

# HITUNG VOLUME DAN EKIVALENSI VOLUME POLIHEDRON



SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains  
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Jember



Asal	Hadiah	Kelas 516.33 JUL 4
Terima Del:	Pembelian 31 OCT 2002	
No. Induk :		h

10aw @-1

Oleh

Bagus Juliyanto

NIM. 981810101084

JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
Oktober, 2002

## MOTTO

*" . . . Aku tidak akan berhenti (berjalan) sebelum sampai ke pertemuan dua buah lautan, atau aku akan berjalan bertahun-tahun"*

*(QS. Al-Kahfi : 60)*

*Barang siapa diuji lalu bersabar, diberi lalu bersyukur, didzalimi lalu memaafkan dan mendzalimi lalu beristighfar, maka bagi mereka keselamatan dan mereka tergolong orang-orang yang memperoleh hidayah.*

*( HR. Al-Baihaqi )*

*Setiap kemajuan, setiap keberhasilan dan setiap kebahagiaan pasti dicapai dengan pengorbanan dan perjuangan. Maka kalau ada suatu usaha atau gerakan yang maju, yang berhasil pasti ada yang berjuang dan ada yang berkorban.*

*( KH. Imam Zarkasyi )*

## PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat pada Muhammad S.A.W setulus hati skripsi ini kupersembahkan kepada:

- Ayahanda Soetono Eko Endarto, Ibunda Suliyatin (do'a, nasehat dan jerih payahmu sebagai nafasku)
- Saudaraku Ima Fitriyani (do'a dan kasih sayangnya)
- Keluarga di Singosari & Jeng Rida (do'a, kritik dan kebersamaanmu sebagai semangatku)
- Almamater yang kubanggakan

### DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan September 2001 sampai dengan bulan September 2002 di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Oktober 2002

Bagus Juliyanto



ABSTRAK

**Bagus Juliyanto, NIM. 981810101084, Oktober 2002, judul: 'Hitung Volume dan Ekuivalensi Volume Polihedron'.**

Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

DPU: Drs. Kusno, DEA, Ph.D

DPA: Kosala Dwidja Purnomo, S.Si

Permasalahan yang akan dikaji dalam skripsi ini adalah, pertama, untuk mendapatkan teknik hitung volume prisma, limas dan benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak. Kedua, menentukan metode efektif untuk mentransformasikan prisma menjadi prisma atau limas menjadi limas berbeda tetapi volumenya sama. Dalam hal ini, prisma dan limas diasumsikan konveks.

Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa, untuk menentukan volume prisma dan limas dengan data disajikan oleh pasangan 2 (dua) titik ujung  $n$  rusuk tegak dapat dilakukan dengan, pertama, membangun poligon alas. Kedua, menentukan luas alas  $L$ . Ketiga, menentukan tinggi prisma atau limas  $t$ . Akhirnya, menentukan volume prisma:  $L \times t$  dan volume limas:  $1/3 \times L \times t$ . Kemudian, untuk menentukan volume benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak yang tingginya berbeda dapat dilakukan dengan, pertama, *sorting* panjang rusuk. Kedua, menentukan volume masing-masing kumpulan rusuk tegak prisma. Akhirnya, menjumlahkan volume  $n$  prisma tegak. Sedangkan untuk kasus prisma tegak penyusun terdapat sama tinggi tetapi alas bawah dan alas atas tidak sebidang, prosedur hitung volumenya adalah, pertama, *sorting* ketinggian alas-alas bawah prisma. Kedua, *sorting* panjang rusuk-rusuk tegak prisma dengan alas bawah sama. Ketiga, menentukan volume masing-masing kumpulan rusuk-rusuk tegak prisma. Akhirnya, menjumlahkan volume  $n$  prisma tegak. Selanjutnya, untuk mentransformasikan prisma atau limas yang volumenya tetap dapat dilakukan dengan, pertama, mendekomposisi alas menjadi  $n$  segitiga. Kedua, pada bidang alas, transformasi segitiga-segitiga tersebut dengan mencerminkan, menggeser atau memutar segitiga. Ketiga, menggeser poligon hasil transformasi tersebut searah dan setinggi rusuk tegak prisma asal. Adapun untuk limas, dapat dilakukan dengan mengkontruksi rusuk-rusuk tegak limas yang ditarik dari poligon alas hasil transformasi tersebut ke sebarang titik di bidang yang melalui titik puncak limas asal sejajar alasnya.

Kata kunci: polihedron konveks, prisma, limas, ekuivalensi volume, transformasi titik, prinsip Cavalieri.

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : Kamis  
Tanggal : 31 OCT 2002  
Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji,

Ketua



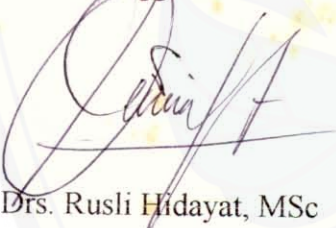
Drs. Kusno, DEA, Ph.D  
NIP. 131 592 357

Sekretaris



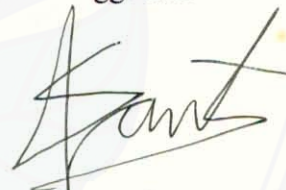
Kosala Dwidja Purnomo, S.Si  
NIP. 132 206 019

Anggota I



Drs. Rusli Hidayat, MSc  
NIP. 132 048 321

Anggota II



Kiswara Agung Santoso, S.Si  
NIP. 132 207 813

Mengesahkan,

Dekan FMIPA Univ. Jember



Ir. Sumadi, MS  
NIP. 130 368 784

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena penulis telah diberikan kesempatan dan kekuatan untuk menyelesaikan skripsi yang berjudul **'Hitung Volume dan Ekuivalensi Volume Polihedron'** ini.

Penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada semua pihak yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, yaitu kepada yang terhormat:

1. Bapak Ir. Sumadi, MS selaku Dekan FMIPA Universitas Jember
2. Bapak Drs. Kusno, DEA, Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember dan Dosen Pembimbing Utama yang telah memberikan arahan serta saran
3. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan dan arahan
4. Bapak Drs. Rusli Hidayat, MSc dan Bapak Kiswara Agung Santoso, S.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik serta masukan
5. Sahabat-sahabatku (Mas Jati, Mas Wirid, Mas Yudhi, Mas Adi S., Bahrul, Toriq, Agung, Wawan, Yasin, Hadi F., Ismail, Rano, Dani, Herwin, Samsul, Hadi S., Tutut, Nonik, Indah, Indri, Nur Atia, Dwi Maryatin, Rina K.) yang senantiasa memberikan motivasi
6. Teman-teman seperjuangan Matematika '98
7. Semua pihak yang dengan sukarela membantu penulis

Saran serta kritik yang sifatnya membangun dari pembaca sangat penulis harapkan sehingga dapat memberi kontribusi berarti bagi kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang geometri rancang bangun.

Jember, Oktober 2002

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN MOTTO .....	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	iii
HALAMAN DEKLARASI .....	iv
ABSTRAK .....	v
HALAMAN PENGESAHAN .....	vi
KATA PENGANTAR .....	vii
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	x
DAFTAR TABEL .....	xii
BAB I    PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Perumusan Masalah .....	1
1.3. Tujuan.....	2
1.4. Manfaat.....	2
BAB II    TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Polihedron .....	3
2.2. Bentuk-bentuk Polihedron Klasik .....	5
2.2.1 Prisma .....	5
2.2.2 Limas.....	7
2.3. Kekongruenan dan Luas Poligon .....	9
2.3.1 Kekongruenan Poligon.....	9
2.3.2 Luas Poligon.....	12
2.4. Kekongruenan dan Hitung Volume Polihedron.....	19
2.4.1 Kekongruenan Polihedron.....	19
2.4.2 Hitung Volume Polihedron.....	20



2.5.	Ekivalensi Luas dan Ekivalensi Volume.....	26	
2.5.1	Ekivalensi Luas .....	26	
2.5.2	Ekivalensi Volume.....	26	
2.6	Transformasi Titik.....	27	
2.6.1	Refleksi .....	27	
2.6.2	Translasi.....	29	
2.6.3	Rotasi.....	29	
BAB III	HASIL DAN PEMBAHASAN		
3.1	Teknik Hitung Menentukan Volume Prisma, Limas dan Benda Hasil Gabungan $n$ Prisma Tegak.....	31	
3.1.1	Teknik Hitung Menentukan Volume Prisma dan Limas.....	31	29 31 16
3.1.2	Teknik Hitung Menentukan Volume Benda Hasil Gabungan $n$ Prisma Tegak.....	36	41 31 14
3.2	Transformasi Ekivalensi Volume Prisma dan Limas.....	40	
3.2.1	Transformasi Ekivalensi Volume Prisma.....	40	
3.2.2	Transformasi Ekivalensi Volume Limas.....	41	
3.2.3	Aplikasi Prosedur Umum Transformasi Ekivalensi Volume Prisma dan Limas .....	41	
BAB IV	KESIMPULAN DAN SARAN		
4.1	Kesimpulan .....	48	
4.2	Saran.....	49	
DAFTAR PUSTAKA.....		51	
LAMPIRAN-LAMPIRAN.....		52	

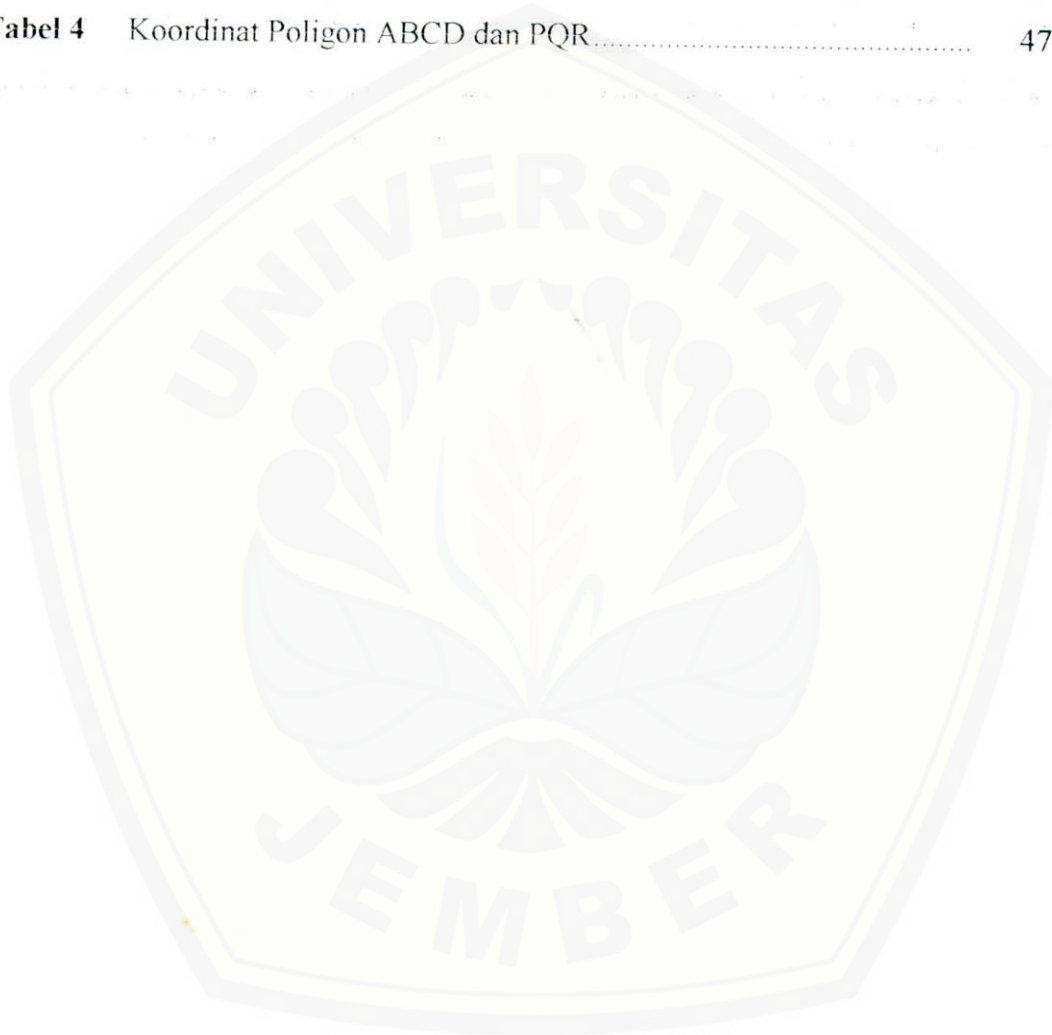
DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b>	Polihedron dan Bagian-bagiannya.....	3
<b>Gambar 2.2</b>	Polihedron Konveks.....	4
<b>Gambar 2.3</b>	Penyajian Polihedron Secara Analitik.....	5
<b>Gambar 2.4</b>	Prisma dan Bagian-bagiannya.....	5
<b>Gambar 2.5</b>	Prisma Tegak.....	6
<b>Gambar 2.6</b>	Prisma Miring.....	6
<b>Gambar 2.7</b>	<i>Paralel Epipedum</i> .....	7
<b>Gambar 2.8</b>	Balok.....	7
<b>Gambar 2.9</b>	Kubus.....	7
<b>Gambar 2.10</b>	Limas dan Bagian-bagiannya.....	8
<b>Gambar 2.11</b>	Limas Segitiga T-ABC.....	8
<b>Gambar 2.12</b>	Limas Segiempat T-ABCD.....	8
<b>Gambar 2.13</b>	Limas Segitiga Beraturan T-ABC.....	8
<b>Gambar 2.14</b>	Dua Poligon Kongruen.....	9
<b>Gambar 2.15</b>	Postulat (Sisi-Sudut-Sisi).....	10
<b>Gambar 2.16</b>	Postulat (Sudut-Sisi-Sudut).....	10
<b>Gambar 2.17</b>	Teorema (Sisi-Sisi-Sisi).....	11
<b>Gambar 2.18</b>	Ilustrasi Pembuktian Teorema (Sisi-Sisi-Sisi).....	11
<b>Gambar 2.19</b>	Persegi Panjang dengan Sisi $p$ dan $l$ .....	13
<b>Gambar 2.20</b>	Bujur Sangkar dengan Sisi $a$ .....	13
<b>Gambar 2.21</b>	Jajaran Genjang dengan Alas $a$ dan Tinggi $t$ .....	13
<b>Gambar 2.22</b>	Jajaran Genjang dengan Sisi-sisi Vektor $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ .....	14
<b>Gambar 2.23</b>	Segitiga ABD dengan Alas $a$ dan Tinggi $t$ .....	14
<b>Gambar 2.24</b>	Jajaran Genjang ABCD.....	16
<b>Gambar 2.25</b>	Persegi Panjang ABCD.....	18
<b>Gambar 2.26</b>	Bujur Sangkar ABCD.....	18
<b>Gambar 2.27</b>	Segitiga ABD.....	19
<b>Gambar 2.28</b>	Dua Polihedron Kongruen.....	20
<b>Gambar 2.29</b>	Prisma Tegak ABCDE-FGHIJ dengan Ukurannya.....	20

<b>Gambar 2.30</b>	Prisma Miring ABC-DEF dengan Ukurannya .....	21
<b>Gambar 2.31</b>	Limas T-ABCD dengan Luas Alas $L$ dan Tinggi $t$ .....	21
<b>Gambar 2.32</b>	Prisma Tegak ABCDE-FGHIJ .....	23
<b>Gambar 2.33</b>	Prisma Miring ABC-DEF .....	24
<b>Gambar 2.34</b>	Limas T-ABCD .....	25
<b>Gambar 2.35</b>	Penerapan Prinsip Pengawetan Luas .....	26
<b>Gambar 2.36</b>	Prinsip Cavalieri pada Prisma Tegak Segitiga dan Segilima .....	27
<b>Gambar 2.37</b>	Refleksi Terhadap Bidang $x=0$ .....	28
<b>Gambar 2.38</b>	Ilustrasi Rotasi pada Sistem Koordinat Tangan Kanan .....	30
<b>Gambar 3.1</b>	Penyajian Data Prisma .....	31
<b>Gambar 3.2</b>	Penyajian Teknik Penyapuan .....	33
<b>Gambar 3.3</b>	Penyajian Teknik Dekomposisi Poligon Menjadi $n$ Segitiga .....	33
<b>Gambar 3.4</b>	Ilustrasi Penentuan Tinggi Prisma Tegak .....	34
<b>Gambar 3.5</b>	Ilustrasi Penentuan Tinggi Prisma Miring .....	34
<b>Gambar 3.6</b>	Penyajian Data Limas .....	35
<b>Gambar 3.7</b>	Ilustrasi Penentuan Tinggi Limas .....	35
<b>Gambar 3.8</b>	Ilustrasi Gabungan $n$ Prisma Tegak dengan Tinggi Berbeda .....	37
<b>Gambar 3.9</b>	Ilustrasi Gabungan $n$ Prisma Tegak dengan Penyusun Ada yang Sama .....	38
<b>Gambar 3.10</b>	Ilustrasi Menentukan Volume Gabungan $n$ Prisma Tegak dengan Penyusun Ada yang Sama .....	39
<b>Gambar 3.11</b>	Ilustrasi Transformasi Ekuivalensi Volume Prisma .....	40
<b>Gambar 3.12</b>	Ilustrasi Transformasi Ekuivalensi Volume Limas .....	41
<b>Gambar 3.13</b>	Contoh Penerapan Prosedur Transformasi Ekuivalensi Volume Prisma .....	44
<b>Gambar 3.14</b>	Contoh Penerapan Prosedur Transformasi Ekuivalensi Volume Limas .....	47

DAFTAR TABEL

<b>Tabel 1</b>	Bukti Teorema (Sisi-Sisi-Sisi).....	11
<b>Tabel 2</b>	Pembuktian Luas Segitiga.....	14
<b>Tabel 3</b>	Koordinat Poligon ABCD dan PQRS.....	44
<b>Tabel 4</b>	Koordinat Poligon ABCD dan PQR.....	47





## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Konstruksi obyek dengan polihedron banyak dimanfaatkan dalam bidang industri. Hal ini dapat ditemukan dalam modelisasi komponen-komponen mesin kendaraan, peralatan elektronik maupun modelisasi bentuk pengemasan produk industri.

Dalam konstruksi obyek-obyek industri dengan polihedron tersebut, diperlukan studi aspek geometris dan ekonomis (efisiensi). Aspek geometris berhubungan dengan studi relasi garis dengan garis, relasi garis dengan bidang, relasi bidang dengan bidang, jarak titik ke titik, jarak titik ke garis, jarak titik ke bidang, jarak garis ke garis, jarak garis ke bidang, jarak bidang ke bidang, sudut dan kekongruenan. Sedangkan aspek efisiensi berhubungan dengan studi bentuk dan kuantitas (volume) benda.

Pada perancangan dan fabrikasi benda-benda tersebut, variasi model dan kuantitas bahan banyak ditentukan oleh model-model dari benda-benda solid pembangunnya dan ukuran volume obyek. Oleh sebab itu, studi tentang transformasi bentuk dan volume benda sangat diperlukan guna menentukan kuantitas bahan beserta perubahan bentuk benda. Dalam hal ini, karena setiap transformasi benda pada umumnya menghasilkan bentuk dan volume yang berbeda, maka pada penelitian ini, kita hanya tertarik untuk mempelajari transformasi benda yang mengawetkan volume tanpa memperhatikan bentuk akhirnya. Adapun masalahnya dapat dirumuskan sebagai berikut.

### 1.2 Permasalahan

Masalah yang perlu dicari solusinya adalah:

1. Menentukan teknik hitung volume prisma, limas dan benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak.

2. Jika diketahui sebarang prisma dan limas, maka permasalahan yang harus dicari pemecahannya adalah bagaimana mentransformasi prisma menjadi prisma atau limas menjadi limas berbeda tetapi volumenya tetap.

Dalam penelitian ini, prisma dan limas diasumsikan konveks.

### 1.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mendapatkan teknik hitung menentukan volume prisma, limas dan benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak.
2. Menentukan metode efektif untuk mentransformasikan prisma menjadi prisma atau limas menjadi limas berbeda tetapi volumenya tetap.

### 1.4 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Dapat menentukan prosedur efektif untuk menghitung volume prisma, limas dan benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak.
2. Dapat mentransformasi prisma menjadi prisma atau limas menjadi limas berbeda tetapi volumenya tetap.
3. Dapat digunakan sebagai pengontrol penggunaan bahan untuk konstruksi obyek.

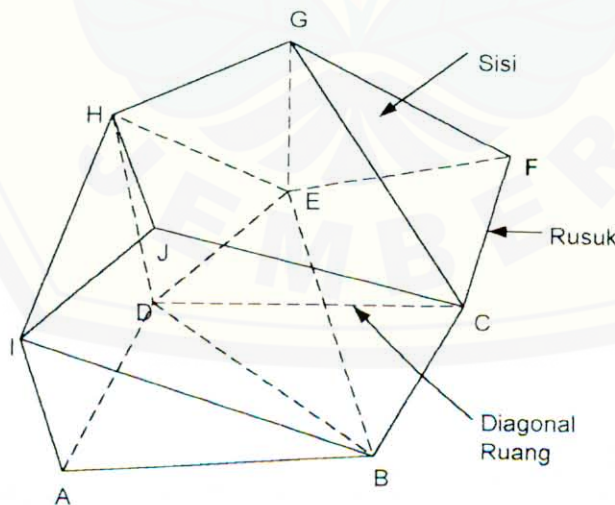


**BAB II**  
**TINJAUAN PUSTAKA**

**2.1 Polihedron**

Dalam geometri ruang, banyak diperkenalkan benda benda solid standart, antara lain: prisma, limas, silinder, kerucut dan bola. Dari contoh benda benda tersebut, prisma dan limas termasuk polihedron. Oleh sebab itu, untuk mendefinisikan kedua benda tersebut, pada bagian ini kita definisikan terlebih dahulu tentang *polihedron*.

**Polihedron** adalah suatu benda ruang tertutup atau benda solid (pejal) yang dibatasi oleh beberapa potongan bidang berupa *poligon*. (Kusno, 2000). Dalam hal ini, *poligon* adalah gabungan himpunan titik-titik  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  dengan ruas-ruas garis:  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$  sedemikian hingga jika dua sebarang dari ruas garis berpotongan, bertitik potong salah satu dari titik-titik  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  dan tidak ada titik lain (Kusno, 1988).



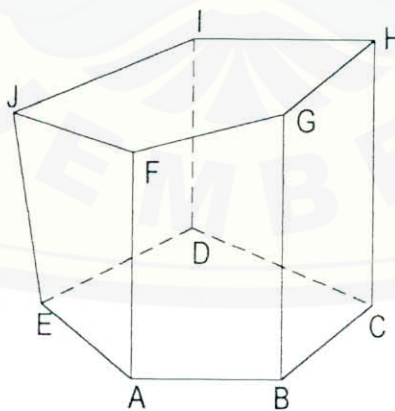
Gambar 2.1: Polihedron dan Bagian-bagiannya

Segmen-segmen garis dari interseksi antara potongan-potongan bidang disebut **rusuk**. Potongan-potongan bidang selanjutnya disebut **sisi** polihedron.

Interseksi dari rusuk–rusuk polihedron pada suatu titik disebut **titik sudut** polihedron, dan **interior** polihedron adalah bagian ruang yang tertutup oleh polihedron tersebut. Sedangkan **diagonal ruang** adalah segmen yang ditarik dari dua titik sudut yang tidak pada satu sisi dari polihedron. **Diagonal sisi** adalah segmen yang ditarik dari dua titik sudut yang tidak berhubungan pada sebuah sisi polihedron. Jika sebarang bidang melalui interior polihedron maka bagian bidang yang dibatasi oleh garis–garis interseksi antara bidang dengan polihedron disebut **penampang**.

Dalam hal khusus, untuk polihedron tertentu, misalnya kubus dan balok mempunyai **penampang diagonal** atau dengan istilah **bidang diagonal**. Yang dimaksud dengan penampang diagonal atau bidang diagonal adalah penampang yang ditarik melalui dua rusuk sejajar tidak pada satu sisi polihedron.

Jika setiap penampang suatu polihedron adalah poligon konveks, maka polihedron tersebut dinamakan **polihedron konveks** (lihat gambar 2.2). Secara umum dapat didefinisikan bahwa suatu polihedron adalah konveks, jika sebarang dua titik  $A$  dan  $B$  pada polihedron, maka semua titik pada segmen  $AB$  termuat pada polihedron.

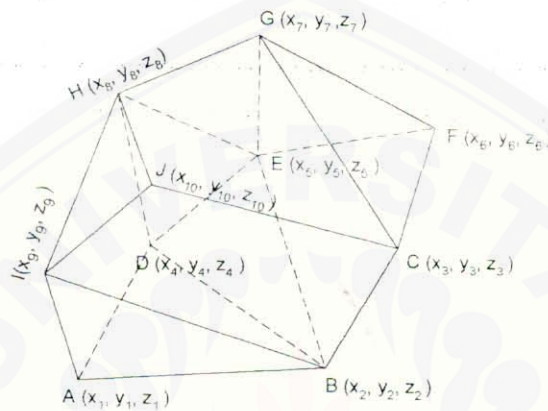


Gambar 2.2: Polihedron Konveks

Suatu polihedron diklasifikasikan menurut jumlah sisinya. Polihedron dengan empat sisi dinamakan *tetrahedron*, polihedron dengan lima sisi disebut *pentahedron* dan seterusnya.



Dalam ekspresi analitik, polihedron didefinisikan dengan data geometrik dan data topologi. Data geometrik dinyatakan oleh titik  $P(x,y,z)$ ,  $\forall P \in R^3$  dan  $x,y,z \in R$ . Sedangkan data topologi berhubungan dengan bentuk polihedron yang unik (lihat gambar 2.3).



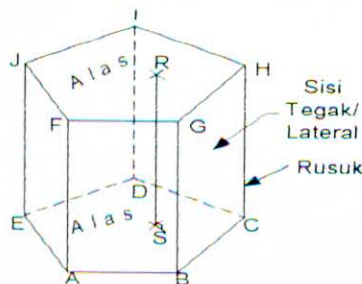
Gambar 2.3 : Penyajian Polihedron Secara Analitik

## 2.2 Bentuk-bentuk Polihedron Klasik

Berdasarkan definisi polihedron, tentunya akan didapat banyak sekali bentuk-bentuk polihedron. Sehubungan dengan keperluan penelitian ini, kita definisikan terlebih dahulu bentuk-bentuk polihedron konveks prisma dan limas berikut ini (Kusno, 2000).

### 2.2.1 Prisma

**Definisi 1 :** *Prisma* adalah polihedron yang dibatasi oleh dua bidang sejajar dan beberapa bidang perpotongan dengan garis-garis potong sejajar.

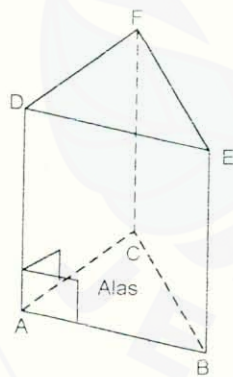


Gambar 2.4 : Prisma dan Bagian-bagiannya

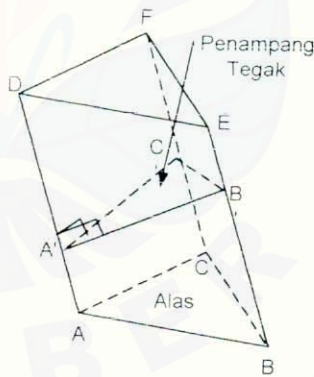
Bagian bidang yang saling sejajar disebut **alas prisma**. Pada gambar 2.4, ABCDE dan FGHIJ adalah alas dari prisma ABCDE-FGHIJ, dengan rusuk-rusuk alas adalah  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$  dan  $\overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HI}, \overline{IJ}, \overline{JF}$ . Bagian bidang yang memotong dua bidang sejajar disebut **sisi lateral (tegak) dari prisma**.

Sebagai contoh: ABGF, BCHG, ..., EAFJ dengan rusuk-rusuk tegaknya:  $\overline{AF}, \overline{BG}, \overline{CH}, \overline{DI}, \overline{EJ}$ . **Tinggi prisma** ditentukan oleh jarak antara dua bidang sejajar prisma. Pada gambar 2.4, tinggi dari prisma adalah  $\overline{RS}$  ( $\overline{RS} \perp$  alas).

Berdasarkan rusuk-rusuk tegaknya, prisma dibagi menjadi dua, yaitu **prisma tegak dan prisma miring**. Jika rusuk-rusuk tegaknya tegak lurus terhadap bidang alas maka disebut **prisma tegak** (gambar 2.5) dan jika rusuk-rusuk tegaknya miring terhadap bidang alas maka disebut **prisma miring** (lihat gambar 2.6).



Gambar 2.5 : Prisma Tegak



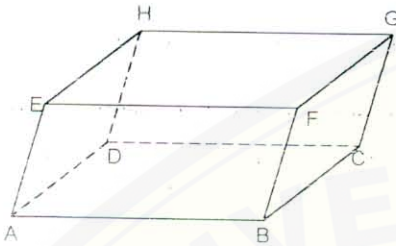
Gambar 2.6 : Prisma Miring

Selanjutnya, disajikan contoh-contoh prisma tegak dan miring berikut ini.

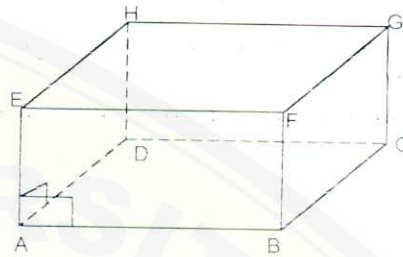
**Definisi 2 :** *Paralel epipedum* adalah prisma yang bidang alasnya tertutup jajaran genjang. Dengan demikian keenam sisinya tertutup oleh jajaran genjang (Gambar 2.7).

**Definisi 3 :** *Paralel epipedum persegi panjang (Balok)* adalah prisma yang bidang alasnya tertutup persegi panjang dan bidang tegaknya tegak lurus terhadap bidang alas (Gambar 2.8).

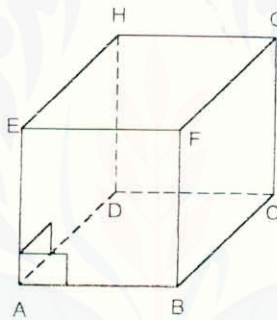
**Definisi 4 :** *Paralel epipedum bujur sangkar (Kubus)* adalah prisma yang semua rusuknya kongruen. Dengan demikian semua sisinya tertutup oleh bujur sangkar kongruen (Gambar 2.9).



Gambar 2.7 : Paralel Epipedum



Gambar 2.8 : Balok



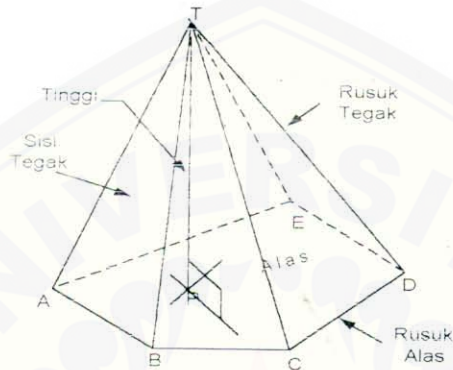
Gambar 2.9 : Kubus

## 2.2.2 Limas

**Definisi 5 :** *Limas* adalah polihedron yang dibatasi oleh sudut banyak-bidang (sudut polihedron) dan bidang poligon. Dalam hal ini, titik sudut banyak-bidang ini disebut puncak limas dan bidang poligonnya merupakan alas limas. Sisi-sisi dari bidang poligon (alas limas) tersebut merupakan rusuk alas yang berbentuk poligon (lihat gambar 2.10).

**Definisi 6 :** Sudut polihedron (sudut banyak-bidang) dalam  $n$ -hedron dengan  $n > 2$  adalah gabungan antara  $n$  sinar garis tidak sebidang yang titik pangkalnya bersekutu dan  $n$  bagian bidang yang dibatasi oleh pasangan sinar-sinar garis tersebut secara berurutan, dengan ketentuan bahwa tidak ada dua bagian yang berpotongan satu sama lain kecuali pada salah satu sinar dari sinar-sinar itu.

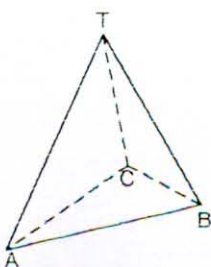
Jadi suatu limas pada dasarnya dapat diperoleh melalui sebarang sudut banyak-bidang yang dipotong dengan sebarang bidang datar di luar titik sudut banyak-bidang. Unsur-unsur yang perlu diketahui pada limas dapat dijelaskan sebagai berikut.



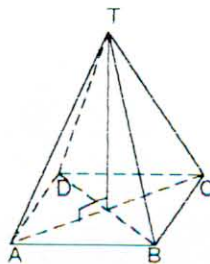
Gambar 2.10 : Limas dan Bagian - bagiannya

Bagian yang tertutup bidang disebut **interior limas**. Sisi dari sudut banyak-bidang disebut **sisi lateral limas** dan garis-garis perpotongan sisi-sisi tegak disebut **rusuk-rusuk tegak limas**. Contoh sisi-sisi tegak limas T-ABCDE diatas adalah: TAB, TBC, TCD, TDE dan TEA dan untuk rusuk tegaknya:  $\overline{TA}$ ,  $\overline{TB}$ ,  $\overline{TC}$ ,  $\overline{TD}$  dan  $\overline{TE}$ . Segmen yang ditarik secara tegak lurus dari puncak limas ke alas disebut **tinggi limas**.

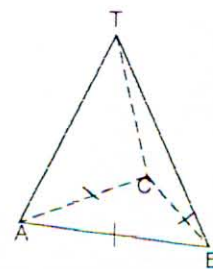
Secara umum, limas diklasifikasikan menurut alasnya. Misal, jika alasnya tertutup segitiga ABC, maka disebut **limas segitiga T-ABC (Tetrahedron)**. Jika alasnya tertutup segiempat ABCD, maka disebut **limas segiempat T-ABCD (Pentahedron)** dan seterusnya. Suatu **limas beraturan**, jika rusuk-rusuk alasnya membentuk poligon beraturan (lihat gambar 2.11, 2.12 dan 2.13).



Gambar 2.11 :  
Limas Segitiga T-ABC



Gambar 2.12 :  
Limas Segiempat T-ABCD



Gambar 2.13 :  
Limas Segitiga Beraturan T-ABC

## 2.3 Kekongruenan dan Luas Poligon

### 2.3.1 Kekongruenan Poligon

Kekongruenan dua poligon dapat didefinisikan sebagai berikut (Kusno,1988):

**Definisi 7 :** Dua poligon adalah kongruen, jika ada korespondensi 1-1 diantara titik-titiknya sedemikian hingga:

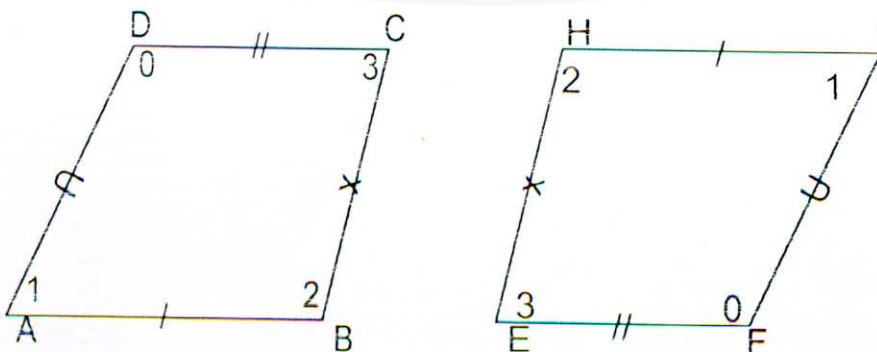
1. Semua sisi yang berkorespondensi kongruen
2. Semua sudut yang berkorespondensi kongruen

(lihat gambar 2.14).

Yang dimaksud dengan sisi yang berkorespondensi dan sudut-sudut yang berkorespondensi disajikan dengan definisi berikut ini.

**Definisi 8 :** *Korespondensi sisi-sisi dari dua poligon* adalah dua sisi dengan titik ujung-titik ujungnya berpasangan yang merupakan korespondensi unsur-unsur yang bersesuaian diantara titik sudut-titik sudut dari dua poligon.

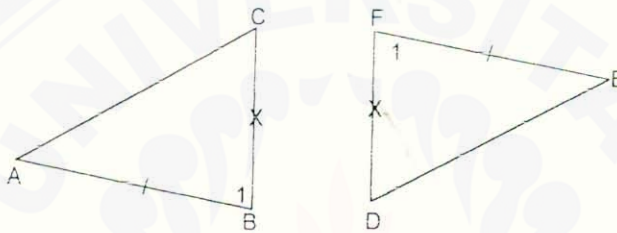
**Definisi 9 :** *Korespondensi sudut-sudut dari dua poligon* adalah dua sudut dengan titik sudutnya berpasangan, yang merupakan korespondensi unsur-unsur yang bersesuaian diantara titik sudut-titik sudut dua poligon.



Gambar 2.14 : Dua Poligon Kongruen

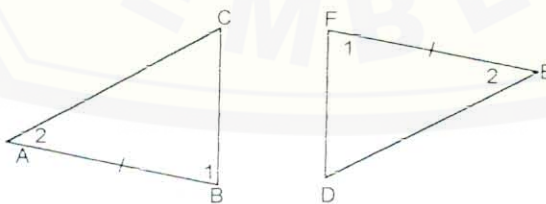
Dalam hal khusus untuk poligon berbentuk segitiga, kongruensi dua segitiga dipostulatkan sebagai berikut.

**Postulat 1 :** Dua segitiga adalah kongruen, jika ada suatu korespondensi diantara titik-titik sudutnya sedemikian hingga dua sisi dan sudut apitnya dari sebuah segitiga kongruen terhadap bagian-bagian yang berkorespondensi segitiga kedua (sisi-sudut-sisi) (gambar 2.15).



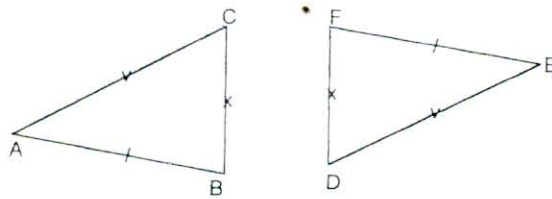
Gambar 2.15 : Postulat (Sisi-Sudut-Sisi)

**Postulat 2 :** Dua segitiga adalah kongruen, jika ada suatu korespondensi diantara titik sudut-titik sudutnya sedemikian hingga dua sudut dan sisi apitnya dari sebuah segitiga kongruen terhadap bagian-bagian yang berkorespondensi segitiga kedua (sudut-sisi-sudut) (lihat gambar 2.16)



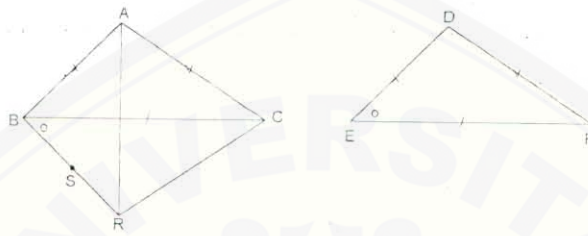
Gambar 2.16 : Postulat (Sudut-Sisi-Sudut)

**Teorema 1 :** Dua segitiga adalah kongruen, jika ada korespondensi diantara titik sudut-titik sudutnya, sedemikian hingga ketiga sisi pada sebuah segitiga kongruen terhadap sisi-sisi yang berkorespondensi pada segitiga lain (sisi-sisi-sisi) (gambar 2.17).



Gambar 2.17 : Teorema (Sisi-Sisi-Sisi)

**Bukti :**



Gambar 2.18 : Ilustrasi Pembuktian Teorema (Sisi-Sisi-Sisi)

Dari gambar 2.18, diketahui:  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

**Tabel 1: Bukti Teorema Sisi-Sisi-Sisi**

Pernyataan	Alasan
1. Titik B pada $\overline{BC}$ , terdapat $\angle SBC \cong \angle DEF$	1. Postulat: Jika suatu titik diketahui terletak pada suatu garis, ada sudut yang titik sudutnya adalah titik tadi sedemikian hingga sudut tersebut kongruen dengan sebarang sudut yang diketahui.
2. Memperluas $\overline{BS}$ sehingga $\overline{RB} \cong \overline{DE}$ (sisi)	2. Postulat garis: sebuah garis dapat diperpanjang dari ujung-ujungnya.
3. $\overline{RC}$ garis yang melalui titik R dan C	3. Postulat garis: ada tunggal garis yang melalui dua titik.
4. $\overline{RA}$ garis yang melalui titik R dan A	4. Sama dengan no. 3
5. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (sisi)	5. Diketahui.
6. $\triangle DEF \cong \triangle RBC$	6. Postulat 1: (sisi-sudut-sisi)

7. $\overline{RC} \cong \overline{DF}$	7. Definisi kongruensi segitiga.
8. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	8. Diketahui.
9. $\overline{AC} \cong \overline{RC}$ (sisi)	9. Sifat transitif kongruensi.
10. $\angle CAR \cong \angle CRA$	10. Teorema segitiga sama kaki: jika dua sisi suatu segitiga kongruen, maka sudut-sudut dihadapan kedua sisi tersebut kongruen.
11. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	11. Diketahui.
12. $\overline{RB} \cong \overline{DE}$	12. Sama dengan no. 2
13. $\overline{AB} \cong \overline{RB}$ (sisi)	13. Sama dengan no. 9
14. $\angle BAR \cong \angle BRA$	14. Sama dengan no. 10
15. $\angle BAC \cong \angle BRC$ (sudut)	15. Postulat penjumlahan sudut
16. $\triangle ABC \cong \triangle RBC$	16. Postulat 1: (sisi-sudut-sisi)
17. $\triangle DEF \cong \triangle RBC$	17. Sama dengan no. 6
18. Jadi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	18. Teorema: jika dua segitiga adalah kongruen terhadap segitiga yang sama, maka keduanya saling kongruen.

### 2.3.2 Luas Poligon

Pada bagian ini dibahas luas poligon, dengan pendekatan geometri klasik dan pendekatan geometri analitik. Pembahasan hanya dikhususkan untuk jajaran genjang, bujur sangkar, persegi panjang dan segitiga.

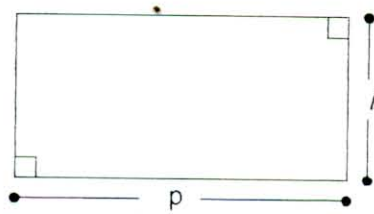
#### A. Pendekatan Geometri Klasik

##### a. Persegi Panjang

**Postulat 3** : Luas persegi panjang adalah hasil kali panjang alas dan tingginya.

Secara matematika dapat dituliskan  $L = p \cdot l$ , dimana  $L$  = luas persegi panjang,  $p$  = panjang alas,  $l$  = tinggi persegi panjang (Fogiel,1987).





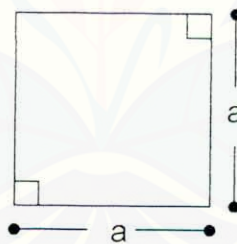
Gambar 2.19 : Persegi Panjang dengan sisi  $p$  dan  $l$

**b. Bujur Sangkar**

**Teorema 2 :** Luas dari bujur sangkar adalah kuadrat dari panjang salah satu sisinya. (Fogiel, 1987)

Bujur sangkar merupakan poligon bersisi empat yang kongruen, maka panjang setiap sisinya  $a$  adalah sama.

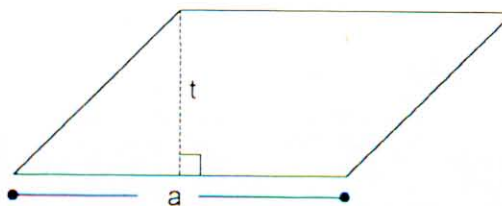
Berdasarkan postulat 3, kita dapat menentukan luas bujur sangkar (gambar 2.20) berikut ini:  $L = a.a = a^2$ .



Gambar 2.20 : Bujur Sangkar dengan Sisi  $a$

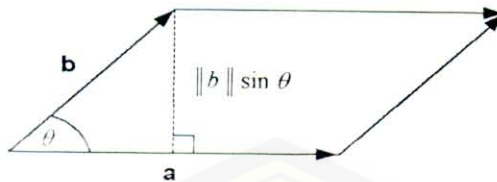
**c. Jajaran Genjang**

Luas jajaran genjang diberikan oleh persamaan  $L = a.t$ , dimana  $a$  adalah panjang alas dan  $t$  adalah tinggi jajaran genjang (lihat gambar 2.21).



Gambar 2.21 : Jajaran Genjang dengan Alas  $a$  dan Tinggi  $t$

Luas jajaran genjang dengan sisi-sisi vektor  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  adalah  $\| \mathbf{a} \times \mathbf{b} \|$  (lihat gambar 2.22) (Purcell, J., Edwin, 1990).

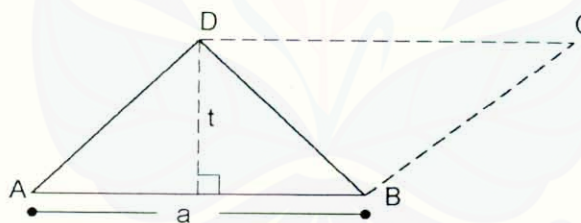


Gambar 2.22 : Jajaran Genjang dengan Sisi-sisi Vektor  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$

**d. Segitiga**

Luas  $L$  sebarang segitiga adalah setengah dari hasil kali antara panjang alas  $a$  dan tinggi segitiga  $t$ . Secara matematis dapat dituliskan sebagai:  $L = \frac{1}{2} at$ .

Segitiga merupakan poligon bersisi tiga. Oleh karena itu, untuk menunjukkan luas suatu segitiga, kita cukup menurunkannya dari jajaran genjang berikut (lihat gambar 2.23):



Gambar 2.23 : Segitiga ABD dengan Alas  $a$  dan Tinggi  $t$

**Tabel 2: Pembuktian Luas Segitiga**

Pernyataan	Alasan
1. Membuat $\triangle ABD$ dan $\triangle BCD$ pada jajaran genjang.	1. Jajaran genjang dapat didekomposisi menjadi 2 segitiga
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ , $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	2. Definisi jajaran genjang
3. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	3. Sifat Transitif
4. $\triangle ABD \cong \triangle BCD$	4. Teorema (sisi-sisi-sisi)
5. luas $\triangle ABD =$ luas $\triangle BCD$	5. Akibat dari kekongruenan segitiga

6. luas $\Delta ABD = \frac{1}{2}$ Luas jajaran genjang	6. Akibat pernyataan No. 5
7. luas $\Delta ABD = \frac{1}{2}$ at	7. Luas jajaran genjang $L = a \cdot t$

**B. Pendekatan Geometri Analitik**

Sebelum membahas tentang luas poligon secara analitik, kita sajikan relasi-relasi geometris berikut :

1. Jarak titik-titik  $P(x_1, y_1, z_1)$  dan  $Q(x_2, y_2, z_2)$  dapat dinyatakan oleh :

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (\text{Sukirman, 1994}).$$

2. Jarak titik  $P(x_1, y_1, z_1)$  ke garis  $g: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$  dapat kita

tentukan sebagai berikut :

- Membuat bidang  $\alpha$  melalui  $P$  tegak lurus  $g$
- Mencari titik  $Q$ , titik tembus  $g$  pada  $\alpha$
- Garis  $\overline{PQ}$  merupakan garis yang tegak lurus  $g$  dan melalui titik  $P$ , sehingga panjang  $\overline{PQ}$  adalah jarak titik  $P$  ke garis  $g$ .

(Suryadi, D., 1986).

3. Persamaan garis melalui titik  $P(x_1, y_1, z_1)$  dengan vektor arah  $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$  dapat

dinyatakan oleh  $g: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}; a, b$  dan  $c$  tidak

semuanya nol (Suryadi, D., 1986).

4. Persamaan garis melalui titik  $P(x_1, y_1, z_1)$  dan  $Q(x_2, y_2, z_2)$  dapat dinyatakan

sebagai  $g: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; x_2 - x_1, y_2 - y_1$  dan  $z_2 - z_1$

tidak semuanya nol (Suryadi, D., 1986).

5. Persamaan bidang melalui titik  $P(x_1, y_1, z_1)$  dan tegak lurus pada vektor

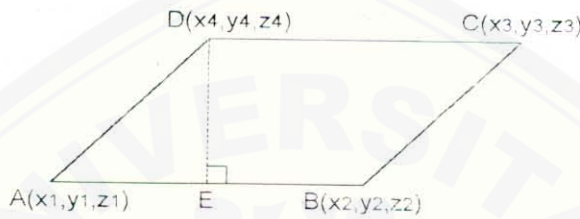
$\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$  dapat dinyatakan sebagai :  $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

(Sukirman, 1994).

Untuk selanjutnya, kita akan mempelajari hitung luas poligon secara analitik berikut ini.

**a. Jajaran Genjang**

Misalkan diketahui suatu jajaran genjang dengan titik sudut-titik sudut  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$  dan  $D(x_4, y_4, z_4)$  (lihat gambar 2.24).



Gambar 2.24 : Jajaran Genjang ABCD

Untuk menentukan luas jajaran genjang ABCD (lihat gambar 2.24), terlebih dahulu kita menentukan tinggi jajaran genjang. Tinggi jajaran genjang diperoleh dengan menerapkan prosedur jarak titik ke garis sebagai berikut:

Pertama, kita menentukan persamaan bidang  $\alpha$  yang melalui  $D$  dan tegak lurus  $\overline{AB}$  sebagai berikut:

$$\alpha : (x_2 - x_1)(x - x_4) + (y_2 - y_1)(y - y_4) + (z_2 - z_1)(z - z_4) = 0$$

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z - (x_2 - x_1)x_4 - (y_2 - y_1)y_4 - (z_2 - z_1)z_4 = 0$$

misalkan  $(x_2 - x_1) = a, (y_2 - y_1) = b, (z_2 - z_1) = c$ , sehingga diperoleh :

$$ax + by + cz - ax_4 - by_4 - cz_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Selanjutnya, kita menentukan titik  $E$  (titik tembus  $\overline{AB}$  pada  $\alpha$ ). Persamaan garis  $\overline{AB}$  dalam bentuk parametrik sebagai berikut :

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + at \\ y &= y_1 + bt \\ z &= z_1 + ct \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Titik  $E$  diperoleh dengan mensubstitusikan (2) ke (1) sebagai berikut :

$$a(x_1 + at) + b(y_1 + bt) + c(z_1 + ct) - ax_4 - by_4 - cz_4 = 0$$

$$t(a^2 + b^2 + c^2) - a(x_4 - x_1) - b(y_4 - y_1) - c(z_4 - z_1) = 0$$

$$t = \frac{a(x_4 - x_1) + b(y_4 - y_1) + c(z_4 - z_1)}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

Maka titik  $E(x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$ , dimana  $t$  adalah persamaan (3)

Sehingga jarak  $D$  terhadap  $\overline{AB}$  adalah

$$|\overline{DE}| = \sqrt{[(x_1 + at) - x_4]^2 + [(y_1 + bt) - y_4]^2 + [(z_1 + ct) - z_4]^2}$$

Jadi luas jajaran genjang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L = |\overline{AB}| \cdot |\overline{DE}|$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\sqrt{[(x_1 + at) - x_4]^2 + [(y_1 + bt) - y_4]^2 + [(z_1 + ct) - z_4]^2}$$

$$L = \sqrt{\left[ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \right] \cdot \left[ \sqrt{((x_1 + at) - x_4)^2 + ((y_1 + bt) - y_4)^2 + ((z_1 + ct) - z_4)^2} \right]}$$

dimana :

$$t = \frac{a(x_4 - x_1) + b(y_4 - y_1) + c(z_4 - z_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$(x_2 - x_1) \neq a, (y_2 - y_1) \neq b, (z_2 - z_1) \neq c$$

Selanjutnya kita sajikan luas jajaran genjang secara analitik dengan menggunakan konsep vektor sebagai berikut. Misalkan diketahui jajaran genjang ABCD seperti gambar 2.24, maka luas jajaran genjang ABCD dapat dituliskan sebagai :

$$L = \left\| \overline{AB} \times \overline{AD} \right\|$$

$$L = \left\| \langle (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1) \rangle \times \langle (x_4 - x_1), (y_4 - y_1), (z_4 - z_1) \rangle \right\|$$

$$L = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right\|$$

### b. Persegi Panjang

Misalkan diketahui persegi panjang dengan titik sudut  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B(x_1, y_1, z_1)$ ,  $C(x_2, y_2, z_2)$  dan  $D(x_3, y_3, z_3)$  (lihat gambar 2.25).



Gambar 2.25 : Persegi Panjang ABCD

Maka luas persegi panjang ABCD (gambar 2.25) dirumuskan sebagai berikut :

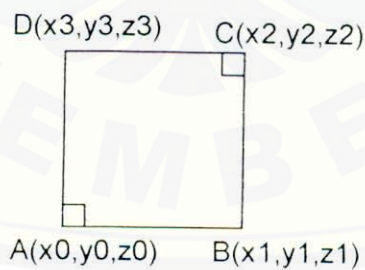
$$L = |\overline{AB}| |\overline{BC}|$$

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$L = \sqrt{[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2] [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}$$

### c. Bujur sangkar

Misalkan diketahui bujur sangkar ABCD, dimana  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B(x_1, y_1, z_1)$ ,  $C(x_2, y_2, z_2)$  dan  $D(x_3, y_3, z_3)$  (lihat gambar 2.26).



Gambar 2.26 : Bujur Sangkar ABCD

Maka luas bujur sangkar ABCD (gambar 2.26) dapat dituliskan :

$$L = (|\overline{AB}|)^2 = (|\overline{BC}|)^2 = (|\overline{CD}|)^2 = (|\overline{AD}|)^2$$

$$L = \left( \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \right)^2$$

$$L = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$$

### b. Persegi Panjang

Misalkan diketahui persegi panjang dengan titik sudut  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B(x_1, y_1, z_1)$ ,  $C(x_2, y_2, z_2)$  dan  $D(x_3, y_3, z_3)$  (lihat gambar 2.25).



Gambar 2.25 : Persegi Panjang ABCD

Maka luas persegi panjang ABCD (gambar 2.25) dirumuskan sebagai berikut :

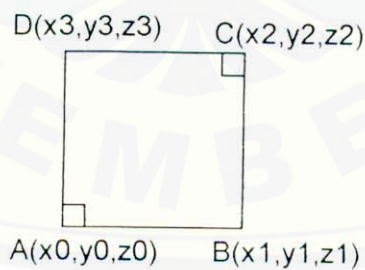
$$L = |\overline{AB}| |\overline{BC}|$$

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$L = \sqrt{[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2] [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}$$

### c. Bujur sangkar

Misalkan diketahui bujur sangkar ABCD, dimana  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B(x_1, y_1, z_1)$ ,  $C(x_2, y_2, z_2)$  dan  $D(x_3, y_3, z_3)$  (lihat gambar 2.26).



Gambar 2.26 : Bujur Sangkar ABCD

Maka luas bujur sangkar ABCD (gambar 2.26) dapat dituliskan :

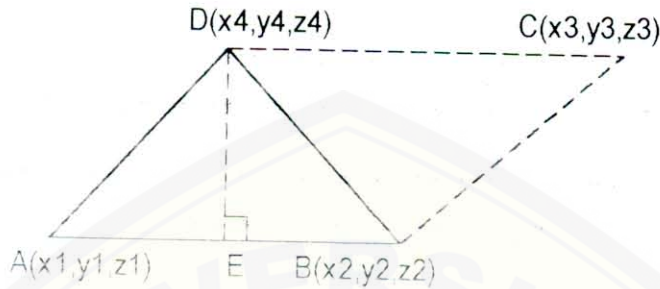
$$L = (|\overline{AB}|)^2 = (|\overline{BC}|)^2 = (|\overline{CD}|)^2 = (|\overline{AD}|)^2$$

$$L = \left( \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \right)^2$$

$$L = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$$

**d. Segitiga**

Misalkan diketahui sebarang segitiga ABD, dengan  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$  dan  $D(x_4, y_4, z_4)$  (lihat gambar 2.27).



Gambar 2.27 : Segitiga ABD

Luas segitiga ABD merupakan setengah dari luas jajaran genjang ABCD, sehingga luas segitiga ABD dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \left[ ((x_1 + ct) - x_4)^2 + ((y_1 + bt) - y_4)^2 + ((z_1 + ct) - z_4)^2 \right]}$$

dimana :

$$t = \frac{a(x_4 - x_1) + b(y_4 - y_1) + c(z_4 - z_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$(x_2 - x_1) = a, (y_2 - y_1) = b, (z_2 - z_1) = c$$

**2.4 Kekongruenan dan Hitung Volume Polihedron**

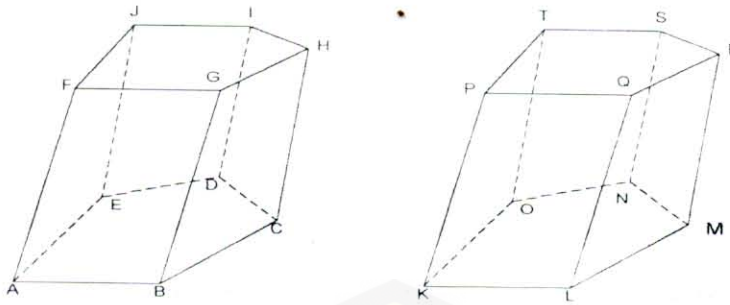
**2.4.1 Kekongruenan Polihedron**

Kekongruenan antara dua polihedron, syaratnya analog dengan yang terjadi pada kekongruenan dua poligon. (Kusno, 2000). Dengan kata lain, dua polihedron adalah kongruen, jika ada korespondensi 1-1 diantara titik-titiknya sedemikian hingga:

- Semua bidang (poligon) yang berkorespondensi kongruen.
- Semua sudut yang berkorespondensi kongruen.

Untuk lebih jelasnya, kita akan memberi contoh dua polihedron kongruen berikut ini (gambar 2.28).





Gambar 2.28 : Dua Polihedron Kongruen

Polihedron ABCDE-FGHIJ dan polihedron KLMNO-PQRST (gambar 30) adalah kongruen, apabila:  $ABCDE \cong KLMNO$ ,  $FGHIJ \cong PQRST$ ,  $ABGF \cong KLQP$ ,  $BCHG \cong LMRQ$ ,  $CDIH \cong MNSR$ ,  $EDIJ \cong ONST$  dan  $AEJP \cong KOTP$ .

#### 2.4.2 Hitung Volume Polihedron

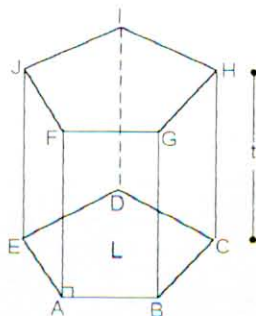
Volume adalah daerah atau bagian ruang yang dibatasi dan didefinisikan oleh permukaan benda tersebut. Sedangkan volume dari sebarang polihedron adalah jumlah dari volume-volume limas yang mendefinisikan polihedron tersebut (Kusno, 2000). Volume polihedron akan dibahas dengan pendekatan geometri klasik dan pendekatan geometri analitik berikut.

##### A. Pendekatan Geometri Klasik

Pada bagian ini dibahas tentang volume prisma dan limas dengan pendekatan geometri klasik berikut ini:

##### a. Volume Prisma Tegak

**Postulat 4 :** Volume dari prisma tegak adalah hasil kali dari luas alas dengan tingginya (Fogiel, 1987) (lihat gambar 2.29).

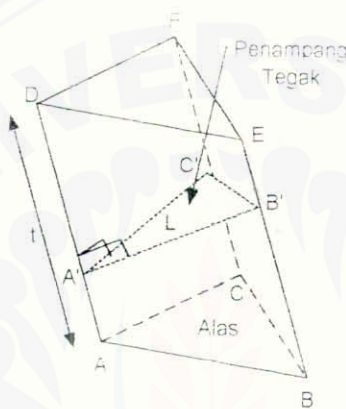


Gambar 2.29: Prisma Tegak ABCDE-FGHIJ dengan Ukurannya

Pada prisma tegak ABCDE-FGHIJ (lihat gambar 2.29), luas alas sama dengan luas poligon ABCDE, yaitu sebesar  $L$ . Sedangkan tinggi prisma tegak ABCDE-FGHIJ adalah panjang rusuk tegak prisma, yaitu sebesar  $t$ . Maka volume prisma tegak ABCDEF-GHIJKL dapat dirumuskan sebagai :  $V = L \cdot t$

**b. Volume Prisma Miring**

Volume prisma miring sama dengan luas penampang tegak kali ukuran rusuk tegak dari prisma miring (Kusno, 2000) (gambar 2.30):

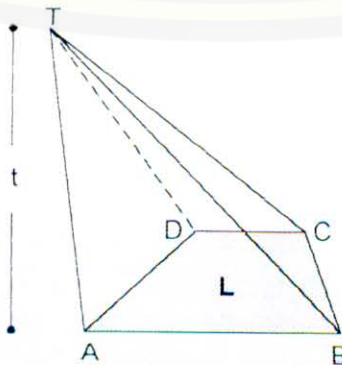


Gambar 2.30 : Prisma Miring ABC-DEF dengan Ukurannya

Dari gambar 2.30, misalkan luas penampang tegaknya  $L$  dan tinggi prisma miring sama dengan panjang rusuk tegak dari prisma miring, yaitu sebesar  $t$ . Maka volume prisma miring dapat dinyatakan sebagai :  $V = L \cdot t$

**c. Volume Limas**

**Postulat 5 :** Volume dari suatu limas adalah sepertiga dari hasil kali antara luas dan tinggi limas (Fogiel, 1987) (gambar 2.31).



Gambar 2.31 : Limas T-ABCD dengan luas Alas  $L$  dan Tinggi  $t$

Dari gambar 2.31, volume limas T-ABCD dapat dituliskan sebagai:  $V = (1/3)L.t$

Dimana :  $V$  = Volume Limas

$L$  = Luas Alas

$t$  = Tinggi limas

### B. Pendekatan Geometri Analitik

Dalam mencari volume polihedron dengan pendekatan geometri analitik diperlukan informasi dasar tentang relasi – relasi geometri berikut ini:

1. Persamaan bidang yang melalui tiga titik  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  dan  $(x_3, y_3, z_3)$  dapat ditentukan oleh:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Sukirman,1994).

2. Persamaan bidang dapat ditulis dalam bentuk linier berikut ini :  
 $ax + by + cz + d = 0$  ;  $a, b, c, d$  konstan (Suryadi, D., 1986).
3. Dua bidang  $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  dan  $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  akan saling :

a. Tegak lurus apabila :  $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

b. Sejajar apabila :  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

(Sukirman,1994).

4. Jarak titik  $P(x_1, y_1, z_1)$  ke bidang  $ax + by + cz + d = 0$  dinyatakan

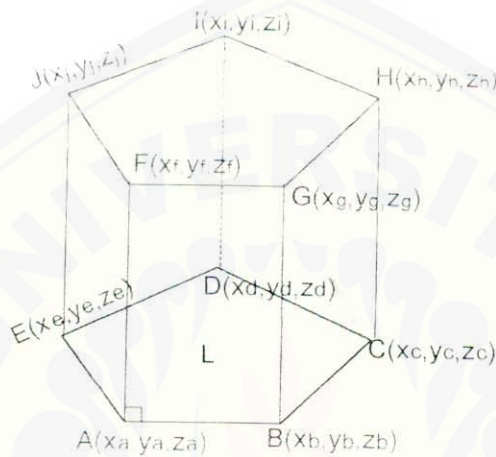
dengan:  $\left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$  (Sukirman,1994).

5. Untuk mencari jarak dua bidang sejajar  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$ , kita ambil sebarang titik pada  $\alpha_2$ , kemudian menghitung jarak titik tersebut ke  $\alpha_1$  (Sukirman,1994).

Selanjutnya, kita mempelajari volume polihedron secara analitik untuk prisma dan limas berikut ini:

**a. Volume Prisma Tegak**

Misalnya diketahui prisma tegak ABCDE-FGHIJ dengan koordinat titik sudut – titik sudutnya seperti pada gambar 2.32.



Gambar 2.32 : Prisma Tegak ABCDE-FGHIJ

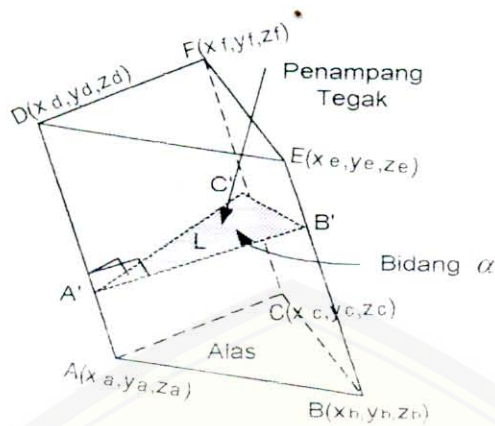
Volume prisma tegak ABCDE-FGHIJ dapat dituliskan sebagai :

$$V = (\text{luas alas}) \cdot |\overline{AI}| = (\text{luas alas}) \cdot |\overline{BG}| = \dots = (\text{luas alas}) \cdot |\overline{EJ}|$$

$$\begin{aligned} V &= L \cdot \sqrt{(x_f - x_a)^2 + (y_f - y_a)^2 + (z_f - z_a)^2} \\ &= L \cdot \sqrt{(x_g - x_b)^2 + (y_g - y_b)^2 + (z_g - z_b)^2} \\ &= \dots = L \cdot \sqrt{(x_j - x_c)^2 + (y_j - y_c)^2 + (z_j - z_c)^2} \end{aligned}$$

**b. Volume Prisma Miring**

Misalkan diketahui prisma miring dengan titik sudut A,B,C,D,E,F seperti pada gambar 2.33.



Gambar 2.33 : Prisma Miring ABC-DEF

Volume prisma miring dapat ditentukan dengan rumus berikut :

$$V = (\text{luas alas}) \cdot |\overline{AD}| = (\text{luas alas}) \cdot |\overline{BE}| = (\text{luas alas}) \cdot |\overline{CF}|$$

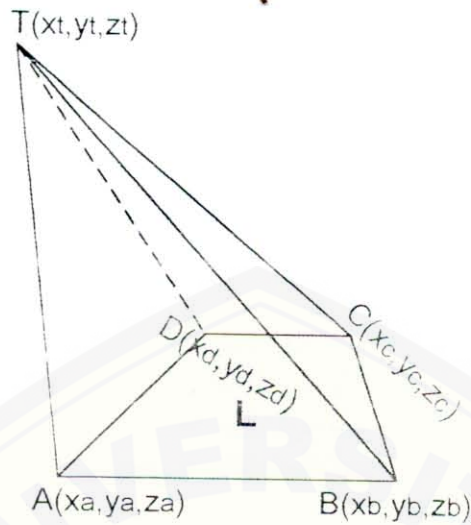
$$\begin{aligned} V &= L \cdot \sqrt{(x_d - x_a)^2 + (y_d - y_a)^2 + (z_d - z_a)^2} \\ &= L \cdot \sqrt{(x_e - x_b)^2 + (y_e - y_b)^2 + (z_e - z_b)^2} \\ &= L \cdot \sqrt{(x_f - x_c)^2 + (y_f - y_c)^2 + (z_f - z_c)^2} \end{aligned}$$

Luas penampang tegak dapat ditentukan dengan prosedur berikut ini:

- ❖ Pilih titik  $A'(x_{a'}, y_{b'}, z_{a'}) \in \overline{AD}$
- ❖ Menentukan bidang  $\alpha$  sedemikian hingga  $\alpha \perp \overline{AD}$  dan  $A' \in \alpha$
- ❖ Menentukan titik tembus garis  $g \parallel \overline{AD}$  terhadap  $\alpha$ , sehingga luas penampang tegak dapat ditentukan dengan konsep luas poligon secara analitik.

### c. Volume Limas

Diketahui suatu limas T-ABCD dengan titik sudut A,B,C,D,T seperti pada gambar 2.34.



Gambar 2.34 : Limas T-ABCD

Volume limas dapat ditentukan dengan langkah – langkah berikut ini :

Pertama, menentukan persamaan bidang  $\alpha$  yang melalui titik  $A(x_a, y_a, z_a)$ ,

$$B(x_b, y_b, z_b), C(x_c, y_c, z_c), \text{ yaitu : } \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_a & y_a & z_a & 1 \\ x_b & y_b & z_b & 1 \\ x_c & y_c & z_c & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Bentuk (6) jika dijabarkan dan disederhanakan akan diperoleh persamaan bidang dalam bentuk linier berikut :

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

Selanjutnya, menentukan tinggi limas yaitu jarak titik  $T$  ke bidang  $\alpha$  yang dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{|ax_t + by_t + cz_t + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Jadi volume limas dapat ditentukan sebagai berikut:

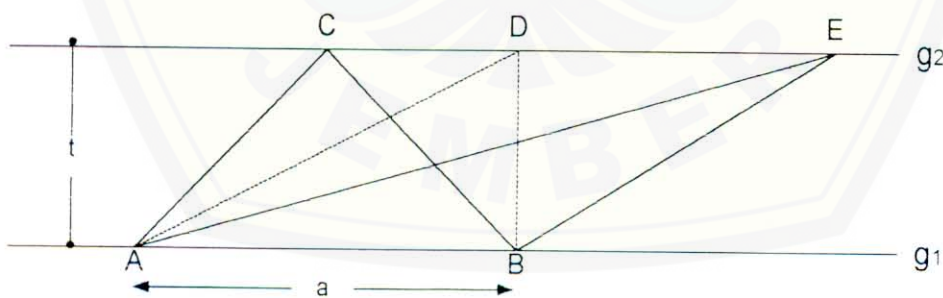
$$V = (\text{luas alas}) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \frac{|ax_t + by_t + cz_t + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## 2.5 Ekivalensi Luas dan Ekivalensi Volume

### 2.5.1 Ekivalensi Luas

Pada bagian ini kita perkenalkan tentang ekivalensi luas, khususnya mengenai bangun segitiga. Secara garis besar ekivalensi luas segitiga dapat diperoleh sebagai berikut.

Misalnya diberikan dua buah garis  $g_1 // g_2$ . Dua titik tertentu  $A$  dan  $B$  ditetapkan pada  $g_1$  sebagai titik tetap. Kemudian dipilih titik  $C$  pada garis  $g_2$ . Maka penetapan titik ketiga sebarang yang lain seperti  $D$  dan  $E$  di  $g_2$  akan memberikan luas segitiga  $ABC =$  luas segitiga  $ABD =$  luas segitiga  $ABE$  (lihat gambar 2.35). Karena tinggi  $t$  untuk segitiga  $ABC, ABD, ABE$  adalah sama (jarak kedua garis sejajar), maka luas semua bentuk segitiga tersebut sama, yaitu  $L = \frac{1}{2} a \cdot t = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot t$  dengan  $a$  sebagai alas segitiga. Sebaliknya, jika titik  $C$  tetap dan  $\overline{AB}$  digeser sepanjang  $g_1$ , maka luas segitiga tersebut akan sama. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa semua bentuk segitiga yang mempunyai alas dan tinggi yang sama akan mempunyai luas yang sama. Prinsip ekivalensi luas ini dapat diterapkan untuk poligon segiempat, segilima, segienan dan segi- $n$ . Hal ini karena poligon-poligon tersebut dapat didekomposisi menjadi beberapa segitiga.



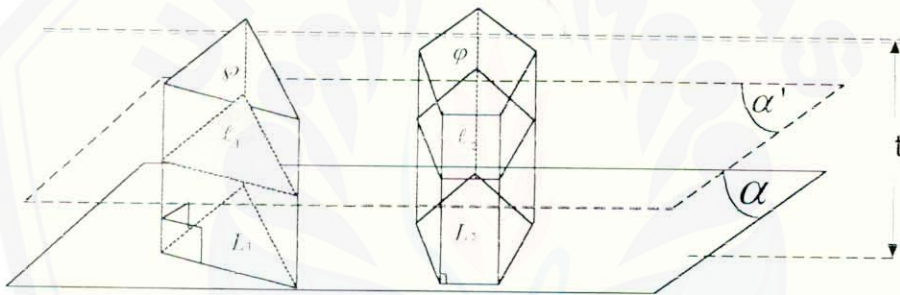
Gambar 2.35 : Penerapan Prinsip Ekivalensi Luas

### 2.5.2 Ekivalensi Volume

Ekivalensi volume polihedron dapat dijelaskan dengan menggunakan prinsip Cavalieri. Prinsip Cavalieri tentang ekivalensi volume dipostulatkan sebagai berikut :

**Postulat 4 :** Misalkan  $\wp$  dan  $\varphi$  dua benda solid dengan tinggi  $t$  dan  $\alpha$  suatu bidang. Andaikan setiap bidang  $\alpha' \parallel \alpha$  memotong  $\wp$  dan  $\varphi$  dengan  $\alpha' \cap \wp$  dan  $\alpha' \cap \varphi$  menentukan pasangan penampang horizontal  $\ell_1$  dan  $\ell_2$ . Jika setiap pasangan  $\ell_1$  dan  $\ell_2$  luasnya sama, maka volume dari dua solid  $\wp$  dan  $\varphi$  adalah sama.

Sebagai contoh, prisma tegak segitiga dan prisma tegak segilima dengan alas terletak pada bidang  $\alpha$ . Jika kedua benda tersebut dipotong oleh sebarang bidang  $\alpha' \parallel \alpha$ , maka volume kedua benda tersebut akan sama jika luas semua jejak pancungan bidang  $\alpha'$  tersebut sama (lihat gambar 2.36).



Gambar 2.36 : Prinsip Cavalieri pada Prisma Tegak Segitiga dan Segilima

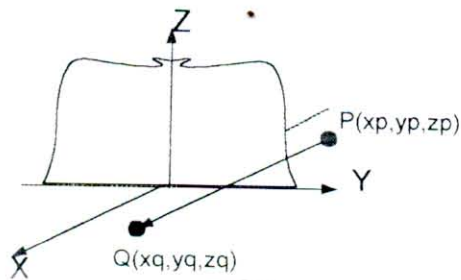
## 2.6 Transformasi Titik

Pada bagian ini, kita akan mempelajari transformasi dari  $R^3$  ke  $R^3$  dalam bentuk transformasi afflin. Transformasi ini terdiri dari refleksi (pencerminan), translasi (pergeseran), rotasi (perputaran) dan dilatasi (penskalaan). Sehubungan dengan keperluan penelitian ini, kita hanya membahas refleksi, traslasi dan rotasi berikut ini.

### 2.6.1 Refleksi

Refleksi terhadap bidang melalui titik asal adalah transformasi yang memetakan setiap titik di  $R^3$  ke dalam bayangan cerminnya terhadap bidang tersebut. Dalam hal ini, kita akan membahas refleksi terhadap bidang-bidang  $x = 0, y = 0$  dan  $z = 0$ . Misalkan  $T:R^3 \rightarrow R^3$  transformasi yang memetakan masing-masing titik ke dalam bayangan simetriknya terhadap bidang  $x = 0$  (gambar 2.37).





Gambar 2.37 : Refleksi terhadap bidang  $x = 0$

Adapun matriks transformasinya dapat ditentukan sebagai berikut :

$$T(e_1) = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; T(e_2) = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; T(e_3) = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan  $T(e_1)$ ,  $T(e_2)$  dan  $T(e_3)$  maka kita akan dapatkan matriks transformasinya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Secara umum, refleksi dapat dinyatakan oleh persamaan  $Q = TP$ , dimana  $P$  adalah posisi titik awal,  $Q$  adalah posisi titik setelah direfleksi,  $T$  adalah matrik koefisien yang bersesuaian dengan transformasi refleksi terhadap bidang  $x = 0$ ,  $y = 0$  dan  $z = 0$ . Jadi,

- Persamaan refleksi yang melalui titik awal  $P(x_p, y_p, z_p)$  terhadap bidang  $x = 0$  dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

Dengan cara serupa, kita akan dapatkan :

- Persamaan refleksi dalam bentuk matriks terhadap bidang  $y = 0$  sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

- Persamaan refleksi dalam bentuk matriks terhadap bidang  $z = 0$  sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

Obyek sebelum dan sesudah direfleksi memiliki jarak yang sama terhadap bidang refleksi. Refleksi ini memiliki sifat-sifat mempertahankan bentuk dan ukuran obyek.

### 2.6.2 Translasi

Translasi adalah perpindahan kedudukan sebarang titik dengan penambahan besaran pada arah sumbu  $x$ ,  $y$  dan  $z$ . Secara umum, translasi dapat dinyatakan oleh persamaan  $Q = P + K$ , dimana  $P$  adalah posisi titik awal,  $Q$  adalah posisi titik setelah ditranslasi dan  $K$  menunjukkan besarnya pergeseran ke arah sumbu  $x$ ,  $y$  dan  $z$ . Persamaan translasi dalam bentuk matriks dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

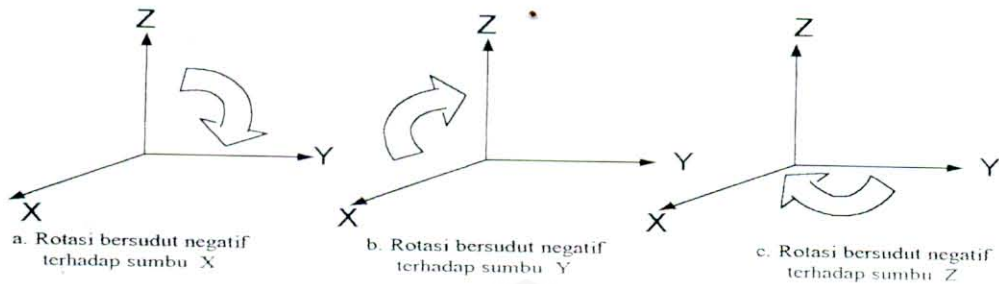
atau dalam bentuk koordinat kartesius dapat dituliskan sebagai :

$$(x_q, y_q, z_q) = (x_p + x_k, y_p + y_k, z_p + z_k).$$

Translasi bersifat mempertahankan bentuk dan ukuran obyek.

### 2.6.3 Rotasi

Rotasi di  $R^3$  dapat dilakukan dengan memilih salah satu sumbu koordinat sebagai sumbu putar. Dalam  $R^3$  dikenal dua sistem koordinat, yaitu sistem koordinat tangan kanan dan sistem koordinat tangan kiri. Pada sistem koordinat tangan kanan, rotasi bersudut positif dinyatakan sebagai berlawanan arah dengan putaran jarum jam. Sedangkan sistem koordinat tangan kiri, rotasi bersudut positif dinyatakan sebagai searah dengan arah putaran jarum jam. Sistem koordinat tangan kanan diilustrasikan pada gambar 2.38 berikut.



Gambar 2.38 : Ilustrasi Rotasi pada Sistem Koordinat Tangan Kanan

Apabila  $\theta$  menunjukkan besarnya sudut rotasi dengan titik pangkal rotasi  $O(0,0,0)$ , maka rotasi terhadap masing-masing sumbu dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut ini:

- Rotasi terhadap sumbu x:

$$B_1$$

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

- Rotasi terhadap sumbu y:

$$B_2$$

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

- Rotasi terhadap sumbu z:

$$B_3$$

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, matriks  $B_1$ ,  $B_2$  dan  $B_3$  adalah matriks koefisien yang bersesuaian dengan transformasi rotasi. Rotasi memiliki sifat yang sama dengan translasi.



**BAB III**  
**HASIL DAN PEMBAHASAN**

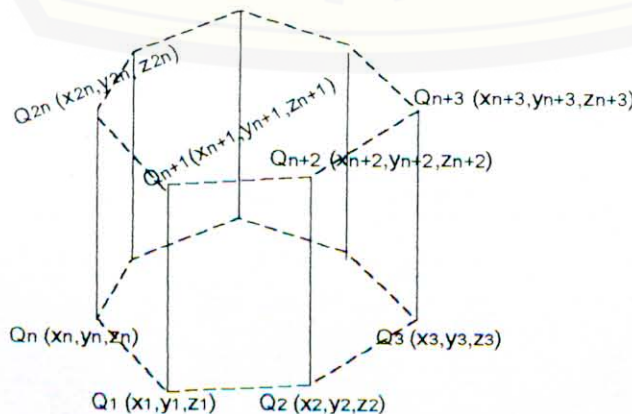
Sehubungan dengan masalah penelitian, pada bagian ini kita lakukan dua kajian berikut. Pertama, kita sajikan teknik hitung menentukan volume prisma, limas dan benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak. Selanjutnya, kita perkenalkan prosedur umum transformasi ekivalensi volume prisma menjadi prisma atau limas menjadi limas. Dalam kedua topik ini, prisma dan limas yang diketahui adalah konveks.

**3.1 Teknik Hitung Menentukan Volume Prisma, Limas dan Benda Hasil Gabungan  $n$  Prisma Tegak.**

**3.1.1 Teknik Hitung Menentukan Volume Prisma dan Limas**

**A. Kasus Prisma**

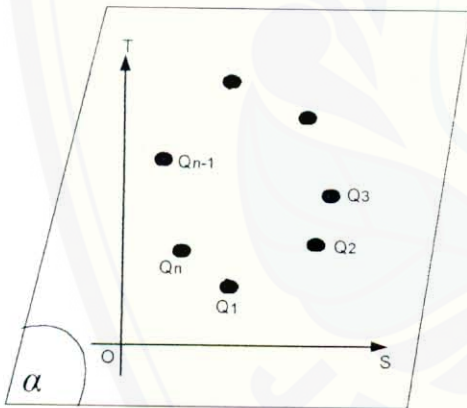
Misalkan diketahui prisma dengan data disajikan oleh pasangan 2 (dua) titik ujung  $n$  rusuk tegak:  $[Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})]$ ,  $[Q_2(x_2, y_2, z_2), Q_{n+2}(x_{n+2}, y_{n+2}, z_{n+2})]$ , ...,  $[Q_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), Q_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1}, z_{2n-1})]$ ,  $[Q_n(x_n, y_n, z_n), Q_{2n}(x_{2n}, y_{2n}, z_{2n})]$  dimana titik-titik  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  adalah kumpulan titik alas bawah prisma dan terletak di bidang  $\alpha$  sedangkan  $Q_{n+1}, Q_{n+2}, Q_{n+3}, \dots, Q_{2n}$  merupakan kumpulan titik alas atas prisma seperti pada gambar 3.1, maka untuk mendapatkan volumenya dapat mengikuti langkah-langkah berikut ini:



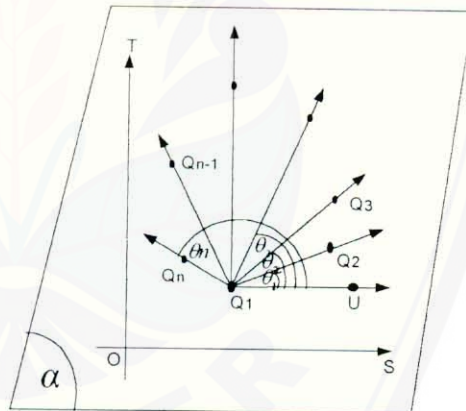
Gambar 3.1 : Penyajian Data Prisma

1. Membangun poligon alas bawah dan alas atas prisma. Penentuan poligon tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan teknik penyapuan (lihat gambar 3.2). Teknik penyapuan dapat dijelaskan dengan prosedur berikut:

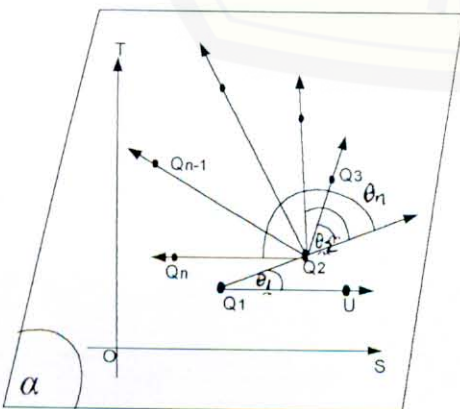
- a. Tentukan sistem koordinat  $SOT$  di bidang  $\alpha$  untuk titik-titik  $Q_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q_2(x_2, y_2, z_2), \dots, Q_n(x_n, y_n, z_n)$  seperti pada gambar 3.2.a.
- b. Tentukan titik minimum, misalkan  $Q_1$
- c. Tarik garis  $Q_1U \parallel OS$  (Gambar 3.2.b)
- d. Tarik garis  $Q_1$  ke  $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ , kemudian lakukan *sorting* untuk mencari sudut terkecil  $\theta_k$  dengan  $k = 1, 2, \dots, n$  antara  $Q_1U$  terhadap  $Q_1Q_i$  dengan  $i = 2, 3, 4, \dots, n$ . Misalkan ditemukan titik  $Q_2$ . Selanjutnya, lakukan *sorting* untuk mencari sudut terkecil  $\theta_k$  dengan  $k = 2, 3, \dots, n$  antara  $Q_1Q_2$  terhadap  $Q_2Q_i$  dengan  $i = 3, 4, 5, \dots, n$  dan seterusnya (Gambar 3.2.b,c dan d).
- e. Membangun poligon hasil *sorting* (Gambar 3.2.e)



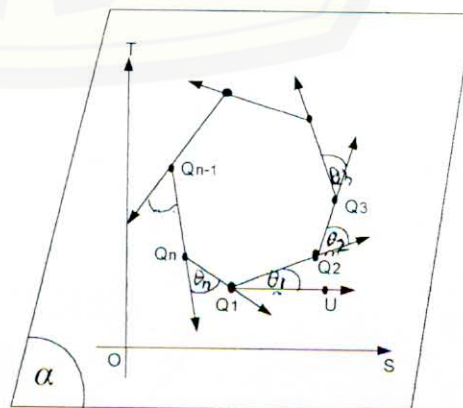
(a)



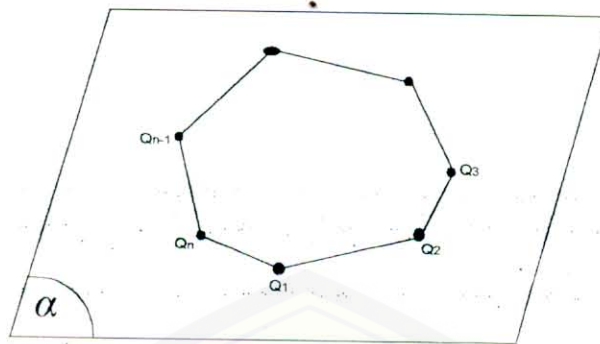
(b)



(c)



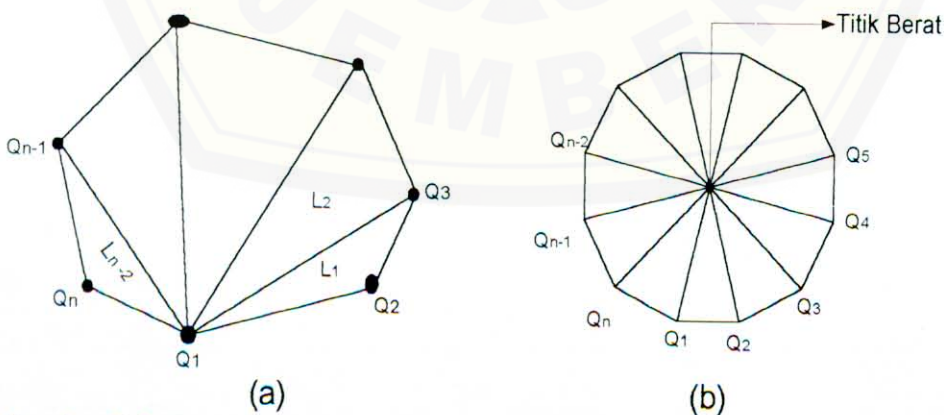
(d)



(e)

Gambar 3.2 : Penyajian Teknik Penyapuan

2. Mendekomposisi alas obyek menjadi beberapa segitiga untuk mendapatkan luas alas obyek  $L$ . Jika alas berbentuk poligon segi- $n$  sebarang, maka ambil sebuah titik sebarang pada poligon alas, misalkan  $Q_1$ . Kemudian tarik ruas garis  $Q_1$  ke  $Q_3, Q_4, Q_5, \dots, Q_{n-1}$ . Maka didapat  $(n-2)$  segitiga sebarang. Jika dihitung, luas alasnya diperoleh dari menjumlahkan luas  $(n-2)$  segitiga sebarang tersebut (gambar 3.3.a). Dalam hal alas berbentuk poligon segi- $n$  beraturan, dapat menggunakan prosedur menentukan titik berat alas kemudian tarik segmen garis dari titik berat yang diperoleh ke setiap titik sudut poligon alas, sehingga didapat  $n$  segitiga sebarang saling kongruen. Jika dihitung, luas alasnya diperoleh  $n$  kali luas salah satu segitiga tersebut (gambar 3.3.b).



Gambar 3.3 : Penyajian Teknik Dekomposisi Poligon Menjadi  $n$  Segitiga

3. Menentukan tinggi prisma  $t$ . Penentuan tinggi prisma dapat dijelaskan untuk kasus-kasus berikut ini.

i. Kasus Prisma Tegak

Tinggi prisma tegak dapat ditentukan dengan langkah-langkah berikut ini (lihat gambar 3.4):

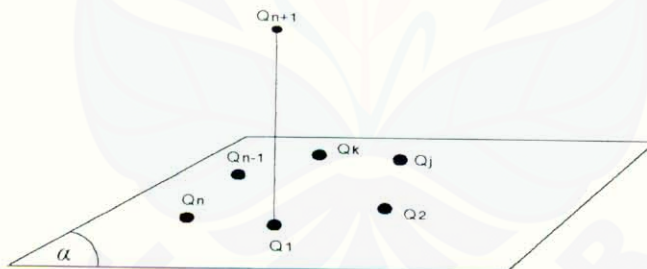
- Ambil sebuah rusuk tegak prisma, misal  $Q_1Q_{n+1}$ .
- Hitung jarak titik  $Q_1$  ke  $Q_{n+1}$ . Jarak  $Q_1$  ke  $Q_{n+1}$  merupakan tinggi prisma tegak tersebut.

ii. Kasus Prisma Miring

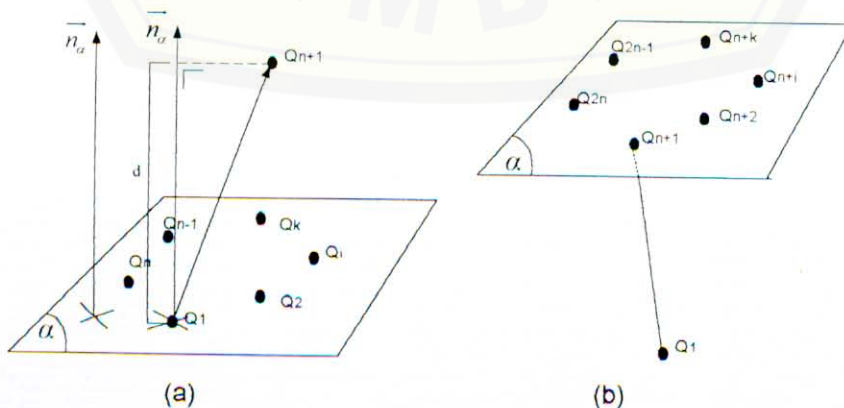
Tinggi prisma miring dapat ditentukan dengan langkah-langkah berikut ini (lihat gambar 3.5):

- Ambil sebuah rusuk tegak, misal  $Q_1Q_{n+1}$
- Tentukan persamaan bidang alas, misal  $\alpha: ax + by + cz + d = 0$  yang memuat semua titik alas bawah atau alas atas prisma.
- Hitung jarak titik  $Q_{n+1}$  ke  $\alpha$  (gambar 3.5.a) atau  $Q_1$  ke  $\alpha$  (gambar 3.5.b) (lihat topik pada bagian 2.4.2.B)

4. Volume Prisma dapat ditentukan:  $L \times t$ .



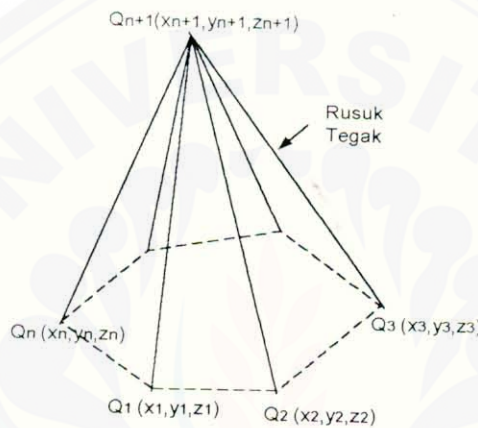
Gambar 3.4 : Ilustrasi Penentuan Tinggi Prisma Tegak



Gambar 3.5 : Ilustrasi Penentuan Tinggi Prisma Miring

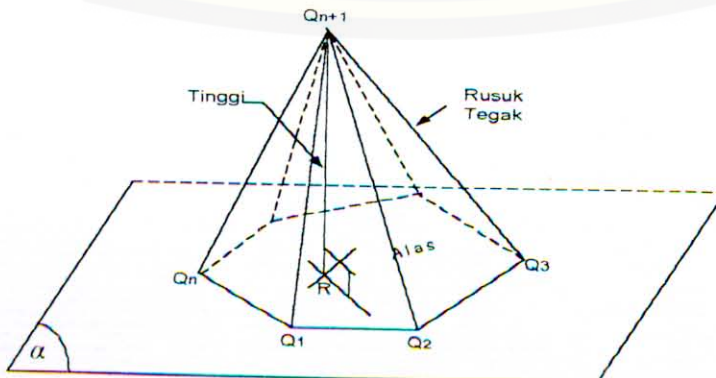
**B. Kasus Limas**

Misalkan diketahui limas dengan data disajikan oleh pasangan 2 (dua) titik ujung-titik ujung  $n$  rusuk tegak:  $[Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})]$ ,  $[Q_2(x_2, y_2, z_2), Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})]$ , ...,  $[Q_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})]$ ,  $[Q_n(x_n, y_n, z_n), Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})]$  dimana  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  merupakan kumpulan titik alas limas dan  $Q_{n+1}$  adalah titik puncak limas seperti pada gambar 3.6, maka untuk mendapatkan volumenya dapat mengikuti langkah-langkah berikut ini:



Gambar 3.6 : Penyajian Data Limas

1. Menentukan luas alas  $L$  dengan cara seperti langkah 1 dan 2 pada teknik hitung volume prisma di bagian 3.1.1.A
2. Menentukan tinggi limas  $t$ . Pertama, menentukan persamaan bidang  $\alpha$  melalui tiga titik alas limas. Kedua, hitung tinggi limas  $t$  dengan cara menghitung jarak titik  $Q_{n+1}$  ke bidang  $\alpha$  (lihat topik pada bagian 2.4.2.B) (gambar 3.7).
3. Volume limas dapat ditentukan:  $\frac{1}{3} \cdot L \cdot t$



Gambar 3.7 : Ilustrasi Penentuan Tinggi Limas



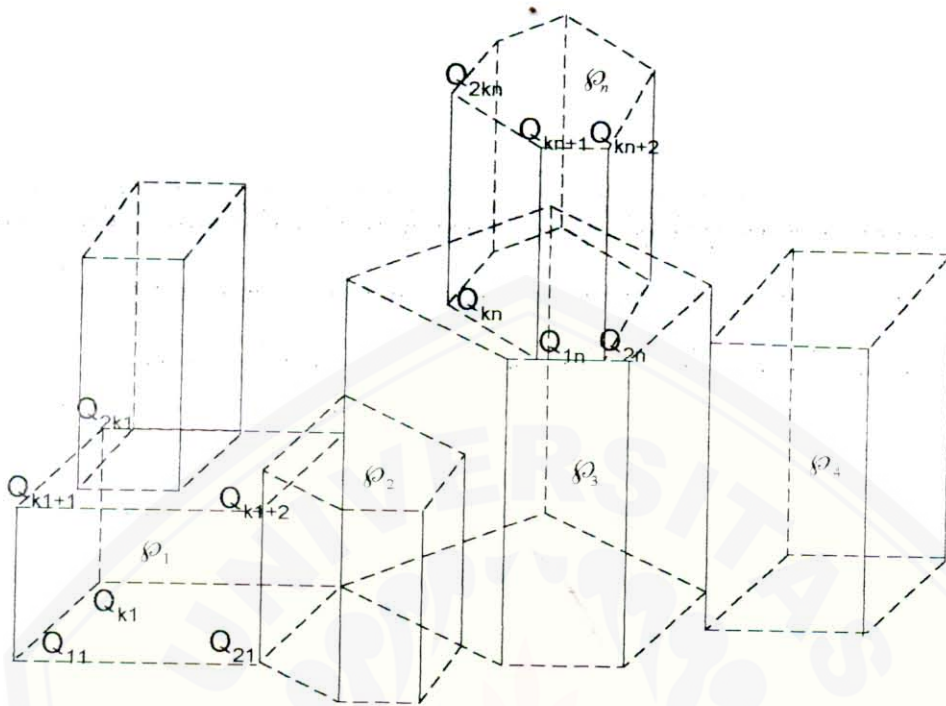
### 3.1.2 Teknik Hitung Menentukan Volume Benda Hasil Gabungan $n$ Prisma Tegak.

Pada bagian ini dibahas teknik hitung menentukan volume benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak dengan asumsi alas-alas prisma tegak sejajar dengan bidang  $XOY$ . Pembahasan dibatasi untuk kasus-kasus berikut ini.

#### A. Prisma Tegak Penyusun Berbeda Tinggi.

Misalkan diketahui suatu benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak yang tingginya berbeda, yaitu  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Jika masing-masing prisma rusuk-rusuk tegaknya berhingga dalam bentuk  $\varphi_j : [Q_i(x_i, y_i, z_i)_j, Q_{kj+i}(x_{kj+i}, y_{kj+i}, z_{kj+i})_j]$  dengan  $i=1, 2, \dots, k_j$  dan  $j=1, 2, \dots, n$  (artinya prisma ke- $j$ , yaitu  $\varphi_j$  mempunyai  $k_j$  rusuk). Titik-titik  $Q_i$  menyatakan kumpulan titik alas bawah prisma sedangkan Titik-titik  $Q_{kj+i}$  merupakan kumpulan titik alas atas prisma seperti pada gambar 3.8, maka untuk mendapatkan volume seluruh prisma dapat mengikuti langkah-langkah berikut ini:

1. Lakukan *sorting* panjang rusuk tegak dengan prosedur sebagai berikut:
  - a. Ambil sebuah rusuk tegak, kemudian tentukan panjang rusuk tersebut.
  - b. Pilihlah secara rekursif rusuk-rusuk tegak yang lain terhadap rusuk tersebut, sehingga semua rusuk yang terpilih mempunyai panjang yang sama.
  - c. Jika perlakuan (b) selesai, lakukan untuk rusuk tegak yang lain.
  - d. Kumpulan rusuk-rusuk yang ukuran panjangnya sama dapat ditentukan, sehingga diperoleh  $n$  prisma tegak.
2. Lakukan langkah 1, 2, 3 dan 4 pada teknik hitung volume prisma dibagian 3.1.1.A untuk masing-masing kumpulan rusuk tegak prisma hasil (1).
3. Volume gabungan  $n$  prisma dapat ditentukan dengan menjumlahkan volume  $n$  prisma tegak tersebut.



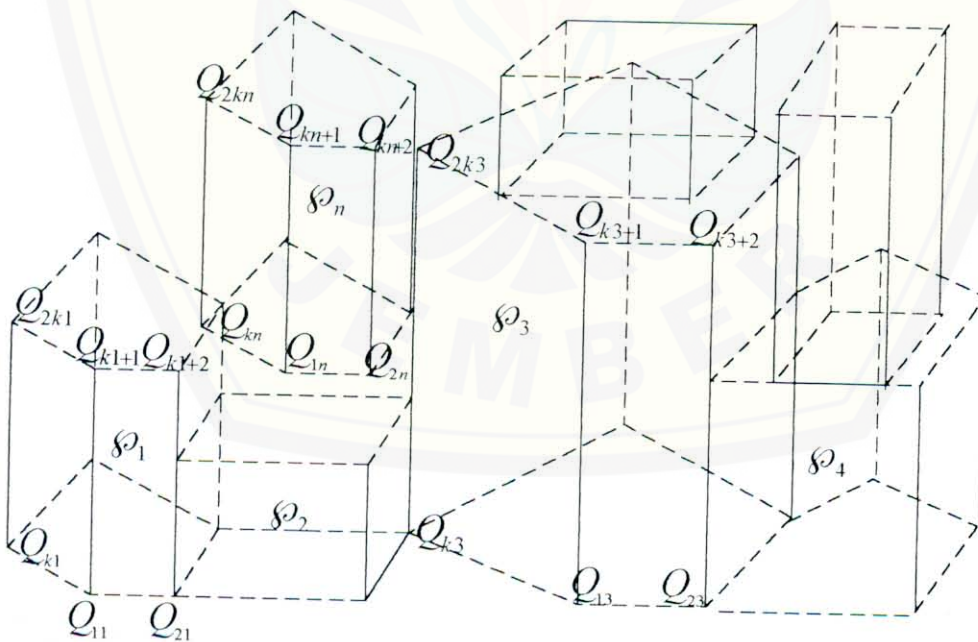
Gambar 3.8 : Ilustrasi Gabungan  $n$  Prisma Tegak dengan Tinggi Berbeda

**B. Prisma Tegak Penyusun Terdapat Sama Tinggi**

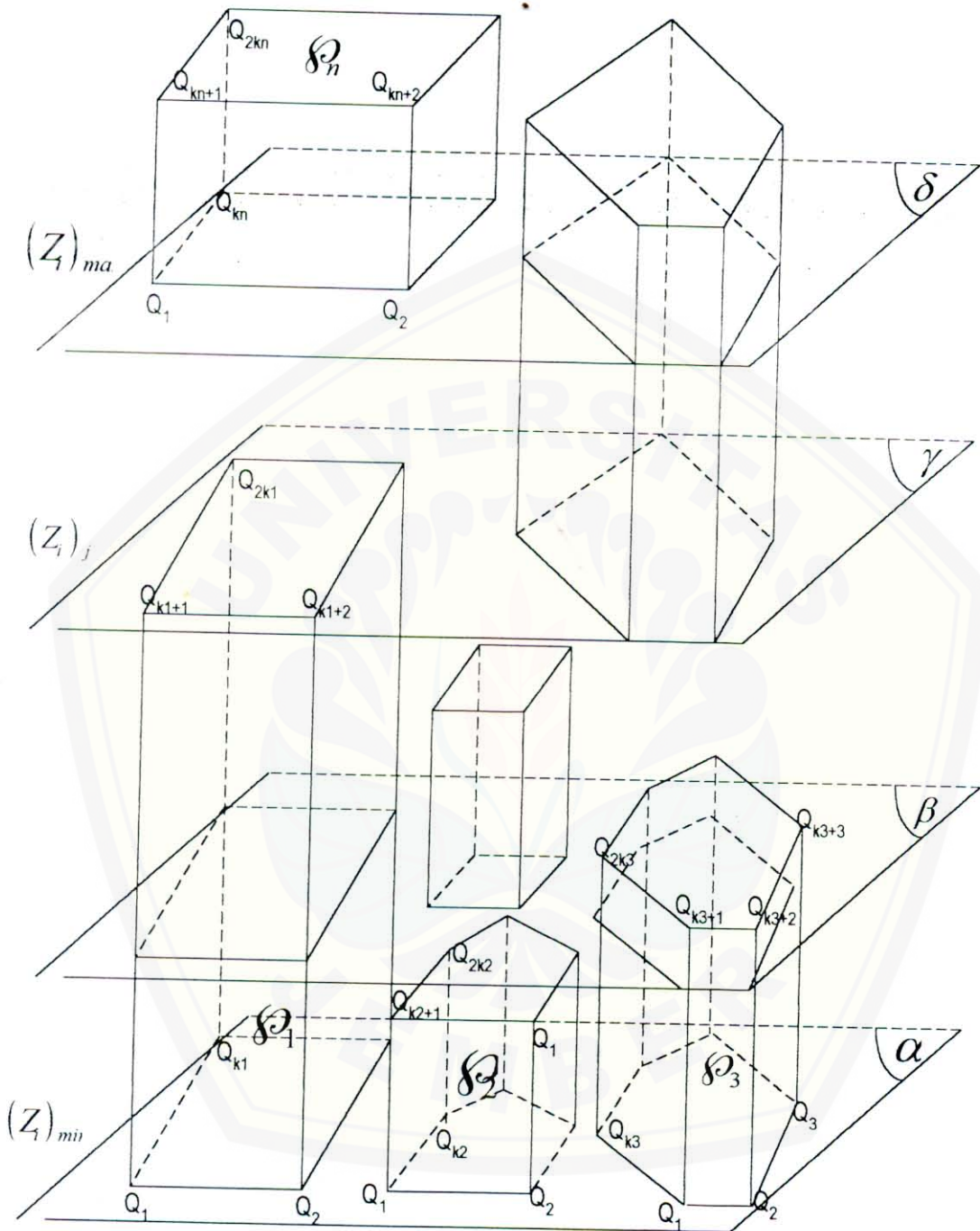
Misalkan diketahui suatu benda hasil gabungan  $n$  prisma tegak dan disyaratkan tinggi prisma tegak tersebut ada yang sama tetapi alas atas dan alas bawah tidak sebidang, yaitu  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Jika masing-masing prisma rusuk-rusuk tegaknya berhingga dalam bentuk  $\varphi_j : [Q_i(x_i, y_i, z_i)_j, Q_{kj+i}(x_{kj+i}, y_{kj+i}, z_{kj+i})_j]$  dimana  $i=1, 2, \dots, kj$  dan  $j=1, 2, \dots, n$  (artinya prisma ke- $j$ , yaitu  $\varphi_j$  mempunyai  $kj$  rusuk). Titik-titik  $Q_i$  menyatakan kumpulan titik alas bawah prisma sedangkan Titik-titik  $Q_{kj+i}$  merupakan kumpulan titik alas atas prisma seperti pada gambar 3.9, maka untuk mendapatkan volume seluruh prisma dapat mengikuti langkah-langkah berikut ini:

1. *Sorting* ketinggian alas-atas bawah prisma  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  dengan cara mengumpulkan rusuk-rusuk prisma dari  $(z_i)_j$  dengan  $j=1, 2, \dots, n$  berkettingian sama dalam urutan:  $(z_i)_{\min}, \dots, (z_i)_j, \dots, (z_i)_{\max}$  (gambar 3.10).

2. Lakukan *sorting* prisma dengan alas bawah sama (tinggi dapat berbeda) dengan prosedur sebagai berikut:
  - a. Ambil sebuah rusuk tegak di  $(z_i)_{\min}$ , kemudian tentukan panjang rusuk tersebut.
  - b. Pilihlah secara rekursif rusuk-rusuk tegak yang lain di  $(z_i)_{\min}$  terhadap rusuk tegak tersebut, sehingga kesemuanya mempunyai panjang yang sama.
  - c. Jika perlakuan (b) selesai, lakukan untuk rusuk-rusuk tegak di  $(z_i)_1, \dots, (z_i)_{\max}$ .
  - d. Kumpulan rusuk-rusuk yang ukuran panjangnya sama dapat ditentukan, sehingga diperoleh  $n$  prisma tegak.
3. Volume gabungan  $n$  prisma tegak dapat ditentukan dengan menjumlahkan volume  $n$  buah prisma tersebut.



Gambar 3.9 : Ilustrasi Gabungan  $n$  Prisma Tegak Terdapat Sama Tinggi



Gambar 3.10: Ilustrasi Menentukan Volume Gabungan n Prisma Tegak dengan Penyusun Ada yang Sama

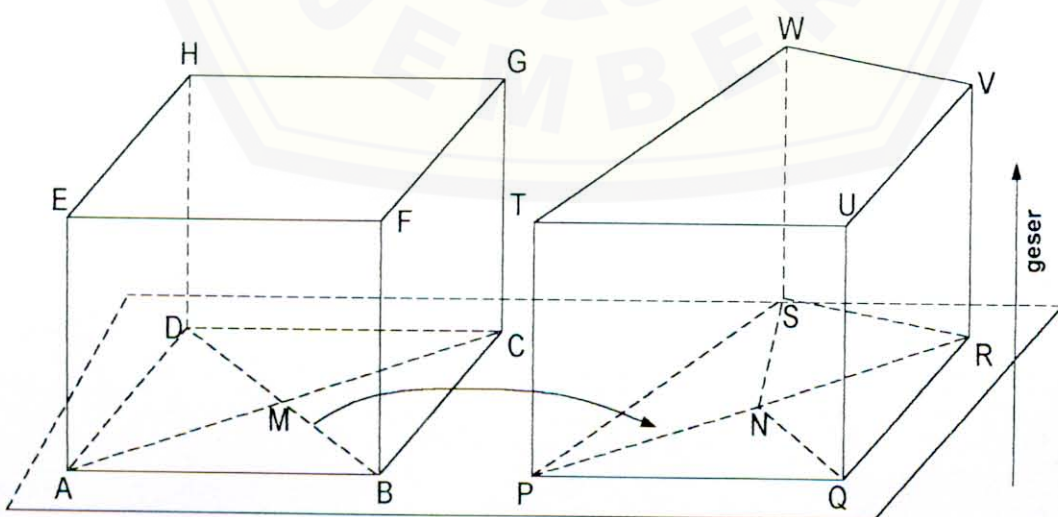
### 3.2 Transformasi Ekivalensi Volume Prisma dan Limas

Transformasi ekivalensi volume prisma dan limas mempunyai pengertian mentransformasikan suatu prisma menjadi prisma atau limas menjadi limas yang bentuknya berbeda tetapi volumenya sama.

#### 3.2.1 Transformasi Ekivalensi Volume Prisma

Apabila diketahui suatu prisma dengan luas alas  $L$ , tinggi  $t$  dan volumenya  $V$  (lihat pembahasan bagian 3.1.1), maka untuk mentransformasi prisma tersebut menjadi prisma yang bentuknya berbeda tetapi volumenya sama dapat mengikuti langkah-langkah berikut ini (Gambar 3.11):

1. Mendekomposisi alas prisma (bentuk poligon) menjadi  $n$  segitiga.
2. Pada bidang alas, transformasikan segitiga-segitiga tersebut sehingga membentuk poligon baru dengan luas sama. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mencerminkan (*refleksi*), menggeser (*translasi*) atau memutar (*rotasi*) segitiga.
3. Menggeser poligon hasil (2) searah dan setinggi rusuk tegak prisma asal.
4. Prisma hasil transformasi didapat bentuknya berbeda tetapi volumenya sama dengan prisma asal, sebab memenuhi Prinsip Cavalieri.

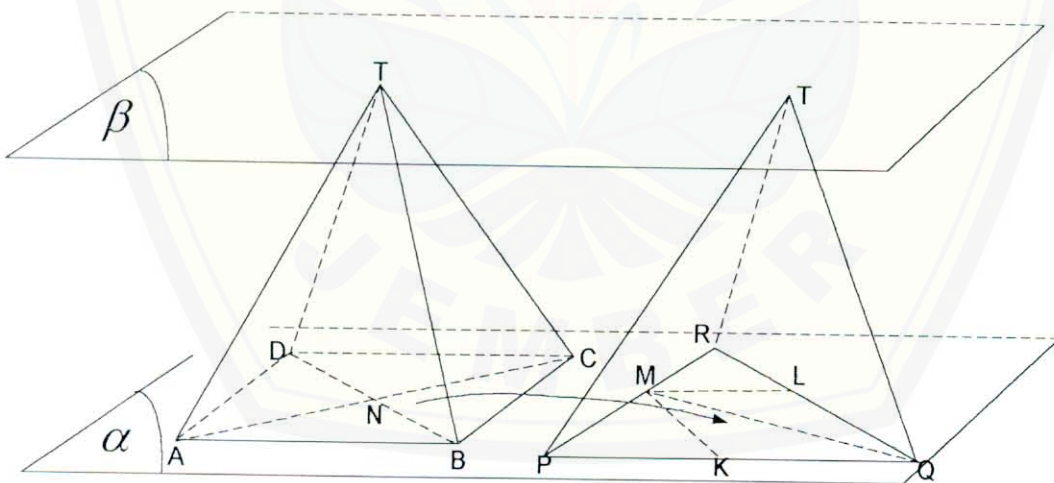


Gambar 3.11 : Ilustrasi Transformasi Ekivalensi Volume Prisma

### 3.2.2 Transformasi Ekuivalensi Volume Limas

Apabila diketahui suatu limas dengan luas alas  $L$ , tinggi  $t$  dan volumenya  $V$ . Alas limas terletak di bidang  $\alpha$  dan puncak limas terletak di bidang  $\beta$ ,  $\alpha \parallel \beta$ , maka prosedur umum transformasi ekuivalensi volume limas dapat mengikuti langkah-langkah berikut ini (Gambar 3.12):

1. Mendekomposisi alas prisma (bentuk poligon) menjadi  $n$  segitiga.
2. Pada bidang alas, transformasikan segitiga-segitiga tersebut sehingga membentuk poligon baru dengan luas sama. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mencerminkan (*refleksi*), menggeser (*translasi*) atau memutar (*rotasi*) segitiga.
3. Mengkontruksi rusuk-rusuk tegak limas yang ditarik dari poligon alas hasil (2) ke sebarang titik di bidang yang melalui titik puncak limas asal sejajar alasnya, sehingga diperoleh limas yang bentuknya berbeda tetapi volumenya sama. Sebab memenuhi Prinsip Cavalieri.



Gambar 3.12 : Ilustrasi Transformasi Ekuivalensi Volume Limas

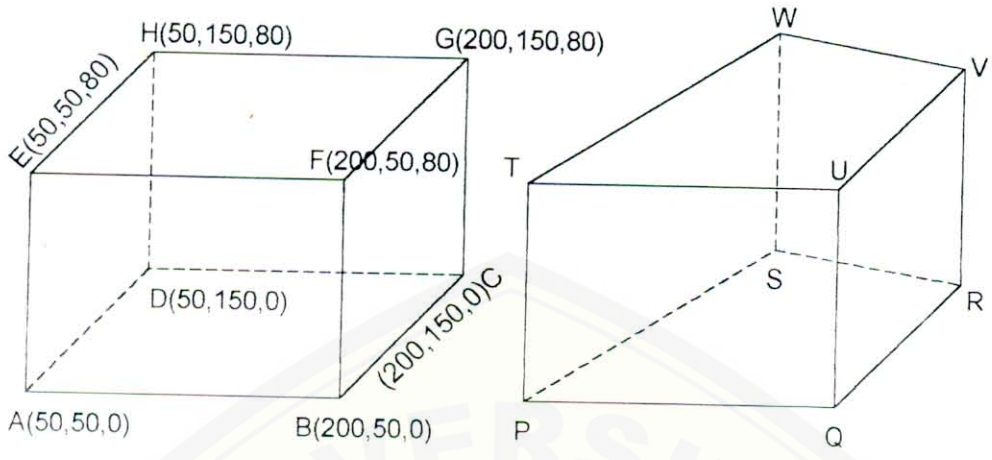
### 3.2.3 Aplikasi Prosedur Umum Transformasi Ekuivalensi Volume Prisma dan Limas

Untuk validasi prosedur transformasi ekuivalensi volume prisma dan limas tersebut, selanjutnya kita berikan beberapa contoh di bawah ini.

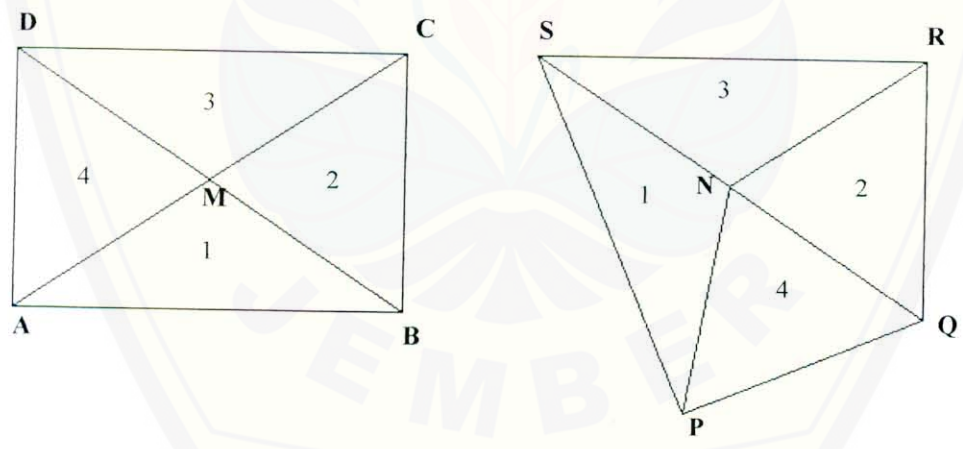
**a. Contoh Penerapan Transformasi Ekuivalensi Volume Prisma**

Misalkan kita ingin mentransformasi suatu balok dengan titik-titik sudutnya  $A, B, C, D, E, F, G, H$  menjadi prisma dengan titik-titik sudut  $P, Q, R, S, T, U, V, W$  seperti pada gambar 3.13.a, maka langkah-langkah yang perlu dilakukan untuk merealisasikannya adalah sebagai berikut:

1. Mendekomposisi alas  $ABCD$ . Pertama, tentukanlah titik perpotongan garis diagonal alas, misal titik  $M$ . Kedua, menarik segmen garis dari titik  $M$  ke setiap titik sudut alas sehingga diperoleh 4 (empat) segitiga, yaitu segitiga  $ABM$ , segitiga  $BMC$ , segitiga  $CMD$  dan segitiga  $DMA$  (Gambar 3.13.b).
2. Pada bidang alas, transformasi keempat segitiga tersebut untuk mendapatkan poligon yang dikehendaki. Pertama, segitiga  $ABM$  dan segitiga  $BMC$  dirotasi  $67.5^\circ$ . Kedua, segitiga  $CMD$  tetap (tidak ditransformasi). Ketiga, segitiga  $DMA$  dirotasi  $180^\circ$ , sehingga diperoleh poligon  $PQRS$  yang luasnya sama dengan luas alas  $ABCD$  (Gambar 3.13.c).
3. Menggeser poligon  $PQRS$  searah dan setinggi  $\overline{AE}$ , sehingga didapatkan prisma  $PQRS-TUVW$  (Gambar 3.13.d).
4. Volume Prisma  $PQRS-TUVW$  sama dengan Balok  $ABCD-EFGH$ . Ekuivalensi Volume Prisma dan Balok ini dapat dijelaskan dengan prinsip Cavalieri berikut ini. Pertama, letakkan balok dan prisma di bidang  $\alpha$ , kemudian pancung balok dan prisma tersebut dengan bidang  $\gamma // \alpha$ , sehingga diperoleh penampang balok  $D_1$  dan penampang prisma  $D_2$ . Kedua, luas  $D_1$  sama dengan luas  $ABCD$  dan luas  $D_2$  sama dengan luas  $PQRS$ . Dilain pihak, diketahui luas  $ABCD =$  luas  $PQRS$ . Akibatnya luas  $D_1 =$  luas  $D_2$ . Akhirnya, karena luas  $D_1 =$  luas  $D_2$  dan tinggi balok sama dengan tinggi prisma, maka menurut prinsip Cavalieri volume balok  $ABCD-EFGH$  sama dengan volume prisma  $PQRS-TUVW$ .



( a )



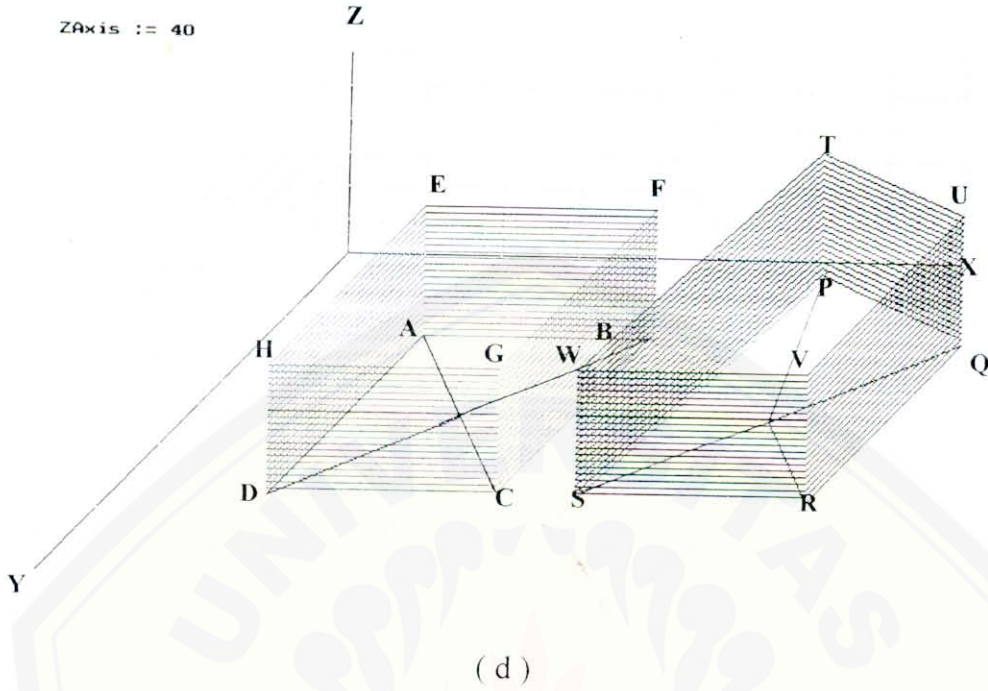
Gambar Asal

Gambar Hasil Transformasi

( b )

( c )





Gambar 3.13 : Contoh Penerapan Prosedur Transformasi Ekuivalensi Volume Prisma

Tabel 3: Koordinat poligon ABCD dan PQRS

Koordinat Segitiga ABM				Koordinat Segitiga BCM			
	$x$	$y$	$z$		$x$	$y$	$z$
$A$	50	50	1	$B$	200	50	1
$B$	200	50	1	$C$	200	150	1
$M$	125	100	1	$M$	125	100	1
Koordinat Segitiga PNS				Koordinat Segitiga PQN			
$S$	250	150	1	$P$	308	12	1
$P$	308	12	1	$Q$	400	50	1
$N$	325	100	1	$N$	325	100	1

Koordinat Segitiga CDM				Koordinat Segitiga ADM			
	$x$	$y$	$z$		$x$	$y$	$z$
$C$	200	150	1	$A$	50	50	1
$D$	50	150	1	$D$	50	150	1
$M$	125	100	1	$M$	125	100	1
Koordinat Segitiga NRS				Koordinat Segitiga QNR			
$R$	400	150	1	$R$	400	150	1
$S$	250	150	1	$Q$	400	50	1
$N$	325	100	1	$N$	325	100	1

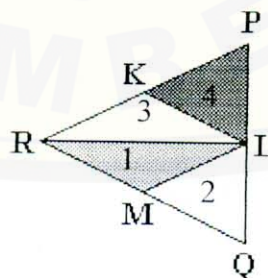
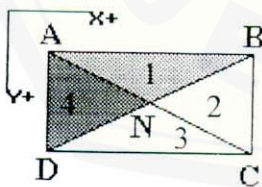
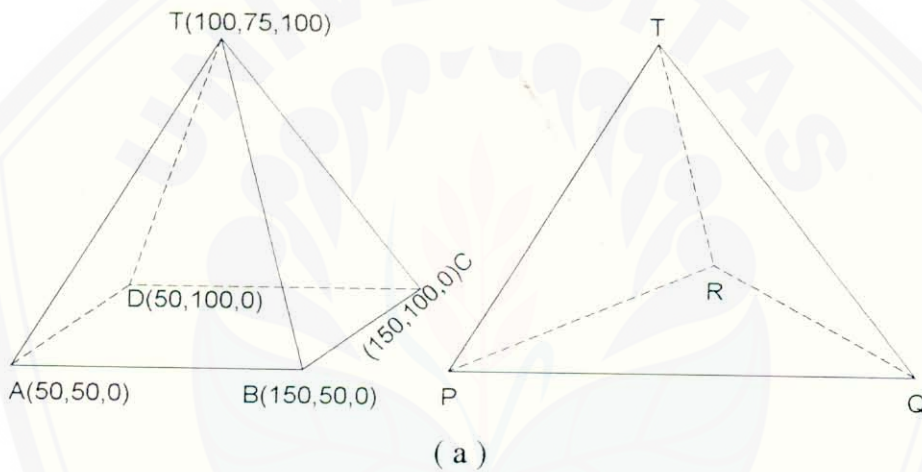
Visualisasi gambar tersebut di atas merupakan hasil pemrograman dengan bantuan *software*, yaitu **Turbo Pascal 7.0** (lihat lampiran 1 dan 2).

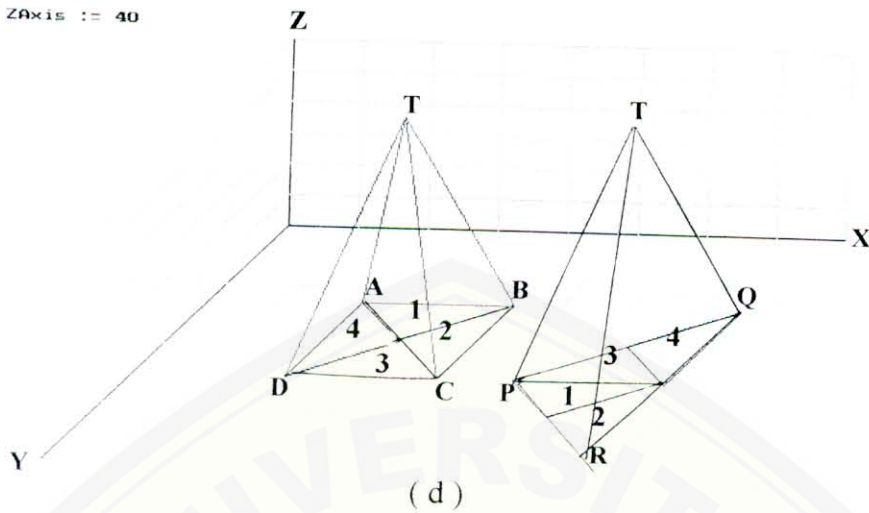
#### b. Contoh Penerapan Transformasi Ekuivalensi Volume Limas

Misalkan kita ingin mentransformasi suatu *pentahedron* dengan titik-titik sudutnya  $T, A, B, C, D$ , menjadi *tetrahedron* dengan titik-titik sudut  $T, P, Q, R$ , seperti pada gambar 3.14.a, maka langkah-langkah yang perlu dilakukan untuk merealisasikannya adalah sebagai berikut:

1. Mendekomposisi alas  $ABCD$ . Pertama, tentukanlah titik perpotongan garis diagonal alas, misal titik  $N$ . Kedua, menarik segmen garis dari titik  $N$  ke setiap titik sudut alas sehingga diperoleh 4 (empat) segitiga, yaitu segitiga  $ABN$ , segitiga  $BNC$ , segitiga  $CND$  dan segitiga  $DNA$  (Gambar 3.14.b).
2. Pada bidang alas, transformasi keempat segitiga tersebut untuk mendapatkan poligon yang dikehendaki. Pertama, segitiga  $ABN$  dan segitiga  $BNC$  ditranslasi  $[0, 50, 0]$ . Kedua, segitiga  $CED$  tetap (tidak ditransformasi). Ketiga, segitiga  $DEA$  dirotasi  $180^\circ$ , sehingga diperoleh segitiga  $PQR$  yang luasnya sama dengan luas alas  $ABCD$  (Gambar 3.14.c).
3. Mengkontruksi rusuk-rusuk tegak limas  $T-PQR$  yang ditarik dari titik-titik sudut poligon alas  $PQR$  ke sebarang titik  $T$  di bidang  $\beta$  (Gambar 3.14.d)
4. Volume *Tetrahedron*  $T-PQR$  sama dengan volume *Pentahedron*  $T-ABC$ . Ekuivalensi Volume *Tetrahedron* dan *Pentahedron* ini dapat dijelaskan dengan

prinsip Cavalieri berikut ini. Pertama, letakkan Pentahedron dan tetrahedron di bidang  $\alpha$ , kemudian pancung pentahedron dan tetrahedron tersebut dengan bidang  $\gamma \parallel \alpha$ , sehingga diperoleh penampang pentahedron  $D_1$  dan penampang tetrahedron  $D_2$ . Kedua, luas  $D_1$  sama dengan luas ABCD dan luas  $D_2$  sama dengan luas PQR. Dilain pihak, diketahui luas ABCD = luas PQR. Akibatnya luas  $D_1 =$  luas  $D_2$ . Akhirnya, karena luas  $D_1 =$  luas  $D_2$  dan tinggi pentahedron sama dengan tinggi tetrahedron, maka menurut prinsip Cavalieri volume pentahedron T-ABCD sama dengan volume tetrahedron T-PQR.





Gambar 3.14 : Contoh Penerapan Prosedur Transformasi Ekuivalensi Volume Limas

Tabel 2: Koordinat poligon ABCD dan PQR

<p>Koordinat Segitiga ABN</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>50</td> <td>50</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>150</td> <td>50</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>100</td> <td>75</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Koordinat Segitiga RML</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>R</td> <td>200</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>300</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>M</td> <td>250</td> <td>125</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		x	y	z	A	50	50	1	B	150	50	1	N	100	75	1	R	200	100	1	L	300	100	1	M	250	125	1	<p>Koordinat Segitiga BCN</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>B</td> <td>150</td> <td>50</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>150</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>100</td> <td>75</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Koordinat Segitiga LQM</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>L</td> <td>300</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Q</td> <td>300</td> <td>150</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>M</td> <td>250</td> <td>125</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		x	y	z	B	150	50	1	C	150	100	1	N	100	75	1	L	300	100	1	Q	300	150	1	M	250	125	1
	x	y	z																																																						
A	50	50	1																																																						
B	150	50	1																																																						
N	100	75	1																																																						
R	200	100	1																																																						
L	300	100	1																																																						
M	250	125	1																																																						
	x	y	z																																																						
B	150	50	1																																																						
C	150	100	1																																																						
N	100	75	1																																																						
L	300	100	1																																																						
Q	300	150	1																																																						
M	250	125	1																																																						
<p>Koordinat Segitiga CDN</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>D</td> <td>50</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>100</td> <td>75</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>150</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Koordinat Segitiga KLR</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>R</td> <td>200</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>K</td> <td>250</td> <td>75</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>L</td> <td>300</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		x	y	z	D	50	100	1	N	100	75	1	C	150	100	1	R	200	100	1	K	250	75	1	L	300	100	1	<p>Koordinat Segitiga AND</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>50</td> <td>50</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>100</td> <td>75</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>50</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Koordinat Segitiga PKL</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>L</td> <td>300</td> <td>100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>K</td> <td>250</td> <td>75</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>300</td> <td>50</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		x	y	z	A	50	50	1	N	100	75	1	D	50	100	1	L	300	100	1	K	250	75	1	P	300	50	1
	x	y	z																																																						
D	50	100	1																																																						
N	100	75	1																																																						
C	150	100	1																																																						
R	200	100	1																																																						
K	250	75	1																																																						
L	300	100	1																																																						
	x	y	z																																																						
A	50	50	1																																																						
N	100	75	1																																																						
D	50	100	1																																																						
L	300	100	1																																																						
K	250	75	1																																																						
P	300	50	1																																																						

Visualisaasi gambar tersebut di atas, merupakan hasil pemrograman dengan bantuan *software*, yaitu **Turbo Pascal 7.0**.

DAFTAR PUSTAKA

- D. Suryadi, 1986, *Teori dan Soal Ilmu Ukur Analitik Ruang*, Ghalia Indonesia, Jakarta.
- Ezzell, Ben, 1991, *Using Turbo Pascal 6.0*, Addison-Wesley.
- Fogiel, Max., 1987, *The Essentials of Geometry II*, Research and Education Association, New Jersey.
- Kusno, 1988, *Geometri*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, Jember.
- Kusno, 2000, *Geometri Euclid Ruang Pendekatan Metrik dan Sintetik*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, Jember.
- Purcell Edwin J., 1990, *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*, Edisi Keempat, Erlangga, Jakarta.
- Sukirman, 1994, *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*, Universitas Terbuka, Jakarta.



**Lampiran 1: Program Transformasi Poligon dengan Turbo Pascal 7.0**

```
{Program Transformasi Poligon 2D}

Const
  Xa = 50; Ya = 50; Xb = 200; Yb = 50;
  Xc = 200; Yc = 150; Xd = 50; Yd = 150;
  Xm = 125; Ym = 100;
  BujurSangkar : Poligon1 = ((X:Xa;Y:Ya),(X:Xb;Y:Yb),
                             (X:Xc;Y:Yc),(X:Xd;Y:Yd),
                             (X:Xa;Y:Ya));
  SegiTigal : Poligon2 = ((X:Xa;Y:Ya),(X:Xb;Y:Yb),
                          (X:Xm;Y:Ym),(X:Xa;Y:Ya));
  SegiTigall : Poligon2 = ((X:Xb;Y:Yb),(X:Xc;Y:Yc),
                            (X:Xm;Y:Ym),(X:Xb;Y:Yb));
  SegiTigalll : Poligon2 = ((X:Xc;Y:Yc),(X:Xd;Y:Yd),
                              (X:Xm;Y:Ym),(X:Xc;Y:Yc));
  SegiTigalIV : Poligon2 = ((X:Xa;Y:Ya),(X:Xd;Y:Yd),
                              (X:Xm;Y:Ym),(X:Xa;Y:Ya));
  SegiTiga : Poligon2 = ((X:Xa;Y:Ya),(X:Xb;Y:Yb),
                          (X:Xc;Y:Yc),(X:Xa;Y:Ya));
  Gray50 : FillPatternType = ($AA, $55, $AA, $55, $AA, $55, $AA, $55);

{Procedure Perkalian Matrik}
Procedure PerkalianMatrik (Var MatH,MatA,MatB : Mat);
Var I,J,K : Byte;
Begin
  For I := 1 to 3 Do
    For J := 1 to 3 Do
      Begin
        MatH[I,J] := 0;
        For K := 1 to 3 Do
          MatH[I,J] := MatH[I,J] + MatA[I,K] * MatB[K,J];
        End;
      End;
    End;
  End;

Procedure Homogen1 (Var MH2 : Mat; Cx,Cy : Real; The: Real);
Var Th : Real;
Begin
  Th := (The/180)*pi;
  MH2[1,1] := cos(th); MH2[1,2] := -sin(th); MH2[1,3] := 0;
  MH2[2,1] := sin(th); MH2[2,2] := cos(th); MH2[2,3] := 0;
  MH2[3,1] := (-Cx*cos(th)-Cy*sin(th))+Cx;
  MH2[3,2] := (Cx*sin(th)-Cy*cos(th))+Cy; MH2[3,3] := 1;
End;

Procedure Homogen2 (Var MH2 : Mat; Tx,Ty: real);
Begin
  MH2[1,1] := 1; MH2[1,2] := 0; MH2[1,3] := 0;
  MH2[2,1] := 0; MH2[2,2] := 1; MH2[2,3] := 0;
  MH2[3,1] := Tx; MH2[3,2] := Ty; MH2[3,3] := 1;
End;

{Procedure Transformasi}
Procedure TransformasiHomogen;
Var
  I,J : Byte;
  MatTrans1,MatTrans2,MatTrans3,MatTrans4 : Mat;
  MatA,MatB1,MatB2,MatB3,MatC,MatD,MatE,MatF,MatG,MatH : Mat;
Begin
```

```

Homogen1(MatB1,Xm,Ym,67.5);
Homogen1(MatB2,Xm,Ym,180);
Homogen2(MatC,200,0);

SegiTigaAsal1(MatA,Xa,Xb,Xm,Ya,Yb,Ym);
PerkalianMatrik(MatD,MatA,MatB1);
For I := 1 to 3 Do
  Begin
    PerkalianMatrik(MatTrans1,MatD,MatC);
    SegiTiga1[I].X := Round(MatTrans1[I,1]);
    SegiTiga1[I].Y := Round(MatTrans1[I,2]);
  End;
SegiTiga1[4].X := Round(MatTrans1[1,1]);
SegiTiga1[4].Y := Round(MatTrans1[1,2]);

SegiTigaAsal2(MatE,Xb,Xc,Xm,Yb,Yc,Ym);
PerkalianMatrik(MatF,MatE,MatB1);
For I := 1 to 3 Do
  Begin
    PerkalianMatrik(MatTrans2,MatF,MatC);
    SegiTiga2[I].X := Round(MatTrans2[I,1]);
    SegiTiga2[I].Y := Round(MatTrans2[I,2]);
  End;
SegiTiga2[4].X := Round(MatTrans2[1,1]);
SegiTiga2[4].Y := Round(MatTrans2[1,2]);

SegiTigaAsal3(MatG,Xc,Xd,Xm,Yc,Yd,Ym);
For I := 1 to 3 Do
  Begin
    PerkalianMatrik(MatTrans3,MatG,MatC);
    SegiTiga3[I].X := Round(MatTrans3[I,1]);
    SegiTiga3[I].Y := Round(MatTrans3[I,2]);
  End;
SegiTiga3[4].X := Round(MatTrans3[1,1]);
SegiTiga3[4].Y := Round(MatTrans3[1,2]);

SegiTigaAsal4(MatH,Xa,Xd,Xm,Ya,Yd,Ym);
PerkalianMatrik(MatF,MatH,MatB2);
For I := 1 to 3 Do
  Begin
    PerkalianMatrik(MatTrans4,MatF,MatC);
    SegiTiga4[I].X := Round(MatTrans4[I,1]);
    SegiTiga4[I].Y := Round(MatTrans4[I,2]);
  End;
SegiTiga4[4].X := Round(MatTrans4[1,1]);
SegiTiga4[4].Y := Round(MatTrans4[1,2]);
End;

{Procedure Transformasi}
Procedure TransHomogen;
Var
  I,J : Byte;
  MatTrans1,MatTrans2,MatTrans3,MatTrans4 : Mat;
  MatA,MatB1,MatB2,MatC,MatD,MatE,MatF,MatG,MatH : Mat;
Begin
  Homogen1(MatB1,Xm,Ym,67.5);
  Homogen1(MatB2,Xm,Ym,180);
  Homogen2(MatC,200,0);

  SegiTigaAsal1(MatA,Xa,Xb,Xm,Ya,Yb,Ym);
  PerkalianMatrik(MatD,MatA,MatB1);
  For I := 1 to 3 Do

```

```
Begin
  PerkalianMatrik(MatTrans1,MatD,MatC);
End;

SegiTigaAsal2(MatE,Xb,Xc,Xm,Yb,Yc,Ym);
PerkalianMatrik(MatF,MatE,MatB1);
For I := 1 to 3 Do
  Begin
    PerkalianMatrik(MatTrans2,MatF,MatC);
  End;

SegiTigaAsal3(MatG,Xc,Xd,Xm,Yc,Yd,Ym);
For I := 1 to 3 Do
  Begin
    PerkalianMatrik(MatTrans3,MatG,MatC);
  End;

SegiTigaAsal4(MatH,Xa,Xd,Xm,Ya,Yd,Ym);
PerkalianMatrik(MatF,MatH,MatB2);
For I := 1 to 3 Do
  Begin
    PerkalianMatrik(MatTrans4,MatF,MatC);
  End;
  textcolor(Yellow);
  write(' ':6);
  for I:= 1 to 3 do
    write(I:5);
    writeln(' ');
    write(' ':1);

Gotoxy(1,2);
for I:=1 to 3 do
  begin
    write(I:5, ' ');
    for J:= 1 to 3 do
      write(MatA[I,J]:5:0);
      writeln("");
    end;

Gotoxy(1,7);
for I:=1 to 3 do
  begin
    write(I:5, ' ');
    for J:= 1 to 3 do
      write(MatTrans1[I,J]:5:0);
      writeln("");
    end;
  end;
  readln;

clrscr;
textcolor(lightRed);
write(' ':6);
for I:= 1 to 3 do
  write(I:5);
  writeln(' ');
  write(' ':1);

Gotoxy(1,2);
for I:=1 to 3 do
  begin
    write(I:5, ' ');
    for J:= 1 to 3 do
```



```
    write(MatE[I,J]:5:0);
    writeln("");
end;
Gotoxy(1,7);
for I:=1 to 3 do
begin
write(I:5,' ');
for J:= 1 to 3 do
write(MatTrans2[I,J]:5:0);
writeln("");
end;
readln;

clrscr;
textcolor(LightBlue);
write(' ':6);
for I:= 1 to 3 do
write(I:5);
writeln(' ');
write(' ':1);
Gotoxy(1,2);
for I:=1 to 3 do
begin
write(I:5,' ');
for J:= 1 to 3 do
write(MatG[I,J]:5:0);
writeln("");
end;

Gotoxy(1,7);
for I:=1 to 3 do
begin
write(I:5,' ');
for J:= 1 to 3 do
write(MatTrans3[I,J]:5:0);
writeln("");
end;
readln;

clrscr;
textcolor(White);
write(' ':6);
for I:= 1 to 3 do
write(I:5);
writeln(' ');
write(' ':1);

Gotoxy(1,2);
for I:=1 to 3 do
begin
write(I:5,' ');
for J:= 1 to 3 do
write(Math[I,J]:5:0);
writeln("");
end;
Gotoxy(1,7);
for I:=1 to 3 do
begin
write(I:5,' ');
for J:= 1 to 3 do
write(MatTrans4[I,J]:5:0);
writeln("");
```

```

end;
Textcolor(white);
End;

Warna(SegitigaI,Red);      DrawPoly(4, SegiTigaI);
Warna(SegitigaI,Yellow);  DrawPoly(4, SegiTigaI);
Warna(SegitigaII,Blue);   DrawPoly(4, SegiTigaII);
Warna(SegitigaIV,White);  DrawPoly(4, SegiTigaIV);
Delay(500);

TransformasiHomogen;
DrawPoly(4, SegiTigaI);
Warna(SegiTigaI,yellow);
Delay(500);

TransformasiHomogen;
DrawPoly(4, SegiTiga2);
Warna(Segitiga2,Red);
Delay(500);

TransformasiHomogen;
DrawPoly(4, SegiTiga3);
Warna(Segitiga3,Blue);
Delay(500);

TransformasiHomogen;
DrawPoly(4, SegiTiga4);
Warna(Segitiga4,White);
Delay(500);
Readln;
CloseGraph;
End.

```

## Lampiran 2: Program Mengkontruksi Prisma dengan cara Menggeser Poligon Alas (Turbo Pascal 7.0)

```

{Program Transformasi 3d}
Const
  Xa = 50;   Ya = 50;
  Xb = 200;  Yb = 50;
  Xc = 200;  Yc = 150;
  Xd = 50;   Yd = 150;
  Xe = 125;  Yc = 100;
End;

procedure gambar;
Begin
  setcolor(yellow); {Gambar Segi Empat}
  Obyek ( XOrg+Xa, YOrg+Ya,
          XOrg+Xb, YOrg+Yb,
          XOrg-round(100/AspR)+Xc, YOrg+Yc,
          XOrg-round(100/AspR)+Xd, YOrg+Yd, 0, 0);
  Delay(500);
End;

procedure gambar1;
Begin
  setcolor(yellow); {Gambar SegiTiga1}
  Obyek1 ( XOrg+Xa, YOrg+Ya,
           XOrg+Xb, YOrg+Yb,
           {XOrg-round(Xc/AspR)+Xc, YOrg+Xe.}

```

```

    XOrg-round(50/AspR)+Xc, YOrg+Yc, 0, 0);
  Delay(500);
End;

procedure gambar2;
Begin
  setcolor(red); {Gambar SegiTiga2}
  Obyek2 ( { XOrg+Xa, YOrg+Ya,}
    XOrg+Xb, YOrg+Yb,
    XOrg-round(100/AspR)+Xc, YOrg+Yc,
    XOrg-round(50/AspR)+Xc, YOrg+Yc, 0, 0);
  Delay(500);
End;

procedure gambar3;
Begin
  setcolor(blue); {Gambar SegiTiga3}
  Obyek3 ( {XOrg+Xa, YOrg,}
    XOrg+Xb, YOrg,}
    XOrg-round(50/AspR)+Xc, YOrg+Yc,
    XOrg-round(100/AspR)+Xc, YOrg+Yc,
    XOrg-round(100/AspR)+Xd, YOrg+Yd, 0, 0);
  Delay(500);
End;

procedure gambar4;
Begin
  setcolor(white); {Gambar Segi Empat}
  Obyek4 ( XOrg+Xa, YOrg+Ya,
    {XOrg+Xb, YOrg,}
    XOrg-round(50/AspR)+Xc, YOrg+Yc,
    XOrg-round(100/AspR)+Xd, YOrg+Yd, 0, 0);
  Delay(500);
End;

procedure gambar6;
Begin
  setcolor(yellow); {Gambar SegiTiga1}
  Obyek1 ( XOrg+108+200, YOrg+12,
    {XOrg+Xb, YOrg+Yb,}
    XOrg-round(100/AspR)+Xd+200, YOrg+Yd,
    XOrg-round(50/AspR)+Xc+200, YOrg+Yc, 0, 0);
  Delay(500);
End;

procedure gambar7;
Begin
  setcolor(red); {Gambar SegiTiga2}
  Obyek2 ( XOrg+108+200, YOrg+12,
    XOrg+Xb+200, YOrg+Yb,
    {XOrg-round(100/AspR)+Xc, YOrg+Yc,}
    XOrg-round(50/AspR)+Xc+200, YOrg+Yc, 0, 0);
  Delay(500);
End;

procedure gambar8;
Begin
  setcolor(blue); {Gambar SegiTiga3}
  Obyek3 ( {XOrg+Xa, YOrg,}
    XOrg+Xb, YOrg,}
    XOrg-round(50/AspR)+Xc+200, YOrg+Yc,
    XOrg-round(100/AspR)+Xc+200, YOrg+Yc,

```

```

XOrg-round(100/AspR)+Xd+200,YOrg+Yd, 0, 0);
Delay(500);
End;

```

```

procedure gambar9;
Begin
  setcolor(white); {Gambar Segi Empat}
  Obyck4 ( { XOrg+Xa, YOrg+Ya, }
          XOrg+Xb+200, YOrg+Yb,
          XOrg-round(50/AspR)+Xc+200, YOrg+Yc.
          XOrg-round(100/AspR)+Xc+200, YOrg+Yc, 0, 0);
  Delay(500);
End;

```

```

procedure gambar10;
var ij : integer;
Begin
  For j := 1 to 20 do
    Begin
      XAxis := MaxX div 30;
      YAxis := MaxY div 30;
      XOrg := MaxX div 3;
      YOrg := MaxY div 2;
      i := 4*j;
      repeat
        setcolor(cyan); {Gambar Segi Empat}
        Obyck ( XOrg+Xa, YOrg+Ya-i,
              XOrg+Xb, YOrg+Yb-i,
              XOrg-round(100/AspR)+Xc, YOrg+Yc-i,
              XOrg-round(100/AspR)+Xd, YOrg+Yd-i, 0, 0);
        dec(i,YAxis);
        Delay(200);
      Until i < YOrg;
    End;
  End;

```

```

procedure gambar11;
var ij : integer;
Begin
  For j := 1 to 20 do
    Begin
      XAxis := MaxX div 30;
      YAxis := MaxY div 30;
      XOrg := MaxX div 3;
      YOrg := MaxY div 2;
      i := 4*j;
      repeat
        setcolor(Green); {Gambar Segi Empat}
        Obyck11 ( XOrg+108+200, YOrg+12-i,
                XOrg+200+200, YOrg+50-i,
                XOrg-round(100/AspR)+Xc+200, YOrg+Yc-i,
                XOrg-round(100/AspR)+Xd+200, YOrg+Yd-i, 0, 0);
        dec(i,YAxis);
        Delay(200);
      Until i < YOrg;
    End;
  End;

```

