DIMENSI METRIK DAN *NON-ISOLATED RESOLVING NUMBER*
PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS

SKRIPSI

Oleh
Wahyu Nikmatus Sholihah
NIM 121810101010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

DIMENSI METRIK DAN *NON-ISOLATED RESOLVING NUMBER* PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Wahyu Nikmatus Sholihah
NIM 121810101010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Ayahanda Moch. Khotibin dan Ibunda Batin yang tersayang;
2. Guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
3. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Jangan meminta kepada Allah agar bebanmu diringankan, tapi mintalah agar pundakmu dikuatkan".

"Skripsi mengajarkan saya tentang kesabaran dan keikhlasan."

"Semua ada masanya."

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Wahyu Nikmatus Sholihah

NIM : 121810101010

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: ”Dimensi Metrik dan *Non-Isolated Resolving Number* Pada Beberapa Graf Khusus” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Wahyu Nikmatus Sholihah

NIM 121810101010

SKRIPSI

DIMENSI METRIK DAN *NON-ISOLATED RESOLVING NUMBER* PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS

Oleh

Wahyu Nikmatus Sholihah
NIM 121810101010

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Dimensi Mterik dan *Non-Isolated Resolving Number* Pada Beberapa Graf Khusus” telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

hari :
tanggal :
tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. NIP. 196808021993031004	Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP. 197704302005011001
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. NIP. 198408012008012006	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. NIP. 196908281998021001

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D
NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Dimensi Metrik dan *Non-Isolated Resolving Number* Pada Beberapa Graf Khusus; Wahyu Nikmatus Sholihah, 121810101010; 2016: 51 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pada tahun 1736 lahirlah teori graf melalui makalah tulisan seorang ahli matematikawan berasal dari Swiss yang bernama Leonhard Euler. Euler berhasil memecahkan teka-teki masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal. Teori graf memiliki kajian yang cukup menarik untuk dipelajari, salah satunya yaitu dimensi metrik (*metric dimension*). Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 yang kemudian dikembangkan lagi oleh Harary dan Melter pada tahun 1976.

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda pada G. Jarak dari *vertex* u ke *vertex* v, dinotasikan dengan $d(u, v)$. Himpunan terurut $W = \{W_1, W_2, W_3$,..., $W_k\}$ dari *vertices* dalam graf terhubung terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-tuple) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2)$,..., $d(v, w_k))$. Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf $\langle W \rangle$ diinduksi oleh titik (simpul) tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf dikatakan *non-isolated resolving number* yang dinotasikan dengan $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2010).

Pada penelitian ini menggunakan dua metode yaitu, metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang diartikan dengan metode pencarian pola untuk dilakukan konstruksi titik koordinat dimensi metrik (*dim*) dan *non-isolated resolving set* sedemikian hingga nilai koordinat minimum dan juga berbeda, selain itu juga menggunakan metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika

matematika dengan menggunakan teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Penelitian ini bertujuan untuk mencari nilai dimensi metrik pada graf khusus. Graf yang digunakan adalah graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n), graf $shack(H_2^2, e, n)$, graf antiprism (H_n), graf roda (W_n), graf biparted (K_n) dan graf prisma ($H_{5,n}$), sehingga pada penelitian ini dihasilkan 7 teorema, antara lain:

1. **Teorema 4.1** Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf tumpukan buku $B_{4,n}$ adalah $dim(B_{4,n})$ = 4 dan $nr(B_{4,n})$ = 5;
2. **Teorema 4.2** Untuk $n \geq 7$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf roda W_n adalah $dim(W_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ dan $nr(W_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$;
3. **Teorema 4.3** Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf *shack(*H_2^2, e, n*)* adalah $dim(shack(H_2^2, e, n)) = 2$ dan $nr(shack$ $(H_2^2, e, n)) = 2$;
4. **Teorema 4.4** Untuk $n \geq 3$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf antiprism H_n adalah $dim(H_n) = 3$ dan $nr(H_n) = 3$;
5. **Teorema 4.5** Untuk $n \geq 3$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf gear G_n adalah:

$$dim(G_n) = \begin{cases} 3 \text{ , untuk } 3 \leq n \leq 4 \\ n-1 \text{ , untuk } n \geq 5 \end{cases}$$

$$nr(G_n) = \begin{cases} 3 \text{ , untuk } 3 \leq n \leq 4 \\ n \text{ , untuk } n \geq 5 \end{cases}$$

6. **Teorema 4.6** Untuk $n \geq 1$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf biparted K_n adalah $dim(K_n) = 2n - 2$ dan $nr(K_n) = 2n - 2$;
7. **Teorema 4.7** Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf prisma $H_{5,n}$ adalah $dim(H_{5,n}) = 2$ dan $nr(H_{5,n}) = 3$.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, karena atas limpahan kasih dan anugerahNya maka penulis dapat menyelesaikan penelitian dan menyusun skripsi ini dengan judul ”Dimensi Metrik dan *Non-Isolated Resolving Number* Pada Beberapa Graf Khusus” yang merupakan salah satu prasyarat untuk mencapai strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Drs. Sujito, Ph.D selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah bersedia dengan ikhlas memberikan ilmu yang bermanfaat serta meluangkan waktu dan tenaga untuk membimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi;
4. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si selaku dosen penguji yang telah bersedia meluangkan waktu dan membimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi;
5. seluruh dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Ibunda Batin dan Ayahanda Moch. Khotibin yang senantiasa dengan ikhlas memberi doa, dukungan dan pengorbanan selama ini;
7. seluruh anggota Rumpik, Poppo, Rere, dan juga Chadli Hakim yang senantiasa memberikan motivasi sekaligus menjadi keluarga kedua penulis;
8. seluruh teman - teman BATHICS’12 dan pejuang graf yang selalu memberikan dukungan untuk terus semangat dalam menyelesaikan skripsi;
9. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Automatisasi dan digitalisasi merupakan kebutuhan dasar hidup di era modern ini. Automatisasi ditandai dengan adanya pemanfaatan robotik dalam sebuah teknologi, sedangkan digitalisasi ditandai dengan penggunaan komputer dalam keseharian hidup manusia. Salah satu contoh automatisasi dan digitalisasi adalah sistem dimensi, sistem pengendalian dan sistem pengairan dalam pertanian maupun perkebunan. Misal terdapat tanaman buah pada area seluas 1 juta hektar. Proses panen pada tanaman tersebut dilakukan dengan menggunakan robot, sehingga dapat dilakukan secara mudah dan automatis.

Pada tahun 1736 lahirlah teori graf melalui makalah tulisan seorang ahli matematikawan berasal dari Swiss yang bernama Leonhard Euler. Euler berhasil memecahkan teka-teki masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal. Konigsberg adalah suatu kota di Prussia bagian Timur Jerman. Permasalahan yang muncul yaitu bagaimana cara seseorang berpindah dari satu tempat ke tempat lain dengan melewati setiap jembatan tepat satu kali. Euler memformulasikan masalah tersebut ke dalam teori graf.

Teori graf memiliki kajian yang cukup menarik untuk dipelajari, salah satunya yaitu dimensi metrik (*metric dimension*). Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 yang kemudian dikembangkan lagi oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Dimensi metrik itu sendiri adalah kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda.

Dimensi metrik memiliki konsep himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum yang terbukti berguna untuk pembahasan di bidang lain. Contoh dimensi metrik yang diterapkan dibidang lain yaitu Navigasi Robot dan Pencarian (berdasarkan jurnal *Khuller, Raghavachari, and Rosenfeld, Landmarks in Graphs*), Kimia (berdasarkan jurnal *Chartrand, dkk, Boundary Vertices in Graph and Poisson and Zhang, the Metric Dimension of Unicyclic Graph*) dan Optimasi Kombinasi (berdasarkan jurnal *Sebo and Tannier, On Metric Generator of Graphs*) (Hernando, dkk, 1).

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda pada G. Jarak dari *vertex* u ke *vertex* v, dinotasikan dengan $d(u, v)$. Himpunan terurut $W = \{W_1, W_2, W_3$,..., $W_k\}$ dari *vertices* dalam graf terhubung terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-tuple) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2)$,..., $d(v, w_k))$. Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf $\langle W \rangle$ diinduksi oleh titik (simpul) tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf dikatakan *non-isolated resolving number* yang dinotasikan dengan $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2010).

Purnomo (2009) mengungkapkan bahwa jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* v e-lemen $V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum (basis metrik) dan kardinalitas dari basis metrik tersebut didefinisikan dimensi metrik dari G yang dinotasikan dengan $dim(G)$.

Kajian tentang dimensi metrik pada graf ini merupakan salah satu kajian yang sangat diminati. Terbukti dengan banyaknya jurnal penelitian-penelitian yang membahas tentang kajian ini. Berdasarkan hal tersebut, peneliti akan meneliti tentang ”Dimensi Metrik dan *Non-Isolated Resolving Number* pada Beberapa Graf Khusus”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. bagaimana nilai dimensi metrik pada graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n), graf $shack(H_2^2, e, n)$, graf antiprism (H_n), graf roda (W_n), graf biparted (K_n) dan graf prisma ($H_{5,n}$)?

b. bagaimana nilai *non-isolated resolving set* pada graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n), graf $shack(H_2^2, e, n)$, graf antiprism (H_n), graf roda (W_n), graf biparted (K_n) dan graf prisma ($H_{5,n}$)?

1.3 Tujuan

Berdasarkan dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan nilai dimensi metrik pada graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n), graf $shack(H_2^2, e, n)$, graf antiprism (H_n), graf roda (W_n), graf biparted (K_n) dan graf prisma ($H_{5,n}$);

b. menentukan nilai *non-isolated resolving set* pada graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n), graf $shack(H_2^2, e, n)$, graf antiprism (H_n), graf roda (W_n), graf biparted (K_n) dan graf prisma ($H_{5,n}$).

1.4 Manfaat

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah:

a. menambah pengetahuan baru dibidang teori graf, khususnya dimensi metrik dan *non-isolated resolving number* pada graf khusus;

b. memotivasi peneliti-peneliti lain untuk meneliti dimensi metrik dan *non-isolated resolving number* pada graf khusus dan graf operasi dengan jenis graf yang berbeda;

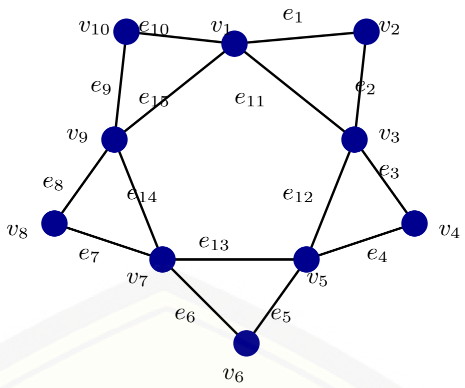
c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan untuk mengembangkan wawasan teori graf dalam masalah dimensi metrik.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

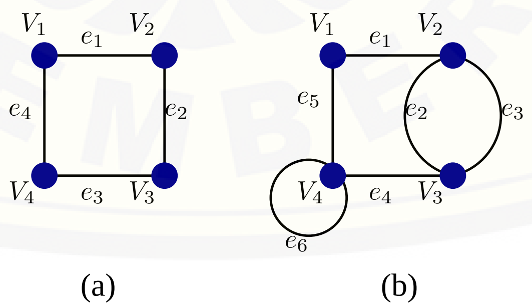
Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ merupakan sebuah himpunan berhingga tak kosong dari titik (*vertex*), sedangkan $E(G)$ adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua buah titik yang sisinya berbentuk garis lurus atau lengkung (Santi, 2015). Suatu graf yang ditulis dengan $G(p, q)$ merupakan himpunan dari p buah titik dan q buah sisi. Dalam sebuah graf terdapat istilah *order* dan juga *size*, dimana banyaknya titik (*vertex*) pada graf G disebut *order* dari G yang dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan *size* merupakan banyaknya sisi (*edge*) pada graf G yang dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$ (Iswadi, 2011). Santi (2015) mengungkapkan bahwa apabila terdapat sisi (*edge*) yang lebih dari satu dan menghubungkan dua buah titik disebut sisi ganda (*paralel*), selain itu sebuah sisi disebut *loop* apabila sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik (*vertex*) yang sama.

Pada Gambar 2.1 merupakan sebuah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{10}\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1$, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, $e_{15}\}$.



Gambar 2.1 Contoh Graf dengan $|V(G)| = 10$ dan $|E(G)| = 15$

Fitriana (2015) mengungkapkan bahwa apabila dalam suatu graf G dengan dua buah titik v_1, v_2 terhubung, maka titik tersebut dikatakan bertetangga (*adjacent*). Sebuah titik v_1 dinamakan *incident* dengan sisi e_1 apabila v_1 termasuk titik ujung dari e_1 (Hartsfield dan Ringel, 1990). Sebagai contoh, pada Gambar 2.1 v_2 *adjacent* dengan v_1 dan v_3,tetapi v_2 tidak *adjacent* dengan v_4, sedangkan v_1 dan v_2 *incident* dengan $(v_1 v_2)$. Derajat *(degree)* yaitu banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dan dinotasikan dengan d_i (*index i* menunjukkan titik ke-*i* pada graf). Derajat suatu titik dibagi menjadi dua yaitu derajat terkecil dan derajat terbesar. Derajat terkecil dari suatu graf G adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada titik v_i di graf G yang dituliskan dengan $\delta(G)$. Derajat terbesar pada suatu graf G adalah banyaknya maksimal sisi yang *incident* di titik v_i pada graf G dituliskan dengan $\Delta(G)$ (Santi, 2015). Sebagai contoh, pada Gambar 2.1 memiliki $\delta(G)$ = 2 dan $\Delta(G)$ = 4.



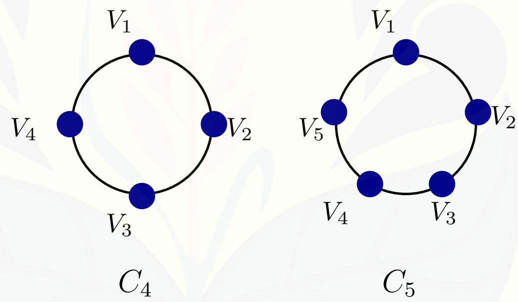
Gambar 2.2 (a) Contoh Graf Sederhana (b) Contoh graf Tak Sederhana

Suatu graf yang terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi rangkap (*multiple edges*). Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak memuat *loop* (gelung) dan sisi rangkap, sedangkan graf tak sederhana adalah graf yang memuat *loop*(gelung) atau sisi rangkap.

2.2 Graf Khusus

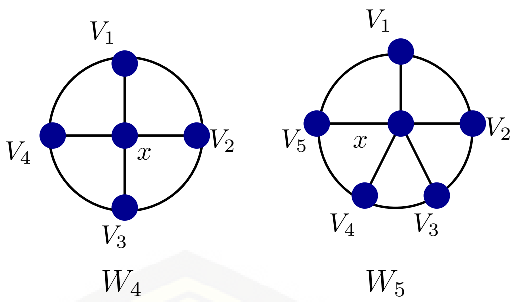
Graf khusus adalah graf dengan keunikan dan karakteristik bentuk khusus tersendiri, dimana keunikannya adalah tidak terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik dan sisi dengan graf lainnya. Bentuk karakteristik dalam graf tetap simetris meskipun diperluas sampai *order n*.

Graf lingkaran (*cycle graph*) adalah graf sederhana dimana setiap titik yang terdapat pada graf tersebut memiliki derajat dua. Graf *cycle* dengan n titik dituliskan dengan C_n dimana $n \geq 3$.



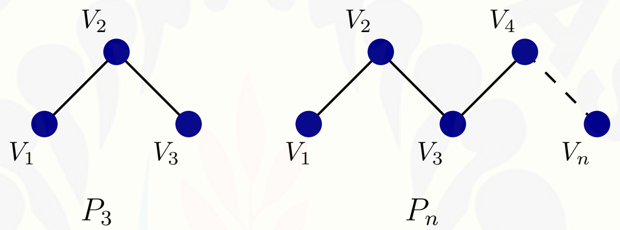
Gambar 2.3 Graf *Cycle* C_4 dan C_5

Graf roda (*wheel graph*) yang dituliskan dengan W_n serta $n \geq 3$ yaitu graf yang menghubungkan suatu titik pusat dengan semua titik (*vertex*) pada graf *Cycle* C_n. Sehingga banyaknya titik pada graf roda W_n sebanyak $n + 1$ dan banyaknya sisi pada graf roda W_n sebanyak $2n$ (Fitriana, 2015).



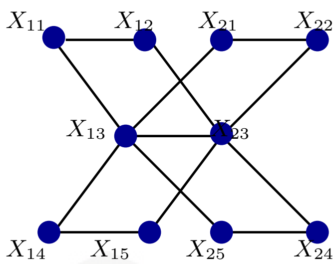
Gambar 2.4 Graf Roda W_4 dan W_5

Graf lintasan (*path*) dengan order n adalah graf yang terdiri dari satu lintasan dan dituliskan dengan P_n (Chartrand & Oellermann, 1993). Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Graf Lintasan P_3 dan P_n

Graf tumpukan buku (*stack book graph*) dinotasikan dengan $(B_{4,n})$ dimana graf tumpukan buku ini merupakan graf yang terbentuk dari graf C_4 yang diduplikasikan sebanyak n namun bertumpu pada satu sisi kemudian graf tersebut diekspand sampai ke-n. Sehingga graf tumpukan buku terdiri dari $5n$ titik dan $9n-5$ sisi , dimana $n \geq 2$. Contoh graf tumpukan buku dapat dilihat pada Gambar 2.6 (Fitriana, 2015).



$(B_{4,2})$

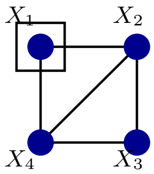
Gambar 2.6 Graf Tumpukan Buku $(B_{4,2})$

2.3 Dimensi Metrik dan *Non-Isolated Resolving Set*

Untuk penelitian dimensi metrik pada graf khusus sebelumnya yaitu Santi (2015) dengan meneliti beberapa graf khusus diantaranya yaitu graf kipas F_n, graf kipas $F_{2,n}$, $shack(F_4, v, n)$, $shack(F_4, e, n)$, $amal(F_4, v, n)$, graf bintang S_n, graf roda W_n, $gShack(W_6, C_1^4, n)$, graf antiprisma H_n dan graf prisma $H_{5,n}$.

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda (*resolving set*) pada G. Untuk *vertices* u dan v dalam graf terhubung G, jarak $d(u, v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = (W_1, W_2, ..., W_k)$ dari *vertices* dalam graf terhubung G dan *vertex r* pada G adalah vektor-k (pasangan k-tuple), $r(v|W) = (d(v, W_1), d(v, W_2), ..., d(v, W_k))$ menunjukkan representasi dari v pada W. Himpunan W dinamakan himpunan pembeda (*resolving set*) G jika *vertices* G mempunyai representasi berbeda. Himpunan *resolving* dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metrik dari G yang dinotasikan dengan *dim(G)* (Harary, 1976).

Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf $\langle W \rangle$ diinduksi oleh titik tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf dikatakan *non-isolated resolving number* dan dinotasikan dengan $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2010). Berikut ini contoh operasi dimensi metrik dan *non-isolated resolving set*:

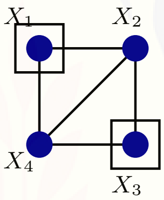


Gambar 2.7 Graf A_1

Sebagai contoh, Gambar 2.7 memiliki $W = \{x_1\}$, maka representasinya yaitu :

$$r(x_1|W) = (0) \qquad r(x_3|W) = (2)$$
$$r(x_2|W) = (1) \qquad r(x_4|W) = (1)$$

karena masih terdapat representasi yang sama yaitu $r(x_2|W)$ dan $r(x_4|W)$, maka $W = \{x_1\}$ bukan merupakan himpunan pembeda sehingga tidak dapat ditemukan dimensi metriknya.

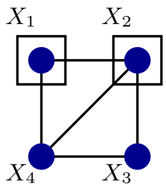


Gambar 2.8 Graf A_2

Apabila pada gambar 2.8 memiliki $W = \{x_1, x_3\}$, maka representasinya adalah :

$$r(x_1|W) = (0, 2) \qquad r(x_3|W) = (2, 0)$$
$$r(x_2|W) = (1, 1) \qquad r(x_4|W) = (1, 1)$$

karena masih terdapat representasi yang sama yaitu $r(x_2|W)$ dan $r(x_4|W)$, maka $W = \{x_1, x_3\}$ juga bukan merupakan himpunan pembeda sehingga tidak dapat ditemukan dimensi metriknya.

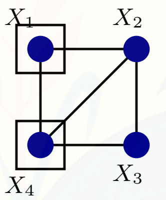


Gambar 2.9 Graf A_3

Misalkan pada Gambar 2.9 memiliki $W = \{x_1, x_2\}$, sehingga representasinya adalah :

$$r(x_1|W) = (0,1) \qquad r(x_3|W) = (2,1)$$
$$r(x_2|W) = (1,0) \qquad r(x_4|W) = (1,1)$$

$W = \{x_1, x_2\}$ merupakan salah satu himpunan pembeda dikarenakan semua titik pada graf tersebut memiliki representasi yang berbeda terhadap W dan seluruh $x \in W$ terhubung dalam W. $W = \{x_1, x_2\}$ merupakan himpunan pembeda dari graf diatas, dan disebut sebagai himpunan pembeda yang mempunyai jumlah anggota minimum (basis metrik) sehingga dim(G) = 2. $W = \{x_1, x_2\}$ dan juga merupakan *non-isolated resolving set* $(nr(G))$ dikarenakan himpunan pembedanya saling terhubung.



Gambar 2.10 Graf A_4

Misalkan pada Gambar 2.10 memiliki $W = \{x_1, x_4\}$, sehingga representasinya adalah:

$$r(x_1|W) = (0,1) \qquad r(x_3|W) = (2,1)$$
$$r(x_2|W) = (1,1) \qquad r(x_4|W) = (1,0)$$

$W = \{x_1, x_4\}$ juga merupakan salah satu himpunan pembeda karena semua titik pada graf tersebut memiliki representasi yang berbeda terhadap W dan seluruh $x \in W$ terhubung dalam W. $W = \{x_1, x_4\}$ merupakan himpunan pembeda dari graf diatas, dan disebut sebagai himpunan pembeda yang mempunyai jumlah anggota minimum (basis metrik) sehingga dim(G) = 2. $W = \{x_1, x_4\}$ dan juga merupakan *non-isolated resolving set* $(nr(G))$ dikarenakan himpunan pembedanya saling terhubung.

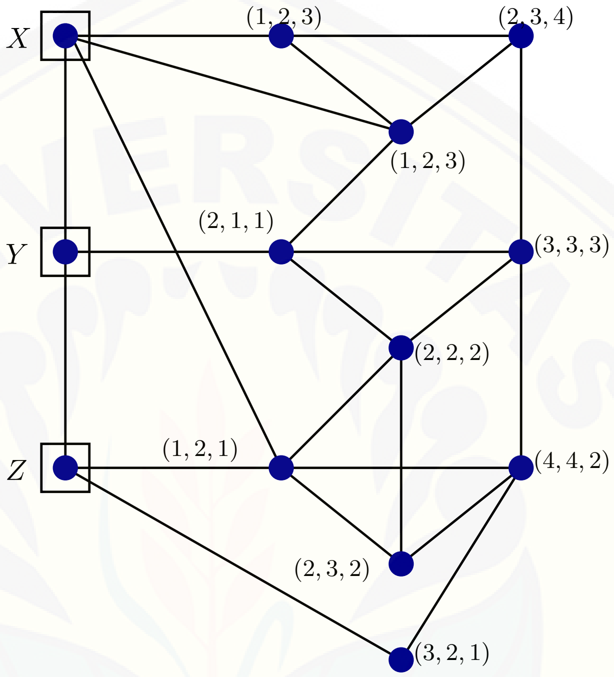
Observasi 2.1. *Misal $dim(G)$ dan $nr(G)$ adalah nilai dimensi metrik dan non-isolated resolving set pada graf terhubung G, maka nilai $nr(G) \geq dim(G)$.*

Bukti. Nilai $dim(G)$ merupakan kardinalitas minimum himpunan pembeda pada G. Sedangkan $nr(G)$ merupakan himpunan pembeda minimum $(dim(G))$ dengan syarat semua himpunan pembedanya harus saling terhubung. Sehingga syarat dari $nr(G)$ lebih kompleks dari $dim(G)$, dengan demikian $nr(G) \geq dim(G)$.

2.4 Aplikasi Dimensi Metrik dalam Kehidupan Sehari-hari

Teori graf banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari - hari. Salah satu aplikasi teori graf yang khususnya pada bidang dimensi metrik adalah *speedy call center*, dimana pada *speedy call center* terdapat suatu jaringan yang menghubungkan jaringan perusahaan menuju pelanggan speedy yang dapat dilihat dari titik lokasi menggunakan pengertian jarak. Dalam suatu perusahaan speedy, dipastikan terdapat *call center* untuk melayani semua pelanggan. Dalam hal ini, *call center* adalah suatu alat yang berfungsi untuk menerima kritik dan saran dari pelanggannya.

Pelanggan speedy untuk saat ini sudah mencapai ribuan. Permasalahannya yaitu untuk melayani semua pelanggan speedy dengan kondusif, dibutuhkan sebuah komputer dengan aplikasi yang membantu para pekerja *call center* melayani pelanggannya. Untuk setiap *speedy call center* dalam satu perusahaan harus terhubung satu sama lain dan setiap rumah atau pengguna speedy diperlukan kode yang unik dan berbeda agar pada saat menghubungi *speedy call center* tidak perlu menunggu giliran untuk mendapatkan layanan dari perusahaan speedy. Jika setiap rumah pada suatu wilayah dianggap sebagai suatu titik sedangkan lintasan jaringan dari *call center* terhadap rumah lainya dianggap sebagai sisi, maka gambar peta pada suatu wilayah tersebut dapat direpresentasikan sebagai suatu pola graf. Agar komputer dapat lebih efisien dalam menerjemahkan kode setiap rumah (pelanggan speedy) dari *speedy call center*, diperlukan komponen yang seminimal mungkin. Gambar dibawah menunjukkan contoh peta suatu wilayah yang menggunakan speedy dan terhubung dengan *speedy call center* yang dilengkapi dengan graf repesentasinya dengan kode nama rumah pelanggan yang berbeda-beda.



Gambar 2.11 Graf Representasi Jaringan *Speedy Call Center*

Dari Gambar 2.11 diambil tiga pusat *speedy call center* yang juga merupakan himpunan pembeda minimal yang nantinya direpresentasikan terhadap titik pada tiap rumah pelanggan speedy. Untuk mengetahui pelanggan speedy mana yang akan dilayani oleh masing-masing *call center*, maka tiap kode unik pada tiap rumah pelanggan speedy dijumlahkan terlebih dahulu. Kemudian ditetapkan untuk membagi beban masing-masing *call center* dalam melayani pelanggan speedy yaitu:

call center X untuk $X + Y + Z \leq 5$

call center Y untuk $6 \leq X + Y + Z \leq 8$

call center Z untuk $9 \leq X + Y + Z \leq 10$

2.5 Hasil-hasil Dimensi Metrik

Tabel 2.1 Tabel 2.1 Hasil Dimensi Metrik dari Penelitian Terdahulu

$Graf$	Hasil	Keterangan
Graf Tangga (L_n)	$dim(L_n) = 2$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Shackle Graf Tangga (SL_n)	dim$(SL_n) = n$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Komplemen (L_n)	dim$(L_n) = 2$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Tangga Tiga (TCL_n)	dim$(TCL_n) = n$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Komposisi $L_n[L_1]$	dim$(L_n[L_1]) = n$; untuk $n \geq 3$	Saifudin, I. 2015
Graf *Cartesiant Product* $C_3\Box P_n$	dim($C_3\Box P_n$) = 2; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf gShack(C_5^2, P_2, n)	dim(gShack(C_5^2, P_2, n)) = 2; untuk $n \geq 1$	Fitriana, R. A. 2015
Graf Amal(B_3, n)	dim(Amal(B_3, n)) = 4; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf $E(E_n)$	dim(E_n) = 2; untuk $n \geq 3$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product* ($W_4\Box P_n$)	dim($W_4\Box P_n$) = 3; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product* ($W_3^2\Box P_n$)	dim($W_3^2\Box P_n$) = 2; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product* ($F_{1,3}\Box P_n$)	dim($F_{1,3}\Box P_n$) = 3; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product* ($F_{1,3}\Box P_n$)	dim($F_{1,3}\Box P_n$) = 3; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf ($C_5\Box P_n$)	dim($C_5\Box P_n$) = 2; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015

$Graf$	Hasil	Keterangan
$Shack(F_4, v, n)$	dim($Shack(F_4, v, n)$)= 2; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
$Shack(F_4, e, n)$	dim($Shack(F_e, v, n)$)= 2; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
$Amal(F_4, v, n)$	dim($Amal(F_4, v, n)$)= n; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Bintang (S_n)	dim$(S_n) = n - 1$; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Kipas (F_n)	dim$(F_n) = \begin{cases} 2; \\ untuk\ 2 \leq n \leq 5 \\ \frac{n}{2}; untuk\ n \geq 6, \\ n\ genap \\ \frac{n-1}{2}; untuk\ n \geq 7, \\ n\ ganjil \end{cases}$	Santi, R. N. 2015
Graf Kipas $(F_{2,n})$	dim$(F_{2,n}) = \begin{cases} \frac{n+2}{2}; untuk\ n \geq 2, \\ n\ genap \\ \frac{n+1}{2}; untuk\ n \geq 3, \\ n\ ganjil \end{cases}$	Santi, R. N. 2015
Graf Roda (W_n)	dim$(W_n) = \begin{cases} 2; untuk\ 4 \leq n \leq 5 \\ 3; untuk\ 6 \leq n \leq 8 \\ \frac{n-1}{2}; untuk\ n \geq 9, \\ n\ ganjil \\ \frac{n-2}{2}; untuk\ n \geq 10, \\ n\ genap \end{cases}$	Santi, R. N. 2015
$gshack(W_6, C_1^4, n)$	dim($gshack(W_n, C_1^4, n)) = 2$; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Antiprisma (H_n)	dim$(H_n) = 3$; untuk $n \geq 3$	Santi, R. N. 2015
Graf Prisma $(H_{5,n})$	dim$(H_{5,n}) = 2$; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini dikategorikan kedalam dua jenis, diantaranya yaitu penelitian terapan dimana penelitian ini dilakukan dengan sistematik. Penelitian eksploratif yang artinya hasil penelitian ini digunakan untuk dasar penelitian selanjutnya, oleh sebab itu penelitian ini bertujuan untuk mencari sesuatu yang ingin diketahui.

3.2 Rancangan Penelitian

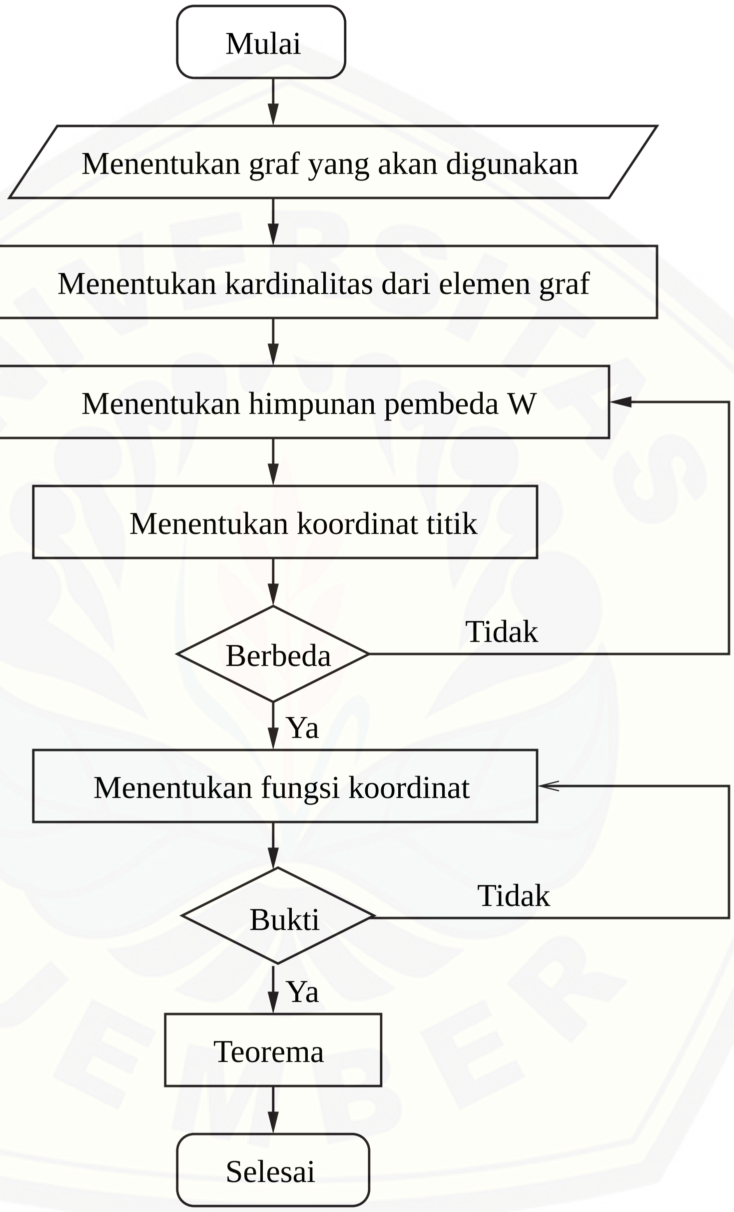
Rancangan penelitian ini menggunakan dua metode yaitu, metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang diartikan dengan metode pencarian pola untuk dilakukan konstruksi titik koordinat dimensi metrik (*dim*) sedemikian hingga nilai koordinat minimum dan juga berbeda, selain itu juga menggunakan metode Deduktif Aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Kedua metode tersebut diterapkan dalam dimensi metrik pada graf khusus. Rancangan penelitian untuk dimensi metrik pada graf khusus digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan dengan Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. menetapkan graf yang akan digunakan untuk dianalisa dimensi metrik dan *non - isolated resolving set*nya;

b. menentukan kardinalitas elemen-elemen graf yang digunakan;

c. menentukan dimensi metrik dan *non - isolated resolving set* pada graf yang diteliti;

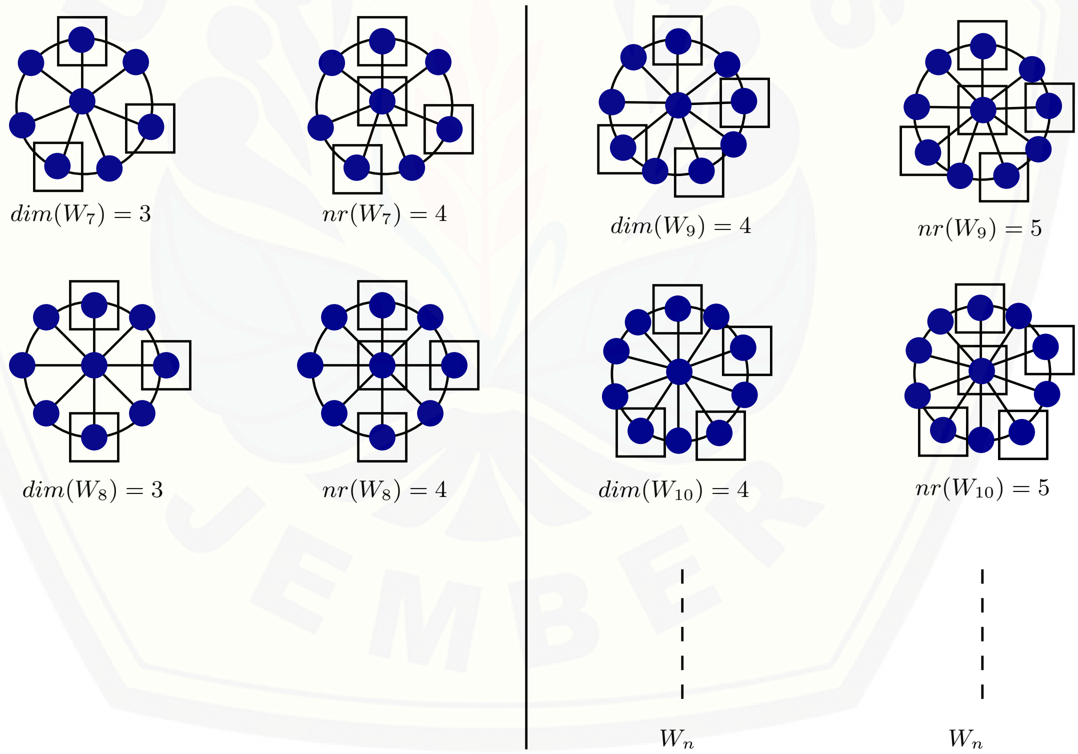
d. melakukan konstruksi terhadap titik koordinat dari dimensi metrik dan *non isolated resolving set*;
e. menentukan fungsi koordinat pada graf yang diteliti;
f. menentukan teorema hasil penelitian dari analisis dimensi metrik dan *non isolated resolving set* pada graf khusus.



Gambar 3.1 Skema Langkah Kerja Penelitian

3.3 Observasi Awal

Diilustrasikan sebuah graf pada gambar 3.2 yaitu graf khusus roda (W_n), dimana pada graf roda sendiri untuk dimensi metriknya sudah diteliti oleh Santi (2015). Namun penelitian tentang himpunan pembeda tak terisolasi belum dilakukan sebelumnya. Oleh karena itu, untuk menentukan himpunan pembeda tak terisolasi langkah awal yang dilakukan yaitu menggambar graf W_n untuk n tertentu. Kemudian ditentukan himpunan pembedanya sehingga diperoleh dimensi metrik yang minimum seperti pada Gambar 3.2, setelah itu dievaluasi seluruh himpunan pembedanya terhubung atau tidak. Andai kata tidak terhubung, mereka hanya memenuhi sifat dimensi metrik sehingga dilakukan pencarian ulang. Apabila terhubung, bisa dikatakan graf tersebut memenuhi sifat dimensi metrik dengan himpunan pembeda tak terisolasi.



Gambar 3.2 Observasi Awal

Hasil perhitungan dimensi metrik dan *non - isolated resolving set* :

$W_7 \rightarrow dim = 3, nr = 4$

$W_8 \rightarrow dim = 3, nr = 4$

$W_9 \rightarrow dim = 4, nr = 5$

$W_{10} \rightarrow dim = 4, nr = 5$

Untuk $n \geq 7$, dimensi metrik dan *non - isolated resolving set* dari W_n dapat dirumuskan sebagai berikut:

$dim(W_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

$nr(W_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa didapatkan 7 teorema dimensi metrik dan *non - isolated resolving set* pada graf khusus yaitu pada graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n), graf $shack(H_2^2, e, n)$, graf antiprism (H_n), graf roda (W_n), graf biparted (K_n) dan graf prisma $(H_{5,n})$, diantaranya adalah:

a. Nilai dimensi metrik pada graf khusus dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $dim(B_{4,n})$ = 4 untuk $n \geq 2$;
2. $dim(W_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ untuk $n \geq 2$;
3. $dim(shack(H_2^2, e, n)) = 2$ untuk $n \geq 2$;
4. $dim(H_n) = 3$ untuk $n \geq 2$;
5. $$dim(G_n) = \begin{cases} 3 \text{ , untuk } 3 \leq n \leq 4 \\ n-1 \text{ , untuk } n \geq 5 \end{cases}$$
6. $dim(K_n) = 2n - 2$ untuk $n \geq 1$;
7. $dim(H_{5,n}) = 2$ untuk $n \geq 2$.

b. Nilai *non-isolated resolving set* pada graf khusus dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $nr(B_{4,n})$ = 5 untuk $n \geq 2$;
2. $nr(W_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ untuk $n \geq 2$;

3. $nr(shack(H_2^2, e, n)) = 2$ untuk $n \geq 2$;

4. $nr(H_n) = 3$ untuk $n \geq 2$;

5.
$$nr(G_n) = \begin{cases} 3 \text{ , untuk } 3 \leq n \leq 4 \\ n \text{ , untuk } n \geq 5 \end{cases}$$

6. $nr(K_n) = 2n - 2$ untuk $n \geq 1$;

7. $nr(H_{5,n}) = 3$ untuk $n \geq 2$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* pada graf khusus yaitu pada graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n), graf $shack(H_2^2, e, n)$, graf antiprism (H_n), graf roda (W_n), graf biparted (K_n) dan graf prisma $(H_{5,n})$, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan penelitian dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* pada graf khusus lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ardiyansyah, R dan Darmaji. 2013 Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, **2**(1):4-5.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986 *Graph and Digraph*. California: Pacific Graw.

Chitra, P. J. B dan Arumugam, S. 2010 *Resolving Sets Without Isolated Vertices*. Kalasalingan University: India.

Fitriana, R. A. 2015. *Pengembangan Dimensi Metrik Pada Graf Khusus dan Operasinya*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Harary, F dan Melter, R. A. 1976. On The Metric Dimension of Graph. *Ars Combin*. **2**(1):191-195.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.

Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Seara, C., Cceres, J., dan Puertas, M. L. 2005. On the metric dimension of some families of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. **22**: 129-133.

Iswadi, H. 2011. Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik Graf Hasil Operasi Korona. *Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Multimedia 2011 (SNASTIA 2011)*. 1-5.

Permana,A. B dan Darmaji. 2012 Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk tertentu. *Jurnal Teknik Pom*. Surabaya: ITS.

Purwono, J. A. 2009. *Dimensi Metrik Pada Pengembangan Graph Kincir dengan Pola* $K_1 + mK_n$. Tugas Akhir. Jurusan Matematika ITS : Surabaya.

Saifudin, I. 2015. *Dimensi Partisi Dari Graf Khusus Dan Operasinya*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Santi, R. N. 2015. *Analisa Dimensi Metrik Pada Beberapa Graf Khusus*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Trisnaningtyas, E. 2012. *Dimensi Metrik Pada Graf* $K_1 + mC_n$ *dan Graf* $K_1 + mP_n$. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.