, v, m)) = \chi_3(shack(B_{3,2}, v, m)) = 4$$
$$\chi_{r\geq 4}(shack(B_{3,2}, v, m)) = 6$$

4. **Teorema 4.1.4** Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $W_4 \odot P_m$ untuk $m \geq 2$ adalah:
$$\chi(W_4 \odot P_m) = \chi_d(W_4 \odot P_m) = \chi_3(W_4 \odot P_m) = 4$$
$$\chi_4(W_4 \odot P_m) = \chi_5(W_4 \odot P_m) = 6$$
$$\chi_6(W_4 \odot P_m) = \chi_{r\geq 7}(W_4 \odot P_m) = 8$$

5. **Teorema 4.1.5** Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $Bt_4 \odot P_m$ untuk $m \geq 2$ adalah:
$$\chi(Bt_4 \odot P_m) = \chi_d(Bt_4 \odot P_m) = \chi_3(Bt_4 \odot P_m) = 4$$
$$\chi_{4\leq r\leq 6}(Bt_4 \odot P_m) = r + 1$$

$$\chi_7(Bt_4 \odot P_m) = \chi_{r\geq 8}(Bt_4 \odot P_m) = 9$$

6. **Teorema 4.1.6** Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $H_4 \odot P_m$ untuk $m \geq 2$ adalah:

$$\chi(H_4 \odot P_m) = \chi_d(H_4 \odot P_m) = \chi_3(H_4 \odot P_m) = 4$$

$$\chi_4(H_4 \odot P_m) = 5$$

$$\chi_{5\leq r\leq 9}(H_4 \odot P_m) = r + 1$$

$$\chi_{10}(H_4 \odot P_m) = \chi_{r\geq 11}(H_4 \odot P_m) = 12$$

7. **Teorema 4.1.7** Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $Bt_4 \odot P_m$ untuk $n \geq 2$ adalah:

$$\chi(Bt_n + P_2) = \chi_d(Bt_n + P_2) = \chi_3(Bt_n + P_2) = \chi_4(Bt_n + P_2) = 5$$

$$\chi_r(Bt_n \odot P_2) = r + 1, untukn \geq 2$$

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala kuasa-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Analisis *Vertex r-Dynamic Coloring* pada Beberapa Operasi Graf Khusus". Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing anggota;
2. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Bapak Dr. Mohammad Fatekurohman, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji;
3. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. Sahabat CT dan Bathics12 yang selalu setia memberikan dukungan;
5. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian tugas ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Juni 2016 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf dalam ilmu matematika adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Secara informal, suatu graf adalah himpunan benda-benda yang disebut simpul (*vertex* atau *node*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) atau busur (*arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (melambangkan simpul) yang dihubungkan oleh garis (melambangkan sisi) atau garis berpanah (melambangkan busur).

Teori graf berkembang sangat pesat, perkembangan yang sangat pesat membuat banyak topik-topik yang dapat dikaji dalam teori graf, salah satu topiknya adalah pewarnaan. Macam-macam pewarnaan yang dapat dikaji dalam teori graf yaitu pewarnaan titik (*Vertex Coloring*), pewarnaan sisi (*Edge Coloring*), dan pewarnaan total (*Total Coloring*). Pewarnaaan titik adalah pewarnaan yang diberikan kepada titik-titik graf. Pewarnaan sisi adalah pewarnaan yang diberikan kepada sisi-sisi graf. Sedangkan pewarnaan total adalah pewarnaan yang diberikan pada titik dan sisi graf. Pewarnaan pada graf haruslah berbeda di mana tidak boleh ada warna sama yang berdekatan namun pewarnaan haruslah seminimum mungkin disebut bilangan kromatik biasanya dinotasikan $\chi(G)$. Bilangan-bilangan kromatik akan membentuk fungsi yang disebut fungsi pewarnaan. Topik-topik yang dapat dikaji dalam lingkup pewarnaan, salah satunya adalah topik dari perwarnaan titik adalah pewarnaan titik r-dinamis yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$.

Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam mengkaji pewarnaan titik r-dinamis yang pertama adalah menentukan kardinalitas titik dan kadinalitas sisi. Kardinalitas berfungsi sebagai batas fungsi pewarnaan titik yang nantinya akan dicari untuk membuktikan suatu pewarnaan tersebut dinamis. Langkah selanjutnya menentukan bilangan kromatik dimana bilangan kromatik bertujuan untuk mengetahui bahwa sebuah pewarnaan tersebut dinamis.

Sebelumnya sudah pernah dilakukan penelitian mengenai r-*Dynamic Vertex Coloring* oleh Wulandari (2015) mengkaji r-*Dynamic Vertex Coloring* beserta pewarnaan titik pada graf operasi. Operasi graf yang dikaji Wulandari adalah operasi *Joint* $(G + H)$, *Cartesian Product* $(G \square H)$, *Crown Product* $(G \odot H)$, *Tensor Product* $(G \otimes H)$, *Composition* (G[F]), *Shackel* (Shackel(G, r)), dan *Amalgamation* (Amal$(G, v = 1, r)$). Graf yang digunakan adalah graf roda, graf bintang, graf lingngkaran dan graf lintasan. Namun penelitian yang dilakukannya belum menghasilkan bilangan kromatik sampai r. Selain penelitian Wulandari penelitian tentang r-*Dynamic Vertex Coloring* sudah pernah dilakukan oleh Mohanapriya *et al*. (2010) menentukan pewarnaan dinamis pada graf 4-*Regular with girth 3 and 4*, kemudian peneliti lain Montgomery (2002) melakukan penelitian terhadap graf *Particular*. Penelitian terbaru dilakukan oleh Tarmidzi (2015) yang meneliti pewarnaan r-*Dynamic Vertex Coloring* pada graf kipas (F_n), graf *triangular book* (Bt_n), graf tangga tiga siklus (TCL_n), graf tangga (L_n), graf oktahedral $(j_{4,2})$, dan graf *Banana Tree* (BT_3).

Berdasarkan uraian di atas penulis akan meneliti lebih lanjut mengenai r-*Dynamic Vertex Coloring* pada graf khusus hasil operasi. Untuk itu diperlukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan r-*Dynamic Vertex Coloring* untuk menyelesaikan permasalahan ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut :

a. Bagaimana menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf operasi?

b. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik r-dinamis pada graf operasi?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini adalah :

a. Menggunakan graf *Helm* (H_4), graf *Windmill* (Wd_4^2), graf*Path* (P_m), graf *Stacked Book* $(B_{3,2})$, dan graf *wheel* (W_4), graf *triangular book* (Bt_n)

b. Operasi yang digunakan adalah operasi *shackel*, operasi *joint* dan operasi *crown product*

1.4 Tujuan Penelitian

Dari hasil rumusan masalah dan latar belakang diatas, dapat disimpulkan tujuan penelitian ini diantaranya:

a. Menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf hasil operasi;
b. Menentukan bilangan kromatik dari pewarnaan titik r-dinamis pada graf operasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan penelitian ini diantaranya:

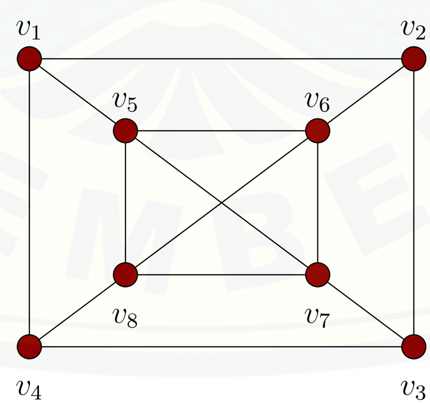
a. Meningkatkan pemahaman mengenai pewarnaan titik pada operasi graf khusus;
b. Meningkatkan pengetahuan mengenai bilangan kromatik pewarnaan titik r-dinamis pada operasi graf operasi;
c. Memberikan motivasi pada peneliti lain agar memperluas penelitian mengenai pewarnaan titik r-dinamis.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Graf Dasar

Graf G adalah pasangan dari himpunan tak kosong elemen-elemen *vertex* yang dinotasikan (V), dan himpunan boleh kosong elemen-elemen *edge* yang dinotasikan (E), sehingga graf G dinotasikan $G = (V, E)$. Dalam graf *vertex* digambarkan dengan titik atau *node*, yang dinomori menggunakan angka bilangan asli yang disebut pewarnaan titik. *Edge* digambarkan sebagai sisi yang menggabungkan titik-titik pada graf. *Edge* boleh kosong atau tidak ada sisi yang menghubungkan titik, namun untuk *vertex* tidak boleh kosong. Setiap graf memiliki *order dan size*, di mana *order* merupakan banyaknya titik yang dimiliki oleh sebuah graf. Sedangkan *size* merupakan banyak sisi yang dimiliki oleh sebuah graf .

Misalkan graf G mempunyai titik u dan v. Jarak dari titik a dan b dinotasikan dengan dist(u, v) yang merupakan panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Titik a pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent* pada b, jika terdapat sisi e di antar a dan b ditulis $e = uv$, dengan kata lain u dan v bersisihan dengan sisi e.



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Notasi dari jalan (walk) pada suatu graf dapat ditulis $A_1e_1A_2e_2A_3.A_(n-1)e_(n-$

$1)$ adalah barisan titik dan sisi berhingga dalam suatu graf dengan ketentuan e_i menempel pada A_i dan A_i dan jika e_i bukan sebuah sisi yang menghubungkan titik dengan dirinya sendiri (Hartsfield dan ringel, 1994). Gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik v_1 bertetangga dengan v_2, v_4 dan v_5 tetapi tidak bertetangga dengan v_3. Titik v_6 bertetangga dengan v_2, v_5, dan v_7 serta dengan v_8 tetapi tidak bertetangga dengan v_1. Sedangkan untuk v_8 bertetangga dengan v_4, v_5, v_7 dan v_6.

Graf memiliki banyak jenis yang sering digunakan yaitu berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatau graf dan berdasarkan sisi pada graf yang mempunyai orientasi arah.

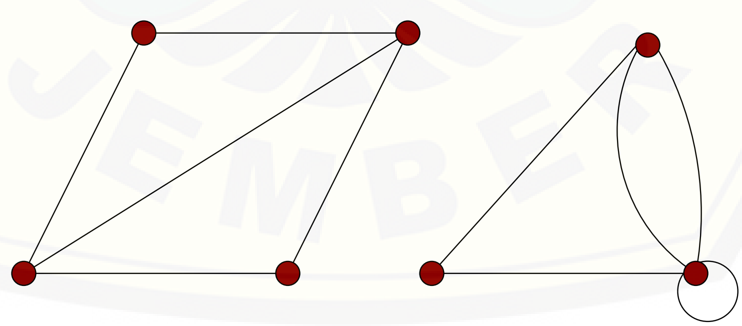
a. Berdasarkan ada tidaknya gelang pada suatu graf digolongkan menjadi dua jenis, yaitu :

   1. Graf sederhana (*simpel graph*)

      Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.

   2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*)

      Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak-sederhana dibedakan menjadi dua yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung gelang.



(a) (b)

Gambar 2.2 (a) Graf Sederhana, (b) Graf Tak-sederhana

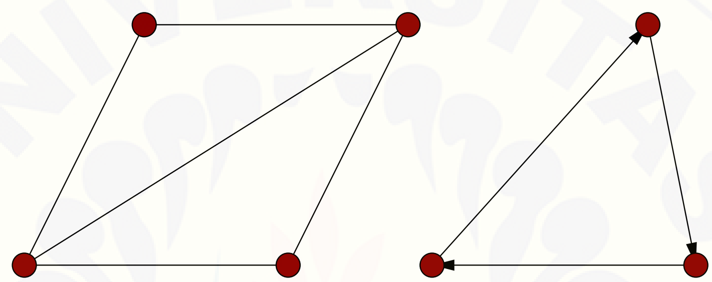
b. Berdasarkan orientasi arah pada sisi graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu :

1. Graf tak-berarah

   Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak memiliki arah. Urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi pada graf tak-berarah tidak terlalu di perhatikan.

2. Graf berarah

   Graf berarah adalah graf yang setiap sisi diberikan orientasi arah. Pada graf berarah urutan pasang simpul sangat diperhatikan.



(a) (b)

Gambar 2.3 (a) Graf Tak-berarah, (b) Graf Berarah

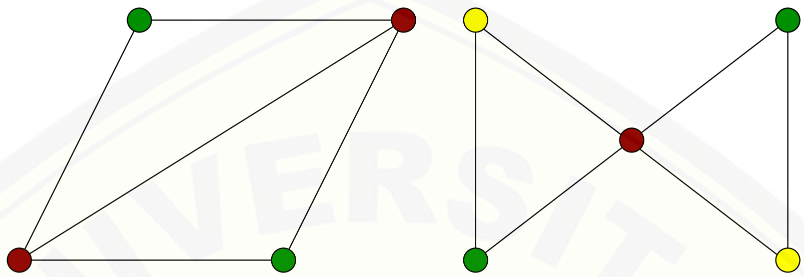
2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah suatu bentuk pelabelan graf dengan memberikan warna pada elemen graf. Terdapat tiga macam pewarnaan graf, meliputi pewarnaan titik *(vertex coloring)*, pewarnaan sisi *(edge coloring)*, dan pewarnaan wilayah *(region coloring)*.

2.2.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

Pewarnaan titik pada graf G adalah memberikan warna yang berbeda pada titik yang bertetangga di graf G. Dalam pewarnaan titik terdapat istilah bilangan akromatik yaitu menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memberi warna pada titik-titik pada graf sehingga dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Bilangan akromatik pada graf G disimbolkan $\chi(G)$ yaitu suatu bililangan

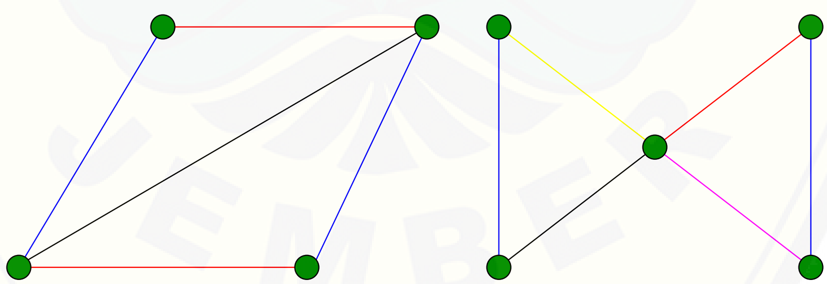
k yang terkecil. Dengan demikian pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \to (1, 2, 3, ..., k)$, sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga (Chartrand dan Zhang, 2009).



Gambar 2.4 Pewarnaan Titik

2.2.2 Pewarnaan Sisi(*Edge Coloring*)

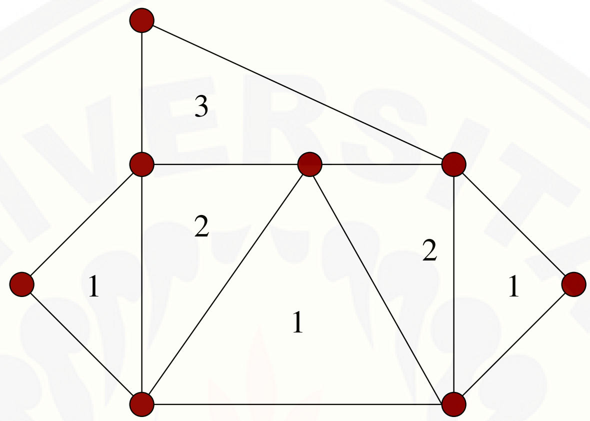
Pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait dengan titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda (Budayasa, 2007). Seperti halnya pada titik pewarnaan sisi juga dapat dianggap sebagai fungsi $c : E(G) \to (1, 2, 3, ..., k)$, sedemikian hingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap dua sisi e dan f merupakan sisi yang bertetangga pada G (Chartrand dan Zhang, 2009).



Gambar 2.5 Pewarnaan Sisi

2.2.3 Pewarnaan Wilayah(*Region Coloring*)

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah memberikan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Seperti halnya dengan pewarnaan titik dan pewarnaan sisi pewarnaan wilayah juga dapat dinyatakan sebagai sebuah fungsi $c : R(G) \to (1, 2, 3, ..., k)$, sedemikian hingga $c(r) \neq c(s)$ untuk setiap dua wilayah r dan s merupakan wilayah yang bertetangga pada G (Chartrand dan Zhang, 2009).



Gambar 2.6 Pewarnaan Wilayah

2.3 Pewarnaan titik r-Dinamis

Pewarnaan dinamis $r - dinamis$ adalah sebuah inovasi baru dari pewarnaan k warna dinamis. Pewarnaan $r - dinamis$ diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Prewarnaan k warna dianamis pada graf G adalah sebuah pewarnaan titik pada graf G dengan sebanyak k warna sehingga untuk setiap titik yang memiliki derajad minimal dua setidaknya memiliki dua warna yang berbeda. Sehingga pewarnaan titik dinamis pada sebuah graf G dinyatakan sebagai pewarnaan dimana titik pada graf G yang saling terhubung tidak boleh memiliki warna yang sama, seehingga setiap titik memiliki lebih dari satu warna terhadap titik-titik ketetanggaannya.

Misalkan graf G didefinisikan sebagai $G = (V, E)$ memiliki himpunan titik $V = V(G)$ dan himpunan sisi $E = E(G)$. Himpunan titik-titik yang saling bertetangga dengan titik v dinotasikan dengan $N(v)$. Derajad titik v dinotasikan sebagai $d(v)$, sedangkan untuk untuk derajad minimum graf G dinotasikan sabagai $\delta = \delta(G)$ dan derajad maksimum pada graf G dinotasikan sebagai $\triangle = \triangle(G)$.

Menurut Montgomery (2002) menyatakan jika setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$ maka sebuah k-*pewarnaan titik* akan dikatakn pewarnaan titik dinamis. Titik yang yang terhubung tidak boleh memiliki warna yang sama. Jumlah warna r-dinamis dari graf G merupakan warna minimum k. Bilangan k terkecil dari k pewarnaan titik graf G disebut bilangan kromatik dinamis graf G di mana dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Observasi 2.3.1. *Misalkan G adalah graf terhubung dengan $\chi(G)$ adalah bilangan kromatik dinamis berlaku $\chi(G) \leq \chi_d(G) \leq \chi_3(G) \leq \cdots \leq \chi_r(G) \leq \chi_{r+1}(G)$ (Kang et al., 2015).*

Suatu graf G yang memiliki k pewarnaan memetakan himpunan titiknya ke himpunan pewarnaan dinotasikan $c : V(G) \Rightarrow (1, 2, 3, ..., k)$, jadi untuk titik-titik yang bertetangga memiliki minimal dua warna berbeda. $r - dinamis$ dengan k pewarnaan pada graf G sehingga $|c(N(v))| \geq minr, d(v)$ untuk v di $V(G)$. Bilangan kromatik r-dinamis ditulis dengan $\chi_r(G)$ untuk nilai minimum k sehingga graf G memiliki r-dinamis dengan k pewarnaan (Jahanbekam, *et al*, 2014).

Definisi 2.3.1. *Pewarnaan r-dinamis pada suatu graf G dapat didefinisikan sebagai pemetaan $c : V(G) \Rightarrow (1, 2, 3, ..., k)$, dengan kata lain himpunan titik $V(G)$ dipetakan ke himpunan pewarnaan sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut seperti berikut :*

a. jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan

b. $\forall v \in V(G)$, $|c(N(v))| \geq$ min$\{r, d(v_i)\}$

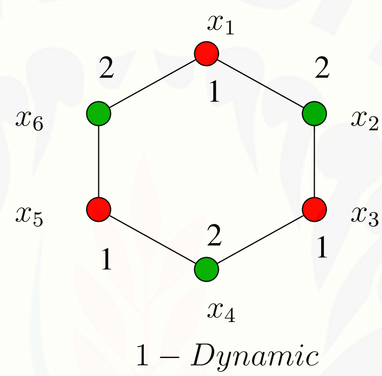
(Lai dan Montgomery, 2002: 12)

Pewarnaan k seminimal mungkin pada graf G sehingga memenuhi pewarnaan k-warna r-dynamis disebut sebagai bilangan kromatik r-dynamis, yang dinotasikan $\chi_r(G)$. Bilangan kromatik $\chi(G)$ merupakan bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis dan bilangan kromatik $\chi_d(G)$ merupakan bilangan kromatik pada pewarnaan

2-dinamis. Berdasarkan Definisi r-dinamis diatas kedua kondisi tersebut memperlihatkan bahwa $\chi_r(G) \geq min\{r, \triangle\ (G)\} + 1$.

Teorema 2.3.1. $\chi(G) \geq$ *min*$\{\triangle(G), r\} + 1$ *(Jahanbekam, S., dkk: 2014).*

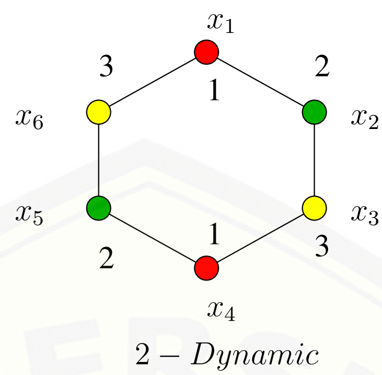
Untuk contoh perwarnaan $r-dinamis$ pada suatu graf lebih jelasnya ditunjukkan pada Gambar 2.7 dan Gambar 2.8. Graf yang digunakan adalah graf *cycle* (C_6).



Gambar 2.7 Contoh Pewarnaan Titik $r - dinamis$

Tabel 2.1 Pewarnaan Titik $1 - dinamis$

i	$c(v_i)$	$\|c(N(v_i))\|$	r	$d(v_i)$	$minr, d(v_i)$	$\|c(N(v_i))\| \geq minr, d(v_i))$
1	1	1	1	2	1	**YA**
2	2	1	1	2	1	**YA**
3	1	1	1	2	1	**YA**
4	2	1	1	2	1	**YA**
5	1	1	1	2	1	**YA**
6	2	1	1	2	1	**YA**



Gambar 2.8 Contoh Pewarnaan Titik $r - dinamis$

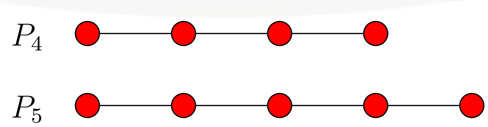
Tabel 2.2 Pewarnaan Titik $2 - dinamis$

i	$c(v_i)$	$\|c(N(v_i))\|$	r	$d(v_i)$	$minr, d(v_i)$	$\|c(N(v_i))\| \geq minr, d(v_i))$
1	1	2	2	2	2	**YA**
2	2	2	2	2	2	**YA**
3	3	2	2	2	2	**YA**
4	1	2	2	2	2	**YA**
5	2	2	2	2	2	**YA**
6	3	2	2	2	2	**YA**

2.4 Graf Khusus

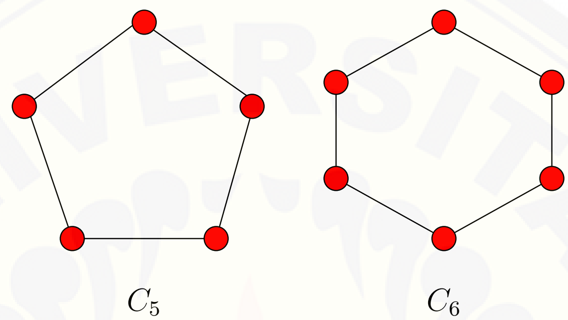
Graf khusus adalah graf yang memiliki karakteristik dan keunikan. Graf khusus mempunyai karakteristik yaitu dapat diperluas sampai *order* n dan simetris. Sedangkan untuk keunikannya graf khusus tidak isomorfis dengan graf yang lainnya.

Definisi 2.4.1. *Graf Lintasan (*Path*) adalah graf sederhana dengan n titik dan notasi sebagai* P_n *dan memiliki* $n - 1$ *sisi. Contoh graf lintasan dapat lihat pada gambar 2.9 (Damayanti, 2011).*



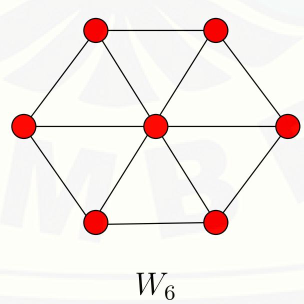
Gambar 2.9 Graf Lintasan P_4 dan P_5

Definisi 2.4.2. *Graf Lingkaran (*Cycle*) adalah graf sederhana yang terdiri dari n titik yaitu titk $v_1, v_2, ..., v_n$ dan sisi sebanyak $n - 1$ yaitu $(e_1, e_2), (e_2, e_3), ..., (e_{n-1}, e_n)$, (e_n, e_1) dimana setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan C_n dengan $n \geq 3$. Gambar graf lingkaran dapat dilihat pada gambar 2.10 (Harary* et al*, 2007).*



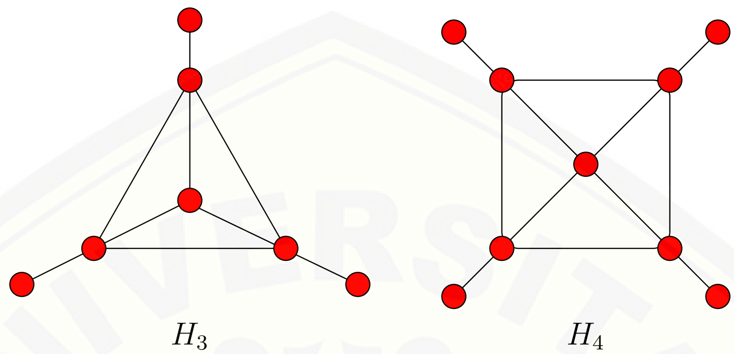
Gambar 2.10 Graf lingkaran C_5 dan C_6

Definisi 2.4.3. *Graf Roda (*Wheel*) merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran C_n, dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik-titik pada graf lingkaran. Graf roda dinotasikan dengan W_n dengan $n \geq 3$. Graf roda memiliki titik sebanyak $n + 1$ dan sisi sebanyak $2n$ ((Harary* et al*, 2007).*



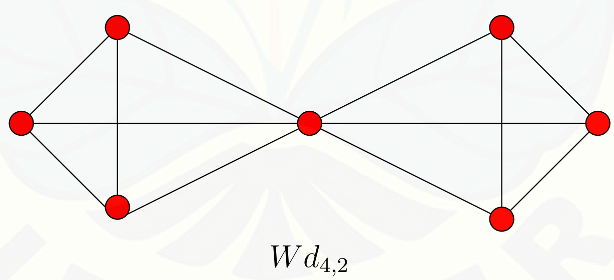
Gambar 2.11 Graf roda W_6

Definisi 2.4.4. *Graf Helm dinotasikan dengan H_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang terbentuk dari graf roda W_n yang terhubung dengan graf* path *pada titik-titik tepi graf* *roda. Graf* helm *memiliki titik sebanyak* $2n+1$ *dan sisi sebanyak* $3n$ *(Ardiansyah dan Darmaji, 2013). Gambar graf* helm *dapat dilihat pada gambar 2.12.*



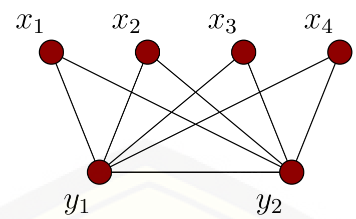
Gambar 2.12 Graf helm H_3 dan H_4

Definisi 2.4.5. *Graf Windmill adalah graf kincir dengan satu titik pusat yang dipakai bersama yang dinotasikan dengan* $Wd_{n,m}$ *dengan* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 2$*. Graf* windmill *mempunyai titik sebanyak* $(n-1)m+1$ *dan sisi sebanyak* $\frac{mn(n-1)}{2}$ *Contoh gambar graf* windmill *dapat dilihat pada gambar 2.13 (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).*



Gambar 2.13 Graf windmill $Wd_{n,m}$

Definisi 2.4.6. *Graf Triangular Book adalah graf yang terdiri dari* n *buah segitiga dengan* $n \geq 3$ *dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dapat dikatakan bahwa setiap segitiga memiliki dua titik dan satu sisi yang sama. Graf* triangular book *dinotasikan dengan* Bt_n *dengan himpunan titik* $n+2$ *dan himpunan sisi* $2n+1$*.2.14 (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).*

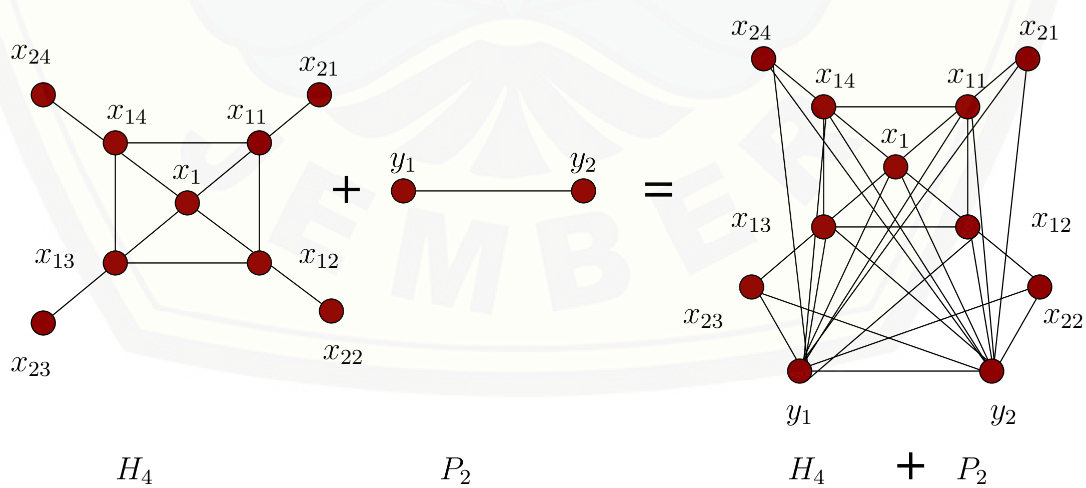


Gambar 2.14 Graf triangular book Bt_4

2.5 Operasi Graf

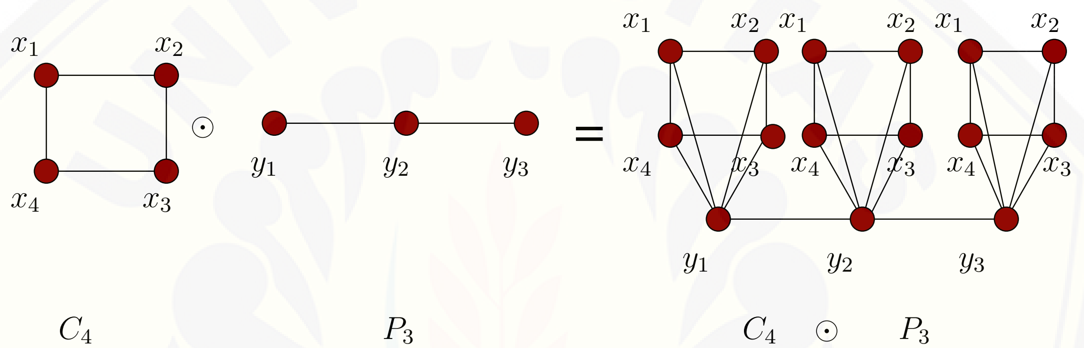
Dalam teori graf, ada yang dinamakan operasi graf, yaitu pengoperasian beberapa graf sehingga menjadi graf baru dengan menggunakan beberapa operasi graf seperti berikut:

Definisi 2.5.1. *Joint dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *adalah graf* G *dimana* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$*, dan dinotasikan dengan* $G = G_1 + G_2$*. Kardinalitas operari* joint Helm (H_n) + Path (P_m) *adalah* $|V| = |V(H_n)| + |V(P_m)| = 2n + 1 + m$ *dan* $|E| = |E(H_n)| + |V(P_m)| + |V(H_n)| \times |V(P_m)| = 3n + m - 1 + (2n + 1)m = 3n + m - 1 + 2nm + m$ *(Harary, 2007). Contoh operasi* joint *dapat dilihat pada Gambar 2.15.*



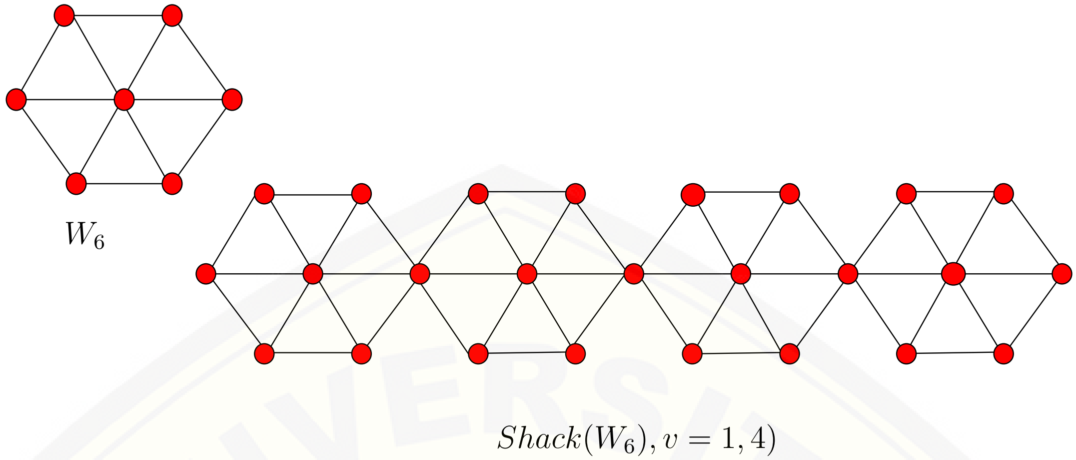
Gambar 2.15 Contoh operasi joint

Definisi 2.5.2. Crown Product $(G \odot H)$ *adalah* crown $G \odot H$ *dari dua graf* G *dan* H *adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf* G *dan* $V(G)$ *duplikat* $H_1, H_2, ..., H_{V(G)}$ *dari* H. *Selanjutnya dihubungkan titik ke-i dari* G *ke setiap titik di* $H_i, i = 1, 2, 3, ..., V(G)$. *Kardinalitas* Crown Product *dari graf* Cycle $(C_n) \odot$ Path (P_n) *adalah* $|V| = |V(P_m)| \times (|V(C_n)| + 1) = m(n+1)$ *dan* $|E| = |E(P_m)| + |V(P_m)| \times (|E(C_n)| + |V(C_n)|) = m - 1 + m(n+n) = m + 2mn - 1$ *(Endrayana, 2013). Contoh operasi* Crown Product *untuk* $C_4 \odot P_3$ *pada Gambar2.16.*



Gambar 2.16 Contoh operasi crown

Definisi 2.5.3. *Shackle dinotasikan dengan Shack (*G_i*,v,r). Misalkan* $\{ G_i \}$ *merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf (*G_1*,* G_2*, ...,* G_k*) sedemikian hingga untuk setiap* $1 \leq i, j \leq k$ *dengan* $| i - j | \geq 2$*,* G_i *dan* G_j *tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap* $1 \leq i \geq k-1$*,* G_i *dan* $G_i + 1$ *tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana k -1 linkage titik semua berbeda. Kardinalitas* Shackle *dari graf* Wheel (W_n) *adalah* $|V| = t \times (|V(W_n)| - v) + v = t \times ((n+1) - 1) + 1 = nt + 1$ *dan* $|E| = t \times |E(W_n)| = 2tn$ (Maryati, 2010). Contoh operasi *shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.17.



Gambar 2.17 Contoh operasi shackel

2.6 Aplikasi Graf

Bentuk implementasi dari teori graf banyak dijumpai dalam dunia sehari-hari, karena aplikasi teori graf sangat bermanfaat dalam dunia luas seperti halnya penjadwalan, optimasi, ilmu komputer, jaringan komunikasi, analisis algoritma dan graph coloring. Graf dapat memodelkan masalah yang terjadi dan digambarkan secara jelas. Penyelesaian masalah yang dilakukan graf dengan cara mengubah objek diskrit menjadi titik-titik yang kemudian dihubungkan dengan sisi untuk menggambarkan suatu permasalahan.

Permasalahan yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah pengaplikasian pewarnaan titik pada graf untuk penjadwalan ujian mahasiswa matematika, bagaimana cara membuat agar jadwal yang dibuat seminimal mungkin tanpa membuat jadwal ujian bentrok dengan jadwal ujian yang lainnya dan mahasiswa dapat mengikuti ujian dengan baik di mana masing-masing mahasiswa menempuh mata kuliah dengan kombinasi yang berbeda. Mengenai aplikasi graf yaitu pewarnaan titik r-dinamis pada penjadwalan ujian mahasiswa matematika. Langkah pertama yaitu memberi label titik untuk masing-masing mata kuliah yaitu sebagai berikut: pemodelan disimbolkan sebagai v_1, kalkulus 2 disimbolkan sebagai v_2, persamaan differensial biasa disimbolkan sebagai v_3, struktur aljabar 2 disimbolkan sebagai v_4, analisis kompleks disimbolkan v_5, dan fraktal disimbolkan v_6. Langkah kedua buat tabel relasi antara mahasiswa dan mata kuliah yang ditempuh. Matrik *adjention* relasi mahasiswa dan mata kuliah yang ditempuh dapat dilihat pada gambar 2.18.

MAHASISWA	MATAKULIAH					
	v1	v2	v3	v4	v5	v6
1.	1	1	0	0	0	1
2.	1	0	0	0	1	1
3.	1	0	1	0	1	0
4.	0	0	0	1	1	0
5.	0	1	0	1	0	0
6.	1	0	1	0	0	0
7.	0	0	0	0	1	1
8.	1	1	0	0	0	0
9.	0	0	1	0	1	0
10.	1	0	0	0	0	1

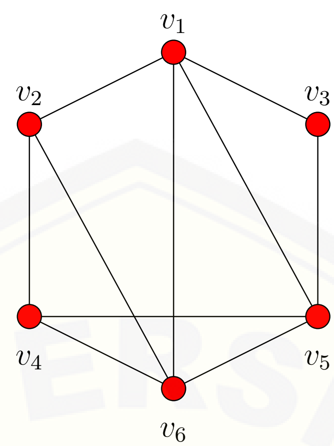
Gambar 2.18 Matriks *adjention* relasi mahasiswa yang mengambil mata kuliah

Langkah ketiga tentukan simpul ketetanggaan. Dari tabel diatas dapat dilihat ketetanggaan dari mata kuliah yang ditempuh oleh 10 mahasiswa. Simpul ketetanggaan dapat dilihat pada tabel 2.3.

Tabel 2.3 Simpul dan ketetanggaannya

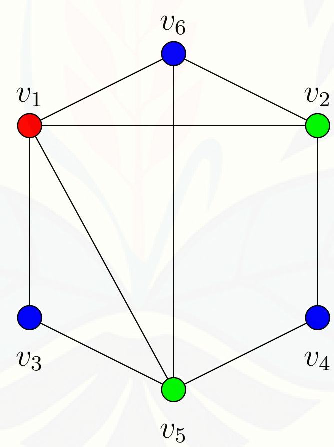
$Vertex(Simpul)$	$SimpulTetangga$
v_1	v_2, v_3, v_4, v_5, v_6
v_2	v_1, v_4, v_6
v_3	v_1, v_5
v_4	v_2, v_5
v_5	v_1, v_3, v_4, v_6
v_6	v_1, v_2, v_5

Dari simpul ketetanggaan diatas dapat direpresentasikan kedalam graf seperti pada gambar 2.19



Gambar 2.19 Representasi graf

Langkah keempat memberikan pewarnaan titik r-dinamis pada representasi graf yang dapat dilihat pada gambar 2.20



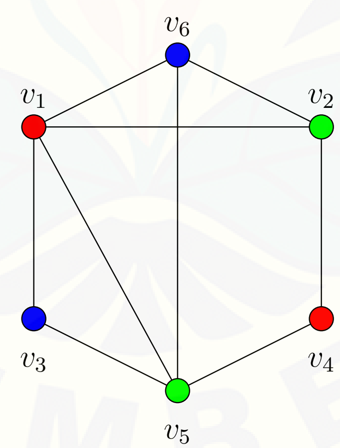
Gambar 2.20 Pewarnaan titik r-*Dynamic* pada representasi graf

Berdasarkan gambar graf tersebut terdapat 3 warna berbeda untuk 6 simpul mata kuliah yaitu biru, hijau dan merah. Atau dikatakan Graf mempunyai bilangan kromatis 3. Selanjutnya ditentukan bilangan *r-dinamis*, sebagai berikut:

Tabel 2.4 Pewarnaan Titik $1-dinamis$

i	$c(v_i)$	$\|c(N(v_i))\|$	r	$d(v_i)$	$minr, d(v_i)$	$\|c(N(v_i))\| \geq minr, d(v_i))$
1	1	2	1	3	1	**YA**
2	1	1	1	2	1	**YA**
3	1	2	1	2	1	**YA**
4	2	2	1	3	1	**YA**
5	2	2	1	4	1	**YA**
6	3	2	1	4	1	**YA**

Dapat dianalisa bahwa dari 6 mata kuliah tersebut memiliki pewarnaan *1-dinamis*. Namun gedung perkuliahan hanya memiliki 2 ruang mata kuliah sehingga untuk sekali ujian gedung perkuliahan hanyalah bisa menampung 2 mata kuliah, sehingga pewarnaan diatas tidaklah efisien dengan hanya menggunakan pewarnaan 1-dinamis. Jadi kita membutuhkan pewarnaan 2-dinamis untuk memenuhi syarat tersebut agar ujian dapat berlangsung dengan waktu yang efisien dan optimal.



Gambar 2.21 Pewarnaan titik r-*Dynamic* pada representasi graf

Tabel 2.5 Pewarnaan Titik $2-dinamis$

i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$minr, d(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert \geq minr, d(v_i))$
1	1	2	1	3	1	**YA**
2	1	2	1	2	1	**YA**
3	2	2	1	3	1	**YA**
4	2	2	1	4	1	**YA**
5	3	2	1	2	1	**YA**
6	3	2	1	4	1	**YA**
7	1	2	2	3	2	**YA**
8	1	2	2	2	2	**YA**
9	2	2	2	3	2	**YA**
10	2	2	2	4	2	**YA**
11	3	2	2	2	2	**YA**
12	3	2	2	4	2	**YA**

Pewarnaan diatas adalah pewarnaan paling efisien dan memenuhi syarat bahwa untuk sekali ujian gedung perkuliahan hanya menampung 2 mata kuliah. Sehingga dari pewarnaan diatas dapat dibuat jadwal ujian sebagai berikut :

1. Jam ke 1 (08.00-10.00) : ujian untuk mata kuliah v_3 (persamaan differensial biasa) dan v_6 (fraktal)
2. Jam ke 2 (10.00-12.00): ujian untuk mata kuliah v_2 (kalkulus 2) dan v_5 (analisis kompleks)
3. Jam ke 3 (12.00-14.00): ujian untuk mata kuliah v_1 (pemodelan) dan v_4 (fraktal)

2.7 Hasil-hasil Pewarnaan Titik

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan titik r-dinamis yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian terdahulu bisa dilihat pada Tabel 2.6.

Tabel 2.6: Hasil Pewarnaan Titik r-dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$P_2 \otimes C_n$, n ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya, dkk 2014
$P_2 \otimes C_n$, n genap	$\chi(G) = 4$	Harsya dkk 2014
$P_3 \odot C_n$, n ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya dkk 2014
Graf $Cycle(C_6)$	$\chi(G) = 2$	Sesa, J. 2014
Graf $Kipas(F_n)$, $n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto, dkk 2014
Graf $Roda(W_n)$, $n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
Graf $Helm(H_n)$, $n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto dkk 2014
Graf $Anti\ Prisma(H_m)$, $n \geq 4$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
Graf $Prisma(H_m)$, $n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
$C_n \odot C_m$	$\chi(G) = 4$	Puspasari dkk 2014
$C_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Puspasari dkk 2014
$S_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Dewi, N.L dkk 2014
graf Particular	$\chi(G) = 2$	Lai, dkk 2002
$W_n + P_m$=$W_n + P_m$,n genap	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G)$ $= \chi_4(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
$W_n + P_m$=$W_n + P_m$, n ganjil	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G)$ $= \chi_4(G) = 6$	Wulandari dkk 2015
$W_n \odot P_m$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 4$	Wulandari dkk 2015
$P_m \odot W_n$, n genap	$\chi(G) = \chi_d(G)$ $= \chi_3(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
$P_m \odot W_n$, n ganjil	$\chi(G) = \chi_d(G)$ $= \chi_3(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
Graf $Kipas(F_n)$, $n \geq 3$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015
Graf $TriangularBook(BT_n)$, $n \geq 2$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015
Graf $TanggaTigaSiklus(TCL_n)$, $n \geq 2$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015
Graf $Tangga(L_n)$, $n \geq 2$	$\chi(G) = 2$	Dicky dkk 2015
Shackel Graf Triangular Book	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$Shack(BT_3, v = 1, m), m \geq 2$		
Graf $BananaTree(B_{m,4}), m \geq 2$	$\chi_r(G) = r + 1$	Dicky dkk 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan dalam penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Dan penelitian terapan *(applied research)* merupakan jenis penelitian dengan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus-menerus terhadap suatu masalah.

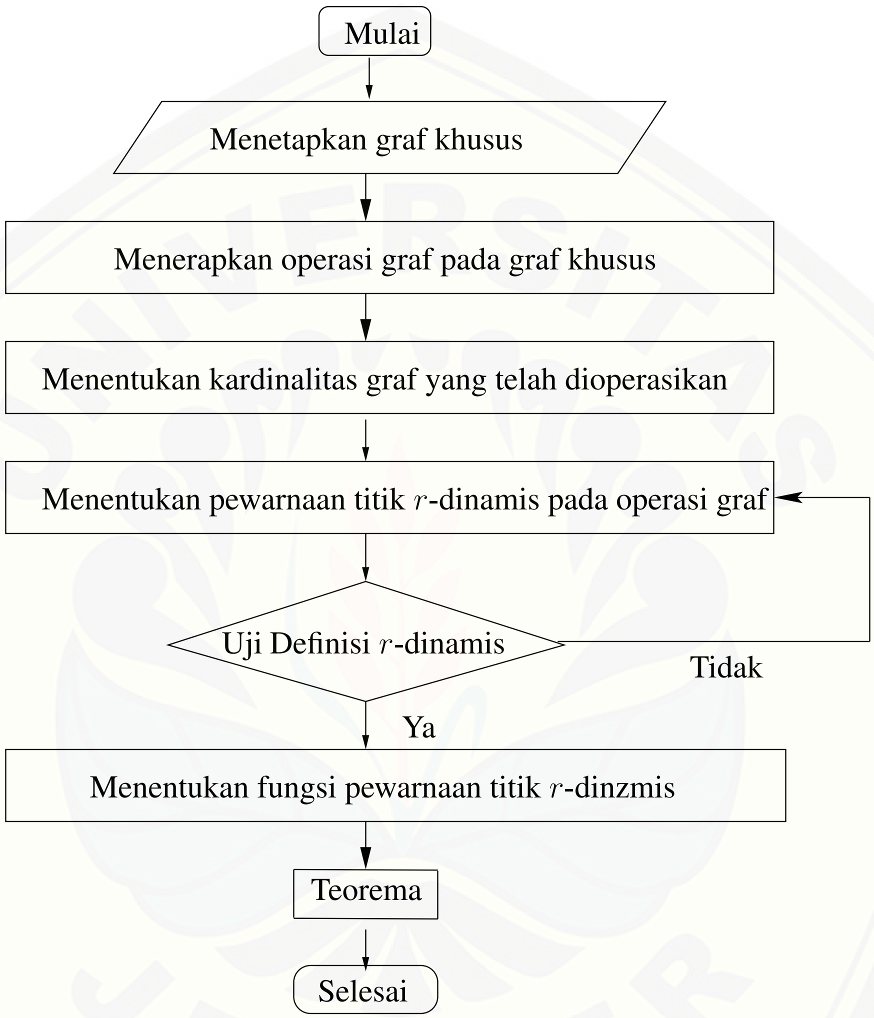
3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola, Metode deduktif aksiomatik adala metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Sedangkan metode pendeteksian pola *(pattern recognition)*, yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan r-dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf khusus. Adapun tehnik penelitian adalah sebagai berikut :

a. menentukan graf khusus dan operasi graf pada graf-graf khusus;
b. menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf-graf yang telah dioperasikan;
c. menentukan pewarnaan titik r-dinamis pada masing-masing operasi graf;
d. menetukan fungsi pewarnaan titik r-dinamis pada masing-masing operasi graf;
e. Pewarnaan titik yang sudah didapatkan merupakan teorema yang harus dibuktikan.



Gambar 3.1 Skema rancangan penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

a. Berdasarkan hasil penelitian yang sudah dibahas pada Bab sebelumnya, disimpulkan kardinalitastitik dan kardinalitas sisi pada graf hasil operasi adalah untuk kardinalitas titik dan kardinalitas sisi graf $shack(Wd_4^2)$ sebagai berikut $|V(shack(Wd_4^2))| = 6n + 1$ yaitu $|E(shack(Wd_4^2))| = 12n$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi graf $shack(H_4, 2v, m)$ yaitu $|V(shack(H_4, 2v, m))| = 7n+2$ dan $|E(shack(H_4, 2v, m))| = 12n$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf $shack(B_{3,2}, v, m)$ yaitu $|V(shack(B_{3,2}, v, m))| = 7n + 1$ dan $|E(shack(B_{3,2}, v, m))| = 10n$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf $W_4 \odot P_m$ yaitu $|V(W_4 \odot P_m)| = 6m$ dan $|E(W_4 \odot P_m)| = 14m - 1$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf $Bt_4 \odot P_m$ yaitu $|V(Bt_4 \odot P_m)| = 7m$ dan $|E(Bt_4 \odot P_m)| = 15m - 1$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf $H_4 \odot P_m$ yaitu $|V(H_4 \odot P_m)| = 10m$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf $Bt_n + P_2$ yaitu $|V(Bt_n + P_2)| = n + 4$ dan $|E(Bt_n + P_2)| = 4n + 6$.

b. Hasil dari pembahasan Bab sebelumnya diperoleh 8 teorema dengan nilai r-dinamis. Bilangan kromatik titik r-dinamis graf $shack(Wd_4^2, v, 3)$ $\chi(shack(Wd_4^2, v, m)) = \chi_d(shack(Wd_4^2, v, m)) = \chi_3(shack(Wd_4^2, v, m)) = 4$, $\chi_4(shack(Wd_4^2, v, m)) = 5$, $\chi_5(shack(Wd_4^2, v, m)) = 6$, $\chi_{r\geq 6}(shack(Wd_4^2, v, m)) = 7$. Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $(shack(H_4, 2v, m))$ sebagai berikut $\chi(shack(H_4, 2v, m)) = \chi_d(shack(H_4, 2v, m)) = 3$, $\chi_3(shack(H_4, 2v, m)) = 4$, $\chi_{r\geq 4}(shack(H_4, 2v, m)) = 6$. Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $(shack(B_{3,2}, v, m))$ sebagai berikut $\chi(shack(B_{3,2}, v, m)) = 3$, $\chi_d(shack(B_{3,2}, v, m)) = \chi_3(shack(B_{3,2}, v, m)) = 4$, $\chi_{r\geq 4}(shack(B_{3,2}, v, m)) = 6$. Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $W_4 \odot P_m$ adalah $\chi(W_4 \odot P_m) = \chi_d(W_4 \odot P_m) = \chi_3(W_4 \odot P_m) = 4$, $\chi_4(W_4 \odot P_m) = \chi_5(W_4 \odot P_m) = 6$, $\chi_6(W_4 \odot P_m) = \chi_{r\geq 7}(W_4 \odot P_m) = 8$ Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $W_4 \odot P_m$ adalah $\chi(Bt_3 \odot P_m) = \chi_d(Bt_3 \odot P_m) = \chi_3(Bt_3 \odot P_m) = 4$, $\chi_{4 \leq r \leq 6}(Bt_3 \odot P_m) = r + 1$, $\chi_7(WBt_3 \odot P_m) = \chi_{r \geq 8}(Bt_3 \odot P_m) = 9$. Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $H_4 \odot P_m$ adalah $\chi(H_4 \odot P_m) = \chi_d(H_4 \odot P_m) = \chi_3(H_4 \odot P_m) = 4$, $\chi_4(H_4 \odot P_m) = 5$, $\chi_{5 \leq r \leq 9}(H_4 \odot P_m) = r + 1$, $\chi_{10}(H_4 \odot P_m) = \chi_{r \geq 11}(H_4 \odot P_m) = 12$. Bilangan kromatik titik r-dinamis pada graf $Bt_n \odot P_2$ adalah $\chi(Bt_n + P_2) = \chi_d(Bt_n + P_2) = \chi_3(Bt_n + P_2) = \chi_4(Bt_n + P_2) = 5$, $\chi_r(Bt_n \odot P_2) = r + 1, untuk n \geq 2$

5.2 Saran

Dari hasil penelitian pewarnaaan titik r-dinamis pada beberapa graf operasi dimana graf yang digunakan adalah graf *windmill*, graf *helm*, graf *stacked book*, graf *wheel*, graf *path* dan graf *triangular book*, peneliti memberikan saran pada pembeca agar melakukan penelitian di bidang ini, yaitu mencari bilangan kromatik r-dinamis menggunakan operasi yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ardiansyah, R dan Darmaji . 2013. *Bilangan Kromatik Graff Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf*. Jurnal: ITS. **2**(1).

Blitzer, R. 2013. *Precalculus Fourth Edition*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.

Bogart, K.P. 1988. *Discrete Mathemathics*. Lexington: D.C. Heath and Company.

Carlson, K. 2006. Generalized book and c_m snakes and prime graphs. *Ars Combinatoria*, **80**:215-211.

Chartand, Gray dan Zhang, Ping. 2009. *Chromatic Graph Theory*, USA: CRC Press.

Damayanti, R. T. 2011. Automorfisme graf bintang dan graf lintasan. *Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Brawijaya*, *pages* 1-97.

Endrayana, S. 2013. *Pelabelan Product Cordial pada Tensor Product Path dan Sikel*. Jurnal: ITS. **2**(1).

Harrary, F. 2007. *Graph Theory*. Addison: Wesley.

Irwanto, J. dan Dafik. 2014. *Pewarnaan Titik Pada Graf Spesial dan Operasinya*. Jurnal: UNEJ.

Jahanbekam, S., dkk. 2014. *On r-dynamic Coloring of Graphs*. Artikel: [Tidak Dipublikasikan].

Kang, R., Muller, T., dan West. 2015. On r-Dynamic Coloring Of Grids. *Descrete Applied Mathematics*. **186**: 286-290.

Lai, H. dan Montgomery, B. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel: [Tidak Dipublikasikan]. Morgantown: West Virginia University

Maryati, T.K., dkk. 2010. On H-supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph antimagic total labelings for shackles of a connected graph. *Utilitas Math*.

Mohanapriya, N., dkk. 2010. *On Dynamic Chromatic Number of 4-regular Graphs with Girth 3 and 4*. Artikel: [Tidak Dipublikasikan].India

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Purwanto, H., dkk. 2005. *Kalkulus 1*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.

Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. United Kingdom: Academi Press Limited.

Suryadi, D. & Priatna, N. 2013. *Pengetahuan Dasar Teori Graf*. Palembang: Universitas Bina Darma.

Tarmidzi, D. 2015. *Nilai Kromatik dan pewarnaan titk r-Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi Shakel*. Program Pascasarjana. UNEJ. Jember: [Tidak Diterbitkan].

Wulandari, N. I. 2015. *Anilisis r-Dynamic Vertec Coloring pada Hasil Operasi Graf Khusus*. Program Pascasarjana. UNEJ. Jember: [Tidak Diterbitkan].

Yulianti, K. 2008. *Hand Out Mata Kuliah Teori Graf Jilid 1*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.