BILANGAN KROMATIK DAN GRAF KRITIS

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Persyaratan Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh

Hermin Sulistyowati
NIM. 971810101008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

JANUARI 2003

Motto

"Dengan Ilmu Hidup menjadi Mudah"

"Dengan Seni Hidup menjadi Indah"

"Dengan Agama Hidup menjadi Terarah dan Bermakna"

" Manusia itu masih tetap baik selama mereka tidak saling Mendengki."

"Amal yang paling disukai oleh Allah adalah yang paling kekal meskipun sedikit."

(Hadist sahih)

Persembahan

Skripsi ini kupersembahkan kepada :

- Ibundaku tercinta **Suwarjiyah** dan Ayahandaku tersayang **Tugiyat Nuryanto**, yang selalu memberikan cinta, sayang dan do'a nya tanpa putus-putusnya selama ini.
- Kakakku tersayang **Yani** dan Adikku tersayang **Yayan** yang selalu bersamaku disaat suka maupun duka semoga selalu sukses dan bahagia.
- Nenek dan Kakekku tersayang "**Mak Ucuk**, **Mbok Soel** (alm) **Mbok Nah**" dan "**Nang To** (alm), **Nang Ji** (alm)" terima kasih atas do'a dan kesabarannya.
- **Mas Itok** yang selalu sabar, terima kasih atas pengorbanan, dukungannya, semoga tambah sabar dan sukses ya ?
- Sobat-Sobatku Si Widya, Si Annie, Si Yusna, Si mamah dan papahnya Putri terima kasih atas persahabatan dan persaudaraannya selama ini.
- Teman-temanku SiAndre, dan Si Ratna terima kasih ya atas bantuan keringatnya, semoga kalian sukses selalu dan Adekku Yetti, Arwen, Yenthol, Dwiq, Riens, Rosa, Ucil, dan anak2 di Halmahera 12, nggak boleh nakal yang rukun-rukun aja ya !

DEKLARASI

Dari penelitian yang telah dilakukan mulai Nopember 2001 sampai dengan Januari 2003, maka bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Januari 2003 Hermin Sulistyowati

ABSTRAK

Bilangan Kromatik dan Graf Kritis, Hermin Sulistyowati, 971810101008, Skripsi, Januari 2003, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Dalam skripsi ini dibahas solusi problem pemberian warna pada setiap titik suatu graf G sedemikian sehingga setiap dua titik yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda. Secara khusus kita cari bilangan kromatik dan kita selidiki kekritisan graf G tersebut. Adapun yang dimaksud dengan bilangan kromatik $\chi(G)$ (*chromatic number*) adalah jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf G. Jika $\chi(G) = n$ maka titik-titik di graf G dapat diwarnai dengan n warna tetapi titik-titik di G tidak dapat diwarnai dengan $n - 1$ warna. Setelah mengetahui bilangan kromatik $\chi(G)$ dari suatu graf G, kita dapat menyelidiki kekritisannya. Graf G dikatakan *kritis* jika memenuhi $\chi(G - v) < (G)$ untuk setiap titik v di G.

Hasil penelitian didapatkan bahwa bilangan kromatik dari beberapa graf, yaitu graf lengkap, graf kosong, graf bipartit, graf lintasan, graf sikel dan graf yang titiknya berderajat maksimal d terdapat hubungan mengenai bilangan kromatik dan kekritisannya. Jika G kritis, maka $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$ untuk setiap titik v di G.

Kata kunci : pewarnaan titik, bilangan kromatik $\chi(G)$, graf kritis.

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas MIPA Universitas Jember pada:

Hari : rabu

Tanggal : 29 JAN 2003

Tempat : Fakultas MIPA Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)

(Drs. Kusno, DEA, Ph.D.)
NIP. 131 592 357

Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)

(Kristiana. W., S.Si, M.Si.)
NIP. 132 258 180

Anggota 1,

(Kosala Dwidja P., S.Si)
NIP. 132 206 019

Anggota 2,

(Kiswara Agung, S.Si.)
NIP. 132 207 813

Mengesahkan
Dekan Fakultas MIPA
Universitas Jember,

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS JEMBER FAKULTAS

(Ir. Sumadi, M.Si)
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah S.W.T. karena atas segala rahmat dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ***"Bilangan Kromatik dan Graf Kritis"***. Penyusunan skripsi merupakan syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains dalam bidang matematka di F.MIPA UNEJ.

Penulis menyadari, bahwa dalam penyusunan sampai terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Karenanya penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. **Bpk. Ir. Sumadi, M.Sc.**, selaku Dekan Fakultas MIPA universitas Jember.
2. **Bpk. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.**, selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dosen Pembimbing Utama, atas bimbingan dan saran-sarannya dalam penyusunan skripsi ini.
3. **Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si.**, selaku Dosen Pembimbing Anggota, atas bimbingan dan saran-sarannya dalam penyusunan skripsi ini.
4. **Bpk. Kosala Dwidja P., S.si.,** selaku Dosen Penguji Skripsi, atas segala pertanyaan dan masukan-masukannya.
5. **Bpk. Kiswara Agung. S, S.Si.**, selaku Dosen Penguji Skripsi, atas segala pertanyaan dan masukan-masukannya.
6. **Bpk. Drs. Adi Supriono**, selaku Kasubag. Pendidikan, atas segala bantuan saran serta masukan-masukannya.
7. **Almamater Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember** beserta seluruh staf yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Jember.
8. **Temen-temenku Mipa matematika** 97, 98 dan semuanya moga sukses selalu.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan pada umumnya dan matematika pada khususnya. Amien.

Jember, Januari 2003

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh Leonardo Euler yaitu seorang ahli matematika asal Swiss. Dalam teori graf, dikenal beberapa problem pewarnaan, misalnya dalam pewarnaan titik, pewarnaan sisi atau pewarnaan peta.

Pada prinsipnya, *pewarnaan titik* pada graf G adalah pemberian warna pada setiap titik dari G sedemikian hingga setiap dua titik yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda. Satu pertanyaan mengenai pewarnaan titik pada sebuah graf G adalah berapa banyak warna yang diperlukan untuk mewarnai titik di graf G. Pertanyaan yang menarik adalah berapakah jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G, yaitu biasa disebut *bilangan kromatik* yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Jika $\chi(G) = n$, maka titik-titik di graf G dapat diwarnai dengan n warna tetapi titik-titik di G tidak dapat diwarnai dengan $n - 1$ warna.

Masalah yang dapat dibangkitkan dari hasil pewarnaan titk pada graf yaitu mengetahui kekritisannya. Kita dapat menyelidiki kekritisan dari suatu graf G, setelah mengetahui bilangan kromatiknya. Graf G dikatakan *kritis* jika memenuhi $\chi(G - v) < \chi(G)$ untuk setiap titik v di G.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik $\chi(G)$ dari suatu graf G dan menentukan apakah suatu graf G tersebut kritis atau tidak. Dalam hal ini graf yang diteliti terbatas pada graf sederhana dan hingga.

1.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah mendapatkan sifat-sifat mengenai bilangan kromatik $\chi(G)$ dan kekritisan suatu graf G.

1.4 Manfaat

Pewarnaan titik dapat diterapkan pada masalah penjadwalan, misalnya penjadwalan mata kuliah di suatu fakultas agar setiap dosen yang mengajar lebih dari satu mata kuliah tidak mengajar pada waktu yang bersamaan, penjadwalan pemberangkatan kereta api dan sebagainya.

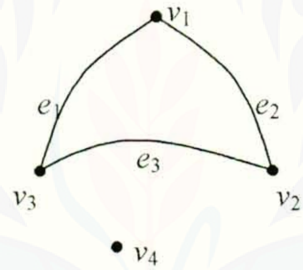
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Pengertian Dasar tentang Graf

2.1.1 Definisi Graf

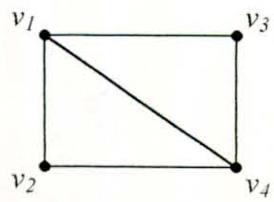
Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan E adalah himpunan garis (boleh kosong) yang menghubungkan titik u dan v dari pasangan tak terurut (u,v) dari titik u,v di V yang disebut *sisi* (*edge*). Contoh graf dapat dilihat pada Gambar 2.1 yaitu graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Jika graf G tidak mempunyai sisi, yaitu $E(G) = \phi$ maka graf G disebut *graf kosong*.



Gambar 2.1 Graf dengan 4 titik dan 3 sisi

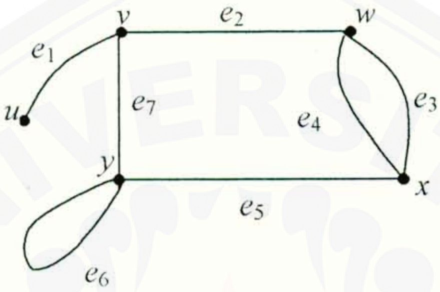
2.1.2 Pengertian Dasar tentang Graf

Order n dari suatu graf $G = (V,E)$ adalah banyaknya titik yang ada di G yaitu $n = |V|$. Graf yang mempunyai order hingga dinamakan *graf hingga*. Sebagai contoh Gambar 2.2 adalah graf dengan order 4.

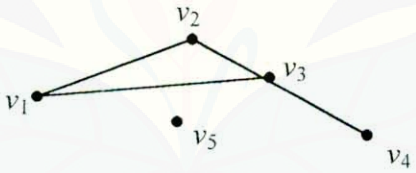


Gambar 2.2 Graf order 4

Loop adalah suatu sisi yang diawali dan diakhiri pada titik yang sama. *Sisi rangkap* (*multiple edges*) terjadi jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik. *Graf sederhana* adalah graf yang tidak mempunyai loop dan sisi rangkap. Pada skripsi ini, graf yang dipelajari adalah graf sederhana dan graf hingga. Contoh graf yang memuat loop dan sisi rangkap diberikan pada Gambar 2.3 dan graf sederhana diberikan pada Gambar 2.4.

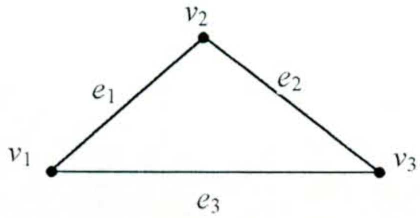


Gambar 2.3 Graf dengan loop dan sisi rangkap



Gambar 2.4 Graf sederhana

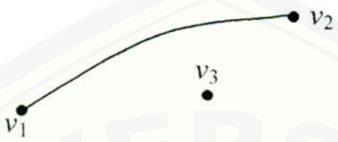
Jika dua titik u dan v di graf G dihubungkan oleh suatu sisi e, maka titik u dan v dikatakan berdekatan (*adjacent*) dan sisi e *insiden* dengan kedua titik yang dihubungkan, yaitu u dan v.



Gambar 2.5 Graf untuk mengilustrasikan *adjacent*

Pada Gambar 2.5, titik v_1 bertetangga dengan v_2, v_2 bertetangga dengan v_3, v_3 bertetangga dengan v_1, sedangkan sisi e_1 insiden dengan v_1 dan v_2, e_2 insiden dengan v_2 dan v_3, e_3 insiden dengan v_3 dan v_1.

Suatu titik v pada graf G dikatakan *titik terisolasi* jika tidak ada sisi yang berinsidensi dengan titik tersebut. Contoh titik terisolasi ditunjukkan pada Gambar 2.6 yaitu titik v_3.

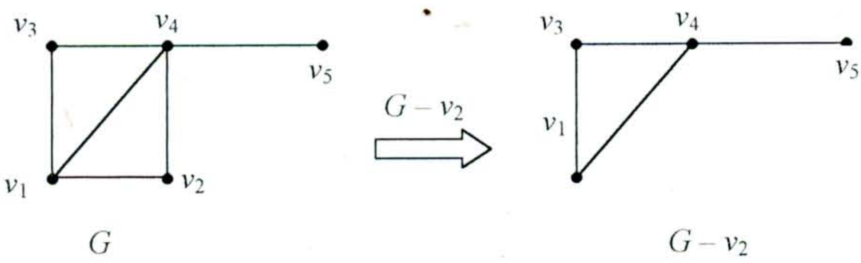


Gambar 2.6 Titik v_3 merupakan titik terisolasi

Derajat (*degree*) dari titik v adalah jumlah sisi yang berinsiden dengan titik v, dinotasikan dengan *deg* (v). Jika setiap titik dalam suatu graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan *graf reguler*. Misalkan pada Gambar 2.5, $deg\ (v_1) = deg\ (v_2) = deg\ (v_3) = 2$.

Jalan (*walk*) W dengan panjang n dari titik a ke b pada graf G adalah barisan titik $a = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = b\ (n \geq 0)$ yang terdiri dari titik dan sisi di G yang diawali dan diakhiri dengan titik, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Jalan ini menghubungkan titik v_0 dan v_n, dan dapat juga dinotasikan sebagai $v_0 - v_1 - \ldots - v_n$. Jalan dikatakan tertutup jika $a = b$ dan terbuka jika $a \neq b$. Jalan dikatakan *lintasan (path)* jika semua titiknya berbeda, sedangkan jalan tertutup yang semua titiknya berbeda dinamakan *sikel* (*cycle*).

Penghilangan suatu titik v_i dari suatu graf G dinotasikan $G - v_i$ adalah graf yang memuat semua titik dari G kecuali v_i dan sisi-sisi yang tidak berinsidensi dengan v_i. Contoh graf $G - v_2$ ditunjukkan pada Gambar 2.7.



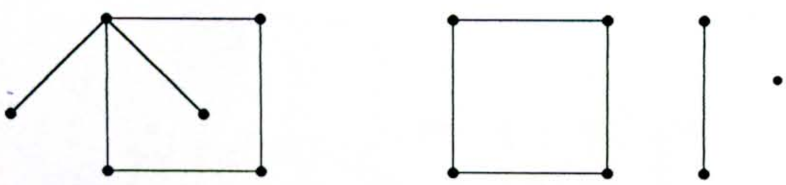
Gambar 2.7 Penghilangan titik pada graf

Graf H adalah *subgraf* dari G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Contoh subgraf ditunjukkan pada Gambar 2.8.

Gambar 2.8 Graf H adalah subgraf dari graf G

2.1.3 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

Jika setiap pasangan titik di graf G ada lintasannya, maka G dikatakan *terhubung* (*connected*) dan jika tidak maka dikatakan *tak terhubung*. *Komponen* dari graf adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Jadi setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen. Sedangkan untuk graf tak terhubung, memiliki paling sedikit dua komponen. Gambar 2.9 adalah contoh graf terhubung (a) dan graf tak terhubung (b).

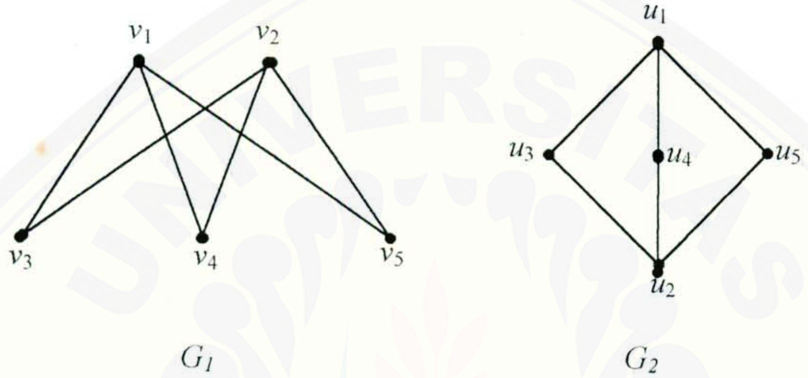


(a) (b)

Gambar 2.9 (a) Graf terhubung dan (b) Graf tak terhubung dengan tiga komponen

2.1.4 Graf Isomorfik

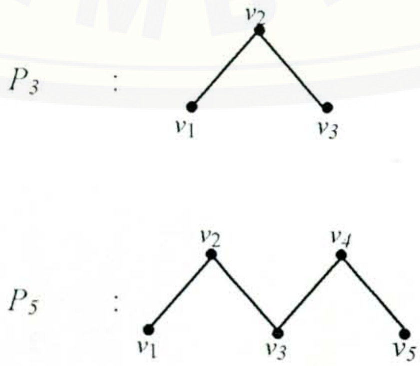
Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan *isomorfik* jika ada korespondensi satu-satu ϕ dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$ sedemikian hingga sisi $(u,v) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\phi(u),\phi(v)) \in E(G_2)$. Graf G_1 dan G_2 isomorfik dinotasikan dengan $G_1 \cong G_2$. Graf G_1 dan G_2 pada Gambar 2.10 adalah graf yang isomorfik dengan korespondensi satu-satu $\phi : V(G_1) \to V(G_2)$ yang didefinisikan oleh $\phi(v_i) = u_i$ untuk setiap $i = 1, 2, ...,5$.



Gambar 2.10 Dua graf yang isomorfik

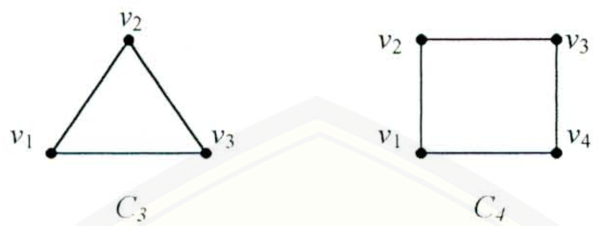
2.2 Kelas-kelas Graf

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik, dinotasikan dengan P_n, untuk P_1 sama dengan graf kosong dengan satu titik. Beberapa contoh dari graf lintasan diberikan pada Gambar 2.11.



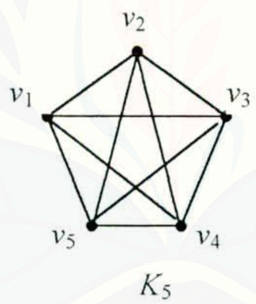
Gambar 2.11 Graf lintasan P_3 dan P_5

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Jika grafnya sederhana maka jumlah titik pada graf sikel minimal 3. Gambar 2.12 adalah contoh dari graf sikel.



Gambar 2.12 Graf sikel C_3 dan C_4

Graf lengkap didefinisikan sebagai graf dimana setiap dua titik berbeda di G dihubungkan dengan sisi. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Gambar 2.13 adalah contoh graf lengkap dengan 5 titik.



Gambar 2.13 Graf lengkap K_5

Graf G dikatakan *bipartit* jika himpunan titik $V(G)$ dapat dipisahkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di V_1 dan sebuah titik di V_2. Jika setiap pasang titik di V_1 dan V_2 saling terhubung maka graf tersebut dinamakan *graf bipartit lengkap*. Jika $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, graf bipartit lengkap dinotasikan $K_{m,n}$. Gambar 2.14 adalah contoh graf bipartit (a) dan graf bipartit lengkap (b).

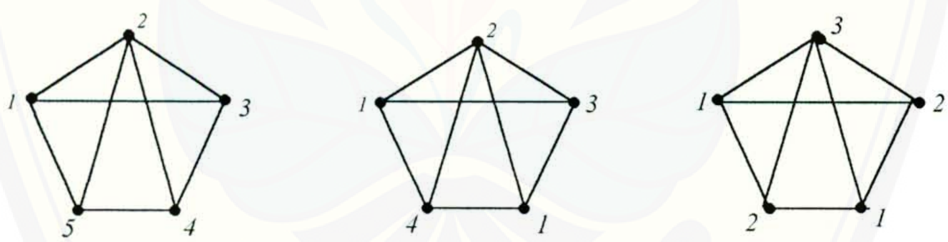
(a) (b)

Gambar 2.14 (a) Graf bipartit dan (b) Graf bipartit lengkap

2.3 Pewarnaan Titik

2.3.1 Definisi Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik pada graf G adalah suatu fungsi f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan warna $\{ 1, 2, 3, \ldots, n \}$ sedemikian hingga setiap sisi (x,y) dengan $x \neq y$ di $E(G)$ berlaku $f(x) \neq f(y)$. Untuk selanjutnya pewarnaan titik akan disebut pewarnaan saja. Pada umumnya pewarnaan titik pada suatu graf adalah tidak tunggal. Sebagai contoh, graf pada Gambar 2.15 dapat diwarnai dengan 3 cara, yaitu 2.15 a dengan 5 warna, 2.15 b dengan 4 warna dan 2.15 c dengan 3warna.



(a) (b) (c)

Gambar 2.15 Pewarnaan titik pada graf

2.3.2 Algoritma Welsh Powell

Algoritma Welsh Powell dapat digunakan untuk mengetahui langkah-langkah pewarnaan titik pada suatu graf.

Langkah-langkah algoritma Welsh Powell [2] :

1. Urutkan titik pada graf dari derajat titik yang paling tinggi ke derajat titik yang paling rendah, misalkan urutan titiknya $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dimana $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \ldots \geq \deg(v_n)$.

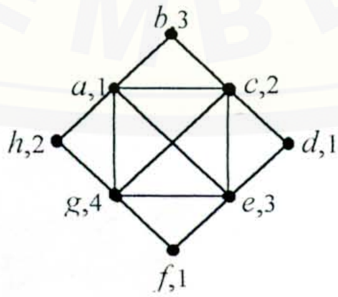
2. Memberi warna pertama (I) pada titik yang derajat titiknya paling tinggi dan pada titik yang tidak berdekatan (adjacent) diberikan warna yang sama.
3. Memberikan warna kedua (II) pada titik dengan derajat tertinggi yang belum terwarnai dan pada titik yang tidak berdekatan diberikan warna yang sama.
4. Lanjutkan langkah seperti langkah 3, jika semua titik belum terwarnai, dan berhenti jika semua titik telah terwarnai.

Berikut akan diberikan beberapa contoh langkah-langkah pewarnaan titik dari graf dengan menggunakan Algoritma Welsh Powell.

Contoh 1. Dapatkan pewarnaan titik dari graf pada Gambar 2.16.

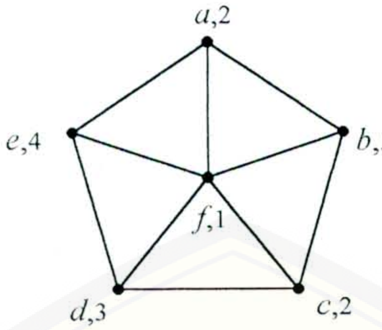
Solusi :

Kita mulai dengan mengurutkan derajat titik yang paling tinggi yaitu titik a, c, e, g, b, d, f, dan h dimana deg (a) = 5, deg (c) = 5, deg (e) = 5, deg (g) = 5, deg (b) = 2, deg (d) = 2, deg (f) = 2, deg (h) = 2. Kemudian kita memberi warna I pada titik a dan titik yang tidak berdekatan dengan titik a diberikan warna yang sama yaitu titik d dan f. Dengan menggunakan langkah ke-3, berikan warna II pada titik c dan h, berikan warna III pada titik e dan b, dan terakhir berikan warna IV pada titik g. Jadi graf pada Gambar 2.16 dapat diwarnai dengan 4 warna.



Gambar 2.16 Graf dengan jumlah warna 4

Contoh 2. Dapatkan pewarnaan titik dari graf pada Gambar 2.17.

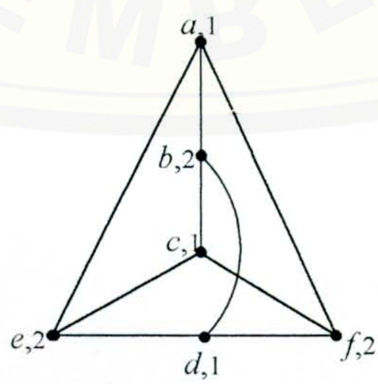


Gambar 2.17 Graf dengan jumlah warna 4

Solusi :

Dengan menggunakan Algoritma Welsh Powell, kita mulai dengan mengurutkan derajat titik yang paling tinggi yaitu titik f, a, b, c, d, dan e dimana deg $(f) = 5$, $deg\ (a) = 2$, $deg\ (b) = 2$, $deg\ (c) = 2$, $deg\ (d) = 2$, dan $deg\ (e) = 2$. Kita mulai mewarnai titik f dengan warna I. Karena titik f berdekatan dengan semua titik di graf tersebut maka hanya f yang mempunyai warna I. Dengan menggunakan langkah ke-3, berikan warna II pada titik a dan c, berikan warna III pada titik b dan d dan terakhir berikan warna IV pada titik e. Jadi graf pada Gambar 2.17 dapat diwarnai dengan 4 warna.

Contoh 3. Dapatkan pewarnaan titik dari graf pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18 Graf dengan jumlah warna 2

Solusi :

Graf pada Gambar 2.18 merupakan graf reguler dimana deg (a) = 3, deg (b) = 3, deg (c) = 3, deg (d) = 3, deg (e) = 3 dan deg (f) = 3. Kita dapat memulai dengan mewarnai salah satu titiknya, misalnya titik a dengan warna I, dan memberikan warna yang sama dengan titik yang tidak berdekatan dengan titik a yaitu titik c dan titik d. Dengan menggunakan langkah ke-3, kita dapat memberikan warna II pada titik-titik yang belum terwarnai yaitu titik b, e dan f. Jadi graf pada Gambar 2.18 dapat diwarnai dengan 2 warna.

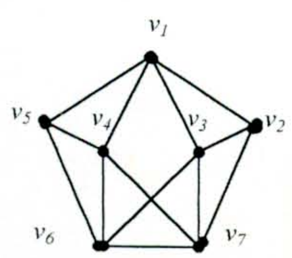
2.3.3 Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik $\chi(G)$ didefinisikan sebagai jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf G. Dengan kata lain jika $\chi(G) = n$ berarti titik-titik di graf G dapat diwarnai dengan n warna tetapi titik-titik di G tidak dapat diwarnai dengan $n - 1$ warna. Contoh graf dengan bilangan kromatik $\chi(G) = 3$ ditunjukkan pada Gambar 2.15 (c).

Memperhatikan contoh 1, 2 dan 3, dari sub 2.3.2 diketahui bahwa jumlah bilangan kromatik dari graf pada Gambar 2.16 adalah 4, graf pada Gambar 2.17 adalah 4, dan graf pada Gambar 2.18 adalah 2. Dalam contoh ini, pewarnaan dengan Algoritma Welsh Powell lansung mendapatkan bilangan kromatiknya.

2.3.4 Graf Kritis

Sebuah graf G disebut *kritis* jika $\chi(G - v) < \chi(G)$ untuk setiap titik v di G. Jika $\chi(G) = n$, maka G adalah n – kritis. Contoh graf kritis diberikan pada Gambar 2.19, dengan penjelasan sebagai berikut.



Gambar 2.19 Graf 4-kritis

Graf pada Gambar 2.19 mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 4$ dan

$\chi(G - v_1) = 3 < 4$,

$\chi(G - v_2) = 3 < 4$,

$\chi(G - v_3) = 3 < 4$,

$\chi(G - v_4) = 3 < 4$,

$\chi(G - v_5) = 3 < 4$,

$\chi(G - v_6) = 3 < 4$,

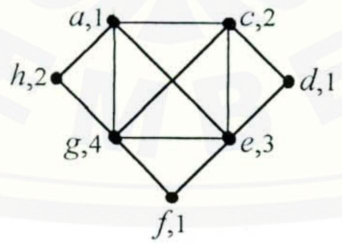
$\chi(G - v_7) = 3 < 4$.

Karena $\chi(G - v) < \chi(G)$ untuk setiap titik v di G maka graf pada Gambar 2.19 adalah graf kritis.

Berikut ini diberikan beberapa contoh lagi untuk menguji kekritisan suatu graf.

Contoh 1. Selidiki kekritisan graf pada Gambar 2.16.

Untuk mengetahui kekritisannya kita dapat menguji dengan menghilangkan salah satu titiknya satu persatu sampai semua titik teruji apakah grafnya memenuhi syarat $\chi(G - v) < \chi(G)$ untuk setiap titik v, sebagai berikut :



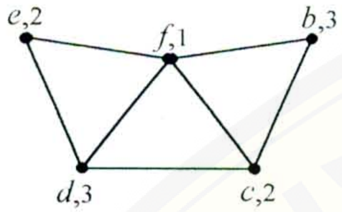
$(G - b)$

Graf pada Gambar 2.16 mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 4$.

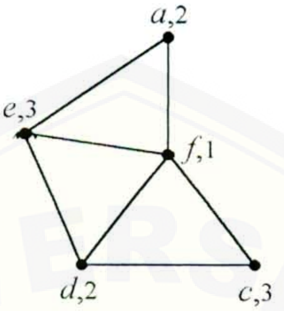
Karena ada bilangan kromatik $\chi(G - b) = 4 = \chi(G)$, maka graf pada Gambar 2.16 adalah bukan graf kritis.

Contoh 2. Selidiki kekritisan graf pada Gambar 2.17.

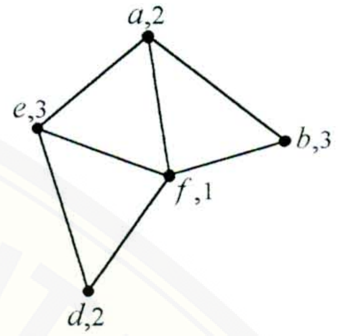
Untuk mengetahui kekritisannya kita dapat menguji dengan menghilangkan salah satu titiknya satu persatu sampai semua titik teruji apakah grafnya memenuhi syarat $\chi(G - v) < \chi(G)$ untuk setiap titik v, sebagai berikut :



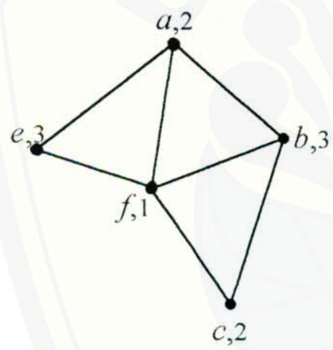
$(G - a)$



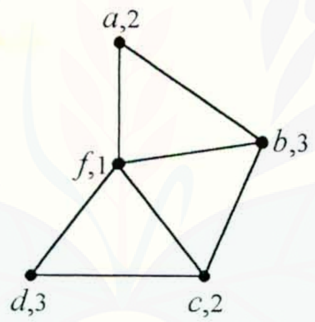
$(G - b)$



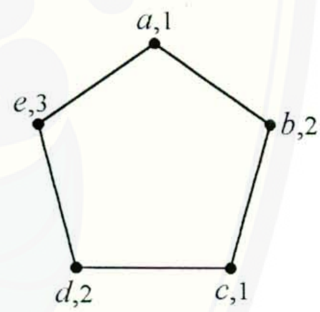
$(G - c)$



$(G - d)$



$(G - e)$



$(G - f)$

Graf pada Gambar 2.17 mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 4$ dan

$\chi(G - a) = 3 < 4$,

$\chi(G - b) = 3 < 4$,

$\chi(G - c) = 3 < 4$,

$\chi(G - d) = 3 < 4$,

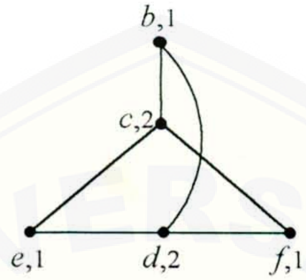
$\chi(G - e) = 3 < 4$,

$\chi(G - f) = 3 < 4$.

Karena $\chi(G - v) < \chi(G)$ untuk setiap titik v di G maka graf pada Gambar 2.17 adalah graf kritis.

Contoh 3. Selidiki kekritisan graf pada Gambar 2.18.

Untuk mengetahui kekritisannya kita dapat menguji dengan menghilangkan salah satu titiknya satu persatu sampai semua titik teruji apakah grafnya memenuhi syarat $\chi(G - v) < \chi(G)$ untuk setiap titik v, sebagai berikut :



$(G - a)$

Graf pada Gambar 2.18 mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 2$.
Karena ada bilangan kromatik $\chi(G - a) = 2 = \chi(G)$, maka graf pada Gambar 2.18 adalah bukan graf kritis.

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas mengenai bilangan kromatik $\chi(G)$ dan kekritisan suatu graf G.

3.1 Bilangan Kromatik

Berikut ini diberikan beberapa sifat dari graf yang berkaitan dengan bilangan kromatiknya.

Sifat 3.1 Jika $H \subseteq G$, maka $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Bukti :

1. Jika $H = G$ maka $\chi(H) = \chi(G)$.
2. Jika H subgraf G, dengan $H \neq G$ akan ditunjukkan $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Andaikan $\chi(H) > \chi(G)$, maka ada dua titik yang berdekatan di H tetapi tidak berdekatan di G. Jadi H bukan subgraf dari G. Hal ini kontradiksi dengan H subgraf G. Jadi haruslah $\chi(H) \leq \chi(G)$. ■

Sifat 3.2 Bilangan kromatik dari graf lengkap $\chi(K_n) = n$, untuk setiap n.

Bukti :

Misal u, v titik sebarang di K_n, maka u dan v saling berdekatan. Jadi titik u dan titik v harus mendapatkan warna yang berbeda. Jika ada titik w di graf K_n maka w akan berdekatan dengan titik u dan v sehingga titik w harus mendapat warna yang berbeda dengan titik u dan v. Apabila ada titik z di graf K_n maka titik z berdekatan dengan titik u, v dan w, sehingga titik z harus mendapatkan warna yang berbeda dengan titik u, v dan w. Langkah ini dilanjutkan sampai n titik dari K_n. Jadi bilangan kromatik dari K_n adalah sama dengan jumlah titiknya yaitu n. ■

Sifat 3.3 Jika G graf yang titiknya mempunyai derajat maksimum d, maka bilangan kromatik terbesar dari G adalah $d + 1$.

Bukti :

Misal $d = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ dengan $\deg(v) = d$ adalah jumlah sisi yang berinsiden dengan titik v. Jika setiap titik di G berdekatan, maka grafnya adalah graf lengkap dan mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = d + 1$. Jadi $\chi(G) \leq d + 1$. ■

Sifat 3.4 Bilangan kromatik $\chi(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf kosong.

Bukti :

($\Leftarrow$) Misal G adalah graf kosong, maka $E(G) = \phi$. Jadi tidak ada 2 titik di G yang adjacent. Dengan demikian titik-titik di G dapat diwarnai dengan satu warna. Jadi $\chi(G) = 1$.

($\Rightarrow$) Misal bilangan kromatik $\chi(G) = 1$, maka tidak ada titik di G yang saling adjacent. Sehingga $E(G) = \phi$. Jadi G adalah graf kosong. ■

Sifat 3.5 Bilangan kromatik $\chi(G) = 2$ jika dan hanya jika G bipartit.

Bukti :

($\Rightarrow$) Misalkan graf G mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 2$ maka $V(G)$ dapat dipisahkan menjadi dua himpunan titik yaitu V_1 dan V_2, dimana V_1 adalah himpunan titik dengan warna pertama dan V_2 adalah himpunan titik dengan warna yang kedua. Karena $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, maka G bipartit.

($\Leftarrow$) Misalkan G bipartit dengan himpunan titik $V(G)$, maka $V(G)$ dapat dipisahkan menjadi dua himpunan titik yaitu V_1 dan V_2 dimana $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sehingga anggota dari V_1 dapat diberi warna yang sama, misalnya warna satu dan anggota dari V_2 dapat diberi warna yang sama tetapi berbeda dengan warna V_1, misalnya warna dua. Jadi jika G bipartit maka bilangan kromatik $\chi(G) = 2$. ■

Berikut akan dibahas mengenai bilangan kromatik dari kelas-kelas graf yaitu graf lintasan dan graf sikel.

3.1.1 Bilangan kromatik dari graf lintasan

Misalkan graf lintasan P_n dengan himpunan titik

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$$

dan himpunan sisi

$$E(P_n) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_{n-1}\}$$

dimana

$$e_i = v_i v_{i+1} \qquad \text{untuk setiap } i = 1, 2, ..., n-1.$$

Himpunan titik dari graf lintasan $V(P_n)$ dapat dipisahkan menjadi dua yaitu himpunan titik V_1 dan V_2 dimana

$$V_1 = \{v_i \mid i \text{ ganjil}\}$$

$$V_2 = \{v_i \mid i \text{ genap}\}.$$

Jadi graf lintasan P_n, $n \neq 1$ adalah graf bipartit. Berdasarkan sifat 3.5, graf lintasan P_n, $n \neq 1$ dapat diwarnai dengan dua warna yaitu himpunan titik V_1 dengan warna satu dan himpunan titik V_2 dengan warna kedua. Jadi bilangan kromatik graf lintasan $\chi(P_n) = 2$, $n \neq 1$.

3.1.2 Bilangan kromatik dari graf sikel

Graf sikel dibedakan menjadi graf sikel genap C_{2n} dan graf sikel ganjil C_{2n+1}, karena himpunan titik pada graf sikel genap C_{2n} dapat dipartisi menjadi dua, sedangkan himpunan titik pada graf sikel ganjil dapat dipartisi menjadi tiga.

Misalkan graf sikel genap C_{2n} mempunyai himpunan titik

$$V(C_{2n}) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{2n}\}$$

dan himpunan sisi

$$E(C_{2n}) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_{2n}\}$$

dimana

$$e_i = \begin{cases} v_i v_{i+1} & i = 1, 2, ..., 2n-1, \\ v_i v_1 & i = 2n. \end{cases}$$

Pada graf sikel genap C_{2n}, himpunan titik $V(C_{2n})$ dapat dipisahkan menjadi dua yaitu himpunan titik V_1 dan V_2, dimana

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2n-1}\}$$

$$V_2 = \{v_2, v_4, v_6, \ldots, v_{2n}\}$$

Dengan demikian graf sikel genap C_{2n} adalah graf bipartit. Berdasarkan sifat 3.5, bilangan kromatik dari graf sikel genap $\chi(C_{2n}) = 2$ untuk $n > 1$.

Misalkan graf sikel ganjil C_{2n+1} mempunyai himpunan titik

$$V(C_{2n+1}) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2n+1}\}$$

dan himpunan sisi

$$E(C_{2n+1}) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{2n+1}\}$$

dimana

$$e_i = \begin{cases} v_i v_{i+1} & i = 1,2,\ldots,2n \\ v_i v_1 & i = 2n+1. \end{cases}$$

Pada sikel ganjil C_{2n+1}, himpunan titik $V(C_{2n+1})$ dapat dipisahkan menjadi tiga yaitu himpunan titik V_1, V_2, dan V_3, dimana

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2n-1}\}$$

$$V_2 = \{v_2, v_4, v_6, \ldots, v_{2n}\}$$

$$V_3 = \{v_{2n+1}\}$$

Dengan demikian graf sikel ganjil C_{2n+1} dapat diwarna dengan tiga warna yaitu pada himpunan V_1 diberi warna satu, himpunan V_2 diberi warna dua dan himpunan V_3 diberi warna tiga. Jadi bilangan kromatik graf sikel ganjil $\chi(C_{2n+1}) = 3$ untuk setiap n. ■

3.2 Graf Kritis

Berikut ini diberikan beberapa sifat dari graf yang berkaitan dengan kekritisannya.

Sifat 3.6 Jika G adalah kritis, maka $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$ untuk setiap titik v.

Bukti :

Andaikan $\chi(G - v) \neq \chi(G) - 1$, maka ada dua kemungkinan, yaitu

1. Jika $\chi(G - v) > \chi(G) - 1$, maka bilangan kromatik terkecil dari $G - v$ adalah $\chi(G - v) = \chi(G)$. Jika $\chi(G - v) = \chi(G)$, maka G tidak kritis. Kontradiksi dengan G kritis. Jadi jika G kritis maka $\chi(G - v) > \chi(G) - 1$ tidak mungkin terjadi.

2. Jika $\chi(G - v) < \chi(G) - 1$, maka bilangan kromatik terbesar dari $G - v$ adalah $\chi(G - v) = \chi(G) - 2$. Misal graf G mempunyai warna yang berbeda pada setiap titiknya, maka sebuah titik dihilangkan, warna yang tersisa maksimal berkurang satu. Jika berkurang dua, maka ada sisi yang hilang dengan kata lain ada dua titik yang adjacent menjadi tidak adjacent. Jadi jika G kritis, maka $\chi(G - v) < \chi(G) - 1$ tidak mungkin terjadi. ■

Sifat 3.7 Jika G kritis maka G terhubung.

Bukti :

Andaikan G tidak terhubung maka ada dua titik yang tidak mempunyai lintasan, sehingga dua titik itu mempunyai warna yang sama. Dimisalkan v adalah salah satu dari dua titik yang tidak mempunyai lintasan, maka bilangan kromatik $G - v$ sama dengan bilangan kromatik dari G yaitu $\chi(G - v) = \chi(G)$. Jadi G tidak kritis. Hal ini kontradiksi bahwa G kritis. Jadi haruslah G terhubung. ■

Sifat 3.8 Graf lintasan P_n adalah graf kritis jika dan hanya jika $n = 1, 2$.

Bukti :

($\Leftarrow$) Jika $n = 1$, maka grafnya adalah graf lintasan P_1. Apabila titik v di P_1 dihilangkan maka bilangan kromatik $\chi(P_1 - v) < \chi(P_1)$. Jika $n = 2$, maka grafnya adalah graf lintasan P_2. Bilangan kromatik graf lintasan $\chi(P_2) = 2$. Apabila titik v di graf P_2 dihilangkan, maka $\chi(P_2) = \chi(P_1) = 1 < \chi(P_2)$. Jadi graf lintasan P_1 dan P_2 adalah graf kritis.

($\Rightarrow$) Misal graf lintasan P_n adalah graf kritis, maka $\chi(P_n - v) < \chi(P_n)$ untuk setiap titik v. Andaikan $n > 2$, maka ada bilangan kromatik $\chi(P_n - v) = \chi(P_n)$ dimana v adalah titik dengan deg $(v) = 1$. Kontradiksi bahwa P_n graf kritis. Jadi hanya graf lintasan $P_n = 1, 2$ adalah graf kritis. ■

Akibat 3.1 Graf lintasan P_n dengan $n > 2$ adalah bukan graf kritis.

Bukti :

Bilangan kromatik pada graf lintasan $\chi(P_n) = 2$ jika $n \neq 1$. Misalkan titik v adalah titik yang berderajat satu di graf lintasan P_n dihilangkan, maka bilangan kromatik $\chi(P_n - v) = \chi(P_n) = 2$. Jadi graf lintasan P_n dengan $n > 2$ adalah bukan graf kritis. ■

Sifat 3.9 Graf sikel genap C_{2n} adalah bukan graf kritis untuk $n > 1$.

Bukti :

Bilangan kromatik pada graf sikel genap $\chi(C_{2n}) = 2$. Apabila titik v di C_{2n} dihilangkan maka graf C_{2n} menjadi graf lintasan P_{2n-1}. Bilangan kromatik dari $\chi(P_{2n-1}) = 2$. Karena bilangan kromatik dari $\chi(C_{2n} - v) = \chi(P_{2n-1}) = \chi(C_{2n}) = 2$ untuk setiap titik v, maka graf sikel C_{2n} bukan graf kritis. ■

Sifat 3.10 Graf sikel ganjil C_{2n+1} adalah graf kritis untuk setiap n.

Bukti :

Bilangan kromatik pada graf sikel ganjil $\chi(C_{2n+1}) = 3$. Apabila titik v di C_{2n+1} dihilangkan maka graf C_{2n+1} menjadi graf lintasan P_{2n}. Bilangan kromatik dari $\chi(P_{2n}) = 2$. Karena bilangan kromatik dari $\chi(C_{2n+1} - v) < \chi(C_{2n+1})$ untuk setiap titik v. Maka graf sikel C_{2n+1} adalah graf kritis. ■

Sifat 3.11 Graf lengkap K_n adalah graf kritis untuk setiap n.

Bukti :

Bilangan kromatik pada graf lengkap $\chi(K_n) = n$. Apabila titik v di graf K_n dihilangkan maka graf K_n menjadi graf lengkap yang berkurang satu titik yaitu K_{n-1} maka bilangan kromatik dari $\chi(K_n - v) = \chi(K_{n-1}) = n - 1 < \chi(K_n)$, untuk setiap titik v. Jadi graf lengkap K_n adalah graf kritis. ■

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand Gary and Mann, O., 1993, *Apllied and Algorithmic Graph Theory*, Mc. Graw-Hill, Inc., New York

[2] C. Wayne Patty, Hughes Hoyle, Peter Fletcher, 1991, *Foundation of Discrete Mathematics*, Pws-Kent Publishing Company Boston

[3] Nora Hartsfield, Gerhard Ringel, 1990, *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, Inc.

[4] Frank Harrary, 1969, *Graph Theory*, Addison Wesley Publishing Company, Inc.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand Gary and Mann, O., 1993, *Apllied and Algorithmic Graph Theory*, Mc. Graw-Hill, Inc., New York

[2] C. Wayne Patty, Hughes Hoyle, Peter Fletcher, 1991, *Foundation of Discrete Mathematics*, Pws-Kent Publishing Company Boston

[3] Nora Hartsfield, Gerhard Ringel, 1990, *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, Inc.

[4] Frank Harrary, 1969, *Graph Theory*, Addison Wesley Publishing Company, Inc.