PENDUGA RASIO DALAM SAMPEL ACAK BERLAPIS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

DRITA TRIHAPSARI SETIAWATI
NIM. 991810101053

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2003

MOTTO

Katakanlah: "Sesungguhnya shalatku, ibadahku, hidupku dan matiku hanyalah untuk ALLAH, Tuhan semesta alam".

(Terjemahan Qs. Al-An'aam:162)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan".

(Terjemahan Qs. Alam Nasyrah:5)

"Iman yang paling utama ialah engkau mengetahui bahwa ALLAH senantiasa menyertai kamu dimana saja engkau berada".

(HR. Tabrani)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah dengan Ridha AllAH S.W.T telah terselesaikan Karya Tulis Ilmiah (skripsi) dengan judul **PENDUGA RASIO DALAM SAMPEL ACAK BERLAPIS** yang kupersembahkan kepada:

* bapakku *Setiarto* dan ibuku *Pujiwati* yang selalu memperjuangkan hidupku dan mengiringi setiap langkahku dengan Do'a,
* adikku *Pamungkas* yang telah memberiku senyum dan selalu mendukungku,
* kedua kakakku *Setiawan* dan *Setianita* yang selalu memberikan dorongan, semangat, dan seluruh kasih sayang kepadaku,
* keluarga besar Kalimantan X no:28 (Dumi, Diah, Yuli, mbak Eni, mbak Yuni, mbak Tyas, dhek Sita, dhek Lilik (makasih telah membuatku tersenyum), dhek Lia, dhek Uut, dhek Anis, dhek ninik, dhek nining, dhek Intan, dhek Nia) yang telah memberikan warna hari-hariku selama aku belajar di kota Jember,
* sahabatku Dwisekar Sari, Farida, Fitria dan semua angkatan '99 Matematika MIPA,
* almamaterku yang kubanggakan.

DEKLARASI

Karya Tulis Ilmiah (Skripsi) ini berisi hasil kerja/penelitian yang dimulai pada bulan Februari 2003 sampai dengan bulan Oktober 2003. Bersama ini saya nyatakan bahwa isi Karya Tulis Ilmiah (Skripsi) ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya, dan Karya Tulis Ilmiah (Skripsi) ini belum pernah diajukan pada instansi lain.

Jember, Oktober 2003

Penulis,

Drita Trihapsari

ABSTRAK

Penduga Rasio Dalam Sampel Acak Berlapis. Drita Trihapsari Setiawati, 991810101053, Karya Tulis Ilmiah (skripsi), Oktober 2003, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas jember.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui syarat dan mendapatkan bentuk penduga rasio yang baik dalam sampel acak berlapis. Penduga rasio adalah prosedur pendugaan yang didasarkan pada hubungan antara dua variabel x dan y, dengan x dan y diperoleh dari setiap unit didalam sampel. Sedangkan penarikan sampel acak berlapis adalah proses pengelompokan populasi kedalam lapisan-lapisan yang lebih homogen, kemudian dilakukan pemilihan sampel acak sederhana dari setiap lapisan dan menggabungkan sampel yang diperoleh untuk menduga parameter populasi. Dengan pemilihan sampel yang tepat dalam sampel acak berlapis akan diperoleh penduga yang baik, sehingga mendapatkan hasil yang baik pula. Dalam sampel acak berlapis ada dua jenis penduga rasio, yaitu penduga rasio terpisah $\hat{Y}_{Rs} = \sum \frac{y_h}{x_h} X_h$ dan penduga rasio gabungan $\hat{Y}_{Rc} = \frac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}} X$. Jika sampel dari setiap lapisan besar, maka digunakan penduga rasio terpisah, tetapi jika sampel dari setiap lapisan kecil maka digunakan penduga rasio gabungan.

Kata kunci: Penduga rasio terpisah, Penduga rasio gabungan, Sampel acak berlapis.

PENGESAHAN

Karya Tulis Ilmiah (Skripsi) ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, pada:

Hari : SABTU
Tanggal : 08 NOV 2003
Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)	Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)
Rita Ratih T, S.Si, M.Si	M. Fatkurohman, S.Si, M.Si
NIP. 132 243 343	NIP. 132 210 538
Anggota I	Anggota II
Drs. I Made Tirta, Dip.Sc, M.Sc, Ph.D	Drs. Rusli Hidayat, M.Sc
NIP. 131 474 500	NIP. 132 048 321

Mengesahkan:
Dekan F. MIPA Universitas Jember

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS JEMBER FAKULTAS

Ir. Sumadi, MS
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji syukur kehadirat ALLAH S.W.T yang telah melimpahkan karunia, rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulisan skripsi dengan judul "Penduga Rasio Dalam Sampel Acak Berlapis" dapat terselesaikan.

Karya Tulis Ilmiah (Skripsi) ini disusun untuk memenuhi persyaratan Tugas Akhir (MAU 425) pada kurikulum pendidikan di jurusan matematika, Fakultas MIPA Universitas Jember (UNEJ).

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan kerjasama berbagai pihak. Untuk itu dengan segala kerendahan hati, penulis menyampaikan rasa terimakasih kepada:

1. Ir. Sumadi, Ms, selaku Dekan Fakultas MIPA Universitas Jember,
2. Drs. Kusno, DEA, Ph.D, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember,
3. Rita Ratih T, S.Si, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Utama, yang telah memberikan bimbingan, saran, dan petunjuk dalam penulisan ini,
4. Fatkurohman, S.Si, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Anggota, yang telah banyak memberikan pinjaman buku-buku, bimbingan dan saran dalam penulisan ini,
5. Drs. I Made Tirta, Dip.Sc, M.Sc, Ph.D, selaku Dosen Penguji Utama dan Dosen Wali,
6. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc, selaku Dosen Penguji Anggota,
7. seluruh crew *Bintang Computer*, yang selalu mendampingi penulis selama pengetikan penulisan ini,
8. semua pihak yang turut membantu penulis didalam penyelesaian Karya Tulis Ilmiah (skripsi), yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa Karya Tulis Ilmiah (skripsi) ini masih jauh dari sempurana, oleh karena itu saran dan koreksi atas kekurangan Karya Tulis Ilmiah (skripsi) ini akan diterima dengan senang hati.

Semoga dengan tersusunnya Karya Tulis Ilmiah (skripsi) ini dapat memberikan manfaat.

Hormat Kami,

penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam rangka mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi, perlu dilakukan penelitian. Tetapi penelitian terkadang sulit untuk dilakukan, karena adanya kendala dalam penelitian. Salah satu kendala yang menyebabkan terhambatnya penelitian adalah besarnya jumlah populasi yang diteliti. Jika populasi yang akan diteliti dalam jumlah kecil maka penelitian dapat dilakukan secara langsung dengan pencacahan atau sensus. Tetapi jika jumlah populasi besar dan tidak mungkin dilakukan penelitian satu persatu maka harus digunakan cara lain, sehingga mudah dilakukan dan tidak membutuhkan banyak waktu, tenaga, dan biaya. Hal yang bisa dilakukan untuk mengatasi kendala dalam penelitian ini adalah dengan melakukan penarikan sampel secara acak. Penarikan sampel acak dapat mewakili jumlah populasi yang ada, dengan karakteristik yang mendekati populasi sesungguhnya.

Ada beberapa macam metode penarikan sampel, yaitu metode penarikan sampel acak sederhana, metode penarikan sampel acak berlapis, metode penarikan sampel acak sistematik, metode penarikan sampel acak berkelompok, dan masih banyak metode lain yang digunakan untuk mengembangkan metode penarikan sampel. Jika populasi sangat heterogen maka untuk memudahkan dalam penarikan sampel dilakukan suatu pengelompokan dari populasi, sehingga menjadi sub-sub populasi dan membentuk suatu lapisan yang tidak tumpang tindih. Metode penarikan sampel dengan mengelompokkan populasi ini disebut sebagai metode penarikan sampel acak berlapis.

Setiap lapisan populasi dipilih sampel acak sederhana, selanjutnya mengkombinasikan sampel ini untuk menduga parameter populasi. Metode penduga dalam penarikan sampel ada dua, yaitu metode rasio dan metode regresi linier. Metode pendugaan dengan membandingkan antara variabel tambahan x_i dan variabel yang di cari y_i disebut metode penduga rasio. Penduga rasio akan berguna untuk survei-survei tertentu, dengan maksud menduga nilai total populasi, untuk ukuran populasi yang tidak diketahui. Penduga rasio dapat meningkatkan ketelitian pendugaan, yaitu dengan menggunakan variabel tambahan x_i yang berkorelasi dengan $y_{i,}$ dengan x_i dan y_i diperoleh dari setiap unit dalam sampel.

Metode penduga rasio dapat digunakan dalam berbagai jenis metode penarikan sampel. Dalam tulisan ini hanya akan digunakan untuk penarikan sampel acak berlapis, karena pada penarikan sampel acak berlapis, populasi yang jumlahnya besar sudah dikelompokkan menjadi sub-sub populasi yang lebih homogen. Jadi penduga rasio diperlukan untuk mengetahui karakteristik suatu populasi, dengan memanfaatkan hubungan antara variabel tambahan x_i yang berkorelasi dengan $y_{i.}$

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana syarat penduga rasio yang baik dalam sampel acak berlapis?
2. Bagaimana bentuk penduga rasio yang baik dalam sampel acak berlapis?

1.3 Tujuan

1. Mengetahui syarat penduga rasio yang baik dalam sampel acak berlapis.
2. Mengetahui bentuk penduga rasio yang baik dalam sampel acak berlapis.

1.4 Manfaat

Manfaat yang bisa diambil adalah:

1. dengan menggunakan metode rasio diperoleh peningkatan kualitas penelitian dengan memanfaatkan hubungan antara y_i dan $x_{i;}$
2. untuk menambah wawasan pengetahuan, khususnya dalam bidang statistik.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Data statistik yang baik adalah data yang dapat memberikan gambaran tentang suatu keadaan atau masalah. Data statistik yang berbentuk angka disebut sebagai data kuantitatif sedangkan yang dinyatakan dalam bentuk kata, kalimat, dan gambar (bukan angka) disebut sebagai data kualitatif. Dalam melakukan penarikan sampel, data dapat diperoleh secara langsung dari objeknya (data primer) dan dapat juga diperoleh dalam bentuk yang sudah jadi (data sekunder). Jika seluruh elemen populasi diteliti satu persatu (sensus) maka data statistik yang diperoleh merupakan data sebenarnya. Jika hanya sampel yang diteliti (*sampling*) maka menghasilkan data statistik perkiraan (*estimate*).

Teknik penarikan sampel memegang peranan penting dalam survei atau pengumpulan data. Hanya sampel yang benar-benar mewakili populasi yang dapat menggambarkan secara baik tentang sifat-sifat populasi itu. Ada beberapa macam teknik (metode) penarikan sampel acak, antara lain teknik penarikan sampel acak sederhana, teknik penarikan sampel acak sistematik, teknik penarikan sampel acak berkelompok dan teknik penarikan sampel acak berlapis.

Teknik penarikan sampel acak sederhana adalah teknik penarikan sampel secara random (acak) dari suatu populasi tanpa didahului dengan pengelompokan populasi menjadi sub-sub populasi yang lebih homogen. Teknik penarikan sampel acak sistematik adalah teknik penarikan sampel dari suatu populasi dengan menggunakan kelipatan ke-k (jumlah unit populasi dibagi dengan jumlah unit sampel yang diinginkan) dari unit sampel pertama yang diambil secara random (acak). Teknik penarikan sampel acak berkelompok adalah teknik penarikan sampel dari suatu populasi yang sudah dikelompokkan menjadi sub-sub populasi (blok-blok) yang diambil secara random (acak), tetapi tidak semua dari sub-sub populasi tersebut diambil sampelnya. Sedangkan teknik penarikan sampel acak berlapis adalah teknik penarikan sampel secara random (acak) yang didahului dengan mengelompokkan populasi menjadi sub-sub populasi (lapisan-lapisan) yang lebih homogen, dengan setiap sub pupulasi diambil sampelnya.

Ada dua faktor yang mempengaruhi mutu informasi atau data pendugaan yang diperoleh sebagai hasil penarikan sampel sehingga akan mempengaruhi kesimpulan yang akan diambil.

1. Besarnya tingkat variansi dari data dugaan yang diukur dengan kesalahan baku atau *standard error* (simpangan baku dari seluruh kemungkinan nilai dugaan kalau diambil sampel dengan n elemen dari suatu populasi dengan N elemen).
2. Besarnya sampel (banyaknya elemen dalam sampel) yang diambil dari populasi.

Dalam setiap sub-sub populasi (lapisan-lapisan) dari sampel acak berlapis dapat dibuat suatu pendugaan. Pendugaan gabungan yang diperoleh berdasarkan pendugaan dari setiap lapisan akan memberikan pendugaan yang menyeluruh yang akan mewakili populasi. Untuk menduga total populasi tanpa menggunakan distribusi diperlukan variabel tambahan sehingga dengan variabel tambahan tersebut dapat terbentuk suatu rasio antara variabel yang dicari y_i dengan variabel tambahan x_i. Sebelum membahas lebih jauh tentang bab selanjutnya, perlu dikemukakan terlebih dahulu beberapa pengertian berikut.

2.1 Kovariansi

Definisi 2.1

Misalkan Y dan X variabel acak yang mempunyai fungsi distribusi bersama $f(Y,X)$, kovariansi (Y,X) didefinisikan sebagai harga harapan dari perkalian kedua variabel acak tersebut setelah dikurangi dengan masing-masing rata-ratanya.

$$\text{kov } (Y, X) = E[(Y - \mu_y)(X - \mu_x)] \tag{2.1}$$

dengan

$$\mu_y = E(Y) \quad = \text{rata - rata dari } Y$$
$$\mu_x = E(X) \quad = \text{rata - rata dari } X$$

Kovarian dari dua variabel acak menunjukkan hubungan antara kedua variabel tersebut $f(Y,X)$. Jika nilai Y dan X keduanya sama-sama besar atau sama-sama kecil maka perkalian antara $\left(Y-\mu_y\right)\left(X-\mu_x\right)$ positif. Jika nilai Y besar dan X kecil atau sebaliknya maka perkalian $\left(Y-\mu_y\right)\left(X-\mu_x\right)$ negatif.

(Yamane,1967)

2.2 Koefisien Korelasi

Definisi 2.2

Misalkan Y dan X variabel acak berdistribusi bersama $f(Y,X)$, maka koefisien korelasi antara Y dan X didefinisikan sebagai:

$$\rho = \frac{\text{kov}\,(Y,X)}{\sigma_y\,\sigma_x} = \frac{\text{kov}\,(Y,X)}{\sqrt{\text{var}(Y).\text{var}(X)}} \qquad (2.2)$$

dengan

$$\sigma_y^2 = \text{var}(Y) = E\,(Y-\mu_y)^2$$
$$\sigma_x^2 = \text{var}(X) = E\,(X-\mu_x)^2$$

$-1 \le \rho \le 1$

$\rho = 1$ artinya hubungan antara X dan Y adalah sempurna positif,
$\rho = -1$ artinya hubungan antara X dan Y adalah sempurna negatif,
$\rho = 0$ artinya hubungan antara X dan Y adalah lemah sekali (dianggap tidak ada korelasi).

(Supranto, 1993)

Jika ada sampel acak berukuran n, dengan pasangan data $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ maka koefisien korelasinya adalah :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})\ (x_i - \bar{x})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right]}} \qquad (2.3)$$

dengan

y_i = nilai pengamatan y unit ke-i

x_i = nilai pengamatan x unit ke-i

$\bar{y}$ = rata - rata sampel y

$\bar{x}$ = rata -rata sampel x

(Samsubar,1990)

2.3 Koefisien Variansi

Definisi 2.3

Koefisien variansi merupakan rasio atau perbandingan antara kesalahan baku dengan harga rata-ratanya yang biasanya dinyatakan dalam prosentase.

$$kv = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\ \% \quad \text{(untuk populasi)} \tag{2.4}$$

$$kv = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\ \% \quad \text{(untuk sampel)} \tag{2.5}$$

Semakin besar nilai koefisien variansi berarti semakin besar pula variansi datanya (data makin tidak seragam atau heterogen).

(Supranto, 1992)

2.4 Variansi

Definisi 2.4

Variansi Y dalam teori penarikan sampel dari populasi berhingga didefinisikan sebagai berikut :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2}{N-1} \tag{2.6}$$

dengan

$\bar{Y}$ = rata-rata populasi Y

N = jumlah unit populasi

Variansi merupakan jumlah kuadrat penyimpangan suatu pengamatan dari rataannya dibagi dengan total populasi. Semakin homogen suatu data menunjukkan semakin kecil variansi data tersebut. Sebaliknya semakin heterogen suatu data menunjukkan variansi yang semakin besar.

Teorema 2.1

Variansi rata-rata sampel dirumuskan sebagai berikut:

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

$$= \frac{S^2}{n}\frac{(N-n)}{N} = \frac{S^2}{n}(1-f) \tag{2.7}$$

dengan

$f = \frac{n}{N}$ adalah fraksi penarikan sampel

n = jumlah unit sampel

Bukti

$$n\left(\bar{y}-\bar{Y}\right) = \left(y_1 - \bar{Y}\right) + \left(y_2 - \bar{Y}\right) + \cdots + \left(y_n - \bar{Y}\right) \tag{2.8}$$

karena $\bar{y}$ tidak bias maka $E\left(\bar{y}\right) = \bar{Y}$

sehingga $E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N}$

$$\frac{1}{n} E\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right) = \frac{1}{N}\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_N\right)$$

$$E\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right) = \frac{n}{N}\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_N\right) \tag{2.9}$$

dengan alasan yang sama seperti pada persamaan (2.9) maka:

$$E\left[\left(y_1 - \bar{Y}\right)^2 + \cdots + \left(y_n - \bar{Y}\right)^2\right] = \frac{n}{N}\left[\left(y_1 - \bar{Y}\right)^2 + \cdots + \left(y_N - \bar{Y}\right)^2\right] \tag{2.10}$$

juga

$$\begin{aligned} &E\left[\left(y_1 - \bar{Y}\right)\left(y_2 - \bar{Y}\right) + \left(y_1 - \bar{Y}\right)\left(y_3 - \bar{Y}\right) + \cdots + \left(y_{n-1} - \bar{Y}\right)\left(y_n - \bar{Y}\right)\right] = \\ &\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left[\left(y_1 - \bar{Y}\right)\left(y_2 - \bar{Y}\right) + \left(y_1 - \bar{Y}\right)\left(y_3 - \bar{Y}\right) + \cdots + \left(y_{N-1} - \bar{Y}\right)\left(y_N - \bar{Y}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.11}$$

Persamaan (2.8) dikuadratkan dengan menggunakan persamaan (2.10) dan (2.11) diperoleh

$$n^2 E\left(\bar{y} - \bar{Y}\right)^2 = \frac{n}{N}\left[\begin{array}{l}\left[\left(y_1 - \bar{Y}\right)^2 + \cdots + \left(y_N - \bar{Y}\right)^2\right] + \frac{2(n-1)}{N-1} \times \\ \left[\left(y_1 - \bar{Y}\right)\left(y_2 - \bar{Y}\right) + \left(y_1 - \bar{Y}\right)\left(y_3 - \bar{Y}\right) + \cdots + \left(y_{N-1} - \bar{Y}\right)\left(y_N - \bar{Y}\right)\right]\end{array}\right]$$

…(2.12)

Persamaan

$$\frac{n-1}{N-1}\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)\right]^2$$

$$=\frac{n-1}{N-1}\left[\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)^2+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)^2\right]+2\left[\begin{array}{l}\left(y_1-\bar{Y}\right)\left(y_2-\bar{Y}\right)+\left(y_1-\bar{Y}\right)\left(y_3-\bar{Y}\right)+\\ \cdots+\left(y_{N-1}-\bar{Y}\right)\left(y_N-\bar{Y}\right)\end{array}\right]\right]$$

...(2.13)

Dari persamaan (2.12) dan persamaan (2.13) diperoleh

$$n^2E\left(\bar{y}-\bar{Y}\right)=\frac{n}{N}\left[\begin{array}{l}\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)^2+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)^2\right]+\dfrac{n-1}{N-1}\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)\right]^2\\ -\dfrac{n-1}{N-1}\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)^2+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)^2\right]\end{array}\right]$$

$$n^2E\left(\bar{y}-\bar{Y}\right)^2=\frac{n}{N}\left[\begin{array}{l}\left(1-\dfrac{n-1}{N-1}\right)\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)^2+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)^2\right]+\\ \dfrac{n-1}{N-1}\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)\right]^2\end{array}\right] \qquad (2.14)$$

Karena $\left[\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{Y}\right)\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}\bar{Y}\right]^2=\left[N\bar{Y}-N\bar{Y}\right]^2=0$,

maka dari persamaan (2.14) diperoleh

$$V(\bar{y})=E\left(\bar{y}-\bar{Y}\right)^2=\frac{N-n}{nN(N-1)}\left[\left(y_1-\bar{Y}\right)^2+\cdots+\left(y_N-\bar{Y}\right)^2\right]$$

$$=\frac{N-n}{nN(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{Y}\right)^2$$

$$=\frac{S^2}{n}\frac{(N-n)}{N}$$

$$=\frac{S^2}{n}(1-f)$$

(Cochran, 1991)

2.5 Alokasi Sampel Acak Berlapis

Ada beberapa metode untuk menentukan banyaknya sampel pada penarikan sampel acak berlapis bila data yang diukur berdasarkan keadaan yang ada dalam populasi (pengukuran langsung)

2.5.1 Metode Alokasi Serupa

Metode alokasi serupa digunakan apabila total banyaknya unit-unit penarikan sampel, variansi, dan ongkos per unit penarikan sampel relatif sama untuk setiap lapisan. Rumus untuk menentukan banyaknya sampel dari total populasi (n) dan dari setiap lapisan (n_h) dengan metode alokasi serupa adalah:

$$n = \frac{L\,Z^2 \sum_{h=1}^{L} N_h^2\, S_h^2}{N^2\, G^2 + Z^2 \sum_{h=1}^{L} N_h\, S_h^2} \tag{2.15}$$

dan

$$n_h = \frac{n}{L} \tag{2.16}$$

dengan

n_h = jumlah unit sampel dalam lapisan ke-h,

N_h = jumlah unit populasi dalam lapisan ke-h,

L = jumlah lapisan,

Z = tingkat keandalan,

G = galat pendugaan,

S_h^2 = variansi sebenarnya dalam lapisan ke-h.

2.5.2 Metode Alokasi Sebanding

Metode alokasi sebanding digunakan apabila total banyaknya unit-unit penarikan sampel berbeda - beda untuk setiap lapisan, sedangkan variansi dan ongkos per unit penarikan sampel relatif sama untuk setiap lapisan. Rumus untuk menentukan banyaknya sampel dari total populasi (n) dan dari setiap lapisan (n_h) dengan metode alokasi sebanding adalah:

$$n = \frac{N\, Z^2 \sum_{h=1}^{L} N_h\, S_h^2}{N^2\, G^2 + Z^2 \sum_{h=1}^{L} N_h\, S_h^2} \tag{2.17}$$

dan

$$n_h = \frac{N_h}{N}\, n \tag{2.18}$$

2.5.3 Metode Alokasi Neyman

Metode alokasi Neyman digunakan apabila total banyaknya unit-unit penarikan sampel dan variansi berbeda-beda untuk setiap lapisan, sedangkan ongkos per unit penarikan sampel relatif sama untuk setiap lapisan. Rumus untuk menentukan banyaknya sampel dari total populasi (n) dan dari setiap lapisan (n_h) dengan metode alokasi Neyman adalah:

$$n = \frac{Z^2 \left(\sum_{h=1}^{L} N_h\, S_h \right)^2}{N^2\, G^2 + Z^2 \sum_{h=1}^{L} N_h\, S_h^2} \tag{2.19}$$

dan

$$n_h = \frac{N_h\, S_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h\, S_h}\, n \tag{2.20}$$

2.5.4 Metode Alokasi Optimum

Metode alokasi optimum digunakan apabila total banyaknya unit-unit penarikan sampel, variansi, dan ongkos per unit penarikan sampel berbeda-beda untuk setiap lapisan. Rumus untuk menentukan banyaknya sampel dari total populasi (n) dan dari setiap lapisan (n_h) dengan metode alokasi optimum adalah:

$$n = \frac{Z^2 \left(\sum_{h=1}^{L} N_h\, S_h \sqrt{C_h} \right) \left(\sum_{h=1}^{L} \frac{N_h\, S_h}{\sqrt{C_h}} \right)}{N^2\, G^2 + Z^2 \sum_{h=1}^{L} N\, S_h^2} \tag{2.21}$$

dan

$$n_h = \frac{\dfrac{N_h\ S_h}{\sqrt{C_h}}}{\sum\limits_{h=1}^{L} \dfrac{N_h\ S_h}{\sqrt{C_h}}}\, n \tag{2.22}$$

dengan

C_h = biaya per unit pada lapisan ke-h.

(Gaspersz, 1991)

2.6 Penduga Rasio

Penduga rasio adalah metode pendugaan dengan menggunakan sampel untuk memperkirakan perubahan relatif *Y/X* dengan *Y* adalah jumlah populasi pada waktu sekarang dan *X* adalah jumlah populasi pada waktu sebelumnya. Pada penarikan sampel sederhana :

Definisi 2.5

Rasio R didefinisi kan sebagai $R = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i} = \dfrac{Y}{X}$ (2.23)

Penduga rasio R adalah $\hat{R}$ dengan $\hat{R} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n}} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$ (2.24)

$$\hat{Y}_R = \frac{y}{x} X = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} X \tag{2.25}$$

$$\hat{\bar{Y}}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} \tag{2.26}$$

dengan

$\bar{X}$ = rata-rata populasi X

Y = jumlah populasi Y

X = jumlah populasi X

$\hat{Y}_R$ = penduga rasio dari jumlah populasi Y

$\hat{\bar{Y}}_R$ = penduga rasio dari rata-rata populasi Y.

(Cochran, 1991)

2.7 Pendekatan Variansi untuk Penduga Rasio

Teorema 2.2

Dalam penarikan sampel acak sederhana berukuran n (n besar), rumus untuk pendekatan variansi adalah :

$$V(\hat{Y}_R) \approx \frac{N^2(1-f)}{n} \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - Rx_i)^2}{N-1} \right] \tag{2.27}$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_R) \approx \frac{1-f}{n} \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - Rx_i)^2}{N-1} \right] \tag{2.28}$$

$$V(\hat{R}) \approx \frac{1-f}{n\bar{X}^2} \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - Rx_i)^2}{N-1} \right] \tag{2.29}$$

Bentuk persamaan dari (2.27) adalah:

$$V(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n}\left(S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2R\rho S_y S_x\right)$$

Bukti

$\bar{Y} = R\bar{X}$

$$V(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \left[(y_i - \bar{Y}) - R(x_i - \bar{X})\right]^2$$

$$= \frac{N^2(1-f)}{n(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2 + R^2\sum(x_i-\bar{X})^2 - 2R\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})\right]$$

$$= \frac{N^2(1-f)}{n}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2}{N-1} + R^2\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{X})}{N-1} - 2R\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})}{N-1}\right]$$

koefisien korelasi ρ antara y_i dan x_i dalam populasi terbatas ditentukan dengan persamaan:

$$\rho = \frac{E(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})}{\sqrt{E(y_i-\bar{Y})^2\,E(x_i-\bar{X})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})}{(N-1)S_yS_x}$$

dari persamaan diatas diperoleh:

$$V(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n}\left(S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2R\rho S_yS_x\right)$$

dengan

$V(\hat{Y}_R)$ = variansi penduga rasio dari jumlah populasi Y

$V(\hat{\bar{Y}}_R)$ = variansi penduga rasio dari rata-rata populasi Y

$V(\hat{R})$ = variansi penduga rasio

S_y^2 = variansi populasi Y

S_x^2 = variansi populasi X

ρ = koefisien korelasi

R = rasio sebenarnya

(Cochran, 1991)

2.8 Penduga Variansi dari Sebuah Sampel

Teorema 2.3

Pada penarikan sampel, penghitungan variansi populasi menggunakan penduga variansi dari sampelnya dengan penduga variansi $v(\hat{Y}_R)$ adalah :

$$v(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{R}x_i)^2 \qquad (2.30)$$

$v(\hat{Y}_R)$ dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$1)\ v(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} + \hat{R}^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\hat{R} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \right) \qquad (2.31)$$

karena $\bar{y} = R\bar{x}$, diperoleh

$$2)\ v(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n} \left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R} s_{yx} \right) \qquad (2.32)$$

dengan

$\hat{R}$ = penduga rasio

s_y^2 = variansi sampel y

s_x^2 = variansi sampel x

$s_{yx} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1}$ adalah kovariansi sampel antara y_i dan x_i.

Bukti

$\bar{y} = R\bar{x}$

$$v(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - \bar{y}) - \hat{R}(x_i - \bar{x}) \right]^2$$

$$= \frac{N^2(1-f)}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 + \hat{R}^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 - 2\hat{R} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) \right]$$

$$= \frac{N^2(1-f)}{n} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1} + \hat{R}^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} - 2\hat{R} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1} \right]$$

dari persamaan diatas diperoleh

$$v(\hat{Y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n} \left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{yx}\right)$$

Teorema 2.4

Dua rumus alternatif lain untuk penduga variansi, karena $\hat{Y}_R = N\overline{X}\hat{R}$

$$v_1(\hat{R}) = \frac{(1-f)}{n\overline{X}^2} \left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{yx}\right) \tag{2.33}$$

$$v_2(\hat{R}) = \frac{(1-f)}{n\overline{x}^2} \left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{yx}\right) \tag{2.34}$$

Bukti

$$\hat{Y}_R = N\overline{X}\hat{R}$$

$$v\left(\hat{Y}_R\right) = N^2\overline{X}^2 v\left(\hat{R}\right)$$

$$v\left(\hat{R}\right) = \frac{v\left(\hat{Y}_R\right)}{N^2\overline{X}^2} = \frac{N^2(1-f)}{N^2\overline{X}^2 n} \left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{yx}\right)$$

$$= \frac{(1-f)}{n\overline{X}^2} \left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{yx}\right)$$

(Cochran, 1991)

2.9 Interval Kepercayaan

Pada penarikan sampel untuk mengetahui berapa besar ketelitian pendugaan sampel yang diambil dari populasi yaitu menggunakan interval kepercayaan. Jika ukuran sampel cukup besar maka berlaku pendekatan distribusi normal. Batas keyakinan (1 – α) 100 % untuk Y dan R diperoleh :

$$Y : \hat{Y}_R \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{Y}_R)} \tag{2.35}$$

$$R : \hat{R} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{R})} \tag{2.36}$$

$Z_{\alpha/2}$ dapat dicari dengan tabel distribusi normal dengan α adalah tingkat signifikansi.

dengan

$v\left(\hat{Y}_R\right)$ = penduga dari variansi penduga rasio jumlah populasi Y

$v\left(\hat{R}\right)$ = penduga dari variansi penduga rasio

(Cochran, 1991)

2.10 Bias Suatu Penduga Rasio

Untuk menghitung dan menguji penduga rasio dalam suatu penarikan sampel acak berlapis perlu diperhatikan bias pada pendugaan tersebut.

Ada dua hal tentang bias, yaitu :

1. memberikan hubungan yang penting pada bias dengan mengembangkan rumus

$$\hat{R} - R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} - R = \frac{\bar{y} - R\bar{x}}{\bar{x}} \qquad (2.37)$$

dalam sebuah deret Taylor, yaitu :

$$E\,(\bar{y} - R\bar{x}) \approx \frac{1 - f}{n\bar{X}^2}\,(RS_x^{\ 2} - \rho S_y S_x) \qquad (2.38)$$

dengan

S_y = kesalahan baku populasi Y

S_x = kesalahan baku populasi X

Bukti

$$\frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{X} + \left(\bar{x} - \bar{X}\right)} = \frac{1}{\bar{X}}\left(1 + \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\bar{X}}\left(1 - \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)$$

sehingga

$$\hat{R} - R \approx \frac{\bar{y} - R\bar{x}}{\bar{X}}\left(1 - \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)$$

Diketahui:

$$E\left(\bar{y} - R\bar{x}\right) = \bar{Y} - R\bar{X} = 0$$

$$\rho = \frac{E(y_i - \overline{Y})(x_i - \overline{X})}{\sqrt{E(y_i - \overline{Y})^2 E(x_i - \overline{X})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})(x_i - \overline{X})}{(N-1)\, S_y S_x} \tag{2.39}$$

$$E\,(\bar{y} - \overline{Y})(\bar{x} - \overline{X}) = \frac{N-n}{nN}\,\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})(x_i - \overline{X}) \tag{2.40}$$

dari (2.39) dan (2.40)

$$E\,(\bar{y} - \overline{Y})(\bar{x} - \overline{X}) = \frac{N-n}{nN}\,\frac{1}{N-1}\,\rho(N-1)S_y S_x$$

$$= \frac{N-n}{nN}\,\rho S_y S_x = \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\rho S_y S_x$$

$$= \frac{1}{n}(1-f)\,\rho\, S_y S_x$$

sehingga

$$E\,\bar{y}(\bar{x} - \overline{X}) = E(\bar{y} - \overline{Y})(\bar{x} - \overline{X}) = \frac{1-f}{n}\,\rho S_y S_x$$

$$E\,\bar{x}(\bar{x} - \overline{X}) = E(\bar{x} - \overline{X})^2 = \frac{1-f}{n} S_x^2$$

dari keterangan diatas maka

$$E\,(\hat{R} - R) \approx E\left[\left(\frac{\bar{y} - R\bar{x}}{\overline{X}}\right)\left(1 - \frac{\bar{x} - \overline{X}}{\overline{X}}\right)\right]$$

$$\approx E\left[\frac{\bar{y}}{\overline{X}} - \frac{R\bar{x}}{\overline{X}} - \frac{\bar{y}(\bar{x} - \overline{X})}{\overline{X}^2} + \frac{R\bar{x}(\bar{x} - \overline{X})}{\overline{X}^2}\right]$$

$$\approx E\left[\frac{\bar{y} - R\bar{x}}{\overline{X}} - \frac{\bar{y}(\bar{x} - \overline{X})}{\overline{X}^2} + \frac{R\bar{x}(\bar{x} - \overline{X})}{\overline{X}^2}\right]$$

$$\approx \frac{E(\bar{y} - R\bar{x})}{\overline{X}} - \frac{E\bar{y}(\bar{x} - \overline{X})}{\overline{X}^2} + R\,\frac{E\bar{x}(\bar{x} - \overline{X})}{\overline{X}^2}$$

$$\approx 0 - \frac{1}{\overline{X}^2}\,\frac{1-f}{n}\,\rho S_y S_x + \frac{1}{\overline{X}^2}\,R\,\frac{1-f}{n}\,S_x^2$$

$$\approx \frac{1-f}{n\overline{X}^2}\left(R S_x^2 - \rho S_y S_x\right)$$

2. hasil yang tepat untuk bias dan suatu batas atas rasio dari bias terhadap kesalahan baku, dengan memperhatikan kovariansi nilai $\hat{R}$ dan $\bar{x}$ dalam sampel acak sederhana berukuran n yaitu:

$$\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x}) = E\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\,\bar{x}\right) - E\,(\hat{R})\,E\,(\bar{x})$$

$$= \bar{Y} - \bar{X}\,E\,(\hat{R}) \qquad (2.41)$$

sehingga

$$E\,(\hat{R}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \frac{1}{\bar{X}}\,\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x})$$

$$= R - \frac{1}{\bar{X}}\,\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x}) \qquad (2.42)$$

Diperoleh bias didalam $\hat{R}$ adalah

$$E\,(\hat{R} - R) = \frac{-\,\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x})}{\bar{X}} \qquad (2.43)$$

kemudian

$$\left|\text{bias dalam } \hat{R}\right| = \frac{\left|\rho_{\hat{R},\bar{x}}\ \ \rho_{\hat{R}}\sigma_{\bar{x}}\right|}{\bar{X}} \leq \frac{\sigma_{\hat{R}}\sigma_{\bar{x}}}{\bar{X}} \qquad (2.44)$$

$\hat{R}$ dan $\bar{x}$ tidak dapat mempunyai korelasi ≥ 1

$$\frac{\left|\text{bias dalam } \hat{R}\right|}{\sigma_{\hat{R}}} \leq \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{X}} = kv \text{ dari } x \qquad (2.45)$$

Batas yang sama diterapkan untuk bias dalam $\hat{Y}_R$ dan $\hat{\bar{Y}}_R$. Dengan demikian jika koefisien variansi $\bar{x}$ kurang dari 0,1 maka bias dapat diabaikan dalam hubungannya dengan kesalahan baku.

(Cochran, 1991)

2. hasil yang tepat untuk bias dan suatu batas atas rasio dari bias terhadap kesalahan baku, dengan memperhatikan kovariansi nilai $\hat{R}$ dan $\bar{x}$ dalam sampel acak sederhana berukuran n yaitu:

$$\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x}) = E\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\,\bar{x}\right) - E\,(\hat{R})\,E\,(\bar{x})$$

$$= \bar{Y} - \bar{X}\,E\,(\hat{R}) \tag{2.41}$$

sehingga

$$E\,(\hat{R}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \frac{1}{\bar{X}}\,\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x})$$

$$= R - \frac{1}{\bar{X}}\,\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x}) \tag{2.42}$$

Diperoleh bias didalam $\hat{R}$ adalah

$$E\,(\hat{R} - R) = \frac{-\,\text{kov}\,(\hat{R}, \bar{x})}{\bar{X}} \tag{2.43}$$

kemudian

$$\left|\text{bias dalam } \hat{R}\right| = \frac{\left|\rho_{\hat{R},\bar{x}}\ \rho_{\hat{R}}\sigma_{\bar{x}}\right|}{\bar{X}} \leq \frac{\sigma_{\hat{R}}\sigma_{\bar{x}}}{\bar{X}} \tag{2.44}$$

$\hat{R}$ dan $\bar{x}$ tidak dapat mempunyai korelasi ≥ 1

$$\frac{\left|\text{bias dalam } \hat{R}\right|}{\sigma_{\hat{R}}} \leq \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{X}} = kv \text{ dari } x \tag{2.45}$$

Batas yang sama diterapkan untuk bias dalam $\hat{Y}_R$ dan $\hat{\bar{Y}}_R$. Dengan demikian jika koefisien variansi $\bar{x}$ kurang dari 0,1 maka bias dapat diabaikan dalam hubungannya dengan kesalahan baku.

(Cochran, 1991)

BAB III
METODOLOGI

3.1 Sumber Data

Sumber data yang digunakan berupa data simulasi. Data simulasi tersebut dibangkitkan menggunakan program S-plus dengan distribusi uniform.

Prosedur simulasi adalah sebagai berikut:

1. menentukan banyaknya nilai random sebagai populasi,
2. menentukan nilai maximum dan minimum.

3.2 Analisis Data Simulasi

Langkah-langkah analisis data simulasi adalah sebagai berikut:

1. mengelompokkan data populasi X (sebagai variabel yang diketahui) dalam kelas-kelas yang lebih homogen sehingga membentuk suatu lapisan,
2. mengambil sampel dari setiap kelompok lapisan, langkah-langkah pengambilan sampel:
   - menghitung total populasi X (sebagai variabel yang diketahui) dari setiap kelompok lapisan,
   - menghitung variansi populasi X dari setiap kelompok lapisan,
   - menentukan besarnya galat pendugaan,
   - menentukan tingkat keandalan (taraf kepercayaan),
   - menentukan alokasi sampel yang digunakan,
3. melakukan pendugaan untuk sampel berukuran besar pada tiap lapisan ($n_h \geq 30$) dan untuk sampel berukuran kecil pada tiap lapisan ($n_h < 30$). Ada dua cara untuk menduga populasi Y (sebagai variabel yang dicari) dalam sampel acak berlapis dengan penduga rasio.

a. Secara terpisah

Rumus untuk menduga populasi Y dengan menggunakan penduga rasio terpisah pada sampel besar ($n_h \geq 30$) sama dengan sampel kecil ($n_h < 30$).

i) Penduga total populasi Y

$$\hat{Y}_{RS} = \sum_h \frac{y_h}{x_h} X_h = \sum_h \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} X_h$$

dengan:

$\hat{Y}_{RS}$ = penduga rasio jumlah populasi Y secara terpisah,

y_h = jumlah sampel y dalam lapisan ke-h,

x_h = jumlah sampel x dalam lapisan ke-h,

X_h = jumlah populasi X dalam lapisan ke-h,

$\bar{y}_h$ = rata-rata sampel y dalam lapisan ke-h,

$\bar{x}_h$ = rata-rata sampel x dalam lapisan ke-h,

ii) Penduga rata-rata total populasi Y

$$\hat{\bar{Y}}_{Rs} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{2} \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} X_h = \frac{1}{N} \hat{Y}_{Rs}$$

dengan:

$\hat{\bar{Y}}_{Rs}$ = penduga rasio rata-rata populasi Y secara terpisah.

iii) Penduga variansi

$$v\left(\hat{\bar{Y}}_{Rs}\right) = \sum_h^L \frac{(1-f_h)}{n_h} \left(s_{yh}^2 + \hat{R}_h^2\ s_{xh}^2 - 2\hat{R}_h \rho_h s_{yh} s_{xh}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} \frac{(1-f_h)}{n_h} \frac{\sum_{i=1}^{n_h} \left(y_{hi} - \hat{R}_h x_{hi}\right)^2}{n_h - 1}$$

dengan:

$v\left(\hat{\bar{Y}}_{Rs}\right)$ = penduga dari variansi penduga rasio terpisah rata-rata populasi Y dalam sampel acak berlapis,

$\hat{R}_h = \frac{y_h}{x_h}$ adalah penduga rasio terpisah dalam lapisan ke-h,

s_{yh}^2 = variansi sampel y dalam lapisan ke-h,

s_{xh}^2 = variansi sampel x dalam lapisan ke-h,

s_{yh} = kesalahan baku sampel y dalam lapisan ke-h,

s_{xh} = kesalahan baku sampel x dalam lapisan ke-h,

ρ_h = koefisien korelasi dalam lapisan ke-h.

b. Secara gabungan

Rumus untuk menduga populasi Y dengan menggunakan penduga rasio gabungan pada sampel besar ($n_h \geq 30$) sama dengan sampel kecil ($n_h < 30$).

i) Penduga total populasi Y

$$\hat{Y}_{RC} = \frac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}} X = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} X$$

$$\hat{Y}_{st} = \sum_h N_h \bar{y}_h \quad , \quad \hat{X}_{st} = \sum_h N_h \bar{x}_h$$

dengan:

$\hat{Y}_{Rc}$ = penduga rasio jumlah populasi Y secara gabungan,

$\hat{Y}_{st}$ = penduga baku jumlah populasi Y dari sampel berlapis,

$\hat{X}_{st}$ = penduga baku jumlah populasi X dari sampel berlapis,

$\bar{y}_{st}$ = penduga rata-rata populasi Y dari sampel berlapis,

$\bar{x}_{st}$ = penduga rata-rata populasi X dari sampel berlapis.

ii) Penduga rata-rata total populasi Y

$$\hat{\bar{Y}}_{Rc} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X} = \frac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}} \bar{X}$$

$$\bar{y}_{st} = \frac{\hat{Y}_{st}}{N} \quad , \quad \bar{x}_{st} = \frac{\hat{X}_{st}}{N}$$

dengan:

$\hat{\bar{Y}}_{Rc}$ = penduga rasio rata-rata populasi Y secara gabungan.

iii) Penduga variansi

$$v\left(\hat{\bar{Y}}_{Rc}\right)=\sum_{h}^{L}\frac{(1-f_h)}{n_h}\left(s_{yh}^2+\hat{R}_c^2\ s_{xh}^2-2\hat{R}_c\rho_h s_{yh}s_{xh}\right)$$

dengan:

$v\left(\hat{\bar{Y}}_{Rc}\right)$ = penduga dari variansi penduga rasio gabungan rata-rata populasi Y dalam sampel acak berlapis,

$\hat{R}_c = \dfrac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}}$ adalah penduga rasio gabungan dalam sampel acak berlapis.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisa dan pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan:

1. penduga rasio dikatakan baik bila variansinya minimum, sebab lebih efisien;
2. dalam sampel acak berlapis;
   a. jika sampel berukuran besar pada tiap lapisan maka penduga rasio yang baik digunakan penduga rasio terpisah,
   b. jika sampel berukuran kecil pada tiap lapisan maka penduga rasio yang baik digunakan penduga rasio gabungan.

5.2 Saran

Pada penulisan ini hanya dianalisa penduga rasio dalam penarikan sampel acak berlapis. Penulis berharap ada yang melanjutkan analisa penduga rasio dengan menggunakan metode penarikan sampel yang lain. Misalkan penduga rasio dalam sampel sistematik, sampel berkelompok dan metode sampel lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Cochran W.G., 1991, *Teknik Penarikan Sampel* (Terjemahan Rudiansyah), Edisi ke-3, Universitas Indonesia Press.

Gasperz V., 1991, *Teknik Penarikan Contoh Untuk Penelitian Survei*, Edisi ke-1, Bandung, Tarsito.

Saleh, Samsubar, 1990, *Statistik Deskriptif*, Unit Penerbit dan Percetakan (UPP) AMP YKPN.

Supranto J., 1993, *Teknik Sampling*, Edisi ke-2, Rineka Cipta.

Yamane T., 1967, *Elementary Sampling Theory*, New york, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J.

Lampiran 1

Tabel hasil penarikan sampel acak sederhana pada tiap lapisan, untuk sampel berukuran besar dalam setiap lapisan ($n_h \geq 30$) adalah:

No	No. Random	Sampel	
		X	Y
1	004	21.090	25.780
2	008	21.840	27.180
3	012	23.440	27.470
4	016	24.490	29.370
5	019	25.780	29.660
6	023	28.690	32.140
7	030	30.690	33.690
8	037	34.080	36.090
9	042	34.780	37.010
10	043	35.030	37.220
11	046	37.510	38.010
12	053	39.680	39.740
13	058	41.480	41.880
14	063	42.850	43.060
15	070	43.960	45.720
16	072	44.780	46.230
17	076	45.590	48.230
18	079	46.370	49.000
19	082	46.670	51.080
20	085	47.530	51.760
21	091	50.520	52.480
22	092	51.150	52.560
23	094	51.740	53.230
24	099	52.230	54.070
25	103	53.320	54.700
26	105	54.820	56.480
27	107	55.410	56.770
28	109	55.950	57.340
29	112	56.830	58.980
30	115	56.970	60.230
31	117	57.280	61.600
32	119	57.850	61.950
33	121	59.050	62.590

No	No. Random	Sampel	
		X	Y
1	001	61.720	63.920
2	003	62.190	63.980
3	004	62.350	64.040
4	009	63.480	66.540
5	010	63.780	66.560
6	013	64.750	68.270
7	014	66.170	68.430
8	015	66.200	68.640
9	020	67.050	71.870
10	027	68.080	73.990
11	031	70.030	74.690
12	035	71.870	75.490
13	040	73.460	77.600
14	045	76.090	78.380
15	046	76.290	78.740
16	051	77.670	81.590
17	055	79.030	83.600
18	058	79.800	84.460
19	060	80.290	84.810
20	063	80.910	85.400
21	069	82.570	87.130
22	075	83.520	89.060
23	079	84.970	89.850
24	084	86.150	91.660
25	087	87.160	92.320
26	090	88.180	93.410
27	093	89.780	93.800
28	097	91.310	95.480
29	115	94.880	101.460
30	118	95.080	102.140
31	122	97.460	103.000

Lampiran 2

Tabel hasil penarikan sampel acak sederhana pada tiap lapisan, untuk sampel berukuran kecil dalam setiap lapisan (n_h < 30) adalah:

No	No. Random	Sampel	
		X	*Y*
1	001	20.180	25.110
2	002	20.190	25.290
3	004	21.090	25.780
4	005	21.350	26.060
5	010	22.650	27.260
6	011	23.100	27.280
7	046	37.510	38.010
8	051	38.920	39.000
9	053	39.680	39.740
10	054	40.560	39.790
11	115	56.970	60.230
12	118	57.700	61.640
13	120	58.990	62.580
14	122	59.200	63.050
15	123	59.580	63.570

No	No. Random	Sampel	
		X	*Y*
1	003	62.190	63.980
2	013	64.750	68.270
3	016	66.320	69.090
4	023	67.540	73.090
5	035	71.870	75.490
6	046	76.290	78.740
7	052	77.860	82.450
8	058	79.800	84.460
9	062	80.720	85.350
10	081	85.530	91.200
11	088	87.710	92.450
12	095	90.140	95.370
13	100	92.590	96.590
14	109	94.110	10.100
15	123	97.620	103.200

Lampiran 3

Hasil simulasi data yang sudah diurutkan

Populasi Random X	
1.	20.18
2.	20.19
3.	20.54
4.	21.09
5.	21.35
6.	21.40
7.	21.83
8.	21.84
9.	21.87
10.	22.65
11.	23.10
12.	23.44
13.	23.79
14.	24.04
15.	24.14
16.	24.49
17.	25.30
18.	25.76
19.	25.78
20.	26.50
21.	26.54
22.	28.67
23.	28.69
24.	28.94
25.	29.18
26.	29.38
27.	30.20
28.	30.36
29.	30.56
30.	30.69
31.	30.94
32.	32.64
33.	32.95
34.	33.08
35.	33.25
36.	33.82
37.	34.08
38.	34.13
39.	34.26
40.	34.41

Populasi Random Y	
1.	25.11
2.	25.29
3.	25.29
4.	25.78
5.	26.06
6.	26.34
7.	27.14
8.	27.18
9.	27.25
10.	27.26
11.	27.28
12.	27.47
13.	27.64
14.	27.76
15.	28.09
16.	29.37
17.	29.57
18.	29.59
19.	29.66
20.	30.70
21.	31.58
22.	32.09
23.	32.14
24.	32.23
25.	32.47
26.	32.82
27.	32.99
28.	33.27
29.	33.46
30.	33.69
31.	33.72
32.	33.91
33.	33.91
34.	34.00
35.	34.26
36.	35.52
37.	36.09
38.	36.15
39.	36.38
40.	36.47

Lampiran 3

41.	34.51
42.	34.78
43.	35.03
44.	36.24
45.	36.76
46.	37.51
47.	38.32
48.	38.40
49.	38.46
50.	38.49
51.	38.92
52.	39.54
53.	39.68
54.	40.56
55.	40.67
56.	41.10
57.	41.21
58.	41.48
59.	41.55
60.	42.00
61.	42.25
62.	42.62
63.	42.85
64.	43.16
65.	43.16
66.	43.19
67.	43.43
68.	43.55
69.	43.76
70.	43.96
71.	44.03
72.	44.78
73.	44.92
74.	45.20
75.	45.22
76.	45.59
77.	46.25
78.	46.33
79.	46.37
80.	46.53

41.	36.72
42.	37.01
43.	37.22
44.	37.63
45.	37.96
46.	38.01
47.	38.05
48.	38.26
49.	38.27
50.	38.80
51.	39.00
52.	39.10
53.	39.74
54.	39.79
55.	39.94
56.	40.49
57.	41.57
58.	41.88
59.	42.09
60.	42.63
61.	42.95
62.	42.99
63.	43.06
64.	43.32
65.	43.35
66.	43.47
67.	43.98
68.	44.29
69.	45.34
70.	45.72
71.	45.76
72.	46.23
73.	46.95
74.	47.80
75.	48.03
76.	48.23
77.	48.52
78.	48.78
79.	49.00
80.	49.95

Lampiran 3

81.	46.67
82.	46.67
83.	46.83
84.	46.84
85.	47.53
86.	47.71
87.	48.09
88.	48.74
89.	49.52
90.	49.99
91.	50.52
92.	51.15
93.	51.41
94.	51.74
95.	51.85
96.	51.98
97.	52.02
98.	52.13
99.	52.23
100.	52.52
101.	53.15
102.	53.17
103.	53.32
104.	54.74
105.	54.82
106.	54.98
107.	55.41
108.	55.83
109.	55.95
110.	56.33
111.	56.68
112.	56.83
113.	56.93
114.	56.95
115.	56.97
116.	57.07
117.	57.28
118.	57.70
119.	57.85
120.	58.99

81.	51.01
82.	51.08
83.	51.40
84.	51.48
85.	51.76
86.	51.87
87.	52.09
88.	52.12
89.	52.16
90.	52.44
91.	52.48
92.	52.56
93.	52.69
94.	53.23
95.	53.24
96.	53.36
97.	53.37
98.	53.95
99.	54.07
100.	54.48
101.	54.57
102.	54.62
103.	54.70
104.	55.51
105.	56.48
106.	56.66
107.	56.77
108.	56.88
109.	57.34
110.	57.91
111.	58.01
112.	58.98
113.	59.05
114.	59.60
115.	60.23
116.	60.36
117.	61.60
118.	61.64
119.	61.95
120.	62.58

Lampiran 3

121.	59.05
122.	59.20
123.	59.58
124.	59.81
125.	61.72
126.	61.86
127.	62.19
128.	62.35
129.	62.39
130.	62.43
131.	62.93
132.	63.18
133.	63.48
134.	63.78
135.	64.15
136.	64.48
137.	64.75
138.	66.17
139.	66.20
140.	66.32
141.	66.32
142.	66.55
143.	66.69
144.	67.05
145.	67.12
146.	67.16
147.	67.54
148.	67.61
149.	67.78
150.	68.06
151.	68.08
152.	68.27
153.	68.86
154.	69.54
155.	70.03
156.	70.06
157.	70.64
158.	71.78
159.	71.87
160.	72.21

121.	62.59
122.	63.05
123.	63.57
124.	63.80
125.	63.92
126.	63.92
127.	63.98
128.	64.04
129.	64.14
130.	65.48
131.	65.75
132.	65.81
133.	66.54
134.	66.56
135.	66.71
136.	67.38
137.	68.27
138.	68.43
139.	68.64
140.	69.09
141.	70.20
142.	70.46
143.	70.49
144.	71.87
145.	72.29
146.	72.98
147.	73.09
148.	73.43
149.	73.86
150.	73.88
151.	73.99
152.	74.15
153.	74.19
154.	74.29
155.	74.69
156.	74.76
157.	75.11
158.	75.34
159.	75.49
160.	75.85

Lampiran 3

161.	72.64
162.	72.67
163.	73.00
164.	73.46
165.	73.97
166.	74.90
167.	75.87
168.	75.99
169.	76.09
170.	76.29
171.	76.29
172.	76.61
173.	76.84
174.	77.37
175.	77.67
176.	77.86
177.	77.95
178.	77.99
179.	79.03
180.	79.17
181.	79.22
182.	79.80
183.	79.93
184.	80.29
185.	80.48
186.	80.72
187.	80.91
188.	81.38
189.	81.42
190.	81.74
191.	81.93
192.	82.40
193.	82.57
194.	82.64
195.	82.73
196.	82.74
197.	82.89
198.	83.44
199.	83.52
200.	83.89

161.	76.95
162.	77.47
163.	77.53
164.	77.60
165.	77.82
166.	78.06
167.	78.28
168.	78.30
169.	78.38
170.	78.74
171.	79.44
172.	79.87
173.	80.38
174.	80.99
175.	81.59
176.	82.45
177.	82.99
178.	83.54
179.	83.60
180.	84.37
181.	84.39
182.	84.46
183.	84.81
184.	84.81
185.	84.85
186.	85.35
187.	85.40
188.	85.48
189.	85.49
190.	85.67
191.	86.64
192.	86.76
193.	87.13
194.	87.28
195.	87.35
196.	88.77
197.	88.78
198.	88.94
199.	89.06
200.	89.33

Lampiran 3

201.	83.97
202.	84.79
203.	84.97
204.	85.00
205.	85.53
206.	85.56
207.	85.75
208.	86.15
209.	86.28
210.	86.33
211.	87.16
212.	87.71
213.	87.91
214.	88.18
215.	89.49
216.	89.56
217.	89.78
218.	89.82
219.	90.14
220.	90.73
221.	91.31
222.	91.67
223.	92.42
224.	92.59
225.	92.81
226.	92.88
227.	92.90
228.	93.52
229.	93.65
230.	93.91
231.	94.08
232.	94.09
233.	94.11
234.	94.14
235.	94.23
236.	94.55
237.	94.86
238.	94.87
239.	94.88
240.	94.88

201.	89.51
202.	89.63
203.	89.85
204.	90.31
205.	91.20
206.	91.42
207.	91.60
208.	91.66
209.	91.92
210.	91.98
211.	92.32
212.	92.45
213.	92.86
214.	93.41
215.	93.73
216.	93.77
217.	93.80
218.	94.48
219.	95.37
220.	95.45
221.	95.48
222.	95.65
223.	95.73
224.	96.59
225.	97.90
226.	98.30
227.	98.33
228.	98.38
229.	98.49
230.	98.83
231.	99.58
232.	100.06
233.	100.10
234.	100.20
235.	100.85
236.	100.90
237.	101.12
238.	101.18
239.	101.46
240.	101.76

Lampiran 3

241.	95.02
242.	95.08
243.	95.71
244.	96.12
245.	96.54
246.	97.46
247.	97.62
248.	97.91
249.	98.16
250.	99.64

241.	101.94
242.	102.14
243.	102.40
244.	102.85
245.	102.91
246.	103.00
247.	103.20
248.	103.87
249.	104.01
250.	104.05