STUDI MASALAH PEMROGRAMAN GEOMETRIK DENGAN METODE DUAL

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh:

FITRIYA
NIM. 991810101017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2003

MOTTO

" Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri."

(Q.S Ar-Ra'd: 11)

" Sesungguhnya Allah menyukai seorang hamba yang berkarya."

(Riwayat Hakim, Ath-Thabrani)

"Berpikir selama satu jam lebih baik daripada bangun (untuk beribadah) selama semalam"

(Riwayat Ibnu Sa'ad)

"Bukanlah suatu aib jika anda gagal dalam suatu usaha, yang merupakan aib ialah jika anda tidak berusaha bangkit dari kegagalan itu."

(Ali bin Abi Thalib)

Persembahan

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

- *Abiku Salim Mahfud dan Umiku Firdaus Bahannan yang doa, dorongan semangat dan perhatian selalu mengiringi setiap langkahku.*
- *Kakak-kakakku Naila dan Seha, adik-adikku Rosyida dan Saleh yang banyak memberikan dorongan dan doa.*
- *Ibu dan bapak dosen*
- *Sahabat-sahabatku*
- *Almamaterku yang kupuja dan kubanggakan.*

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Februari 2003 sampai dengan bulan Oktober 2003 di Jurusan Matematika MIPA UNEJ. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Oktober 2003

Fitriya

ABSTRAK

Studi Masalah Pemrograman Geometrik dengan Metode Dual, Fitriya, 991810101011 7, Skripsi, 2003, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pemrograman geometrik merupakan teknik pemrograman non linier yang digunakan untuk meminimumkan fungsi tujuan berbentuk posinomial. Jika ada kendala maka kendalanya juga berbentuk posinomial. Sebuah posinomial didefinisikan

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

dengan $c_j > 0,\ a_{ij} \in R,\ x_i > 0$. Masalah minimisasi ini selanjutnya disebut masalah primal. Dalam pemrograman geometrik akan dicari solusi masalah minimisasi tanpa kendala dan dengan kendala dengan metode dual. Dalam hal ini kendala berbentuk $g_k(\mathbf{X}) \leq \text{atau} \geq 1$, k menyatakan banyaknya kendala. Solusi untuk masalah minimisasi tanpa kendala dapat diperoleh dengan pendekatan kalkulus diferensial dan pertidaksamaan aritmatik-geometrik. Bentuk dualnya adalah memaksimumkan fungsi tujuan dual dengan 1 kendala normalitas dan n kendala ortogonalitas yang keduanya berbentuk linier dengan variabel dual sebanyak N. Nilai $(N-n-1)$ disebut derajat kesulitan dalam pemrograman geometrik. Semakin besar derajat kesulitan maka semakin rumit masalah yang akan diselesaikan. Jika derajat kesulitan nol, diperoleh solusi tunggal untuk variabel dual sedangkan jika derajat kesulitan positif, pemrograman geometrik memberikan pendekatan terbaik untuk solusi dual. Setelah solusi variabel dual diketahui maka nilai maksimum fungsi dual yang juga nilai minimum fungsi primal dapat ditentukan, baru kemudian diperoleh titik minimum global. Untuk masalah minimisasi dengan kendala, bentuk dualnya adalah memaksimumkan fungsi dual dengan 1 kendala normalitas dan n kendala ortogonalitas dengan variabel dual sebanyak N. Untuk kasus ini, derajat kesulitannya $(N-n-1)$ dengan N total jumlah suku dalam semua posinomial. Jika derajat kesulitan nol, maka solusi variabel dual tunggal. Jika derajat kesulitannya positif maka terdapat pendekatan terbaik untuk solusi variabel dual. Setelah solusi variabel dual diketahui, nilai optimal fungsi primal dan variabel primal dapat ditentukan. Jika seluruh kendala ≤ 1 maka solusinya memberikan minimum global sedangkan jika kendalanya campuran maka tidak menjamin minimum global tetapi paling tidak minimum lokal.

Kata kunci : pemrograman geometrik, posinomial, derajat kesulitan, kondisi normalitas, kondisi ortogonalitas.

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : JUM'AT

Tanggal : 07 NOV 2003

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)

Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si
NIP. 132 257 933

Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si
NIP. 132 206 019

Anggota I

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc
NIP. 132 048 321

Anggota II

M. Fatekurohman, S.Si, M.Si
NIP. 132 210 538

Mengesahkan

Dekan FMIPA Universitas Jember

Ir. Sumadi, MS
NIP 130 368 784

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaah puji syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat, barokah dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar kesarjanaan Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis telah banyak mendapatkan bantuan dan dorongan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Bapak Ir. Sumadi, M.S selaku Dekan Fakultas MIPA Universita Jember.
2. Bapak Drs. Kusno, DEA, Ph.D selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dan selaku Dosen Wali yang telah banyak memberikan bimbingan.
3. Ibu Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kosala Dwidja P., S.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan dan arahan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
4. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc dan Bapak M. Fatekurohman, S.Si, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
5. Kedua orangtuaku, kakak dan adikku yang telah banyak memberikan dorongan semangat.
6. Teman-temanku Indri, Drita, Gigih, Sari, Holifah, Sugiyati, Hessy, Indari, Dwisekar, Anang, Lusi, Khusnul, terima kasih atas bantuannya.
7. Sahabat-sahabatku di SMU yakni Mimin, Tyas, Venti.
8. Teman-teman seperjuangan angkatan “99”.
9. Kakak angkatan dan adik angkatan .
10. Semua pihak yang telah membantu kelancaran penulisan skripsi ini.

Penyusunan skripsi ini masih belum sempurna, untuk itu sangat diharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembacanya.

Jember, Oktober 2003

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN MOTTO ii
HALAMAN PERSEMBAHAN iii
HALAMAN DEKLARASI iv
ABSTRAK v
HALAMAN PENGESAHAN vi
KATA PENGANTAR vii
DAFTAR ISI ix
Bab I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan 2
1.4 Manfaat 2
Bab II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1 Maksimum dan Minimum 3
2.2 Optimisasi Multivariabel Tanpa Kendala 3
2.3 Optimisasi Mutivariabel dengan Kendala 7
2.3.1 Solusi dengan Metode Pengali Lagrange 7
2.3.2 Kondisi Kuhn-Tucker 9
2.4 Himpunan Konveks dan Fungsi Konveks 12
2.5 Bentuk Umum Posinomial 16
2.6 Bentuk Umum Pemrograman Geometrik 16
2.7 Program Dual 18
BAB III PEMBAHASAN 22
3.1 Solusi Masalah Minimisasi Tanpa Kendala 22
3.1.1 Pendekatan Kalkulus Diferensial 22
3.1.2 Pendekatan Pertidaksamaan Aritmatik-Geometrik 26
3.2 Solusi Masalah Minimisasi dengan Kendala 36

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN 50
4.1 Kesimpulan 50
4.2 Saran 52
DAFTAR PUSTAKA 53

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah yang dibahas dalam optimisasi adalah memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi tujuan yang dipengaruhi oleh kendala ataupun tanpa kendala. Pemrograman non linier merupakan masalah optimisasi dengan fungsi tujuannya non linier. Penyelesaian pemrograman non linier merupakan permasalahan yang kompleks, banyak ahli matematika berusaha menemukan teknik pemrograman non linier untuk menyelesaikan masalah optimisasi fungsi non linier baik dengan kendala maupun tanpa kendala. Hingga saat ini teknik pemrograman non linier telah banyak berkembang, salah satu diantaranya adalah pemrograman geometrik (*geometric programming*).

Pemrograman geometrik merupakan metode untuk menyelesaikan salah satu kelas dari masalah pemrograman non linier. Teknik ini diperkenalkan pertama kali oleh Clarence Zener dan Richard Duffin pada tahun 1961. Ide ini muncul sebagai upaya menyelesaikan optimisasi desain mesin yang banyak ditemui oleh Zener dan Duffin.

Pemrograman geometrik digunakan untuk meminimumkan suatu fungsi tujuan berbentuk khusus yang disebut posinomial. Jika ada kendala maka kendala juga berbentuk posinomial. Sebuah posinomial mempunyai bentuk

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

dengan $c_j > 0,\ a_{ij} \in R,\ x_i > 0,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le N.$ Masalah minimisasi ini selanjutnya disebut masalah primal.

Salah satu perbedaan pemrograman geometrik dibandingkan teknik pemrograman non linier lainnya adalah bahwa teknik ini menentukan pemecahan dengan mempertimbangkan masalah dual yang berkaitan dengan masalah primal, yang penyelesaiannya lebih sederhana. Teknik ini dapat mengurangi kesukaran dari masalah optimisasi sehingga lebih mudah digunakan dibandingkan teknik-teknik lainnya. Dengan menyelesaikan masalah dual, diperoleh nilai optimal

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah yang dibahas dalam optimisasi adalah memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi tujuan yang dipengaruhi oleh kendala ataupun tanpa kendala. Pemrograman non linier merupakan masalah optimisasi dengan fungsi tujuannya non linier. Penyelesaian pemrograman non linier merupakan permasalahan yang kompleks, banyak ahli matematika berusaha menemukan teknik pemrograman non linier untuk menyelesaikan masalah optimisasi fungsi non linier baik dengan kendala maupun tanpa kendala. Hingga saat ini teknik pemrograman non linier telah banyak berkembang, salah satu diantaranya adalah pemrograman geometrik (*geometric programming*).

Pemrograman geometrik merupakan metode untuk menyelesaikan salah satu kelas dari masalah pemrograman non linier. Teknik ini diperkenalkan pertama kali oleh Clarence Zener dan Richard Duffin pada tahun 1961. Ide ini muncul sebagai upaya menyelesaikan optimisasi desain mesin yang banyak ditemui oleh Zener dan Duffin.

Pemrograman geometrik digunakan untuk meminimumkan suatu fungsi tujuan berbentuk khusus yang disebut posinomial. Jika ada kendala maka kendala juga berbentuk posinomial. Sebuah posinomial mempunyai bentuk

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

dengan $c_j > 0,\ a_{ij} \in R,\ x_i > 0,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le N.$ Masalah minimisasi ini selanjutnya disebut masalah primal.

Salah satu perbedaan pemrograman geometrik dibandingkan teknik pemrograman non linier lainnya adalah bahwa teknik ini menentukan pemecahan dengan mempertimbangkan masalah dual yang berkaitan dengan masalah primal, yang penyelesaiannya lebih sederhana. Teknik ini dapat mengurangi kesukaran dari masalah optimisasi sehingga lebih mudah digunakan dibandingkan teknik-teknik lainnya. Dengan menyelesaikan masalah dual, diperoleh nilai optimal fungsi tujuan dan juga nilai optimal variabel-variabelnya. Melihat pentingnya peranan bentuk dual dalam pemrograman gometrik sehingga pada skripsi ini, penulis tertarik untuk membahas bentuk dual dalam pemrograman geometrik.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang diperoleh rumusan masalah:

1. menentukan solusi masalah minimisasi tanpa kendala dalam pemrograman geometrik dengan menggunakan metode dual;
2. menentukan solusi masalah minimisasi dengan kendala dalam pemrograman geometrik dengan menggunakan metode dual.

1.3 Tujuan Penelitian

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mendapatkan:

1. solusi masalah minimisasi tanpa kendala dalam pemrograman geometrik dengan metode dual;
2. solusi masalah minimisasi dengan kendala dalam pemrograman geometrik dengan metode dual.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah untuk membantu pihak atau instansi lainnya yang bergerak dalam bidang industri yang menggunakan matematika dalam menyelesaikan permasalahan yang berbentuk pemrograman geometrik. Pada umumnya pemrograman geometrik digunakan untuk menentukan biaya minimum dalam desain mesin dengan fungsi tujuan merupakan penjumlahan komponen biaya yang dapat dinyatakan dalam posinomial.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pemrograman non linier merupakan metode pemecahan masalah optimisasi dengan fungsi tujuannya non linier. Pemrograman non linier dapat terdiri dari variabel tunggal ataupun multivariabel. Pemrograman geometrik merupakan salah satu kelas dari pemrograman non linier yang melibatkan fungsi multivariabel. Berikut ini konsep-konsep dasar yang dibutuhkan dalam optimisasi multivariabel.

2.1 Maksimum dan Minimum

Sebuah fungsi $f(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ dikatakan mempunyai minimum relatif atau lokal di $\mathbf{X}^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)^T$ jika $f(\mathbf{X}^*)\le f(\mathbf{X}^*+\mathbf{h})$ untuk semua $\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_j,\ldots,h_n)^T$ sehingga $|h_j|$ cukup kecil untuk semua j [2]. Begitu juga titik $\mathbf{X}^*$ adalah titik maksimum lokal atau relatif jika $f(\mathbf{X}^*)\ge f(\mathbf{X}^*+\mathbf{h})$ untuk $\mathbf{h}$ seperti yang didefinisikan .

Fungsi $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum global atau absolut di titik $\mathbf{X}^*$ jika $f(\mathbf{X}^*)\le f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X}$ pada daerah asal tempat $f(\mathbf{X})$ didefinisikan. Begitu juga titik $\mathbf{X}^*$ akan menjadi titik maksimum global atau absolut dari $f(\mathbf{X})$ jika $f(\mathbf{X}^*)\ge f(\mathbf{X})$ untuk semua $\mathbf{X}$ pada daerah asal. Titik $\mathbf{X}^*$ adalah titik ekstrim dari f jika titik tersebut adalah suatu titik maksimum (global atau lokal) atau titik minimum (global atau lokal).

2.2 Optimisasi Multivariabel Tanpa Kendala

Suatu optimisasi multivariabel tanpa kendala berbentuk:

$$\text{optimumkan } f(\mathbf{X}) \text{ dengan } \mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T .$$

Pada bagian ini akan dibahas kondisi perlu dan cukup bagi fungsi multivariabel untuk memiliki ekstrim. Sebelumnya perlu diuraikan ekspansi deret Taylor dari fungsi multivariabel.

Definisi 2.1

Jika semua turunan parsial dari fungsi f dengan order $r \geq 1$ ada dan kontinu di suatu titik $\mathbf{X}^*$ maka

$$d^r f(\mathbf{X}^*) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dots\sum_{k=1}^{n}}_{\text{sejumlah } r} h_i h_j \dots h_k \frac{\partial^r f(X^*)}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_k} \tag{2.1}$$

disebut diferensial ke-r dari f di $\mathbf{X}^*$. Perhatikan bahwa terdapat r penjumlahan dan setiap h_i dihubungkan dengan masing-masing penjumlahan.

Ekspansi deret Taylor dari sebuah fungsi di sekitar titik $\mathbf{X}^*$ diberikan oleh

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^*) + df(\mathbf{X}^*) + \frac{1}{2!}d^2 f(\mathbf{X}^*) + \dots + \frac{1}{N!}d^N f(\mathbf{X}^*) + R_N(\mathbf{X}^*, \mathbf{h}) \tag{2.2}$$

Suku terakhir disebut sisa dan diberikan oleh

$$R_N(\mathbf{X}^*, \mathbf{h}) = \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\mathbf{X}^* + \theta\mathbf{h}) \tag{2.3}$$

dengan $0 < \theta < 1$, dan $\mathbf{h} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^*$.

Teorema 2.1

Jika $f(\mathbf{X})$ mempunyai suatu titik ekstrim (maksimum atau minimum) di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ dan jika turunan parsial pertama dari $f(\mathbf{X})$ ada di $\mathbf{X}^*$ maka

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{X}^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{X}^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{X}^*) = 0 \text{ atau } \nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0} \tag{2.4}$$

Bukti:

Andaikan satu dari turunan parsial pertama ke-k tidak nol, sehingga dari teorema Taylor

$$f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}^*) + R_i(\mathbf{X}^*, \mathbf{h})$$

$$f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}^*) = h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{X}^*) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{X}^* + \theta\mathbf{h}), 0 < \theta < 1$$

Karena $d^2 f(\mathbf{X}^* + \theta\mathbf{h})$ berorder h_i^2, suku dengan order **h** akan mendominasi suku dengan order yang lebih tinggi untuk nilai **h** yang cukup kecil. Dengan demikian tanda dari $f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}^*)$ ditentukan oleh tanda dari $h_k\, \partial f(\mathbf{X}^*)/\partial x_k$. Jika $\partial f(\mathbf{X}^*)/\partial x_k > 0$ maka tanda $f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}^*)$ akan positif untuk $h_k > 0$ dan negatif untuk $h_k < 0$. Ini berarti $\mathbf{X}^*$ bukan titik ekstrim. Kesimpulan yang sama diperoleh jika diasumsikan $\partial f(\mathbf{X}^*)/\partial x_k < 0$. Kesimpulan ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $\mathbf{X}^*$ adalah titik ekstrim sehingga dikatakan bahwa $\partial f(\mathbf{X}^*)/\partial x_k = 0$ di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$.■

Titik $\mathbf{X}^*$ dengan $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$ disebut titik stasioner.

Sebuah matriks simetri **A** dikatakan definit positif jika semua nilai eigennya positif yaitu semua nilai λ yang memenuhi persamaan determinan

$$|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = 0$$

harus positif. Tes lain yang dapat digunakan untuk menentukan definit positif dari matriks simetri **A** dengan order n melibatkan perhitungan determinan

$$A_1 = |a_{11}|,\; A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\; A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Matriks simetri **A** dikatakan definit positif jika dan hanya jika semua nilai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah positif. Matriks simetri **A** dikatakan definit negatif jika dan hanya jika tanda dari $A_j = (-1)^j$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n$. Jika beberapa dari A_j adalah positif dan sisanya nol maka **A** adalah semi definit positif sedangkan jika beberapa dari A_j bertanda $A_j = (-1)^j$, $j = 1,2,\ldots,n$ dan sisanya nol maka **A** adalah semi definit negatif. Jika tidak memenuhi salah satu definisi di atas maka **A** indefinit.

Teorema 2.2

Kondisi cukup untuk sebuah titik stasioner $\mathbf{X}^*$ menjadi titik ekstrim adalah bahwa matriks dari turunan parsial kedua yaitu matriks Hessian dari $f(\mathbf{X})$ yang dievaluasi di $\mathbf{X}^*$ adalah (i) definit positif ketika $\mathbf{X}^*$ sebuah titik minimum, dan (ii) definit negatif ketika $\mathbf{X}^*$ sebuah titik maksimum.

Bukti:

Dari Teorema Taylor

$$f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}^*) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*+\theta\mathbf{h}}, 0 < \theta < 1 \quad (2.5)$$

Karena $\mathbf{X}^*$ adalah titik stasioner, berdasarkan teorema 2.1 bahwa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Dengan demikian pers. (2.5) menjadi

$$f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}^*) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*+\theta\mathbf{h}}, 0 < \theta < 1$$

Karena itu tanda dari $f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}^*)$ akan sama dengan

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*+\theta\mathbf{h}}$$

Karena turunan parsial kedua $\partial^2 f(\mathbf{X}) / \partial x_i \partial x_j$ kontinu di sekitar titik $\mathbf{X}^*$, maka

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*+\theta\mathbf{h}}$$

akan mempunyai tanda yang sama dengan $\left.\partial^2 f(\mathbf{X}) / \partial x_i \partial x_j\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}$ untuk semua $\mathbf{h}$ yang cukup kecil. Dengan demikian $f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}^*)$ akan positif dan $\mathbf{X}^*$ adalah titik minimum relatif jika

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \quad (2.6)$$

bernilai positif. Nilai Q ini adalah suatu bentuk kuadratik dan dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$Q = \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{h}\Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \quad \text{dengan} \quad \mathbf{J}\Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} = \left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}\right] \tag{2.7}$$

J adalah matriks dari turunan parsial kedua dan disebut matriks Hessian dari $f(\mathbf{X})$.

Dari aljabar matriks, bentuk kuadratik dari pers. (2.6) atau (2.7) positif untuk semua **h** jika dan hanya jika **J** definit positif di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$. Jadi kondisi cukup untuk titik stasioner $\mathbf{X}^*$ menjadi minimum relatif adalah matriks Hessian yang dievaluasi di titik tersebut harus definit positif. Dengan proses yang sama, dapat dibuktikan bahwa matriks Hessian definit negatif untuk kasus maksimisasi. ■

Jika matriks Hessian dari f di $\mathbf{X}^*$ adalah indefinit maka $\mathbf{X}^*$ disebut titik pelana.

2.3 Optimisasi Multivariabel dengan Kendala

Banyak metode atau teknik yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan pemrograman non linier, baik dengan kendala persamaan maupun dengan kendala pertidaksamaan. Dalam tulisan ini hanya dibahas teknik-teknik yang dipandang cukup relevan, mudah diterapkan serta lebih praktis antara lain metode pengali Lagrange dan kondisi Kuhn-Tucker.

2.3.1 Solusi dengan Metode Pengali Lagrange

Metode pengali Lagrange merupakan suatu metode yang dipergunakan untuk pencarian titik optimum dari suatu fungsi dengan kendala yang berbentuk persamaan. Permasalahan minimisasi dari fungsi yang kontinu dengan kendala persamaan berbentuk:

minimumkan $f = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

dengan kendala (2.8)

$$g_j(\mathbf{X}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, m$$

Disini $m \le n$, jika $m > n$ maka tidak ada solusinya.

Untuk memecahkan masalah pada pers. (2.8), langkah awalnya menyusun fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{X}) \tag{2.9}$$

dengan λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ disebut pengali Lagrange dan m adalah banyaknya kendala. Selanjutnya titik minimum relatif dapat diperoleh dengan menggunakan teorema berikut ini.

Teorema 2.3

Kondisi perlu untuk fungsi $f(\mathbf{X})$ dengan kendala $g_j(\mathbf{X}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$ mempunyai minimum relatif di $\mathbf{X}^*$ adalah bahwa turunan parsial pertama dari fungsi Lagrange yang didefinisikan oleh $L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ yang terkait dengan masing-masing argumennya harus sama dengan nol.

Bukti teorema di atas dapat dilihat pada [5].

Setelah mendapatkan titik $\mathbf{X}^*$, untuk memastikan titik $\mathbf{X}^*$ adalah minimum relatif dapat digunakan teorema berikut ini.

Teorema 2.4

Kondisi cukup untuk $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum relatif di $\mathbf{X}^*$ adalah bentuk kuadratik Q, yang didefinisikan

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{2.10}$$

yang dievaluasi di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ harus definit positif untuk semua nilai $d\mathbf{X}$ yang memenuhi kendala.

Bukti teorema di atas dapat dilihat pada [5].

Berikut ini beberapa hal yang terkait dengan teorema di atas:

(1) Jika $Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$ negatif untuk semua nilai $d\mathbf{X}$ maka $\mathbf{X}^*$ adalah titik maksimum relatif dari $f(\mathbf{X})$.

(2) Bentuk kuadratik Q akan definit positif (atau negatif) untuk semua $d\mathbf{X}$ bila setiap akar polinomial z_i didefinisikan pada persamaan determinan berikut adalah positif (atau negatif): (Rao [5] dengan mengutip Hancock, 1960)

$$\begin{vmatrix} (L_{11}-z) & L_{12} & \cdots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} \\ L_{21} & (L_{22}-z) & \cdots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{m2} \\ \vdots & & & & & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & (L_{nn}-z) & g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad (2.11)$$

dengan

$$L_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}^*,\boldsymbol{\lambda}), \text{ dan } g_{ij}=\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{X}^*) \qquad (2.12)$$

(3) Persamaan (2.11) mengarah pada polinomial berorder *n-m* dalam *z*. Jika dari persamaan (2.11) beberapa akarnya positif dan lainnya negatif maka titik $\mathbf{X}^*$ bukan suatu titik ekstrim.

2.3.2 Kondisi Kuhn-Tucker

Kondisi Kuhn-Tucker digunakan untuk optimisasi fungsi dengan kendala pertidaksamaan sebagai berikut:

minimumkan $f(\mathbf{X})$

dengan kendala (2.13)

$$g_j(\mathbf{X})\le 0, \quad j=1,2,\ldots,m$$

Masalah di atas merupakan masalah minimisasi tetapi kondisi Kuhn-Tucker juga dapat diterapkan untuk masalah maksimisasi. Kondisi Kuhn-Tucker merupakan pengembangan dari metode Lagrange.

Kendala pertidaksamaan di atas dapat diubah menjadi kendala persamaan dengan menambahkan variabel slack nonnegatif y_j^2 sebagai berikut

$$g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m \tag{2.14}$$

Kendala telah berbentuk persamaan sehingga dapat disusun fungsi Lagrange

$$L(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(\mathbf{X}) + y_j^2] \tag{2.15}$$

dengan $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T$ adalah pengali Lagrange dan $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ adalah vektor variabel slack.

Titik stasioner dari fungsi Lagrange dapat ditemukan dengan menyelesaikan persamaan berikut (kondisi perlu):

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{X}) = 0, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0, \; j = 1,2,\ldots,m \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = 2\lambda_j y_j = 0, \; j = 1,2,\ldots,m \tag{2.18}$$

Persamaan (2.17) menjamin bahwa kendala $g_j(\mathbf{X}) \leq 0,\ j = 1,2,\ldots,m$ terpenuhi, sedangkan persamaan (2.18) menyatakan bahwa $\lambda_j = 0$ atau $y_j = 0$. Jika $\lambda_j = 0$, berarti kendala tidak aktif ($g_j < 0$) pada titik optimum sehingga dapat diabaikan. Jika $y_j = 0$, berarti kendala aktif ($g_j = 0$) pada titik optimum. Misalkan kendala dibagi menjadi dua sub himpunan J_1 dan J_2, dengan J_1 adalah himpunan kendala aktif dan J_2 adalah himpunan kendala tidak aktif.

Dengan demikian untuk $j \in J_1, y_j = 0$ (kendala aktif), dan untuk $j \in J_2$, $\lambda_j = 0$ (kendala tidak aktif) sehingga persamaan (2.16) dan (2.17) menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in J_1} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{2.19}$$

$$g_j(\mathbf{X}) = 0, \; j \in J_1 \tag{2.20}$$

$$g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0,\ j \in J_2 \tag{2.21}$$

Pada masalah minimisasi λ_j ($j \in J_1$) akan positif dan untuk masalah maksimisasi λ_j akan negatif [5]. Dengan demikian kondisi yang harus dipenuhi pada titik minimum $\mathbf{X}^*$ dari masalah yang dinyatakan pada persamaan (2.13) dapat dinyatakan

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in J_1} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n \tag{2.22}$$

dan

$$\lambda_j > 0,\ j \in J_1 \tag{2.23}$$

Kondisi di atas disebut kondisi Kuhn-Tucker yang merupakan kondisi perlu yang harus dipenuhi pada titik minimum relatif dari $f(\mathbf{X})$. Jika himpunan dari kendala aktif tidak diketahui, Kondisi Kuhn-Tucker dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, & i = 1,2,\ldots,n \\ \lambda_j g_j = 0 & ,\ j = 1,2,\ldots,m \\ g_j \le 0 & ,\ j = 1,2,\ldots,m \\ \quad \text{dan} & \\ \lambda_j \ge 0 & ,\ j = 1,2,\ldots,m \end{array}\right\} \tag{2.24}$$

Jika kasusnya adalah maksimisasi atau kendala dalam bentuk $g_j \ge 0$, maka λ_j nonpositif ($\lambda_j \le 0$). Di sisi lain jika kasusnya maksimisasi dengan kendala dalam bentuk $g_j \ge 0$ maka λ_j nonnegatif ($\lambda_j \ge 0$).

Kondisi yang disebutkan di atas tidak cukup untuk menjamin suatu minimum relatif di $\mathbf{X}^*$. Ada satu kelas dari masalah optimisasi yang dinamakan masalah pemrograman konveks. Masalah minimisasi yang dinyatakan dalam pers. (2.13) disebut masalah pemrograman konveks jika fungsi tujuan $f(\mathbf{X})$ dan kendala $g_j(\mathbf{X})$ adalah konveks atau cembung (*convex*). Definisi dan sifat dari fungsi konveks akan dijelaskan pada bagian berikutnya. Untuk masalah pemrograman konveks, kondisi Kuhn-Tucker merupakan kondisi perlu sekaligus kondisi cukup yang menjamin hanya ada satu titik yaitu minimum global [5].

2.4 Himpunan Konveks dan Fungsi Konveks

Sebuah titik $\mathbf{X} \in R^n$ dapat dituliskan $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dengan $x_i \in R,\ i = 1,2,\dots,n$ [4]. Nilai x_i disebut koordinat dari $\mathbf{X}$. Titik $\mathbf{X} \in R^n$ dikatakan kombinasi konveks dari $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m \in R^n$ jika terdapat $\lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,m$ dan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sehingga

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{X}_i = \lambda_1 \mathbf{X}_1 + \lambda_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{X}_m \tag{2.25}$$

Jika diketahui titik $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Y} \in R^n$ maka segmen garis (*line segment*) antara kedua titik tersebut adalah himpunan semua titik kombinasi konveks dari titik $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Y}$ atau dengan kata lain himpunan semua titik $\mathbf{Z} \in R^n$ dengan koordinat

$$z_j = \lambda x_j + (1-\lambda) y_j, \quad j = 1,2,\dots,n \text{ dan } 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{2.26}$$

Sebuah himpunan dari titik $\in R^n$ adalah konveks jika untuk 2 titik yang termasuk dalam himpunan ini berlaku bahwa segmen garis antara kedua titik juga termasuk dalam himpunan ini. Misalkan titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in R^n$ dan S menunjukkan himpunan konveks, secara matematis dapat didefinisikan sebagai berikut:

Jika titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$, maka titik $\mathbf{X} \in S$

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{2.27}$$

Teorema 2.5

Interseksi dari beberapa himpunan konveks juga himpunan konveks.

Bukti:

Misalkan $R_i = (i = 1,2,\dots,K)$ menunjukkan himpunan konveks dan R adalah interseksi dari himpunan-himpunan itu sedemikian hingga

$$R = \bigcap_{i=1}^{K} R_i$$

Jika titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \Re$, maka dari definisi interseksi,

$$\mathbf{X} = \alpha\,\mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \in R_i \qquad (i = 1,2,\ldots,K) \text{ dan } 0 \le \alpha \le 1$$

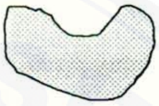
Dengan demikian

$$\mathbf{X} \in R = \bigcap_{i=1}^{K} R_i$$

sehingga teorema di atas terbukti.■

Berikut ini contoh himpunan konveks dan himpunan non konveks.

a. himpunan konveks



b. himpunan non konveks

Gambar 2.1 Himpunan konveks dan non konveks

Suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan konveks atau cembung (*convex*) jika untuk setiap dua titik yang berbeda $\mathbf{X}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})^T$ dan $\mathbf{X}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})^T$ dan untuk semua $0 \le \lambda \le 1$,

$$f(\lambda\mathbf{X}_2 + (1-\lambda)\mathbf{X}_1) \le \lambda f(\mathbf{X}_2) + (1-\lambda)f(\mathbf{X}_1) \tag{2.28}$$

yaitu jika segmen garis antara 2 titik berada di atas atau pada grafik $f(\mathbf{X})$.

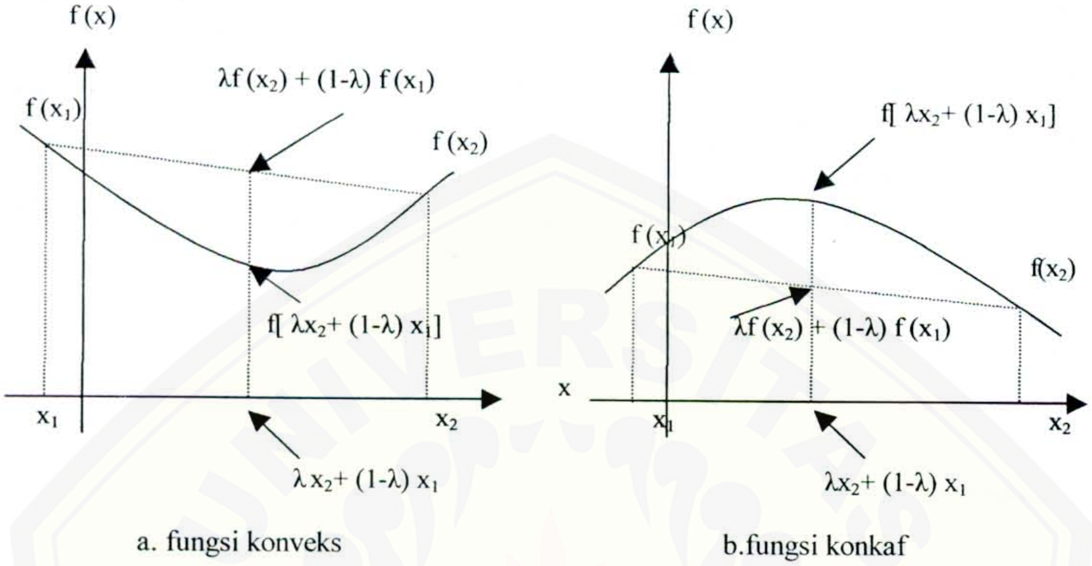
Begitu juga $f(\mathbf{X})$ dikatakan konkaf atau cekung (*concave*) jika untuk setiap dua titik yang berbeda $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$ dan untuk semua $0 \le \lambda \le 1$,

$$f(\lambda\mathbf{X}_2 + (1-\lambda)\mathbf{X}_1) \ge \lambda f(\mathbf{X}_2) + (1-\lambda)f(\mathbf{X}_1) \tag{2.29}$$

yaitu jika segmen garis antara 2 titik berada di bawah atau pada grafik $f(\mathbf{X})$. Contoh fungsi konveks dan fungsi konkaf terdapat pada gambar 2.2.

Dapat dilihat bahwa fungsi konveks melengkung ke atas dan fungsi konkaf melengkung ke bawah. Juga terlihat bahwa negatif dari fungsi konveks adalah fungsi konkaf dan sebaliknya. Penjumlahan dari fungsi konveks adalah fungsi konveks dan penjumlahan dari fungsi konkaf adalah fungsi konkaf.

Jika tanda $\le$ pada pers. (2.28) diganti tanda $<$ maka dikatakan $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks ketat (*strictly convex*) dan jika tanda $\ge$ pada pers. (2.29) diganti tanda > maka dikatakan $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konkaf ketat (*strictly concave*).



Gambar 2.2 Fungsi konveks dan fungsi konkaf

Teorema 2.6

Suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ adalah konveks jika untuk dua titik $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$

$$f(\mathbf{X}_2) \geq f(\mathbf{X}_1) + \nabla f^T(\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \tag{2.30}$$

Bukti:

Jika $f(\mathbf{X})$ konveks, maka

$$f[\lambda \mathbf{X}_2 + (1-\lambda)\mathbf{X}_1] \leq \lambda f(\mathbf{X}_2) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_1)$$

$$f[\mathbf{X}_1 + \lambda\, (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)] \leq f(\mathbf{X}_1) + \lambda\, [f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1)]$$

Pertidaksamaan di atas dapat dituliskan kembali menjadi

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) \geq \left\{ \frac{f[\mathbf{X}_1 + \lambda\, (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)] - f(\mathbf{X}_1)}{\lambda\, (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)} \right\} (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \tag{2.31}$$

Dengan mendefinisikan $\Delta\mathbf{X} = \lambda\, (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)$, pertidaksamaan (2.31) menjadi

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) \geq \frac{f[\mathbf{X}_1 + \Delta\mathbf{X})] - f(\mathbf{X}_1)}{\Delta\mathbf{X}} (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \tag{2.32}$$

Dengan mengambil limit $\Delta\mathbf{X} \to \mathbf{0}$, pertidaksamaan (2.32) menjadi

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) \geq \nabla f^T(\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \tag{2.33}$$

terbukti.■

Jika $f(\mathbf{X})$ konkaf, maka tanda $\geq$ pada pertidaksamaan (2.33) menjadi $\leq$.

Teorema 2.7

Suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ adalah konveks jika matrik Hessian $\mathbf{H}(\mathbf{X}) = [\partial^2 f(\mathbf{X}) / \partial x_i \partial x_j]$ adalah semi definit positif.

Bukti:

Dari Teorema Taylor,

$$f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}^*) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*+\theta\mathbf{h}} , 0 < \theta < 1 \quad (2.34)$$

Dengan memisalkan

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{X}^* + \mathbf{h} = \mathbf{X}_2 \text{ dan } \mathbf{h} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1,$$

pers. (2.34) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(\mathbf{X}_2) = f(\mathbf{X}_1) + \nabla f^T(\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + 1/2\,(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^T$$
$$\mathbf{H}\{\mathbf{X}_1 + \theta(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)\}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \quad (2.35)$$

Jika $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ adalah semi definit positif maka pertidaksamaan (2.33) terpenuhi (berarti $f(\mathbf{X})$ adalah konveks).■

Jika $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ definit positif, fungsi $f(\mathbf{X})$ akan konveks ketat. Juga dapat dibuktikan bahwa jika $f(\mathbf{X})$ konkaf maka matrik Hessian adalah semi definit negatif.

Teorema 2.8

Suatu minimum lokal dari suatu fungsi konveks $f(\mathbf{X})$ adalah minimum global.

Bukti:

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan terdapat dua titik minimum lokal yang berbeda dari $f(\mathbf{X})$ yaitu $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$. Misalkan $f(\mathbf{X}_2) \leq f(\mathbf{X}_1)$, karena $f(\mathbf{X})$ adalah konveks, $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$ memenuhi relasi (2.33)

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) \geq \nabla f^T(\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \tag{2.36}$$

$$\nabla f^T(\mathbf{X}_1)\mathbf{S} \leq 0 \tag{2.37}$$

dengan $\mathbf{S} = (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)$ adalah sebuah vektor yang menghubungkan titik $\mathbf{X}_1$ ke $\mathbf{X}_2$ .Pers. (2.37) menunjukkan bahwa nilai dari fungsi $f(\mathbf{X})$ dapat semakin berkurang atau menurun dengan menggerakkan arah $\mathbf{S} = (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)$ dari titik $\mathbf{X}_1$. Kesimpulan ini kontradiksi dengan asumsi asal bahwa $\mathbf{X}_1$ adalah minimum lokal. Jadi tidak mungkin ada lebih dari satu titik minimum dari sebuah fungsi konveks.■

Juga dapat dibuktikan bahwa maksimum lokal dari suatu fungsi konkaf $f(\mathbf{X})$ adalah maksimum global.

2.5 Bentuk Umum Posinomial

Sebuah posinomial didefinisikan [3]:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} U_j(\mathbf{X}) = U_1(\mathbf{X}) + U_2(\mathbf{X}) + \ldots + U_N(\mathbf{X}) \tag{2.38}$$

dengan $U_j(\mathbf{X}) = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} = c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_n^{a_{nj}}$ (2.39)

$$c_j > 0,\ \ a_{ij} \in R,\ \ x_i > 0,\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq N$$

Fungsi $f(\mathbf{X})$ mengambil bentuk sebuah polinomial untuk alasan ini dan karena semua $c_j > 0$ serta variabelnya bernilai positif, sehingga diberi nama posinomial.

Contoh : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3^5 + \frac{3}{8} x_1 x_2 + \frac{4}{x_1 x_2 x_3} + 6x_2$

2.6 Bentuk Umum Pemrograman Geometrik

Pemrograman geometrik merupakan metode untuk memecahkan salah satu kelas dari masalah pemrograman non linier. Pemrograman ini digunakan untuk meminimumkan sebuah fungsi tujuan yang berbentuk posinomial. Jika ada kendala maka kendala juga berbentuk posinomial.

Terdapat dua macam masalah dalam pemrograman geometrik yaitu:

1. masalah minimisasi tanpa kendala
2. masalah minimisasi dengan kendala

Masalah minimisasi tanpa kendala dapat dirumuskan sebagai berikut:

tentukan $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$

yang meminimumkan fungsi tujuan

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} U_j(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \dots x_n^{a_{nj}} \right) \tag{2.40}$$

dengan $c_j > 0$, $x_i > 0$, dan $a_{ij} \in R$.

Masalah minimisasi ini kemudian disebut masalah primal.

Masalah minimisasi dengan kendala dapat dinyatakan sebagai berikut:

tentukan $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{Bmatrix}$

yang meminimumkan fungsi tujuan

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_0} c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \tag{2.41}$$

dan memenuhi kendala

$$g_k(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_k} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} (\le, \ge) 1, \quad k = 1, 2, \dots, m \tag{2.42}$$

dengan koefisien $c_{oj}\ (j = 1, 2, \dots, N_0)$ dan $c_{kj}\ (k = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, N_k)$ merupakan bilangan positif, pangkat $a_{0ij}\ (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N_0)$ dan $a_{kij}\ (k = 1, 2, \dots, m;\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N_k)$ merupakan bilangan real, m menyatakan jumlah kendala, N_0 menyatakan jumlah suku dalam fungsi tujuan dan N_k menyatakan jumlah suku dalam kendala ke-k, variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ bernilai positif.

Masalah minimisasi ini kemudian disebut masalah primal.

2.7 Masalah Dual

Masalah dualitas merupakan konsep dasar yang memegang peranan penting dalam teori optimisasi. Disini akan dibahas dualitas yang hanya berhubungan dengan masalah pemrograman non linier walaupun konsep itu juga digunakan untuk masalah pemrograman linier.

Masalah pemrograman primal dapat dituliskan:

$$\left.\begin{array}{l}\text{minimumkan } y(\mathbf{X}),\ \mathbf{X} = (x_1,\ldots,x_n)^T \\ \text{dengan kendala } f_i(\mathbf{X}) \geq 0, \quad i = 1,\ldots,k\end{array}\right\} \tag{2.43}$$

Fungsi Lagrange untuk pemrograman primal tersebut bisa ditulis sebagai

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = y(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}) = y(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\mathbf{X})$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \qquad \mathbf{f}^T = (f_1,\ldots f_k)$$

Suatu fungsi $K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega})$ dikatakan mempunyai suatu titik pelana jika terdapat titik $(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\omega}^0)$ sehingga

$$K(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\omega}) \leq K(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\omega}^0) \leq K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega}^0) \tag{2.44}$$

untuk semua $\mathbf{X},\boldsymbol{\omega}$ [1]. Andaikan

$$\hat{K}(\boldsymbol{\omega}) \equiv \min_{\mathbf{X}}[K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega})] \qquad \text{(diminimumkan } \mathbf{X} \text{ untuk konstanta } \boldsymbol{\omega}\text{)}$$

$$\overline{K}(\mathbf{X}) \equiv \max_{\boldsymbol{\omega}}[K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega})] \qquad \text{(dimaksimumkan } \boldsymbol{\omega} \text{ untuk konstanta } \mathbf{X}\text{)}$$

maka

$$\overline{K}(\mathbf{X}) \geq K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega}) \geq \hat{K}(\boldsymbol{\omega}) \tag{2.45}$$

untuk sebarang $(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega})$, sehingga berlaku

$$\overline{K}(\mathbf{X}) \geq \hat{K}(\boldsymbol{\omega})$$

untuk sebarang $(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega})$.

Lemma berikut, merupakan dasar penting dalam pengembangan teori dualitas.

Lemma 1

Ketiga pernyataan berikut ekuivalen

(a) $\min_{\mathbf{X}}\{\max_{\boldsymbol{\omega}}[K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega})]\} \equiv \max_{\boldsymbol{\omega}}\{\min_{\mathbf{X}}[K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega})]\}$

(b) $\overline{K}(\mathbf{X}^0) = \hat{K}(\boldsymbol{\omega}^0)$

(c) $K(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\omega}) \le K(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\omega}^0) \le K(\mathbf{X},\boldsymbol{\omega}^0)$

Bukti lemma tersebut dapat dilihat pada [1].

Lemma 1 memberikan beberapa cara penulisan titik pelana, $(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\omega}^0)$. Akan tetapi, ada kemungkinan suatu fungsi tidak mempunyai titik pelana, sehingga jika demikian berlaku

$$\min_{\mathbf{X}}[\overline{K}(\mathbf{X})] > \max_{\boldsymbol{\omega}}[\hat{K}(\boldsymbol{\omega})]$$

Fungsi Lagrange untuk program primal adalah

$$L(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\lambda}) = y(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{f}(\mathbf{X})$$

Dari pers. (2.44), fungsi Lagrange ini mempunyai titik pelana jika

$$L(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\lambda}) \le L(\mathbf{X}^0,\boldsymbol{\lambda}^0) \le L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}^0)$$

Analog dengan $\hat{K}$ dan $\overline{K}$ didefinisikan fungsi primal

$$\overline{L}(\mathbf{X}) = \max_{\boldsymbol{\lambda}\ge 0}[L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})]$$

dan fungsi dual

$$\hat{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{X}}[L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})]$$

Dari dua fungsi ini akan didefinisikan dua masalah pemrograman yaitu masalah primal dan masalah dual dengan masalah primal digunakan untuk menentukan $\mathbf{X}^0$, dapat dituliskan

$$\overline{L}(\mathbf{X}^0) = \min_{\mathbf{X}}[\overline{L}(\mathbf{X})]$$

sedangkan masalah dual untuk menghitung $\boldsymbol{\lambda}^0$ dapat dituliskan

$$\hat{L}(\boldsymbol{\lambda}^0) = \max_{\boldsymbol{\lambda}\ge 0}[\hat{L}(\boldsymbol{\lambda})]$$

Untuk menganalisa masalah primal, fungsi primal perlu dievaluasi:

$$\overline{L}(\mathbf{X}) = \max_{\boldsymbol{\lambda}\ge 0}[y(\mathbf{X}) - \sum_i \lambda_i f_i(\mathbf{X})] = \begin{cases} y(\mathbf{X}) & \text{jika semua } f_i(\mathbf{X}) \ge 0 \\ +\infty & \text{jika salah satu } f_i(\mathbf{X}) < 0 \end{cases} \tag{2.46}$$

Hasil ini sangat jelas, karena jika semua $f_i(\mathbf{X}) \geq 0$ dan karena harus memilih $\lambda_i \geq 0$, maka dengan memilih semua $\lambda_i = 0$ akan memaksimumkan $L(\mathbf{X})$. Tetapi, jika $f_i(\mathbf{X}) < 0$, maka dengan memilih $\lambda_i \to \infty$ akan memaksimumkan fungsi Lagrange.

Masalah primal menghendaki agar fungsi primal $\overline{L}(\mathbf{X})$ diminimumkan. Dalam proses minimisasi bagian dimana $\overline{L}(\mathbf{X}) \to \infty$ tentu saja dapat diabaikan, dan masalah primal dapat dinyatakan dalam

$$\min_{\mathbf{X}} \overline{L}(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X}}[y(\mathbf{X})] \text{ atas } \mathbf{X} \text{ sedemikian hingga } f_i(\mathbf{X}) \geq 0; i = 1, \ldots, k$$

atau

minimumkan $y(\mathbf{X})$

dengan kendala $f_i(\mathbf{X}) \geq 0; \quad i = 1, \ldots, k$

Pada masalah dual, titik $(\mathbf{X}^A, \boldsymbol{\lambda}^A)$ dikatakan penyelesaian layak (*feasible solutions*) untuk dual jika

$$\hat{L}(\boldsymbol{\lambda}^A) = L(\mathbf{X}^A, \boldsymbol{\lambda}^A)$$

Jika $\boldsymbol{\lambda}^0$ adalah nilai optimum $\boldsymbol{\lambda}$ untuk dual dan $(\mathbf{X}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ adalah penyelesaian layak untuk dual, maka $(\mathbf{X}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ dikatakan optimum untuk dual.

Lemma 2

Andaikan $\mathbf{X}^A$ penyelesaian layak untuk masalah primal, maka berlaku

$$\overline{L}(\mathbf{X}^A) = y(\mathbf{X}^A)$$

dan jika $(\mathbf{X}^B, \boldsymbol{\lambda}^B)$ penyelesaian layak untuk masalah dual maka berlaku

$$\overline{L}(\mathbf{X}^A) = y(\mathbf{X}^A) \geq y(\mathbf{X}^B) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^B f_i(\mathbf{X}^B) = L(\mathbf{X}^B, \boldsymbol{\lambda}^B) = \hat{L}(\boldsymbol{\lambda}^B)$$

Bukti lemma 2 dapat dilihat pada [1].

Lemma 2 mengatakan bahwa masalah dual selalu memberikan batas bawah untuk masalah primal. Ini juga berlaku bahkan jika Lagrange tidak mempunyai titik pelana.

Masalah dual secara umum adalah:

$$\text{maksimumkan } z(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = y(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\mathbf{X}) \tag{2.47}$$

$$\text{dengan kendala } \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \tag{2.48}$$

$$y(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X}} \left[y(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\mathbf{X}) \right] \tag{2.49}$$

Misalkan y adalah fungsi konveks ketat, semua f_i adalah fungsi konkaf maka masalah primal adalah masalah pemrograman konveks yang menjamin hanya satu titik minimum dan

$$\nabla L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \text{ jika } L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{X}} [L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})].$$

Dengan melihat uraian di atas bentuk dual dari masalah primal (2.44) adalah:

$$\text{maksimumkan } z(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = y(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\mathbf{X}) \tag{2.50}$$

$$\text{dengan kendala } \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \tag{2.51}$$

$$\nabla y(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \tag{2.52}$$

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas solusi masalah minimisasi tanpa kendala dan dengan kendala dalam pemrograman geometrik dengan metode dual.

3.1 Solusi Masalah Minimisasi Tanpa Kendala

Solusi untuk masalah minimisasi tanpa kendala dapat diperoleh dengan dua pendekatan, yang pertama berdasarkan kalkulus diferensial dan yang kedua berdasarkan konsep pertidaksamaan aritmatik-geometrik.

3.1.1 Pendekatan Kalkulus Diferensial

Pandang masalah minimisasi tanpa kendala pada Subbab 2.6, yang diinginkan dari masalah tersebut adalah untuk menentukan nilai $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ yang meminimumkan fungsi tujuan $f(\mathbf{X})$.

Menurut teori dalam kalkulus diferensial pada Bab 2, kondisi perlu untuk titik minimum dari f diberikan oleh

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{N} \left(c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1,j}} a_{kj} x_k^{a_{kj}-1} x_{k+1}^{a_{k+1,j}} \ldots x_n^{a_{nj}} \right) = 0$$

$$k = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.1)$$

Karena semua $x_k > 0$, dengan mengalikan persamaan (3.1) dengan x_k, persamaan tersebut menjadi

$$x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{N} a_{kj} \left(c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1,j}} x_k^{a_{kj}} x_{k+1}^{a_{k+1,j}} \ldots x_n^{a_{nj}} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{kj} U_j(\mathbf{X}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.2)$$

Untuk menemukan vektor minimum

$$\mathbf{X}^* = \begin{Bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{Bmatrix}$$

perlu menyelesaikan *n* persamaan non linier dalam *n* variabel yang tidak diketahui yang diberikan oleh persamaan (3.1). Penyelesaian demikian merupakan permasalahan yang rumit sehingga akan dicari metode lain untuk mendapatkan solusinya. Karena $\mathbf{X}^*$ memenuhi persamaan (3.2), maka diperoleh

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj} U_j(\mathbf{X}^*) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.3}$$

Setelah dibagi dengan nilai minimum dari fungsi tujuan f^*, pers. (3.3) menjadi

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta^*_j a_{kj} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.4}$$

dengan nilai Δ^*_j didefinisikan sebagai

$$\Delta^*_j = \frac{U_j(\mathbf{X}^*)}{f^*} = \frac{U^*_j}{f^*} \tag{3.5}$$

Dalam hal ini nilai Δ^*_j menunjukkan kontribusi relatif suku ke-j pada nilai optimal fungsi tujuan f^*.

Dari persamaan (3.5) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta^*_j = \Delta^*_1 + \Delta^*_2 + \ldots + \Delta^*_N$$

$$= \frac{1}{f^*}\left(U^*_1 + U^*_2 + \ldots + U^*_N\right) = 1 \tag{3.6}$$

Persamaan (3.4) disebut kondisi ortogonalitas (*orthogonality conditions*) dan persamaan (3.6) disebut kondisi normalitas (*normality conditions*).

Untuk memperoleh nilai minimum dari fungsi tujuan f^*, pandang bahwa

$$f^* = (f^*)^1 = (f^*)^{\sum_{j=1}^{N} \Delta^*_j} = \left(f^*\right)^{\Delta^*_1}\left(f^*\right)^{\Delta^*_2} \ldots \left(f^*\right)^{\Delta^*_N} \tag{3.7}$$

Karena

$$f^* = \frac{U^*_1}{\Delta^*_1} = \frac{U^*_2}{\Delta^*_2} = \ldots = \frac{U^*_N}{\Delta^*_N} \tag{3.8}$$

maka persamaan (3.7) menjadi

$$f^* = \left(\frac{U^*_1}{\Delta^*_1}\right)^{\Delta^*_1} \left(\frac{U^*_2}{\Delta^*_2}\right)^{\Delta^*_2} \ldots \left(\frac{U^*_N}{\Delta^*_N}\right)^{\Delta^*_N} \tag{3.9}$$

Dengan mensubstitusi

$$U^*_j = c_j \prod_{i=1}^{n} \left(x^*_i\right)^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

persamaan (3.9) menjadi

$$f^* = \left\{\left(\frac{c_1}{\Delta_1^*}\right)^{\Delta_1^*}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^{a_{i1}}\right]^{\Delta_1^*}\right\}\left\{\left(\frac{c_2}{\Delta_2^*}\right)^{\Delta_2^*}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^{a_{i2}}\right]^{\Delta_2^*}\right\}$$

$$\cdots\left\{\left(\frac{c_N}{\Delta_N^*}\right)^{\Delta_N^*}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^{a_{iN}}\right]^{\Delta_N^*}\right\}$$

$$= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j^*}\right)^{\Delta_j^*}\right\}\left\{\prod_{j=1}^{N}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{a_{ij}}\right]^{\Delta_j^*}\right\}$$

$$= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j^*}\right)^{\Delta_j^*}\right\}\left\{\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j^*}\right\}$$

$$= \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j^*}\right)^{\Delta_j^*} \tag{3.10}$$

langkah ini dibenarkan karena $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j^* = 0,\ \forall i$.

Dengan demikian nilai minimum fungsi tujuan f^* dapat ditentukan dengan persamaan (3.10) setelah Δ_j^* diperoleh. Dalam hal ini Δ_j disebut variabel dual dan persamaan (3.10) adalah fungsi tujuan untuk masalah dual. Jadi nilai optimal fungsi tujuan dapat ditentukan tanpa menemukan nilai optimal variabel asal. Untuk menentukan $\Delta_j^*(j = 1,2,\ldots,N)$, persamaan (3.4) dan (3.6) dapat digunakan, yang terdiri dari $n+1$ persamaan dalam N variabel Δ_j yang tidak diketahui. Jika $N = n+1$, maka akan terdapat persamaan linier simultan sebanyak jumlah variabel yang tidak diketahui sehingga diperoleh solusi tunggal.

Jumlah $N-n-1$ disebut derajat kesulitan (*degree of difficulty*) dalam pemrograman geometrik. Dalam kasus masalah pemrograman geometrik dengan kendala, N menunjukkan total jumlah suku dalam semua posinomial dan n mewakili jumlah variabel. Jika $N-n-1=0$, masalah dikatakan mempunyai derajat kesulitan nol. Dalam kasus ini $\Delta_j^*(j=1,2,\ldots,N)$ dapat ditentukan secara tunggal dari kondisi ortogonalitas dan normalitas. Jika $N > n+1$, berarti jumlah variabel (Δ_j) lebih besar dari pada jumlah persamaan dan solusi untuk kasus ini dibahas pada bagian berikutnya (solusi dengan pertidaksamaan aritmatik-geometrik). Perlu diperhatikan bahwa pemrograman geometrik tidak dipergunakan untuk masalah dengan derajat kesulitan negatif.

Nilai Δ_j^* yang dicari dengan menyelesaikan persamaan (3.4) dan (3.6) diperoleh dengan menggunakan kondisi perlu saja, tetapi dapat ditunjukkan pada bagian berikutnya bahwa kondisi ini juga merupakan kondisi cukup.

Dengan diketahuinya $\Delta_j^* (j = 1,2,\ldots,N)$ dan f^*, nilai optimal variabel dapat ditentukan dengan memandang hubungan

$$U_j^* = \Delta_j^* f^* = c_j \prod_{i=1}^{n} (x_i^*)^{a_{ij}}, j = 1,2,\ldots,N \tag{3.11}$$

Solusi dari persamaan ini menghasilkan $x_i^* \ (i = 1,2,\ldots,n)$. Dapat dilihat bahwa persamaan (3.11) non linier dan masing-masing terdiri hanya satu suku. Jika menemui kesulitan untuk menyelesaikannya secara langsung, untuk mempermudah penentuan solusi dari persamaan (3.11), persamaan ini dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\Delta_j^* f^*}{c_j} = (x_1^*)^{a_{1j}} (x_2^*)^{a_{2j}} \ldots (x_n^*)^{a_{nj}}, \qquad j = 1,2,\ldots,N \tag{3.12}$$

Dengan mengambil logaritma pada kedua sisi dari persamaan (3.12), diperoleh

$$\ln\left(\frac{\Delta_j^* f^*}{c_j}\right) = a_{1j} \ln(x_1^*) + a_{2j} \ln(x_2^*) + \ldots + a_{nj} \ln(x_n^*), \quad j = 1,2,\ldots,N \tag{3.13}$$

Dengan memisalkan

$$w_i = \ln x_i^*, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.14}$$

persamaan (3.13) menjadi

$$a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \ldots + a_{nj} w_n = \ln\left(\frac{f^* \Delta_j^*}{c_j}\right), \quad j = 1,2,\ldots,N \tag{3.15}$$

Persamaan ini, dalam masalah dengan derajat kesulitan nol, memberikan solusi tunggal untuk $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Setelah w_i didapat, x_i^* diperoleh dari

$$x_i^* = e^{w_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.16}$$

Dalam masalah pemrograman geometrik secara umum dengan derajat kesulitan tak negatif $N \geq n+1$, terdapat N persamaan dalam n variabel yang tidak diketahui. Dengan memilih n persamaan linier yang independen, diperoleh suatu himpunan solusi w_i kemudian didapat x_i^*.

3.1.2 Pendekatan Pertidaksamaan Aritmatik-Geometrik

Bentuk umum pertidaksamaan mean aritmatik-geometrik (disebut juga pertidaksamaan Cauchy) adalah

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \tag{3.17}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nonnegatif. Tanda "sama dengan" berlaku jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Pertidaksamaan ini adalah dasar menuju pemrograman geometrik dan dapat dinyatakan dalam bentuk yang ekuivalen sebagai berikut

$$\frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + \ldots + m_N u_N}{n} \geq \left(u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_N^{m_N}\right)^{1/n} \tag{3.18}$$

dengan $m_1 + m_2 + \ldots + m_N = n$ dan m_i dengan $1 \leq i \leq N$ disebut bobot. Dengan mendefinisikan $\Delta_1 = m_1/n, \Delta_2 = m_2/n, \ldots, \Delta_N = m_N/n,$ pertidaksamaan (3.18) menjadi

$$\Delta_1 u_1 + \Delta_2 u_2 + \ldots + \Delta_N u_N \geq u_1^{\Delta_1} u_2^{\Delta_2} \ldots u_N^{\Delta_N} \tag{3.19}$$

dengan $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_N = 1$ dan Δ_i dengan $1 \leq i \leq N$ disebut bobot normal. Tanda "sama dengan" berlaku jika dan hanya jika $u_1 = u_2 = \ldots = u_N$. Bentuk pertidaksamaan ini lebih berguna dalam menyelesaikan masalah pemrograman geometrik.

Dengan memakai pertidaksamaan (3.19), fungsi tujuan pada persamaan (2.40) dapat ditulis kembali menjadi (misalkan $U_j = u_j \Delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$)

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_N \geq \left(\frac{U_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{U_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \ldots \left(\frac{U_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N} \tag{3.20}$$

dengan $U_j = U_j(\mathbf{X}), j = 1, 2, \ldots, N$ dan bobot $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ memenuhi hubungan

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_N = 1 \quad . \tag{3.21}$$

Sisi kiri pertidaksamaan (3.20), yaitu fungsi asal $f(\mathbf{X})$, disebut fungsi primal. Sisi kanan pertidaksamaan (3.20) disebut fungsi predual. Dengan menggunakan hubungan

$$U_j = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.22}$$

fungsi predual dapat dinyatakan sebagai

$$\left(\frac{U_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{U_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{U_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N} = \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j}\right\}\left\{\prod_{j=1}^{N}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_{ij}}\right]^{\Delta_j}\right\}$$

$$= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j}\right\}\left\{\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j}\right\} \tag{3.23}$$

Jika bobot Δ_j dipilih sehingga persamaan (3.21) terpenuhi dan juga hubungan

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.24}$$

maka persamaan (3.23) menjadi tidak tergantung pada x_i

$$\left(\frac{U_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{U_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{U_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N} = \left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{c_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N} \tag{3.25}$$

Persamaan (3.21) disebut kondisi normalitas dan persamaan (3.24) disebut kondisi ortogonalitas untuk bobot $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$.

Dengan demikian pertidaksamaan (3.20) menjadi

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_N \geq \left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{c_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N} \tag{3.26}$$

Sisi kanan pertidaksamaan ini disebut fungsi dual $v(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N)$. Pertidaksamaan (3.26) dapat ditulis lebih sederhana menjadi

$$f \geq v$$

Karena v mewakili batas bawah dari f (yang berkaitan dengan masalah minimisasi) sehingga disimpulkan bahwa maksimum fungsi dual v sama dengan minimum fungsi primal f. Buktinya akan dibahas di bawah ini.

Jika f^* minimum fungsi primal dan v^* maksimum fungsi dual maka

$$f \geq f^* \geq v^* \geq v$$

akan dibuktikan bahwa $f^* = v^*$ dan juga f^* bersesuaian dengan minimum global dari $f(\mathbf{X})$. Untuk memudahkan notasi, misalkan fungsi tujuan $f(\mathbf{X})$ dengan x_0. Didefinisikan variabel baru Δ_j, disebut juga bobot untuk masing-masing suku dalam fungsi tujuan:

$$\Delta_j = \frac{U_j}{x_0} = \frac{c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}}{x_0}, \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.27}$$

tampak bahwa bobot ini bernilai positif dan memenuhi hubungan

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j = 1 \tag{3.28}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.27) dan (3.28), masalah awal meminimumkan $f(\mathbf{X})$ akan menjadi

MASALAH 1

Minimumkan x_0

dengan kendala

$$x_0 . \Delta_j = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}, \; j = 1, 2, \ldots, N$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 = 0$$

Didefinisikan transformasi eksponensial $x_i = e^{w_i}; i = 0, 1, 2, \ldots, n$, dengan variabel w_i tidak terbatas dalam tanda. Masalah diatas dapat ditulis kembali menjadi

Minimumkan e^{w_0}

dengan kendala

$$e^{w_0}\left[\frac{\Delta_j}{c_j}\right] = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i\right) \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 = 0$$

Dengan mengambil logaritma, diperoleh.

MASALAH 2

Minimumkan w_0

dengan kendala

$$\ln\left[\frac{\Delta_j}{c_j}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i - w_0, \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.29}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 = 0 \tag{3.30}$$

Dengan demikian masalah awal meminimumkan $f(\mathbf{X})$ tanpa kendala dapat diganti dengan meminimumkan w_0 dengan kendala persamaan yang diberikan oleh persamaan (3.29) dan (3.30).

Dapat dilihat bahwa fungsi tujuan x_0 yang diberikan oleh

$$x_0 = e^{w_0} = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} e^{a_{ij} w_i} = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i} \tag{3.31}$$

Karena fungsi eksponensial $(e^{a_{ij} w_i})$ adalah konveks yang dikaitkan dengan w_i, fungsi tujuan x_0 yang merupakan kombinasi positif dari fungsi eksponensial juga konveks. Karena itu hanya ada satu titik stasioner untuk x_0 dan pastilah minimum global. Titik minimum global dari w_0 dapat diperoleh dengan menyusun fungsi Lagrange.

$$L(\mathbf{w}, \mathbf{\Delta}, \boldsymbol{\lambda}) = w_0 + \lambda_0\left(\sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1\right) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\Delta_j}{c_j}\right)\right] \tag{3.32}$$

dimana $\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$, $\mathbf{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{Bmatrix}$ dan $\boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{Bmatrix}$ adalah pengali Lagrange

Pada titik stasioner dari L, diperoleh

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,n \\ &\frac{\partial L}{\partial \Delta_j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,N \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Persamaan ini memberikan hubungan sebagai berikut:

$$1-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j = 0, \text{ atau, } \sum_{\text{j}=1}^{\text{N}}\lambda_{\text{j}} = 1 \tag{3.34}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j a_{ij} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.35}$$

$$\lambda_0 - \frac{\lambda_j}{\Delta_j} = 0, \text{ atau } \lambda_0 = \frac{\lambda_{\text{j}}}{\Delta_{\text{j}}}, \quad \text{j} = 1,2,\ldots,N \tag{3.36}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\Delta_j - 1 = 0, \text{ atau } \sum_{j=1}^{N}\Delta_j = 1 \tag{3.37}$$

$$-\ln\frac{\Delta_j}{c_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}w_i - w_0 = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N \tag{3.38}$$

Persamaan (3.34), (3.36) dan (3.37) memberikan hubungan

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j = 1 = \sum_{j=1}^{N}\lambda_0\Delta_j = \lambda_0\sum_{j=1}^{N}\Delta_j = \lambda_0 \tag{3.39}$$

Dengan demikian nilai dari pengali Lagrange adalah

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 & \text{untuk } j = 0 \\ \Delta_j & \text{untuk } j = 1,2,\ldots,N \end{cases} \tag{3.40}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.40) ke persamaan (3.32), diperoleh

$$L(\mathbf{w},\mathbf{\Delta}) = w_0 + \left(\sum_{j=1}^{N}\Delta_j - 1\right) + \sum_{j=1}^{N}\Delta_j\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ij}w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\Delta_j}{c_j}\right)\right]$$

atau

$$L(\mathbf{\Delta},\mathbf{w}) = -\sum_{j=1}^{N}\Delta_j\ln\left(\frac{\Delta_j}{c_j}\right) + (1-w_0)\left(\sum_{j=1}^{N}\Delta_j - 1\right) + \sum_{i=1}^{n}w_i\left(\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\Delta_j\right) \tag{3.41}$$

Fungsi Lagrange pada persamaan (3.41) dapat dipandang sebagai fungsi Lagrange yang bersesuaian dengan masalah optimisasi baru dengan fungsi tujuannya

$$\widetilde{v}(\mathbf{\Delta}) = -\sum_{j=1}^{N} \Delta_j \ln\left(\frac{\Delta_j}{c_j}\right) = \ln\left[\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j}\right] \tag{3.42}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 = 0 \tag{3.43}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.44}$$

Masalah ini akan menjadi dual untuk masalah asal. Variabel $(1-w_0), w_1, w_2, \ldots, w_n$ dapat dipandang sebagai pengali Lagrange untuk kendala pada persamaan (3.43) dan (3.44).

Vektor $\mathbf{\Delta}$ yang membuat fungsi Lagrange dari persamaan (3.41) stasioner secara otomatis memberikan titik stasioner pada persamaan (3.32). Dapat dibuktikan bahwa fungsi

$$\Delta_j \ln\left(\frac{\Delta_j}{c_j}\right), \; j = 1,2,\ldots,N$$

adalah fungsi konveks karena Δ_j positif. Fungsi $\widetilde{v}(\mathbf{\Delta})$ adalah negatif dari penjumlahan fungsi konveks, sehingga akan menjadi fungsi konkaf. Dari sini $\widetilde{v}(\mathbf{\Delta})$ akan mempunyai titik stasioner tunggal dan pastilah titik maksimum global. Akan lebih mudah jika mengambil eksponensial dari $\widetilde{v}(\mathbf{\Delta})$ maka diperoleh fungsi dual $v(\mathbf{\Delta})$ dan masalah dualnya adalah

Maksimumkan

$$v(\mathbf{\Delta}) = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j} \tag{3.45}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 = 0 \tag{3.46}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.47}$$

Jika $\boldsymbol{\Delta}^*$ adalah solusi optimal, maka berlaku

$$\tilde{v}(\boldsymbol{\Delta}^*) = L(\mathbf{w}^*, \boldsymbol{\Delta}^*) = L(\mathbf{w}^*, \boldsymbol{\Delta}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = w_0^*$$

Nilai $f^* = f(\mathbf{X}^*)$ dapat dihitung dari hubungan $\tilde{v}(\boldsymbol{\Delta}^*) = w_0^*$ dan $w_0 = \ln(x_0)$; maka karena $\tilde{v}(\boldsymbol{\Delta}^*) = \ln[v(\boldsymbol{\Delta}^*)]$ diperoleh

$$f^* = x_0^* = v(\boldsymbol{\Delta}^*)$$

Dengan demikian minimum fungsi primal sama dengan maksimum dari fungsi pada persamaan (3.45) yang tergantung pada kondisi normalitas dan ortogonalitas pada persamaan (3.46) dan (3.47).

Pada tabel 3.1 diberikan masalah primal dan dual yang bersesuaian dengan masalah minimisasi tanpa kendala.

Tabel 3.1 Primal Dual Tanpa Kendala

Masalah Primal	Masalah Dual
Tentukan $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$ sedemikian hingga $f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} c_j x_1^{a_{1j}} \ldots x_n^{a_{nj}} \longrightarrow \min$ dan $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$	Tentukan $\boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{Bmatrix}$ sedemikian hingga $v(\boldsymbol{\Delta}) = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j}$ atau $\ln v(\boldsymbol{\Delta}) = \ln\left[\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j}\right] \longrightarrow$ maksimum yang tergantung pada kendala $\sum_{j=1}^{N} \Delta_j = 1$ dan $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j = 1, \; i = 1,2,\ldots,n$

Prosedur Perhitungan

Untuk menyelesaikan masalah minimisasi tanpa kendala adalah dengan menyusun fungsi dual $v(\mathbf{\Delta})$ dan memaksimumkan $v(\mathbf{\Delta})$ atau $\ln v(\mathbf{\Delta})$ dengan kendala yang diberikan oleh pers. (3.46) dan (3.47). Jika derajat kesulitan dari masalah adalah nol, maka ada solusi tunggal untuk Δ_j^*. Untuk masalah dengan derajat kesulitan lebih dari nol, jumlah variabel $\Delta_j\,(j = 1,2,\ldots,N)$ lebih besar daripada jumlah persamaan $(n+1)$ dan memungkinkan untuk menyatakan $(n+1)$ dari variabel Δ_j dalam suku-suku dari sisa $(N-n-1)$ dari variabel Δ_j. Dalam kasus ini, masalahnya menjadi memaksimumkan $v(\Delta)$ atau $\ln v(\Delta)$ yang terkait dengan $(N-n-1)$ variabel Δ_j yang independen.

Contoh 1

Pada masalah berikut diharapkan untuk meminimumkan total biaya persediaan dan produksi yang dihubungkan dengan pengolahan produk tertentu. Biaya total diberikan oleh

$$y = 60x_1^{-3}x_2^{-2} + 50x_1^3x_2 + 20x_1^{-3}x_2^3$$

dengan x_1 = produk yang diolah selama periode waktu yang diberikan (dalam ton)

x_2 = pecahan produksi yang disimpan dalam persediaan.

Suku pertama menunjukkan biaya instalasi dan pembongkaran (*setup and downtimecost*); kedua, biaya produksi tetap dan waktu tunggu; ketiga, biaya penyimpanan dan penanganan.

Penyelesaian

$$f(\mathbf{X}) = 60x_1^{-3}x_2^{-2} + 50x_1^3x_2 + 20x_1^{-3}x_2^3 \tag{1}$$

Derajat kesulitan dari masalah tersebut adalah $N-n-1 = 3-2-1 = 0$

Diketahui bahwa

$$c_1 = 60,\ c_2 = 50,\ c_3 = 20,\ a_{11} = -3,$$
$$a_{21} = -2,\ a_{12} = 3,\ a_{22} = 1,\ a_{13} = -3,\ a_{23} = 3$$

Kondisi normalitas dan ortogonalitasnya adalah

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= 1 \\ -3\Delta_1 + 3\Delta_2 - 3\Delta_3 &= 0 \\ -2\Delta_1 + \Delta_2 + 3\Delta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dari persamaan linier di atas diperoleh

$$\Delta_1^* = 0.4 \qquad \Delta_2^* = 0.5 \qquad \Delta_3^* = 0.1$$

Nilai minimum dari f dapat diperoleh dari persamaan (3.10)

$$f^* = \left(\frac{60}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{50}{0.5}\right)^{0.5}\left(\frac{20}{0.1}\right)^{0.1} = 126.05 \tag{3}$$

Nilai dari variabel keputusan dapat diperoleh dari persamaan (3.11)

$$60x_1^{-3}x_2^{-2} = (0.4)(126.05) = 50.42$$
$$50x_1^3x_2 = (0.5)(126.05) = 63.025$$
$$20x_1^{-3}x_2^3 = (0.1)(126.05) = 12.605$$

Sehingga diperoleh

$$x_1^* = 1.10 \text{ ton} \quad \text{dan} \quad x_2^* = 0.944 \text{ ton}$$

Agar memberikan total biaya produksi dan persediaan yang minimum maka produk yang diolah adalah 1.10 ton dan yang disimpan adalah 0.944 ton.

Contoh 2

Pada suatu instalasi pompa persediaan air, biaya pertama dari pipa diberikan oleh $(100D + 50D^2)$, dengan D adalah diameter pipa dalam meter. Biaya dari persediaan berkurang dengan bertambahnya jumlah pemakaian air yang diberikan oleh $(20/Q)$ dengan Q adalah kecepatan air yang dipakai (m^3/s). Biaya pompa diberikan oleh $(300Q^2/D^5)$. Tentukan ukuran optimal dari pipa dan jumlah pemakaian air agar seluruh biaya minimum.

Penyelesaian

$$f(D,Q) = 100D^1Q^0 + 50D^2Q^0 + 20D^0Q^{-1} + 300D^{-5}Q^2 \tag{1}$$

Derajat kesulitan dari masalah tersebut adalah $N - n - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$

Diketahui bahwa

$$c_1 = 100,\ c_2 = 50,\ c_3 = 20,\ c_4 = 300,$$
$$a_{11} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{12} = 2,\ a_{22} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = -1,\ a_{14} = -5,\ a_{24} = 2$$

Kondisi normalitas dan ortogonalitas dapat diperoleh dari pers. (3.46) dan (3.47)

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 &= 1 \\ \Delta_1 + 2\Delta_2 \qquad - 5\Delta_4 &= 0 \\ -\Delta_3 + 2\Delta_4 &= 0 \end{aligned}$$

Tiga dari variabel Δ_j dapat dinyatakan dalam satu variabel sisanya, sehingga

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 - 11\Delta_4 \geq 0 \\ \Delta_2 &= 8\Delta_4 - 1 \ \geq 0 \\ \Delta_3 &= 2\Delta_4 \qquad \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Fungsi dual v dapat dituliskan

Maksimumkan

$$v(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\left(\frac{c_3}{\Delta_3}\right)^{\Delta_3}\left(\frac{c_4}{\Delta_4}\right)^{\Delta_4}$$
$$= \left(\frac{100}{2 - 11\Delta_4}\right)^{2-11\Delta_4}\left(\frac{50}{8\Delta_4 - 1}\right)^{8\Delta_4 - 1}\left(\frac{20}{2\Delta_4}\right)^{2\Delta_4}\left(\frac{300}{\Delta_4}\right)^{\Delta_4}$$

Memaksimumkan v ekuivalen dengan memaksimumkan $\ln v$, sehingga

$$\begin{aligned} \ln v = (2 - 11\Delta_4)\{\ln 100 - \ln(2 - 11\Delta_4)\} + (8\Delta_4 - 1)\{\ln 50 - \ln(8\Delta_4 - 1)\} \\ + 2\Delta_4\{\ln 20 - \ln(2\Delta_4)\} + \Delta_4\{\ln 300 - \ln(\Delta_4)\} \end{aligned}$$

Fungsi $\ln v$ merupakan fungsi variabel tunggal, nilai Δ_4 yang memaksimumkan $\ln v$ pasti tunggal (karena masalah primal memiliki solusi yang tunggal). Kondisi perlu untuk maksimum $\ln v$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\ln v)}{\partial \Delta_4} = -11\{\ln 100 - \ln(2 - 11\Delta_4)\} + (2 - 11\Delta_4)\left\{\frac{11}{2 - 11\Delta_4}\right\} \\ + 8\{\ln 50 - \ln(8\Delta_4 - 1)\} + (8\Delta_4 - 1)\left\{-\frac{8}{(8\Delta_4 - 1)}\right\} + 2\{\ln 20 - \ln(2\Delta_4)\} \\ + 2\Delta_4\left\{-\frac{2}{2\Delta_4}\right\} + 1\{\ln 300 - \ln(\Delta_4)\} + \Delta_4\left\{-\frac{1}{\Delta_4}\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\ln\frac{(2-11\Delta_4)^{11}}{(8\Delta_4-1)^8(2\Delta_4)^2\Delta_4}-\ln\frac{(100)^{11}}{(50)^8(20)^2(300)}=0$$

$$\frac{(2-11\Delta_4)^{11}}{(8\Delta_4-1)^8(2\Delta_4)^2\Delta_4}=\frac{(100)^{11}}{(50)^8(20)^2(300)}=2133{,}33 \qquad (3)$$

Nilai Δ_4 dapat diperoleh dengan memakai percobaan dan proses error:

Nilai dari Δ_4	Nilai di sisi kiri persamaan (3)
2/11=0.182	0
0.15	$\frac{(0.35)^{11}}{(0.2)^8(0.3)^2(0.15)}\approx 284$
0.147	≈ 2223
0.146	≈ 4500

Dengan demikian $\Delta_4^* \approx 0.147$ dan dari persamaan (2) diperoleh

$$\Delta_1^* = 0.383 \qquad \Delta_2^* = 0.176 \qquad \Delta_3^* = 0.294$$

Nilai optimal dari fungsi tujuan

$$v^* = f^* = \left(\frac{100}{0.385}\right)^{0,.385}\left(\frac{50}{0.175}\right)^{0,175}\left(\frac{20}{0.294}\right)^{0,294}\left(\frac{300}{0.147}\right)^{0,147} = 241{,}43$$

nilai optimum dari variabel keputusan diperoleh dari

$$U_1^* = \Delta_1^* f^* = 92.46 \qquad U_1^* = 100D^* = 92.46$$

$$U_2^* = \Delta_2^* f^* = 42.49 \qquad U_2^* = 50D^{*2} = 42.49$$

$$U_3^* = \Delta_3^* f^* = 70.98 \qquad U_3^* = 20/Q^* = 70.98$$

$$U_4^* = \Delta_4^* f^* = 35.49 \qquad U_4^* = \frac{300Q^{*2}}{D^{*5}} = 35.49$$

Solusi dari persamaan ini adalah $D^* = 0.9246\ m$, $Q^* = 0.281 m/s$

3.2 Solusi Masalah Minimisasi dengan Kendala

Pandang masalah minimisasi dengan kendala pada Subbab 2.6, yang diinginkan adalah mencari masalah dual yang ekuivalen dan mendapatkan nilai optimal dari fungsi tujuan serta variabel-variabelnya.

Untuk memudahkan notasi, fungsi tujuan $f(\mathbf{X})$ dimisalkan dengan

$$x_0 = g_0(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_0} c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \tag{3.48}$$

Kendala yang diberikan oleh pers. (2.42) dapat dituliskan dalam bentuk berikut

$$f_k = \sigma_k \left[1 - g_k(\mathbf{X})\right] \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{3.49}$$

dengan σ_k disebut fungsi tanda dan diperkenalkan untuk kendala ke-k dan bernilai +1 atau −1 tergantung apakah $g_k \leq 1$ atau ≥ 1.

Didefinisikan kembali bobot untuk masing-masing suku dalam fungsi tujuan

$$\Delta_{0j} = \frac{c_{oj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}}}{x_0} > 0, \; j = 1, 2, \ldots, N_0 \tag{3.50}$$

dan selalu memenuhi hubungan

$$\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} = 1 \tag{3.51}$$

sedang bobot untuk masing-masing suku dalam kendala didefinisikan

$$\Delta_{kj} = c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} > 0, \; k = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, N_k \tag{3.52}$$

Jika kendala ke-k aktif pada titik optimal maka

$$\sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} = 1 \tag{3.53}$$

Dengan menggunakan pers. (3.49), (3.50), (3.51) dan (3.52), masalah asal meminimumkan $f(\mathbf{X})$ dengan kendala $g_k \leq 1$ atau ≥ 1, $k = 1, 2, \ldots, m$ menjadi

MASALAH 1

Minimumkan x_0

dengan kendala

$$x_0 . \Delta_{0j} = c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}}; \quad j = 1, 2, \ldots, N_0$$

$$f_k = \sigma_k \left[1 - \sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj}\right] \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\Delta_{kj} - c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} = 0, \; k = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, N_k$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} - 1 = 0$$

Didefinisikan transformasi eksponensial $x_i = e^{w_i}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$. Masalah di atas dapat ditulis kembali menjadi

Minimumkan e^{w_0}

dengan kendala

$$e^{w_0}\left[\frac{\Delta_{oj}}{c_{oj}}\right] = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i\right); \quad j = 1,2,\ldots,N_0$$

$$f_k = \sigma_k\left[1 - \sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj}\right] \ge 0, \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

$$\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i\right); \ k = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,N_k$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} - 1 = 0$$

Dengan mengambil logaritma, diperoleh

MASALAH 2

Minimumkan w_0

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i - w_0 = \ln\left(\frac{\Delta_{0j}}{c_{0j}}\right); \ j = 1,2,\ldots,N_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i = \ln\left(\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}}\right); \ k = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,N_k$$

$$f_k = \sigma_k\left[1 - \sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj}\right] \ge 0, \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

Sesuai dengan definisi masing-masing, semua bobot harus bernilai positif dan $w_0, w_1, \ldots, w_n$ tidak terbatas dalam tanda.

Untuk memecahkan masalah dengan kendala ini, disusun fungsi Lagrange dengan $\lambda_0, \lambda_{0j}, \lambda_{kj}$ dan λ_k adalah pengali Lagrange. Karena m kendala adalah pertidaksamaan perlu digunakan kondisi Kuhn-Tucker untuk menemukan titik optimal. Menurut kondisi ini $f_k \lambda_k = 0$ di titik optimum dimana λ_k adalah pengali Lagrange yang bersesuaian dengan kendala pertidaksamaan ke-k. Jika kendala ini aktif, maka akan berlaku $f_k = 0$; sebaliknya $\lambda_k = 0$ jika kendala tidak aktif. Agar memenuhi kondisi Kuhn-Tucker, kendala diubah dalam bentuk $f_k \leq 0$. Karena masalahnya adalah minimisasi dengan kendala berbentuk $f_k \leq 0$, maka λ_k juga terbatas bernilai nonnegatif $(\lambda_k \geq 0, k = 1,2,\ldots,m)$. Kemudian $\lambda_k f_k$ akan ditambahkan pada fungsi Lagrange tanpa mengubah nilainya. Fungsi Lagrange untuk masalah primal (Masalah 2) adalah

$$L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\lambda}) = w_0 + \lambda_0 \left(\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sigma_k \left(\sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} - 1 \right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\Delta_{0j}}{c_{0j}} \right) \right] + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj} \sigma_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i - \ln\left(\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}} \right) \right] \quad (3.54)$$

dengan

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_{01} \\ \Delta_{02} \\ \vdots \\ \Delta_{nN_0} \\ \cdots\cdots \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \\ \vdots \\ \Delta_{1N_1} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \Delta_{m1} \\ \Delta_{m2} \\ \vdots \\ \Delta_{mN_m} \end{Bmatrix}, \text{ dan } \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \\ \vdots \\ \lambda_{0N_0} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1N_1} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{m1} \\ \lambda_{m2} \\ \vdots \\ \lambda_{mN_m} \end{bmatrix}$$

Pada titik stasioner dari L, didapat

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial w_i} = 0, \; i = 1,2,\ldots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta_{0j}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \Delta_{kj}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0,\ k = 1,2,\ldots,m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{oj}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_{kj}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m$$

Persamaan ini memberikan hubungan sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{oj} - 1 = 0 \tag{3.55}$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} a_{0ij} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj} \sigma_k a_{kij} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n \tag{3.56}$$

$$\lambda_0 - \frac{\lambda_{0j}}{\Delta_{oj}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_0 \tag{3.57}$$

$$\lambda_k \sigma_k - \frac{\lambda_{kj} \sigma_k}{\Delta_{kj}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m \tag{3.58}$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{oj} - 1 = 0 \tag{3.59}$$

$$\sigma_k \left(\sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} - 1 \right) = 0,\ k = 1,2,\ldots,m \tag{3.60}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\Delta_{0j}}{c_{0j}} \right) = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_0 \tag{3.61}$$

$$\sigma_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i - \ln\left(\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}} \right) \right] = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m \tag{3.62}$$

Untuk perumuman, dikenalkan σ_0 dengan nilai satu dan persamaan (3.56) dapat ditulis kembali menjadi

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{N_k} \sigma_k \lambda_{kj} a_{kij} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n \tag{3.63}$$

Dari persamaan (3.55), (3.57) dan (3.59) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{oj} = 1 = \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_o \Delta_{0j} = \lambda_0 \sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{oj} = \lambda_0 = 1 \tag{3.64}$$

Dari persamaan (3.64) dan (3.57), didapatkan bahwa

$$\lambda_{0j} = \lambda_0 \Delta_{0j} = \Delta_{0j},\ j = 1,2,\ldots,N_0 \tag{3.65}$$

Dengan cara yang sama, persamaan (3.58) dan (3.60) mengarah pada

$$\sigma_k \lambda_{kj} = \sigma_k \lambda_k \Delta_{kj}$$

$$\lambda_{kj} = \lambda_k \Delta_{kj} \tag{3.66}$$

dan

$$\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj} = \lambda_k \sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} = \lambda_k,\ k = 1,2,\ldots,m \tag{3.67}$$

Dengan demikian Δ_{kj} dapat dinyatakan dalam suku-suku dari pengali Lagrange λ_{kj} dan λ_k sebagai berikut (dari persamaan (3.66)):

$$\Delta_{kj} = \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_k} = \frac{\lambda_{kj}}{\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj}},\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m \tag{3.68}$$

dilengkapi dengan $\lambda_k \neq 0$.

Karena persamaan (3.65) dan (3.68) menyatakan Δ_{0j} dan Δ_{kj} dalam suku-suku dari λ_{0j} dan λ_{kj}, pengali Lagrange dapat diperlakukan sebagai variabel yang tidak diketahui dalam masalah (pada masalah minimisasi tanpa kendala, variabel yang tidak diketahui adalah bobot Δ_j). Karena fungsi tujuan x_0 konveks ketat (*strictly convex*) yang dikaitkan dengan $w_1, w_2, \ldots, w_n$, terpenuhinya kondisi Kuhn Tucker memberikan titik minimum lokal (meskipun bukan global).

Dengan memakai hubungan pada persamaan (3.65) dan (3.68), fungsi Lagrange dari persamaan (3.54) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$L(\mathbf{w}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{f}) = w_0 + \lambda_0 \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} - \lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k + \ldots$$

$$+\sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{0j}\left[\sum_{i=1}^{n}a_{0ij}w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\lambda_{0j}}{c_{0j}}\right)\right] + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}\sigma_k\left[\sum_{i=1}^{n}a_{kij}w_i - \ln\frac{\lambda_{kj}}{c_{kj}\left(\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}\right)}\right] \tag{3.69}$$

dengan $\mathbf{f}$ adalah vektor dari fungsi kendala

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_1\left(\sum_{j=1}^{N_1}\Delta_{1j} - 1\right) \\ \vdots \\ \sigma_{m1}\left(\sum_{j=1}^{N_m}\Delta_{mj} - 1\right) \end{Bmatrix} \tag{3.70}$$

Mengingat bahwa $\sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{0j} = \lambda_0 = 1$ dan $\sigma_0 = 1$, persamaan (3.69) menjadi

$$L(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{f}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k\lambda_{kj}\ln\left[\frac{c_{kj}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}}{\lambda_{kj}}\right] + (w_0 - 1)\left(1 - \sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{0j}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}w_i\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k a_{kij}\lambda_{kj} + \sum_{k=1}^{m}f_k\lambda_k \tag{3.71}$$

Fungsi ini $L(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{f})$ dapat dipandang sebagai fungsi Lagrange dari masalah optimisasi lain dengan fungsi tujuannya adalah

$$\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k\lambda_{kj}\ln\left[\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}\right] \tag{3.72}$$

dan kendalanya

$$1 - \sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{0j} = 0 \tag{3.73}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k a_{kij}\lambda_{kj} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.74}$$

dan

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj} \ge 0, \quad k = 1,2,\ldots,m \tag{3.75}$$

$(w_0 - 1), w_1, w_2, \ldots, w_n$ dan $f_1, f_2, \ldots, f_m$ .berperan sebagai pengali Lagrange dalam persamaan (3.71). Variabel $\lambda_{kj}, j = 1,2,\ldots,N_k; k = 0,1,2,\ldots,m$ dapat dicari dengan menyelesaikan pers. (3.73) dan (3.74) yang masing-masing mewakili kondisi normalitas dan ortogonalitas. Dapat dilihat bahwa terdapat $n+1$ persamaan linier dalam N variabel dengan

$$N = \sum_{k=0}^{m} N_k$$

Jadi derajat kesulitannya adalah $N - n - 1$. Jika masalah memiliki derajat kesulitan nol, maka solusinya tunggal dan nilai optimal λ^*_{kj} dapat diketahui. Nilai optimal Δ^*_{0j} dan Δ^*_{kj} dapat dicari dengan persaman (3.65) dan (3.68).

Seperti pada kasus tanpa kendala, fungsi dual $v(\boldsymbol{\lambda})$ merupakan eksponensial dari $\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})$

$$v(\boldsymbol{\lambda}) = e^{\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})} = \prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{N_k}\left(\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}\right)^{\sigma_k \lambda_{kj}} \tag{3.77}$$

yang juga dibatasi kendala normalitas (3.73), kendala ortogonalitas (3.74) dan kendala tak negatif (3.75). Tanpa membahas apakah $v(\boldsymbol{\lambda})$ akan maksimum atau minimum saat ini yang dapat dikatakan bahwa suatu himpunan variabel dual $\boldsymbol{\lambda}^*$ yang membuat fungsi tujuan primal w_0 menerima minimum lokal w_0^* (yang terdapat pada masalah 2) juga memenuhi hubungan

$$w_0^* = \tilde{v}(\boldsymbol{\lambda}^*) \tag{3.78}$$

Persamaan (3.78) benar karena pada minimum lokal w_0^*, semua suku kendala dalam fungsi Lagrange (3.54) adalah nol dan dari sini kendala persamaan (3.73), (3.74) dan (3.75) juga nol untuk vektor yang bersesuaian $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Prosedur Perhitungan

Masalah yang dinyatakan dalam persamaan (3.48) dan (3.49) dapat diselesaikan dengan memaksimumkan $v(\boldsymbol{\lambda})$ pada persamaan (3.77) dengan kendala normalitas (3.73) dan ortogonalitas (3.74). Jika masalah tersebut mempunyai derajat kesulitan nol, kondisi normalitas dan ortogonalitas menghasilkan solusi tunggal untuk $\boldsymbol{\lambda}^*$ dan nilai stasioner fungsi tujuan dapat diperoleh dari

$$f^* = x_0^* = v(\boldsymbol{\lambda}^*) = \prod_{k=0}^{m} \prod_{j=1}^{N_k} \left(\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}^*} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj}^* \right)^{\sigma_k \lambda_{kj}^*} \tag{3.79}$$

Jika fungsi $f(\mathbf{X})$ diketahui mempunyai minimum, maka nilai stasioner f^* akan menjadi minimum global dari f karena dalam kasus ini terdapat solusi tunggal untuk $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Jika masalah mempunyai derajat kesulitan positif D (yaitu $D = N - n - 1$), persamaan linier (3.73) dan (3.74) dapat dipakai untuk menyatakan $(n+1)$ dari variabel λ_{kj} dalam suku-suku dari sisa D dari variabel λ_{kj}. Dengan menggunakan hubungan ini, v dapat dinyatakan sebagai fungsi dari D variabel λ_{kj} yang independen. Titik stasioner dari v dapat dicari dengan menggunakan sebarang teknik optimisasi tanpa kendala.

Jika teknik kalkulus dipakai, turunan pertama fungsi v yang dikaitkan dengan variabel dual independen adalah sama dengan nol. Ini menghasilkan persamaan non linier simultan sebanyak derajat kesulitan yaitu $N - n - 1$ dan solusinya memberikan nilai terbaik dari variabel dual. Perhitungan ini memang tidak mudah, tetapi jika himpunan persamaan non linier ini diselesaikan maka pemrograman geometrik memberikan pendekatan yang bagus.

Pada masalah dengan derajat kesulitan nol solusi untuk $\boldsymbol{\lambda}^*$ tunggal, dan nilai optimum λ_{kj} dapat diperoleh, sedangkan maksimum fungsi dual v^* diperoleh dari persamaan (3.79) yang juga merupakan minimum fungsi primal f^*. Jika nilai optimal fungsi tujuan $f^* = x_0^*$ diketahui, untuk menentukan nilai optimal variabel $x_i^* (i = 1, 2, \ldots, n)$ adalah dengan menyelesaikan persamaan simultan yang diberikan oleh persamaan (3.50) dan (3.52):

$$\Delta_{0j}^{*} = \lambda_{0j}^{*} \equiv \frac{c_{oj}\prod_{i=1}^{n}(x_i^{*})^{a_{0ij}}}{x_0^{*}} > 0,\ j = 1,2,\ldots,N_0 \tag{3.80}$$

dan

$$\Delta_{kj}^{*} = \frac{\lambda_{kj}^{*}}{\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}^{*}} = c_{kj}\prod_{i=1}^{n}(x_i^{*})^{a_{kij}},\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m \tag{3.81}$$

Jika suatu masalah seluruh kendalanya dalam bentuk $g_k(\mathbf{X}) \le 1$, fungsi tanda $\sigma_k = 1$, maka fungsi tujuan $g_0(\mathbf{X})$ menjadi fungsi konveks ketat dari variabel transformasi $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Begitu juga kendala posinomial juga akan konveks. Karena kendalanya dalam bentuk $g_k(w_1, w_2, \ldots, w_n) \le 1,\ k = 1,2,\ldots,m$, himpunan layaknya membentuk suatu himpunan konveks. Dengan demikian fungsi konveks ketat yang didefinisikan dari himpunan konveks mempunyai satu minimum lokal yang juga minimum global. Jadi vektor yang diperoleh dengan memenuhi kondisi normalitas dan ortogonalitas merupakan vektor minimum global.

Fungsi dual transformasi $\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})$ dari persamaan (3.72) dapat dituliskan kembali

$$\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \tilde{v}(\boldsymbol{\Delta}) \equiv \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k\lambda_{kj}\left[-\ln\left(\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}}\right)\right] \quad \lambda_{kj} \ge 0 \text{ dan } \sigma_k = 1 \tag{3.82}$$

Dengan demikian fungsi $\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})$ adalah fungsi konkaf ketat karena merupakan kombinasi positif dari negatif logaritma dari bobot Δ_{kj}. Oleh karena itu juga memiliki titik stasioner yang tunggal yaitu maksimum global. Dengan demikian minimum w_0 dapat dicari dengan memaksimumkan fungsi $\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})$ atau eksponensialnya $v(\boldsymbol{\lambda})$. Hubungan primal dual secara umum diberikan oleh

$$f(\mathbf{X}) \ge f^{*} \equiv v^{*} \ge v(\boldsymbol{\lambda})$$

Tabel 3.2 memberikan masalah primal dan masalah dual yang bersesuaian. Karakteristik berikut diperoleh dari Tabel 3.2

1. Faktor c_{kj} yang tampak pada fungsi dual $v(\boldsymbol{\lambda})$ adalah koefisien dari posinomial $g_k(\mathbf{X}), k = 0,1,2,\ldots,m$.
2. Jumlah komponen dalam vektor λ sama dengan jumlah suku yang terlibat dalam posinomial $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_m$. Untuk setiap suku dalam $g_k(\mathbf{X})$ terdapat Δ_{kj} yang bersesuaian.
3. Koefisien matriks $[a_{kij}]$ yang tampak dalam kondisi ortogonalitas sama dengan matrik pangkat yang tampak dalam posinomial dari masalah primal.

Tabel 3.2 Primal Dual dengan Kendala

Masalah Primal	Masalah Dual
Tentukan $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$ sedemikian hingga $g_0(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) \longrightarrow$ minimum dengan kendala $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ $g_1(\mathbf{X}) \le 1,\ g_2(\mathbf{X}) \le 1, \ldots,\ g_m(\mathbf{X}) \le 1,$ dengan $g_0(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_0} c_{0j} x_1^{a_{01j}} x_2^{a_{02j}} \ldots x_n^{a_{0nj}},$ $g_1(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_1} c_{1j} x_1^{a_{11j}} x_2^{a_{12j}} \ldots x_n^{a_{1nj}},$ $g_2(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_2} c_{2j} x_1^{a_{21j}} x_2^{a_{22j}} \ldots x_n^{a_{2nj}},$ $\vdots$ $g_m(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_m} c_{mj} x_1^{a_{m1j}} x_2^{a_{m2j}} \ldots x_n^{a_{mnj}},$ dan pangkat a_{kij} adalah bilangan real dan	Tentukan $\boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \\ \vdots \\ \lambda_{0N_0} \\ \ldots\ldots \\ \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1N_1} \\ \ldots\ldots \\ \vdots \\ \ldots\ldots \\ \lambda_{m_1} \\ \lambda_{m_2} \\ \vdots \\ \lambda_{mN_m} \end{Bmatrix}$ sedemikian hingga $v(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{k=0}^{m} \prod_{j=1}^{N_k} \left(\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj} \right)^{\lambda_{kj}} \longrightarrow$ maks dengan kendala $\lambda_{01} \ge 0, \lambda_{02} \ge 0, \ldots, \lambda_{0N_0} \ge 0,$ $\lambda_{11} \ge 0, \lambda_{12} \ge 0, \ldots, \lambda_{1N_1} \ge 0,$ $\vdots$ $\lambda_{m1} \ge 0, \lambda_{m2} \ge 0, \ldots, \lambda_{mN_m} \ge 0,$

koefisien c_{kj} adalah bilangan positif.	• $\sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} = 1$, (kendala normalitas) $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{N_k} a_{kij} \lambda_{kj} = 0, i = 1,2,\ldots,n$ (kendala ortogonalitas) c_{kj} adalah bilangan positif dan koefisien a_{kij} adalah bilangan real.
Keterangan $g_0 = f =$ fungsi primal $x_1, x_2, \ldots, x_n =$ variabel primal $g_k \le 1, k = 1,2,\ldots,m$ adalah kendala primal $x_i > 0, i = 1,2,\ldots,n$ batas positif $n =$ jumlah variabel primal $m =$ jumlah kendala primal $N = N_0 + N_1 + \ldots + N_m =$ total jumlah suku dalam posinomial $N - n - 1 =$ derajat kesulitan dari masalah	Keterangan $v =$ fungsi dual $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \ldots, \lambda_{mN_m} =$ variabel dual $\lambda_{kj} \ge 0, j = 1,2,\ldots,N_k; k = 0,1,2,\ldots,m$ adalah batas tak negatif $N = N_0 + N_1 + \ldots + N_m =$ jumlah variabel dual $n + 1 =$ jumlah kendala dual

Dalam kasus masalah pemrograman geometrik berisi paling sedikit satu fungsi tanda dengan nilai $\sigma_k = -1$, diantara $k = 1,2,\ldots,m$. (Catatan: $\sigma_0 = 1$ bersesuaian dengan fungsi tujuan.) Disini tidak ada pernyataan umum yang dapat dibuat tentang kekonveksan atau kekonkafan dari himpunan kendala. Akan tetapi, karena fungsi tujuan kontinu dan terbatas di bawah oleh nol, kasus ini harus mempunyai minimum yang dilengkapi bahwa ada titik yang memenuhi kendala.

Contoh 3

Sebanyak 80 m^3 padi akan dipindahkan dari gudang ke pabrik dalam kotak segiempat terbuka dengan panjang x_1 meter, lebar x_2 meter dan tinggi x_3 meter . Biaya pembuatan sisi bawah, samping dan depan dari kotak adalah 80,10, dan 20 per m^2 (dalam ribuan). Tentukan biaya minimum untuk membuat kotak tersebut jika hanya 10 kali perjalanan yang diperbolehkan untuk memindahkan padi.

Penyelesaian

Masalah optimisasi dapat dinyatakan:

Menentukan $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$ yang meminimumkan

$$f(X) = 20x_1x_3 + 40x_2x_3 + 80x_1x_2 \tag{1}$$

dengan kendala

$$\frac{80}{x_1x_2x_3} \le 10 \text{ atau } \frac{8}{x_1x_2x_3} \le 1 \tag{2}$$

Dalam hal ini $N_0 = 3, N_1 = 1, n = 3$ dan derajat kesulitannya = $N - n - 1$ = $4 - 3 - 1 = 0$.

Demikian juga diketahui bahwa

$$c_{01} = 20, c_{02} = 40, c_{03} = 80, c_{11} = 8, a_{011} = 1, a_{021} = 0, a_{031} = 1, a_{012} = 0$$
$$a_{022} = 1, a_{032} = 1, a_{013} = 1, a_{023} = 1, a_{033} = 0, a_{111} = -1, a_{121} = -1, a_{131} = -1$$

Kondisi normalitas, ortogonalitas dan kendala tak negatif diperoleh dari pers. (3.73), (3.74) dan (3.75)

$$\lambda_{01} + \lambda_{02} + \lambda_{03} = 1 \qquad \lambda_{02} + \lambda_{03} - \lambda_{11} = 0$$

$$\lambda_{01} + \lambda_{03} - \lambda_{11} = 0 \qquad \lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{11} = 0$$

$$\lambda_{01} \ge 0, \lambda_{02} \ge 0, \lambda_{03} \ge 0, \lambda_{11} \ge 0$$

persamaan linier ini menghasilkan

$$\lambda_{01}^* = \lambda_{02}^* = \lambda_{03}^* = 1/3, \lambda_{11}^* = 2/3$$

Nilai maksimum dari fungsi dual v atau nilai minimum dari f adalah

$$f^* = v(\lambda^*) = \prod_{k=0}^{1}\prod_{j=1}^{N_k}\left(\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}}\sum_{i=1}^{N_k}\lambda_j\right)^{\lambda_{kj}} = (60)^{1/3}(120)^{1/3}(240)^{1/3}(8)^{2/3} = 480$$

Nilai dari variabel keputusan dapat diperoleh dengan menggunakan pers. (3.80) dan (3.81)

$$\frac{1}{3} = \frac{20(x_1^*)(x_3^*)}{480} = \frac{x_1^*x_3^*}{24} \tag{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{40(x_2^*)(x_3^*)}{480} = \frac{x_2^* x_3^*}{12} \tag{4}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{80(x_1^*)(x_2^*)}{480} = \frac{x_1^* x_2^*}{6} \tag{5}$$

$$1 = 8(x_1^*)^{-1}(x_2^*)^{-1}(x_3^*)^{-1} = 8 / x_1^* x_2^* x_3^* \tag{6}$$

Persamaan (3) –(6) memberikan

$x_1^* = 2 \quad x_2^* = 1 \quad x_3^* = 4$

Jadi ukuran dari kotak tersebut adalah panjang 2 m, lebar 1m dan tinggi 4 m dengan biaya 480 (ribu).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Charles S. Breightler, Don T. Phillips, Douglas J. Wilde, 1979, *Foundations of Optimization*, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

[2] Hamdy A Taha, 1997, *Riset Operasi Suatu Pengantar Jilid 2 (alih bahasa oleh Daniel Wirajaya)*, Binarupa Aksara, Jakarta.

[3] K.V. Mital, 1976, *Optimization Methods in Operations Research and System Analysis* , Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[4] Rangarajan K. Sundaran, 1996, *A First Course in Optimization Theory*, Cambridge University Press, New York.

[5] S.S. Rao, 1984, *Optimization Theory and Applications*, Wiley Eastern Limited, San Diego.