r-DYNAMIC VERTEX COLORING PADA HASIL OPERASI GRAF KHUSUS DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERIPIKIR TINGKAT TINGGI

SKRIPSI

Oleh

Desy Tri Puspasari
120210101128

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2015

r-DYNAMIC VERTEX COLORING PADA HASIL OPERASI GRAF KHUSUS DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERIPIKIR TINGKAT TINGGI

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Desy Tri Puspasari
120210101128

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2015

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Orang tuaku tercinta dan terkasih :Ayahanda Syarifudin Hidayat dan Ibunda Nuraini Lismawati, serta kedua Kakakku Fitria Hidayawati dan Indriyani Purba Alam, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dan memberikan kekuatan dalam meraih cita-cita;

2. Ahmad Irwansyah (Irben) dan keluarga yang telah memberikan semangat dan bantuan yang luar biasa dalam penyelesaian skripsi ini;

3. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Bapak Prof. Drs. Slamin, M.Comp.SC., Ph.D. yang dengar sabar dan tulus ihklas membimbingku sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;

4. Guru dan dosen-dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran, khususnya Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. yang telah memberikan ilmu dan pengalaman yang berkesan dalam kuliah *Micro Teaching*;

5. Sahabat-sahabat terbaikku: Desinting, Dong, Mirantong, Aidol, Nisol, Mala, Yesyong, Emak Farah, Megal-megol, Elsa, Nanik, Dyas, dan anak-anak KI 2012 yang senantiasa membantuku, memberikan semangat, dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;

6. Teman-teman pejuang graf: (Irma, Sinta, Mita, Siska, Novri, Ifa, Yuli, Farah, dan Tanti) yang selalu berbagi suka duka, yang selalu bimbingan bersama dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat; dan

7. Almamater tercinta Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

"Sesungguhnya bersama kesukaran itu ada keringanan. Karena itu bila kau sudah selesai (mengerjakan yang lain). Dan berharaplah kepada Tuhanmu."

(Q.S Al Insyirah : 6-8)*)

"Barang siapa yang berjalan untuk menuntut ilmu, maka Allah akan memudahkan baginya jalan ke surga."

(H.R Muslim)**)

"Seorang mukmin yang menghadapi masalah dan tekanan, bagaikan adonan kue dalam tangan. Apabila adonan tersebut ditekan, maka ia akan keluar dari sela-sela jari. Begitulah seorang mukmin tidak hanya diam menghadapi masalah, tapi dia tetap dan terus beramal mencari jalan keluar."

(Dr. Muhammad Al Habdan Hafizullah)***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

**) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

***) Instagram Teladan Rasul

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Desy Tri Puspasari

NIM : 120210101128

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 21 Desember 2015

Yang menyatakan,

Desy Tri Puspasari

NIM. 120210101128

SKRIPSI

r-DYNAMIC VERTEX COLORING **PADA HASIL OPERASI GRAF KHUSUS DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERIPIKIR TINGKAT TINGGI**

Oleh

Desy Tri Puspasari
NIM 120210101128

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.

PERSETUJUAN

***r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana Strata Satu Jurusan Pendidikan MIPA pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa	: Desy Tri Puspasari
NIM	: 120210101128
Jurusan	: Pendidikan MIPA
Fakultas	: Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Angkatan Tahun	: 2012
Daerah Asal	: Jember
Tempat, Tanggal Lahir	: Jember, 26 Desember 1993

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.,	Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.
NIP.19680802 199303 1 004	NIP.19670420 199201 1 001

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.
NIP.19680802 199303 1 004	NIP.19670420 199201 1 001
Dosen Penguji Utama,	Dosen Penguji Anggota,
Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.	Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
NIP.19700307 199512 2 001	NIP. 19760502 200604 2 001

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
NIP. 1954050 1198303 1 005

RINGKASAN

***r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**; Desy Tri Puspasari, 120210101128; 2015: 129 halaman; Jurusan Pendidikan MIPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi mengakibatkan banyak munculnya permasalahan yang kompleks dalam kehidupan sehari-hari. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, diperlukan adanya ilmu pengetahuan yang strategis dan mampu memberikan solusi, salah satunya ialah matematika. Kegiatan pemecahan masalah matematika tidak dapat dipisahkan dari proses berpikir kognitif. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif menjadi enam tingkatan yang dikenal dengan Taksonomi Bloom. Revisi Taksonomi Bloom yang meliputi: mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi dan menciptakan.

Di dalam matematika diskrit, berkembang beberapa pokok bahasan, salah satunya yaitu teori graf.Salah satu pokok bahasan yang menarik untuk dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan (*colouring*). Ada beberapa macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), pewarnaan wilayah (*region colouring*), dan *r-dynamic coloring*. Pewarnaan dapat diaplikasikan dalam berbagai hal, misalnya pada penyelesaian masalah sistem lampu lalu lintas, penentuan frekuensi radio, pengaturan jadwal ujian, penyimpanan bahan kimia, dan manajemen transportasi (Soimah, 2013).

Pewarnaan titik (*vertex colouring*) adalah pemberian warna pada titik-titik graf dimana dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jumlah warna paling sedikit yang digunakan untuk mewarnai titik pada graf G disebut bilangan kromatik yang dilambangkan dengan $\chi(G)$. Pewarnaan titik juga termasuk ke dalam *r-dynamic vertex coloring* yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Pewarnaan titik dinamis dapat diterapkan pada berbagai graf ataupun graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus yaitu graf yang mempunyai

keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Pewarnaan titik dinamis didefinisikan dengan $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ untuk setiap titik v di $V(G)$, dimana $N(v)$ adalah lingkungan v dan $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ untuk setiap titik bagian dari S (Jahanbekam, et al. 2014).

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif, yaitu jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Setiap langkah pada penelitian ini akan dikaitkan dengan 6 tahapan taksonomi Bloom untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi. Penelitian ini bertujuan untuk mencari batas atas bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis dan fungsi pewarnaan titik pada graf yang dioperasikan. Graf yang digunakan adalah graf lingkaran (*cycle*), graf bintang (*star*), graf lengkap (*complete*), dan graf lintasan (*path*). Penelitian ini menghasilkan teorema dan akibat dari teorema sebelumnya mengenai bilangan kromatik dari suatu *r-dynamic vertex coloring*, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** *Misal* $G = (C_n + C_m)$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*
   untuk n *genap*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \begin{cases} 4, \ untuk\ m\ genap \\ 5, \ untuk\ m\ =\ \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k\epsilon N \end{cases}$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = 5, \ untuk\ m\ =\ (mod\ 3),\ m\ ganjil$$

   untuk n *ganjil*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = \ 6,\ untuk\ m = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k\epsilon N$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = \chi_5(G) = 6,\ untuk\ n\ dan\ m\ =\ (mod\ 3),\ m\ ganjil$$

2. **Teorema 4.1.2** *Misal* $G = (S_n + P_m)$*. Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 2$*, bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \quad 4, \ untuk\ n\ m\ genap\ ganjil$$

3. **Teorema 4.1.3** *Misal* $G = (K_n + P_m)$*. Untuk* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 2$*, bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi_r(G) = \begin{cases} n+2, \ 1 \leq r \leq n+1 \\ r+1, \ n+1 < r \leq n+2 \\ n+4, \ r \geq n+3 \end{cases}$$

4. **Teorema 4.1.4** *Misal* $G = (C_n \odot C_m)$*. Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$*, bilangan kromatik pewarnaan dinamis* G *adalah*
untuk n *genap*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \begin{cases} 3, \ untuk\ m\ genap \\ 4, \ untuk\ m \ = \ \frac{4k^3 - 21k^2 + 41k - 9}{3}, k \epsilon N \end{cases}$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = 4, \ untuk\ m \ = \ (mod\ 3), \ m\ ganjil$$

untuk n *ganjil*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \begin{cases} 3, \ untuk\ m\ genap \\ 4, \ untuk\ m \ = \ \frac{4k^3 - 21k^2 + 41k - 9}{3}, k \epsilon N \end{cases}$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = 4, \ untuk\ m \ = \ (mod\ 3), \ m\ ganjil$$

5. **Teorema 4.1.5** *Misal* $G = (P_n \odot S_m)$*. Untuk* $n \geq 2$ *dan* $m \geq 3$*, bilangan kromatik pewarnaan dinamis* G *adalah*

$$\chi_r(G) = \begin{cases} 3, \ 1 \leq r \leq 2 \\ r+1, \ 3 \leq r \leq m+2 \\ m+4, \ r \geq m+3 \end{cases}$$

6. **Teorema 4.1.6** *Misal* $G = (P_n \odot K_m)$. *Untuk* $n \geq 2$ *dan* $m \geq 4$, *bilangan kromatik pewarnaan dinamis* G *adalah*

$$\chi_r(G) = \begin{cases} n+1, & 1 \leq r \leq n \\ r+1, & n < r < n+2 \\ n+3, & r \geq n+2 \end{cases}$$

7. **Akibat 4.1.1** *Misal* $G = (C_n \otimes C_m)$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi(G) = \begin{cases} 2, & n \text{ atau } m \text{ genap} \\ 3, & n \text{ dan } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

8. **Teorema 4.1.7** *Misal* $G = (C_n \otimes C_m)$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*
   untuk n *genap*

$$\chi(G) = 2, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$

   untuk n *ganjil*

$$\chi(G) = 3, \text{ untuk } n \text{ dan } m = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k \epsilon N$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3, \text{ untuk } m = (mod\ 3), m \text{ ganjil}$$

9. **Akibat 4.1.2** *Misal* $G = (K_n \otimes P_m)$. *Untuk* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi(G) = 2$$

10. **Teorema 4.1.8** *Misal* G= $(K_n \otimes P_m)$. *Untuk* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 2$$

11. **Akibat 4.1.3** *Misal* G= $(C_n \square C_m)$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi(G) = \begin{cases} 2, \ untuk\ n\ dan\ m\ genap \\ 3, \ untuk\ n\ atau\ m\ ganjil \end{cases}$$

12. **Teorema 4.1.9** *Misal* $G = (C_n \square C_m)$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*
untuk n *genap*

$$\chi(G) = 2,\ untuk\ m\ genap$$

untuk n *ganjil*

$$\chi(G) = \ 3,\ untuk\ n = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k\epsilon N,\ m\ genap\ atau\ ganjil$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3,\ untuk\ n\ =\ (mod\ 3),\ m\ genap\ atau\ ganjil$$

13. **Akibat 4.1.4** *Misal* $G = (S_n \square P_m)$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi(G) = \ \ 2,\ untuk\ n\ m\ ganjil\ genap$$

14. **Teorema 4.1.10** *Misal* $G = (S_n \square P_m)$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis* G *adalah*

$$\chi(G) = \ \ 2,\ untuk\ n\ m\ ganjil\ genap$$

15. **Akibat 4.1.5** *Misal* $G = (K_n \square P_m)$. *Untuk* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan*

kromatik pewarnaan dinamis G adalah

$$\chi(G) = n$$

16. **Teorema 4.1.11** *Misal $G = (K_n \Box P_m)$. Untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi_r(G) = \begin{cases} n, \ 1 \leq r \leq n-1 \\ 2n, \ r \geq n \end{cases}$$

17. **Teorema 4.1.12** *Misal $G = (C_n[C_m])$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*
untuk n genap

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \begin{cases} 4, \ untuk\ m\ genap \\ 6, \ untuk\ m\ = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k\epsilon N \end{cases}$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = \chi_5(G) = \ \ 6, \ untuk\ m\ = \ (mod\ 3), \ m\ ganjil$$

untuk n ganjil

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = \chi_5(G) = \ 9, \ untuk\ m = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k\epsilon N$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = \chi_5(G) = \chi_r(G) = \ \ 9, \ untuk\ m\ = \ (mod\ 3), \ m\ ganjil$$

18. **Teorema 4.1.13** *Misal $G = (S_n[P_m])$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \ \ 4, \ untuk\ n\ m\ ganjil\ atau\ genap$$

19. **Teorema 4.1.14** *Misal $G = (K_n[P_m])$. Untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, bilangan*

kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah

$$\chi_r = \begin{cases} 2n, \ untuk \ m = 2 \\ 2n, \ 1 \leq r \leq 2n-1, m \geq 3 \end{cases}$$

20. **Teorema 4.1.15** *Misal G* $G = (Amal(C_n, v = 1, m))$. *Untuk* $n \geq 3$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi(G) \begin{cases} 2, \ untuk \ n \ genap \\ 3, \ untuk \ n \ = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k \epsilon N \end{cases}$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3, \ untuk \ n \ = \ (mod \ 3), \ n \ ganjil$$

21. **Teorema 4.1.16** *Misal* $G = (Amal(C_n + P_m, v = 1, r))$. *Untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) \begin{cases} 4, \ untuk \ n \ genap \\ 5, \ untuk \ n = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k \epsilon N \end{cases}$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = 5, \ untuk \ n \ = \ (mod \ 3), \ n \ ganjil$$

22. **Teorema 4.1.17** *Misal* $G = (Amal(K_n + P_m, v = 1, r))$. *Untuk* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi_r(G) = n + 2, \ untuk \ 1 \leq r \leq n+1$$

23. **Teorema 4.1.18** *Misal* $G = (Shack(C_n + P_m, r))$. *Untuk* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) \begin{cases} 4, \ untuk \ n \ genap \\ 5, \ untuk \ n \ = \frac{4k^3-21k^2+41k-9}{3}, k \epsilon N \end{cases}$$

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = 5, \ untuk \ n \ = \ (mod \ 3), \ n \ ganjil$$

24. **Teorema 4.1.19** *Misal* $G = (Shack(P_n + P_m, r))$. *Untuk* $n \geq 2$ *dan* $m \geq 2$,

bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = 4, \ untuk \ n \ genap \ ganjil$$

25. **Teorema 4.1.20** *Misal* $G = (Shack(K_n + P_m, r))$. *Untuk* $n \geq 4$ *dan* $m \geq 2$, *bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi_r(G) = n + 2, \ untuk \ 1 \leq r \leq n + 1$$

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Pendidikan Universitas Jember;
5. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 21 Desember 2015

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman Persembahan iii
HALAMAN MOTTO iv
Halaman Pernyataan v
HALAMAN PERSETUJUAN vii
HALAMAN PENGESAHAN viii
RINGKASAN ix
Kata Pengantar xvii
DAFTAR ISI xix
DAFTAR GAMBAR xxii
DAFTAR TABEL xxiii
DAFTAR LAMBANG xxiv
1 PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Batasan Masalah 5
1.4 Tujuan 5
1.5 Manfaat 6
2 TINJAUAN PUSTAKA 7
2.1 Definisi dan Terminologi Dasar Graf 7
2.2 Pewarnaan Graf 10
2.2.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Colouring*) 10
2.2.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Colouring*) 11
2.2.3 Pewarnaan Wilayah (*Region Colouring*) 12
2.2.4 *r-Dynamic Vertex Coloring* 12
2.3 Fungsi 14
2.4 Graf Khusus dan Operasi Graf 14
2.4.1 Graf Khusus 14
2.4.2 Operasi Graf 16
2.5 Hasil-Hasil Pewarnaan Titik 21

2.6 Aplikasi Pewarnaan Titik 23
2.7 Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi 26
3 METODE PENELITIAN 29
3.1 Jenis Penelitian 29
3.2 Rancangan Penelitian 29
3.3 Observasi 32
3.3.1 Observasi pada graf dengan operasi *Joint* $(C_n + C_m)$ . . . 32
3.3.2 Observasi pada graf dengan operasi *Crown Product* $(C_n \odot C_m)$ 34
4 HASIL DAN PEMBAHASAN 36
4.1 Bilangan Kromatik *r-Dynamic Vertex Coloring* dan Fungsi Pewarnaan Titik 37
4.2 Berpikir Tingkat Tinggi dalam Menentukan *r-Dynamic Vertex Coloring* pada Graf Hasil Operasi 110
4.3 Pembahasan 118
5 KESIMPULAN DAN SARAN 123
5.1 Kesimpulan 123
5.2 Saran 128
DAFTAR PUSTAKA 129

DAFTAR GAMBAR

2.1 Contoh graf secara umum 7
2.2 Graf dengan matriks ketetanggaannya 8
2.3 Contoh dua graf yang saling isomorfis 9
2.4 Contoh pewarnaan titik 11
2.5 Contoh pewarnaan sisi 12
2.6 Contoh pewarnaan wilayah 12
2.7 Contoh *r-Dynamic Vertex Coloring* 13
2.8 Contoh Graf lengkap K_5 dan K_6 15
2.9 Contoh Graf Lingkaran C_3 dan C_6 15
2.10 Contoh Graf Bintang S_5 dan S_6 16
2.11 Contoh Graf Lintasan P_2 dan P_3 16
2.12 Contoh operasi *Joint* pada graf C_3 dan C_5 17
2.13 Contoh operasi *Crown Product* dari $C_6 \odot C_5$ 18
2.14 Contoh operasi *Cartesian Product* pada graf P_2 dan P_3 19
2.15 Contoh operasi *Tensor Product* pada graf P_2 dan P_3 19
2.16 Contoh operasi *Composition* pada graf P_2 dan P_3 20
2.17 Contoh operasi *Amalgamation* titik pada graf lengkap K_4 20
2.18 Contoh operasi *Shackel* pada graf lingkaran C_5 21
2.19 Skema Perempatan Jalan 24
2.20 Representasi Graf 25
2.21 Kondisi Pengaturan Lampu Lalu Lintas 25
2.22 Tahapan Taksonomi Bloom 27

3.1 Rancangan Penelitian 31
3.2 Graf hasil operasi *Joint* $(C_n + C_m)$ 33
3.3 Graf hasil operasi *Crown Product* $(C_n \odot C_m)$ 35

4.1 (a) C_3 dan C_5 (b) $(C_3 + C_5)$ 38
4.2 (a) Pewarnaan titik $(C_4 + C_5)$ dan (b) Pewarnaan titik $(C_3 + C_5)$ 40
4.3 (a) S_3 dan P_2 (b) $(S_3 + P_2)$ 42

4.4 (a) Pewarnaan titik $(S_3 + P_2)$ (b) Pewarnaan titik $(S_4 + P_3)$ . . . 43
4.5 (a) K_4 dan P_2 (b) $(K_4 + P_2)$ 45
4.6 (a) Pewarnaan titik $(K_4 + P_2)$ (b) Pewarnaan titik $(K_5 + P_3)$ . . . 46
4.7 (a) C_6 dan C_5 (b) $(C_6 \odot C_5)$ 48
4.8 (a) Pewarnaan titik $(C_6 \odot C_6)$ (b) Pewarnaan titik $(C_5 \odot C_6)$ . . . 50
4.9 (a) P_2 dan S_4 (b) $(P_2 \odot S_4)$ (c) Pelabelan $(P_2 \odot S_4)$ 53
4.10 (a) Pewarnaan titik $(P_2 \odot S_4)$ (b) Pewarnaan titik $(P_3 \odot S_5)$ . . . 54
4.11 (a) P_2 dan K_4 (b) $(P_2 \odot K_4)$ (c) Pelabelan $(P_2 \odot K_4)$ 57
4.12 (a) Pewarnaan titik $(P_2 \odot K_4)$ (b) Pewarnaan titik $(P_3 \odot K_4)$ . . . 58
4.13 (a) C_3 dan C_4 (b) $(C_3 \otimes C_4)$ (c) Pelabelan $(C_3 \otimes C_4)$ 60
4.14 (a) Pewarnaan titik $(C_4 \otimes C_3)$ (b) Pewarnaan titik $(C_3 \otimes C_3)$ . . . 61
4.15 (a) K_4 dan P_2 (b) $(K_4 \otimes P_2)$ (c) Pelabelan $(K_4 \otimes P_2)$ 64
4.16 (a) Pewarnaan titik $(K_4 \otimes P_2)$ (b) Pewarnaan titik $(K_5 \otimes P_3)$ . . . 65
4.17 (a) C_3 dan C_4 (b) $(C_3 \square C_4)$ (c) Pelabelan $(C_3 \square C_4)$ 69
4.18 (a) Pewarnaan titik $(C_4 \square C_4)$ (b) Pewarnaan titik $(C_3 \square C_4)$ 70
4.19 (a) S_4 dan P_2 (b) $(S_4 \square P_2)$ (b) Pelabelan $(S_4 \square P_2)$ 72
4.20 (a) Pewarnaan titik $(S_4 \square P_2)$ (b) Pewarnaan titik $(S_5 \square P_3)$ 73
4.21 (a) K_4 dan P_2 (b) $(K_4 \square P_2)$ (b) Pelabelan $(K_4 \square P_2)$ 76
4.22 (a) Pewarnaan titik $(K_4 \square P_2)$ (b) Pewarnaan titik $(K_4 \square P_3)$ 77
4.23 (a) C_3 dan C_4 (b) $(C_3[C_4])$ (b) Pelabelan $(C_3[C_4])$ 80
4.24 (a) Pewarnaan titik $(C_3[C_3])$ (b) Pewarnaan titik $(C_4[C_4])$ 81
4.25 (a) S_4 dan P_2 (b) $(S_4[P_2])$ (b) Pelabelan $(S_4[P_2])$ 84
4.26 (a) Pewarnaan titik $(S_4[P_2])$ (b) Pewarnaan titik $(S_5[P_3])$ 86
4.27 (a) K_4 dan P_2 (b) $(K_4[P_2])$ (b) Pelabelan $(K_4[P_2])$ 88
4.28 (a) Pewarnaan titik $(K_4[P_2])$ (b) Pewarnaan titik $(K_5[P_3])$ 89
4.29 (a) C_4 (b) $Amal(C_4, v = 1, r)$ (c) Pewarnaan titik $Amal(C_4, v = 1, r)$ 91
4.30 (a) C_4 dan P_2 (b) $C_4 + P_2$ (c) $(Amal(C_4 + P_2), v = 1, 4)$ 94
4.31 (a) Pewarnaan titik $(Amal(C_4 + P_2), v = 1, 4)$ (b) Pewarnaan titik $Amal(C_5 + P_2, v = 1, 4)$ 95
4.32 (a) K_4 dan P_2 (b) $K_4 + P_2$ (c) $(Amal(K_4 + P_2), v = 1, 4)$ 98

4.33 (a)Pewarnaan titik $(Amal(K_4 + P_2), v = 1, 4)$ (b)Pewarnaan titik $Amal(K_5 + P_2, v = 1, 4)$ 99
4.34 (a) C_4 dan P_2 (b) (C_4+P_2) (c) $Shack(C_4 + P_2, r)$ 101
4.35 (a)Pewarnaan titik $Shack(C_4 + P_2, v = 1, 3)$ (b)Pewarnaan titik $Shack(C_5 + P_2, v = 1, 3)$ 102
4.36 (a) P_2 dan P_3 (b) (P_2 dan P_3) (c) $Shack(P_4 + P_3, v = 3)$ 105
4.37 (a) Pewarnaan titik $Shack(P_2 + P_3, v = 3)$ (b) Pewarnaan titik $Shack(P_3 + P_3, v = 3)$ 106
4.38 (a) K_4 dan P_2 (b) (K_4 dan P_2) (c) $Shack(K_4 + P_2, v = 3)$ 108
4.39 (a) Pewarnaan titik $Shack(K_4 + P_2, v = 3)$ (b) Pewarnaan titik $Shack(K_5 + P_2, v = 3)$ 109

DAFTAR TABEL

2.1 *Vertex Colouring* pada Sebarang Graf Khusus. 21

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V,E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke-n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke-n dari suatu graf
U_n	=	Suku ke-n dari barisan aritmetika
$\|V(G)\|$	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut *order*
$\|E(G)\|$	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (*size*)
$d(v)$	=	Derajat suatu simpul
$G_1 \cong G_2$	=	Dua graf G_1 dan G_2 yang isomorfis
$f : A \to B$	=	Fungsi yang memetakan A ke B
x_i	=	Titik ke-i pada suatu graf G_1
y_j	=	Titik ke-j pada suatu graf G_2
$\chi(G)$	=	Bilangan kromatik pada suatu graf
ϕ	=	Lambang dari sebuah fungsi
Dl_n	=	*Diamond Ladder Graph* dengan order n
$\Im_n$	=	Graf Tribun dengan order n
$B\zeta_n$	=	Graf rantai pentagon dengan order n
SW_n	=	Graf ulat sutra dengan order n
$G \cup H$	=	Operasi *disjoint union* dari graf G dan H
$G + H$	=	Operasi *joint* dari graf G dan H
$G \Box H$	=	Operasi *cartesian product* dari graf G dan H
$G \oplus H$	=	Operasi *symmetric product* dari graf G dan H
$G \otimes H$	=	Operasi *tensor product* dari graf G dan H
$G[H]$	=	Operasi *composition* dari graf G dan H
$Amal(G,v,r)$	=	Operasi *amalgamasi* titik dari graf G sebanyak r
$Shack(G,v,r)$	=	Operasi *shackle* titik dari graf G sebanyak r
$K_2 *_2 C_n$	=	Amalgamasi dua buah simpul yang terhubung dari K_2 dan C_n

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi mengakibatkan banyak munculnya permasalahan yang kompleks dalam kehidupan sehari-hari. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, diperlukan adanya ilmu pengetahuan yang strategis dan mampu memberikan solusi, salah satunya ialah matematika. Konsep dan prinsip matematika banyak digunakan sebagai alat bantu dalam penerapan bidang ilmu lain maupun dalam pengembangan ataupun pemecahan masalah pada matematika itu sendiri. Matematika memberikan suatu kekuatan sebagai alat komunikasi yang logis dan berfungsi sebagai alat untuk memprediksi dan mendeskripsikan. Matematika memiliki karakteristik yang terletak pada kekhususan dalam mengkomunikasikan ide matematika tersebut melalui bahasa numerik. Sifat kekuantifan dari matematika dapat memberikan kemudahan bagi seseorang dalam menyikapi suatu permasalahan. Oleh karena itu, matematika sangat dibutuhkan dan berguna dalam kehidupan sehari-hari seperti dalam bisnis, perdagangan, industri, dan bidang lainnya. Hal itu disebabkan karena matematika selalu memberikan jawaban yang lebih bersifat eksak dalam memecahkan suatu masalah.

Matematika adalah suatu bidang ilmu yang merupakan alat pikir untuk berkomunikasi, alat untuk memecahkan berbagai persoalan praktis yang unsur-unsurnya logika dan intuisi, analisis dan kontruksi, generalitas dan individualitas. Russel (dalam Hamzah 2009:108), mendefinisikan bahwa matematika sebagai suatu studi yang dimulai dari pengkajian bagian-bagian yang sangat dikenal menuju arah yang tidak dikenal. Seseorang akan merasa mudah memecahkan masalah dengan bantuan matematika karena ilmu matematika memberikan kebenaran berdasarkan alasan logis dan sistematis. Menurut Hamzah (2009:109), matematika juga dapat memberikan kemudahan dalam pemecahan suatu masalah karena proses kerja matematika dilalui secara berurut yang meliputi tahap observasi, menebak, menguji hipotesis, mencari analogi, dan akhirnya merumuskan teorema-teorema.

Maka dari itu, kegiatan pemecahan masalah matematika tidak dapat dipisahkan dari proses berpikir kognitif.

Berpikir merupakan suatu kegiatan mental yang dialami seseorang jika mereka dihadapkan pada suatu masalah atau kondisi yang harus diselesaikan permasalahannya. Menurut Murtadho (2013:531), berpikir dihasilkan dari metakognisi yang dimiliki setiap individu. Secara ringkas dapat dinyatakan bahwa metakognisi adalah kesadaran (*awarenes*) seseorang tentang proses pemantauan (*monitoring*) serta menjaga dan mengendalikan (*regulation*) pikiran dan tindakannya sendiri. Oleh karena itu, melalui berpikir manusia akan dapat mengenali masalah, memahami dan memecahkan masalah tersebut. Dalam berpikir, seseorang akan sangat baik jika melakukan atau menyelesaikan apa yang dipikirkannya dengan menggunakan keterampilan berpikir. Keterampilan berpikir tersebut dapat dimulai dari berpikir tingkat rendah hingga berpikir tingkat tinggi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa seseorang yang menggunakan keterampilan berpikir lebih mudah menyelesaikan pekerjaan dibandingkan dengan mereka yang kurang menggunakan keterampilan berpikir.

Keterampilan berpikir termasuk ke dalam ranah kognitif. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif menjadi enam tingkatan yang dikenal dengan Taksonomi Bloom. Beberapa tingkatan dalam ranah kognitif berdasarkan Taksonomi Bloom, yaitu : pengetahuan (*knowledge*), pemahaman (*comprehension*), penerapan (*application*), analisis (*analysis*), sintesis (*synthesis*), dan evaluasi (*evaluation*). Namun, pada tahun 2001, salah seorang murid Bloom yang bernama Lorin Anderson Krathwohl dan para ahli psikologi aliran kognitivisme melakukan revisi dalam ranah kognitif pada Taksonomi Bloom agar sesuai dengan kemajuan zaman. Revisi tersebut dikenal sebagai Revisi Taksonomi Bloom yang meliputi: mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi dan menciptakan. Tingkatan mengingat, memahami, dan menerapkan termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat rendah, sedangkan tiga lainnya yaitu menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan termasuk keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang dapat dikembangkan dalam upaya untuk menumbuhkan keterampilan berpikir tingkat tinggi, salah satunya yaitu Matematika Diskrit. Di dalam matematika diskrit, berkembang beberapa pokok bahasan, salah satunya yaitu teori graf. Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan permasalahannya. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Konigsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu. Salah satu pokok bahasan yang menarik untuk dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan (*colouring*). Ada beberapa macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), pewarnaan wilayah (*region colouring*), dan *r-dynamic coloring.* Pewarnaan dapat diaplikasikan dalam berbagai hal, misalnya pada penyelesaian masalah sistem lampu lalu lintas, penentuan frekuensi radio, pengaturan jadwal ujian, penyimpanan bahan kimia, dan manajemen transportasi (Soimah, 2013).

Pewarnaan titik (*vertex colouring*) adalah pemberian warna pada titik-titik graf dimana dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jumlah warna paling sedikit yang digunakan untuk mewarnai titik pada graf G disebut bilangan kromatik yang dilambangkan dengan $\chi(G)$. Terdapat topik baru yang masih dalam ruang lingkup pewarnaan titik yaitu *r-dynamic vertex coloring* atau yang biasa disebut pewarnaan titik dinamis. Pewarnaan titik juga termasuk ke dalam *r-dynamic vertex coloring* yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Pewarnaan titik dinamis dapat diterapkan pada berbagai graf ataupun graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus yaitu graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan simetris. Sedangkan operasi graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf atau lebih.

Lai dan Montgomery (2002) telah melakukan penelitian terkait *r-dynamic vertex coloring* pada graf *Particular*. Sedangkan, pada tahun 2013, Lu telah melakukan pewarnaan titik pada graf bipartit dimana setiap 3-graf bipartit terhubung memiliki bilangan kromatik $\chi(G) = 2$. Pada tahun yang sama, Ardiyansyah juga menentukan bilangan kromatik graf hasil amalgamasi dua buah graf yang menghasilkan $\chi(K_2 *_2 C_n) = m$. Pada tahun 2014, Kaiser telah melakukan pewarnaan titik pada graf pesawat (*Plane Graph*), dan Alfian telah melakukan kajian pewarnaan titik pada graf hasil operasi graf lingkaran (*Cycle*), bintang (*Star*), dan lintasan (*Path*). Hasil penelitian terkait *r-dynamic vertex coloring* yang paling terbaru yaitu dikaji oleh Mohanapriya et al. (2015) yang menentukan pew arnaan dinamis pada graf 4-*Regular with Girth-3*, kemudian peneliti yang bernama Wulandari et al. juga menentukan *r-dynamic vertex coloring* pada beberapa operasi graf roda (*Wheel*), lingkaran (*Cycle*), dan lintasan (*Path*).

Dalam penelitian ini akan dikembangkan beberapa graf hasil operasi dari dua buah graf khusus yang akan ditentukan bilangan kromatik dari *r-dynamic vertex coloring* pada setiap graf hasil operasi. Adapun macam - macam operasi graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu operasi *Joint* $(G + H)$, *Crown Product* $(G \odot H)$, *Tensor Product* $(G \otimes H)$, *Cartesian Product* $(G\square H)$, *Composition* $(G[F])$, *Amalgamation* $(Amal(G, v = 1, r))$, dan *Shackel* $(Shack(G, v = 1, r))$. Peneliti juga akan mengkaitkan setiap langkah pada penelitian ini dengan tahapan-tahapan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Dalam penelitian ini, graf khusus yang digunakan yaitu graf lingkaran C_n, graf bintang S_n, graf lengkap K_n, dan graf lintasan P_n. Hasil operasi dari beberapa graf ditentukan bilangan kromatik *r-Dynamic Vertex Coloring* dan fungsi pewarnaan titiknya.

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, penelitian ini berjudul **"*r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini antara lain:

1. bagaimana kardinalitas elemen dan proses pengembangan graf hasil operasi *Joint* $[(C_n + C_m),\ (S_n + P_m),\ dan\ (K_n + P_m)]$, *Crown Product* $[(C_n \odot C_m),\ (P_n \odot S_m),\ dan\ (P_n \odot K_m)]$, *Tensor Product* $[(C_n \otimes C_m),\ dan\ (K_n \otimes P_m)]$, *Cartesian Product* $[(C_n\square C_m),\ (S_n\square P_m),\ dan\ (K_n\square P_m)]$, *Compo-*

sition $[(C_n[C_m]),\ (S_n[P_m])\ dan\ (K_n[P_m])]$, *Amalgamation* $[Amal(C_n, v = 1, r),\ (C_n + P_m, v = 1, r)\ dan\ (K_n + P_m, v = 1, r)]$, dan *Shackel* $[Shack(C_n + P_m, v = 1, r), (P_n + P_m, v = 1, r),\ dan\ Shack(K_n + P_m, v = 1, r)]$?

2. bagaimana bilangan kromatik *r-dynamic vertex coloring* dan fungsi pewarnaan titik dari graf hasil operasi *Joint* $[(C_n+C_m),\ (S_n+P_m),\ dan\ (K_n+P_m)]$, *Crown Product* $[(C_n \odot C_m),\ (P_n \odot S_m),\ dan\ (P_n \odot K_m)]$, *Tensor Product* $[(C_n \otimes C_m),\ dan\ (K_n \otimes P_m)]$, *Cartesian Product* $[(C_n \square C_m),\ (S_n \square P_m)\ dan\ (K_n \square P_m)]$, *Composition* $[(C_n[C_m]),\ (S_n[P_m])\ dan\ (K_n[P_m])]$, *Amalgamation* $[Amal(C_n, v = 1, r),\ (C_n + P_m, v = 1, r)\ dan\ (K_n + P_m, v = 1, r)]$, dan *Shackel* $[Shack(C_n + P_m, v = 1, r), (P_n + P_m, v = 1, r),\ dan\ Shack(K_n + P_m, v = 1, r)]$?

3. bagaimana kaitan antara *r-dynamic vertex coloring* pada graf hasil operasi dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada :

1. graf sederhana, tidak berarah dan terhubung;

2. graf yang dioperasikan adalah graf lingkaran (C_n), graf bintang (S_n), graf lengkap (K_n), dan graf lintasan (P_n) ;

3. operasi graf yang digunakan adalah *Joint* $(G+H)$, *Crown Product* $(G \odot H)$, *Tensor Product* $(G \otimes H)$, *Cartesian Product* $(G \square H)$, *Composition*, *Amalgamation* (G, v, r), dan *Shackel* (G, v, r).

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan tugas akhir ini antara lain:

1. menentukan kardinalitas elemen dan proses pengembangan graf hasil operasi *Joint* $[(C_n + C_m),\ (S_n + P_m),\ dan\ (K_n + P_m)]$, *Crown Product* $[(C_n \odot C_m),\ (P_n \odot S_m),\ dan\ (P_n \odot K_m)]$, *Tensor Product* $[(C_n \otimes C_m),\ dan\ (K_n \otimes$

$P_m)]$, *Cartesian Product* $[(C_n \square C_m),\ (S_n \square P_m),\ dan\ (K_n \square P_m)]$, *Composition* $[(C_n[C_m]),\ (S_n[P_m])\ dan\ (K_n[P_m])]$, *Amalgamation* $[Amal(C_n, v = 1, r),\ (C_n + P_m, v = 1, r)\ dan\ (K_n + P_m, v = 1, r)]$, dan *Shackel* $[Shack(C_n + P_m, v = 1, r), (P_n + P_m, v = 1, r),\ dan\ Shack(K_n + P_m, v = 1, r)]$;

2. menentukan bilangan kromatik *r-dynamic vertex coloring* dan fungsi pewarnaan titik dari graf hasil operasi *Joint* $[(C_n + C_m),\ (S_n + P_m),\ dan\ (K_n + P_m)]$, *Crown Product* $[(C_n \odot C_m),\ (P_n \odot S_m),\ dan\ (P_n \odot K_m)]$, *Tensor Product* $[(C_n \otimes C_m),\ dan\ (K_n \otimes P_m)]$, *Cartesian Product* $[(C_n \square C_m),\ (S_n \square P_m)\ dan\ (K_n \square P_m)]$, *Composition* $[(C_n[C_m]),\ (S_n[P_m])\ dan\ (K_n[P_m])]$, *Amalgamation* $[Amal(C_n, v = 1, r),\ (C_n + P_m, v = 1, r)\ dan\ (K_n + P_m, v = 1, r)]$, dan *Shackel* $[Shack(C_n + P_m, r), (P_n + P_m),\ dan\ Shack(K_n + P_m)]$;

3. mengetahui kaitan antara *r-dynamic vertex coloring* pada graf hasil operasi dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penulisan tugas akhir ini antara lain:

1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup *r-dynamic vertex coloring* pada graf hasil operasi;

2. memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih lanjut tentang *r-dynamic coloring*;

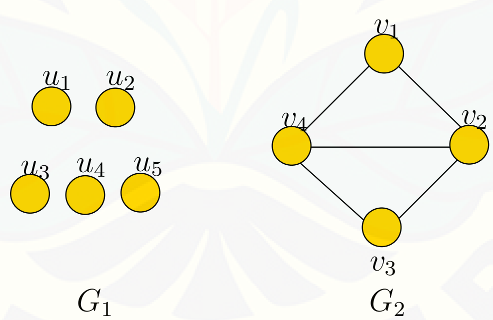
3. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah *r-dynamic coloring*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Dasar Graf

Graf adalah himpunan titik berhingga dimana titik dinyatakan dengan simpul dan sisi dinyatakan dengan garis. Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. Suatu graf G terdiri dari himpunan simpul/ vertex/ titik/ node yang dapat dilambangkan dengan $V = V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ yang berhingga dan tidak kosong dan himpunan sisi/ garis/ edge yang dapat dilambangkan dengan $E = E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ yang berhingga dan boleh kosong serta setiap sisi menghubungkan dua simpul. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu (Slamin, 2009).

Himpunan dari titik dan sisi dari suatu graf $G = (V, E)$ didefinisikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Graf yang tidak mempunyai sisi dinamakan graf kosong (*null graph*). Perhatikan gambar 2.1, G_1 mempresentasikan contoh graf kosong dengan 5 titik yang dinotasikan dengan N_5 dan G_2 mempresentasikan contoh graf secara umum.

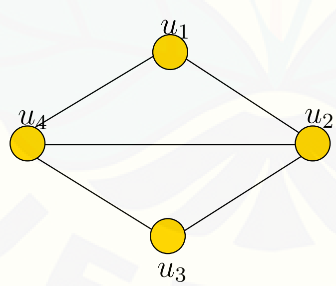


Gambar 2.1 Contoh graf secara umum

Banyaknya simpul dalam graf disebut dengan ordo dan dinyatakan dengan $|V|$. Sedangkan banyaknya sisi dalam graf disebut ukuran (*size*) yang dinotasikan dengan $|E|$. Misalkan v adalah suatu simpul dalam graf G, maka derajat suatu simpul yang dinyatakan dengan $d(v)$ yaitu banyaknya sisi yang terhubung oleh simpul tersebut. Jika v mempunyai derajat 0 artinya tidak mempunyai tetangga dengan titik yang lain, maka titik v disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat yang sama, maka dikatakan graf reguler d.

Suatu graf dikatakan graf terhubung (*connected graph*), jika dan hanya jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat *path* dari v_i ke v_j. Jika tidak, maka graf G dikatakan graf tidak terhubung (*disconnected graph*). Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tanpa sisi) tetap dikatakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri (Chartrand 2012).

Dua simpul dikatakan berdekatan (*adjacent*) jika terdapat sisi yang menghubungkan langsung kedua simpul tersebut. Setiap sisi merupakan dua himpunan bagian dari himpunan simpul. Misal u dan v adalah titik pada sebuah graf G. Titik u pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada v, jika terdapat sisi e diantara u dan v ditulis $e = uv$. Matriks ketetanggaan (*adjacent matrix*) graf G adalah matrik yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika titik i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika titik i dan j tidak bertetangga. Gambar 2.2 memperlihatkan graf yang memiliki 4 titik dengan matriks ketetanggaannya.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

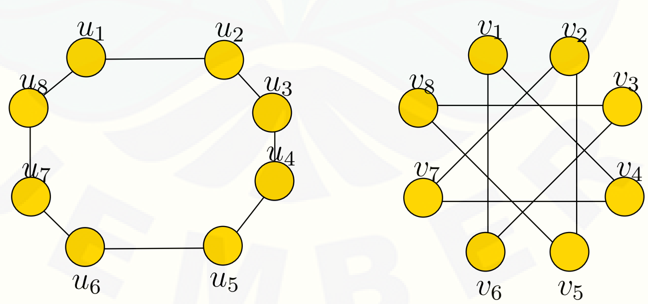
Gambar 2.2 Graf dengan matriks ketetanggaannya

Dua buah graf dikatakan isomorfis jika mereka mempunyai struktur yang sama dan kebanyakan, mereka berbeda cara pemberian label titik-titik dan sisi-

sisinya, atau cara menggambarnya. Untuk memperjelas maksud kalimat tersebut, kita akan mendefinisikan dua graf G_1 dan G_2 isomorfis jika ada suatu fungsi $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$ sedemikian hingga $uv\epsilon(G_i) \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v)\epsilon E(G_2)$. Fungsi ϕ dinamakan sebuah fungsi isomorfis. Jika dua graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka dituliskan $G_1 \cong G_2$. Sampai saat ini untuk menentukan apakah dua graf G_1 dan G_2 isomorfis atau tidak belum ada teori yang dapat dipakai. Tetapi, jika graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka kedua graf tersebut selalu memenuhi 4 syarat sebagai berikut:

1. jumlah titik G_1= jumlah titik G_2 (jumlah titik yang sama);
2. jumlah sisi G_1= jumlah sisi G_2 (jumlah sisi yang sama);
3. setiap titik yang bersesuaian pada graf G_1 dan G_2 mempunyai derajat yang sama;
4. graf G_1 dan G_2 mempunyai *girth* (panjang siklus terpendek) yang sama.

Keempat syarat tersebut belum cukup menjamin bahwa kedua graf isomorfis. Untuk menunjukkan bahwa kedua graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut sama. Selain itu, untuk menunjukkan bahwa G_1 isomorfis G_2, perlu ditemukan korespondensi satu-satu simpul dan sisi kedua graf (Manongga Danny, Nataliani Yessica, 2013:155). Gambar 2.9 memperlihatkan graf yang saling isomorfis.



Gambar 2.3 Contoh dua graf yang saling isomorfis

2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf terdiri dari beberapa macam, diantaranya yaitu: pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), pewarnaan wilayah (*region colouring*), dan *r-dynamic vertex coloring*. Beberapa pewarnaan pada graf akan dijelaskan sebagai berikut :

2.2.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Colouring*)

Pewarnaan titik merupakan pemberian warna pada tiap titik atau simpul sedemikian hingga setiap dua titik atau simpul yang bersisian mempunyai warna yang berbeda. Graf G berwarna n jika terdapat sebuah pewarnaan dari G yang menggunakan n warna. Warna yang digunakan dalam pewarnaan titik tidak hanya sekadarnya, tetapi yang harus diperhatikan bahwa dalam mewarnai titik, warna yang digunakan harus seminimal mungkin.

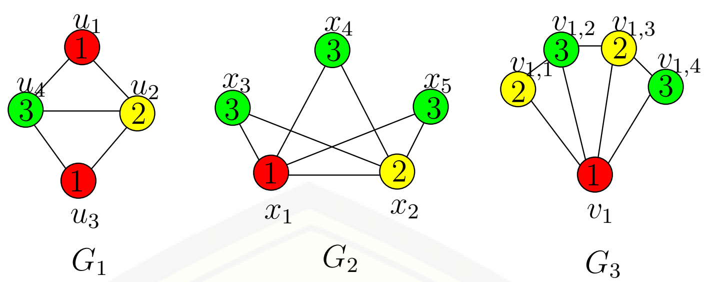
Jumlah warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan titik disebut sebagai bilangan kromatik dari graf G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan 1, 2, 3,..., k. Jelas bahwa $\chi(G) \leq V(G)$. Beberapa graf dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya, yaitu:

1. Graf kosong memiliki $\chi(G) = 1$ karena semua titik tidak terhubung;
2. Graf lengkap dengan n titik memiliki $\chi(G) = n$, karena semua titik terhubung sehingga diperlukan n buah warna;
3. Graf bipartit mempunyai $\chi(G) = 2$, satu untuk titik di himpunan V_1 dan satu untuk himpunan V_2;
4. Graf lingkaran dengan n ganjil memiliki $\chi(G) = 3$, graf lingkaran dengan n genap memiliki $\chi(G) = 2$.

   (Manongga Danny, Nataliani Yessica, 2013:183)

Gambar 2.4 menunjukkan contoh pewarnaan titik pada beberapa graf G. Graf pada gambar G_1 dengan $|V(G_1)| = 4$, maka $\chi\ (G_1) = 3$. Untuk G_2, karena

$|V(G_2) = 5$, maka χ $(G_2) = 3$. Sedangkan untuk graf G_3, $|V(G_3)| = 5$, maka χ $(G_2) = 3$.



Gambar 2.4 Contoh pewarnaan titik

Menentukan bilangan kromatik sembarang graf tidaklah mudah. Jika suatu graf mempunyai n simpul, maka bilangan kromatiknya tidak bisa lebih besar dari n. Jika diketahui derajat setiap simpul dari suatu graf, maka lebih mudah ditentukan seperti yang disebutkan pada teorema 2.2.1

Teorema 2.2.1. (Vizing 1964). *Jika G adalah graph sederhana, maka bilangan kromatik pewarnaan titiknya $\chi(G)$ berada pada interval ini*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

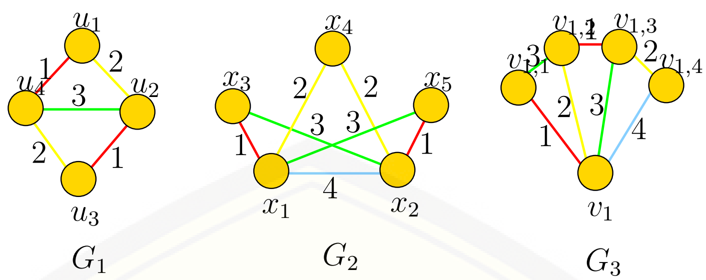
Namun, jika sebuah graf G diketahui jumlah titik dan sisinya, maka bilangan kromatik dapat ditentukan seperti pada teorema 2.2.2

Teorema 2.2.2. (Osserman 1969). *Jika G adalah sebuah graf khusus dengan p titik dan q sisi dan G mempunyai bilangan kromatik χ maka hubungannya*

$$(\chi - 1)p \leq 2q$$

2.2.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Colouring*)

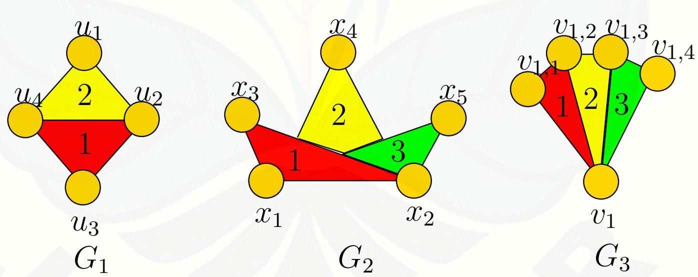
Konsep pewarnaan sisi hampir sama dengan pewarnaan titik, pewarnaan sisi merupakan pemberian warna pada tiap sisi sedemikian hingga setiap dua sisi yang berhubungan tidak mempunyai warna yang sama. Suatu pewarnaan sisi-k untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jumlah warna yang diperlukan dalam pewarnaan sisi lebih besar atau sama dengan derajat maksimal titik dari graf tersebut. Lihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Contoh pewarnaan sisi

2.2.3 Pewarnaan Wilayah (*Region Colouring*)

Hampir sama dengan pewarnaan titik, pewarnaan wilayah merupakan pemberian warna pada tiap wilayah sedemikian hingga setiap dua wilayah yang berdekatan tidak memiliki warna yang sama. Konsep dasar dari algoritma pewarnaan wilayah, pewarnaan dilakukan dengan mengubah wilayah tersebut sehingga membentuk graf planar, yaitu dengan mengasumsikan suatu area wilayah menjadi satu titik terlebih dahulu. Penerapan dari pewarnaan wilayah ini dapat digunakan untuk mewarnai peta. Lihat pada gambar 2.6.

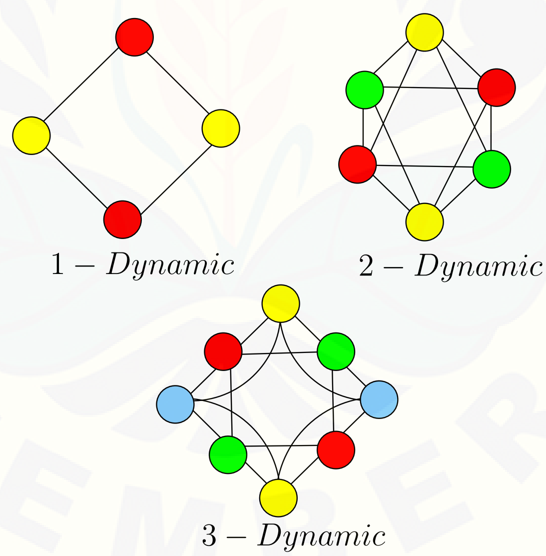


Gambar 2.6 Contoh pewarnaan wilayah

2.2.4 *r-Dynamic Vertex Coloring*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf yang sederhana, terhubung, dan tidak berarah dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, serta $d(v)$ adalah derajat dari setiap titik v di $V(G)$. Derajat maksimum dan minimum dari graf G masing-masing dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan $\delta(G)$. Dengan k warna pada graf G, kita memetakan $c : V(G) \Rightarrow S$, dimana $|S| = k$ sehingga setiap dua simpul yang berdekatan memiliki warna yang berbeda. Sebuah r-dinamis dengan k warna pada graf G sehingga $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ untuk setiap titik v di $V(G)$, dimana $N(v)$ adalah lingkungan v dan $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ untuk setiap titik bagian dari S (Jahanbekam, et al. 2014). Bilangan kromatik r-dinamis, dituliskan dengan $\chi_r(G)$ adalah nilai minimum k sehingga graf G memiliki r-dinamis dengan k-warna.

Lai dan Montgomery (2012) menyatakan sebuah k-pewarnaan titik dikatakan pewarnaan titik dinamis jika untuk setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$. Titik yang saling bertetangga mempunyai dua warna yang berbeda. Jumlah warna r-*dynamic* dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum k pada graf G. Jumlah berwarna 1- *Dynamic* pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *Chromatic Number* dan dinotasikan $\chi_{(}G)$ dan untuk jumlah *Dynamic* ≥ 2 pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *r-Dynamic Chromatic Number*. Pewarnaan titik dinamis ditunjukkan pada gambar 2.7.



Gambar 2.7 Contoh *r-Dynamic Vertex Coloring*

2.3 Fungsi

Fungsi seringkali dikenal sebagai pemetaan. Fungsi "f" dari himpunan A ke himpunan B, ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota B. Himpunan A yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam f, disebut *domain* f dan dapat dinyatakan sebagai D_f. Himpunan B yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam f, disebut *range* f dan dinyatakan sebagai R_f. Notasi : $f : A \rightarrow B$ menunjukkan bahwa f merupakan fungsi dari A ke B, yang sering juga dibaca "f adalah pemetaan dari A ke B", atau "f memetakan A ke B". Jika (a, b) anggota dari f, maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$.

2.4 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Graf khusus dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis, diantaranya: graf lengkap (*complete*), graf lingkaran (*cycle*), graf lintasan (*path*), graf bintang (*star*), dan masih banyak lainnya. Berikut ini akan dijelaskan mengenai beberapa graf tersebut.

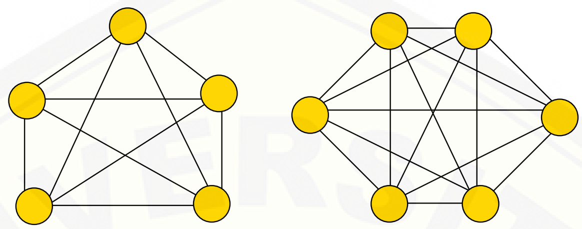
2.4.1 Graf Khusus

1. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n dan jumlah sisi pada graf lengkap adalah $n(n-1)/2$ sisi. Contoh dari graf lengkap ditunjukkan pada gambar 2.8.

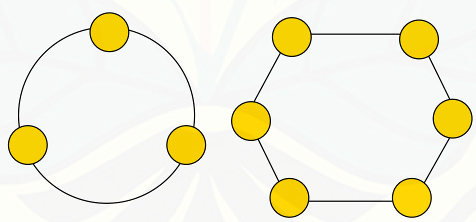
2. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

   Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n. Contoh dari graf lingkaran ditunjukkan pada gambar 2.9.



K_5 K_6

Gambar 2.8 Contoh Graf lengkap K_5 dan K_6

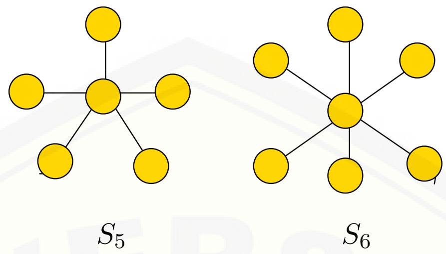


C_3 C_6

Gambar 2.9 Contoh Graf Lingkaran C_3 dan C_6

3. Graf Bintang (*Star Graph*)

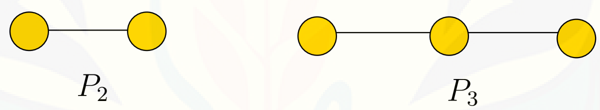
   Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $n-1$ sisi dengan $n \geqslant 3$. Sebagai ilustrasi perhatikan graf S_5 dan S_6 pada gambar 2.10.



Gambar 2.10 Contoh Graf Bintang S_5 dan S_6

4. Graf Lintasan (*Path Graph*)

   Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dilambangkan P_n dengan $n \geq 2$. Contoh graf lintasan P_2 dan P_3 ditunjukkan pada gambar 2.11.

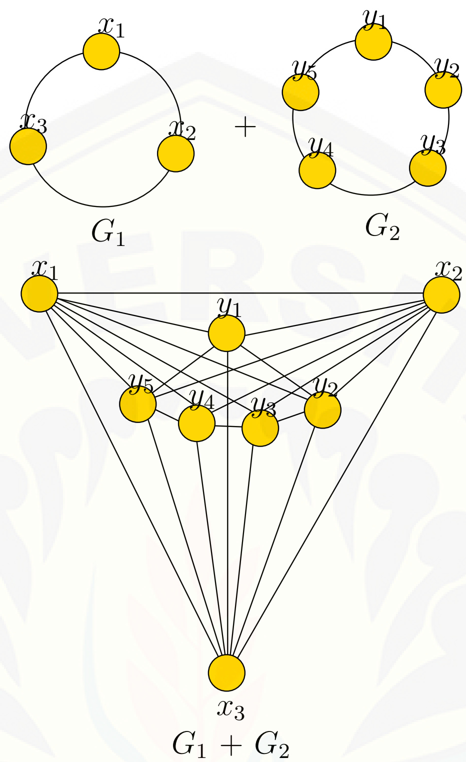


Gambar 2.11 Contoh Graf Lintasan P_2 dan P_3

2.4.2 Operasi Graf

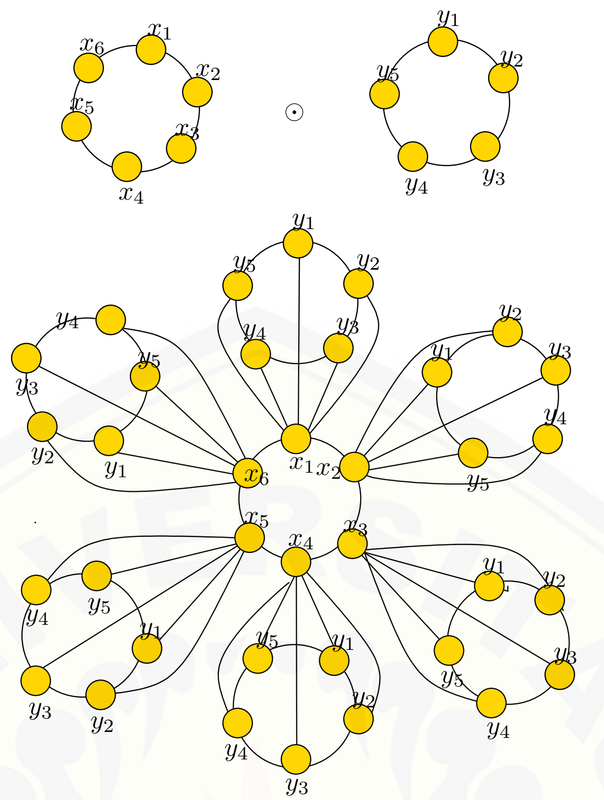
Operasi graf adalah banyaknya cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua buah graf atau lebih. Ada beberapa macam operasi graf, yaitu : *Joint* $(G+H)$, *Cartesian Product* $(G\square H)$, *Tensor Product* $(G\otimes H)$, *Composition* $(G[F])$, *Shackel*, *Amalgamation*, dan *Crown Product* $(G\odot H)$. Berikut beberapa macam operasi pada graf khusus beserta contohnya.

Definisi 2.4.1. *Graph Joint* $(G_1 + G_2)$. *Joint dari graf* G_1 *dan* G_2, *dinotasikan dengan* $G = G_1 + G_2$, *adalah graf* G *dimana* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup xy|x \in V(G_1), v \in V(G_2)$ *(Harsya, et.al. 2014). Contoh dari operasi joint dapat dilihat pada gambar 2.12.*



Gambar 2.12 Contoh operasi *Joint* pada graf C_3 dan C_5

Definisi 2.4.2. *Crown Product* $G \odot H$ *dari dua graf* G *dan* H *didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf* G *dan* $|V(G)|$ *duplikat* $H_1, H_2, ..., H_{|V(G)|}$ *dari* H, *kemudian menghubungkan titik ke-i dari* G *ke setiap titik di* H_i, i = *1,2,3,...* , $V(G)$ *(Harsya, et.al. 2014). Contoh operasi Crown Product ditunjukkan pada gambar 2.13.*

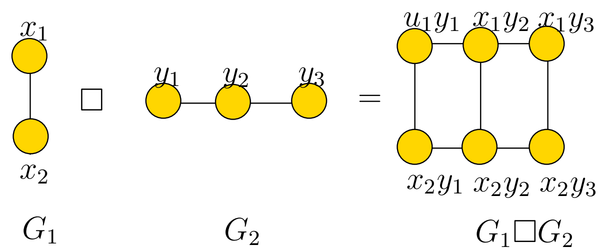


Gambar 2.13 Contoh operasi *Crown Product* dari $C_6 \odot C_5$

Definisi 2.4.3. *Cartesian Product dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *adalah graf* $G(V, E)$*, ditulis* $G = G_1 \square G_2$*, jika* $V = V_1 \times V_2$*, dan dua titik* $\langle x_1, x_2 \rangle$ *dan* $\langle v_1, v_2 \rangle$ *di* G *bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku:* $x_1 = y_1$ *dan* $(x_2, y_2) \in E_2$ *atau* $x_2 = y_2$ *dan* $(x_1, y_1) \in E_1$ *(Harsya, et.al. 2014). Gambar 2.14 merupakan contoh dari operasi Cartesian Product*

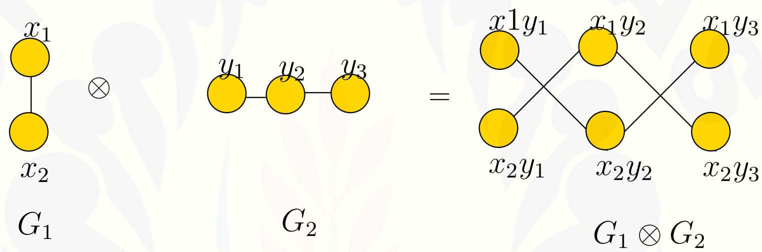
Telah dilakukan penelitian sebelumnya mengenai *Cartesian Product* oleh Sabidussi pada tahun 1954 yang mengasilkan sebuah teorema sebagai berikut:

Teorema 2.4.1. *Misal* G_1 *dan* G_2 *adalah dua buah graf sederhana, Cartesian Product dari* G_1 *dan* G_2 *yang dinotasikan dengan* $G = G_1 \square G_2$*, maka bilangan kromatik* $\chi(G) = max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.



Gambar 2.14 Contoh operasi *Cartesian Product* pada graf P_2 dan P_3

Definisi 2.4.4. *Tensor product dari dua graf* G_1 *dan* G_2 *adalah penggabungan dari dua graf* G_1 *dan* G_2 *yang dinotasikan oleh* $G_1 \otimes G_2$ *mempunyai himpunan titik* $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ *dan himpunan sisi* $E(G_1 \otimes G_2) = (x_1, y_2)(x_2, y_2)|x_1 x_2 \in E(G_1) dan y_1y_2 \in E(G_2)$ *(Endrayana, 2013). Contoh operasi* $Tensor\ Product$ *ditunjukkan pada gambar 2.15.*



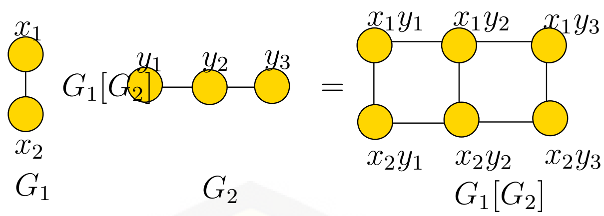
Gambar 2.15 Contoh operasi *Tensor Product* pada graf P_2 dan P_3

Telah dilakukan penelitian sebelumnya mengenai *Tensor Product* oleh Hedetniemi pada tahun 1996 yang mengasilkan sebuah teorema sebagai berikut:

Teorema 2.4.2. *Misal* G_1 *dan* G_2 *adalah dua buah graf sederhana, Tensor Product dari* G_1 *dan* G_2 *yang dinotasikan dengan* $G = G_1 \otimes G_2$*, maka bilangan kromatik* $\chi(G) = min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

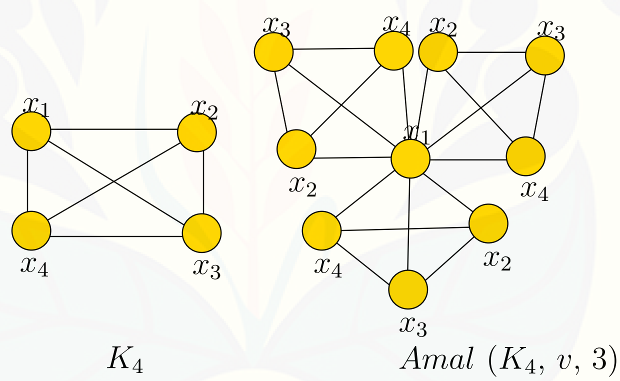
Definisi 2.4.5. *Composition dinotasikan dengan* $G = G_1[G_2]$, G_1 *dan* G_2 *dengan disjoint himpunan titik* V_1 *dan* V_2 *dan himpunan sisi* E_1 *dan* E_2 *adalah graf dengan titik* $V_1 \times V_2$ *dan* $x = (x_1, x_2)$ *yang adjacent dengan* $y = (y_1, y_2)$ *ketika* $[x_1$

adj y_1] *atau* [$x_1 = y_1$ *dan* x_2 *adj* y_2] *(Harrary, 1994). Contoh operasi Composition pada graf* P_2 *dan* P_3 *dapat dilihat pada gambar 2.16.*



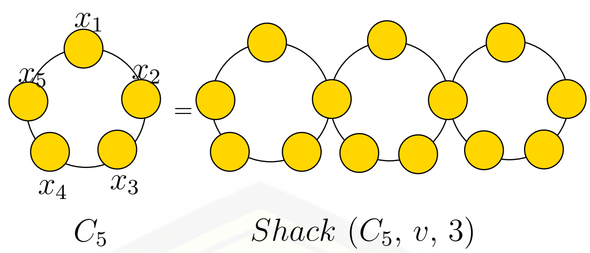
Gambar 2.16 Contoh operasi *Composition* pada graf P_2 dan P_3

Definisi 2.4.6. *Amalgamation titik dinotasikan dengan Amal* (G, v, r) *dimana* G *adalah suatu keluarga graf berhingga, setiap* G *mempunyai suatu titik* v *yang disebut titik terminal, dan* r *menyatakan banyaknya graf* G *yang akan di-amalgamation (Ardiyansah, 2013). Contoh operasi amalgamation dapat dilihat pada gambar 2.17.*



Gambar 2.17 Contoh operasi *Amalgamation* titik pada graf lengkap K_4

Definisi 2.4.7. *Graph Shackel dari* $G_1, G_2, ..., G_k$ *dinotasikan dengan* $Shack(G_1, G_2, ..., G_k)$ *merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf* $(G_1, G_2, ..., G_k)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $1 \leq i, j \leq k$ *dengan* $|i-j| \geq 2$, G_i *dan* G_j *tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap* $1 \leq i \leq k-1$, G_i *dan* $G_i + 1$ *tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana* $k-1$ *linkage titik* *semua berbeda (Harsya, et.al. 2014). Contoh operasi Shackle dapat dilihat pada gambar 2.18*

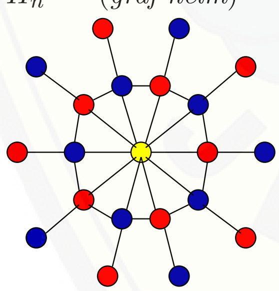


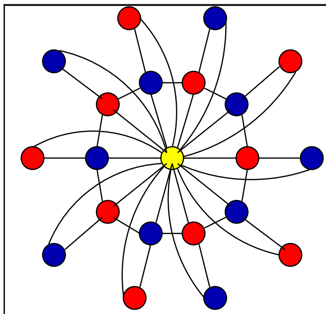
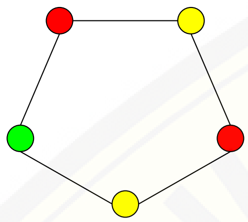
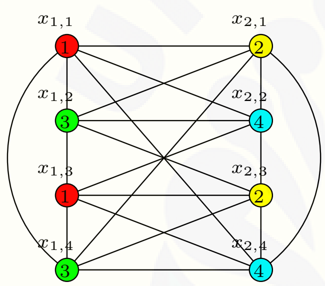
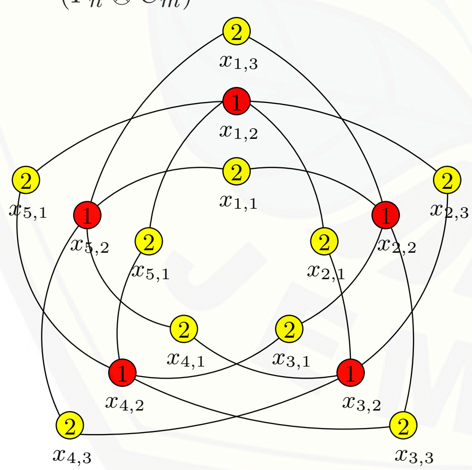
Gambar 2.18 Contoh operasi *Shackel* pada graf lingkaran C_5

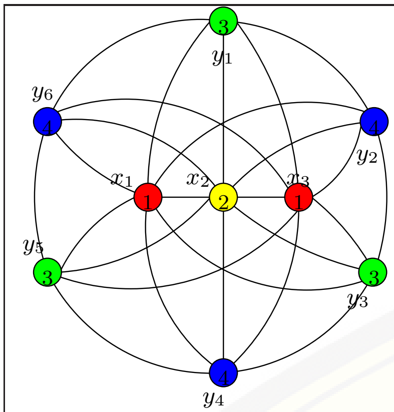
2.5 Hasil-Hasil Pewarnaan Titik

Pada bagian ini disajikan beberapa graf hasil pewarnaan titik yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian pewarnaan titik terdahulu. Tabel 2.1 memperlihatkan beberapa hasil pewarnaan titik pada suatu graf.

Tabel 2.1: *Vertex Colouring* pada Sebarang Graf Khusus.

Graf	$\chi(G)$	Keterangan
(*graf Particular*)	2	Lai and Montgomery. 2002
(*graf Regular*)	$\chi_2 - \chi(G) \leq 2$	Alishasi. 2012
H_n (*graf helm*) 	3	Ghofur, Ahmad. 2008
F_n (*graf bunga*)	3	Ghofur, Ahmad. 2008

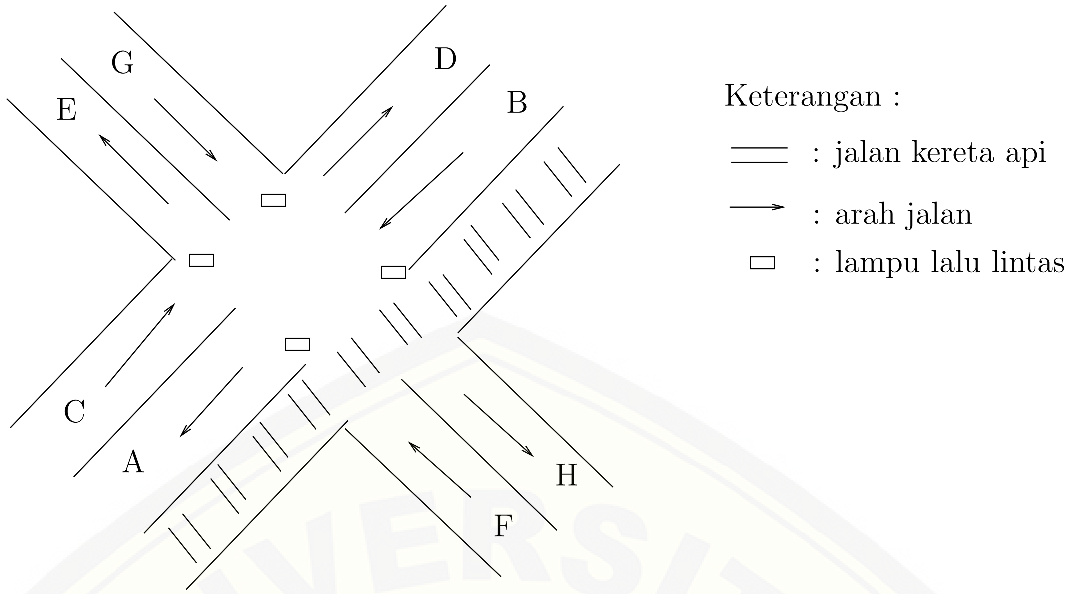
Graf	$\chi(G)$	Keterangan
		
C_n (*graf Cycle*(C_5)) 	3	Sesa, J. 2014
(*Pn[Cm]*) 	4	Utama, Alfian. 2014
$(P_n \otimes C_m)$ 	2	Utama, Alfian. 2014
(*Pn + Cm*)	3	Utama, Alfian. 2014

Graf	$\chi(G)$	Keterangan
		
$(W_n \otimes P_m)$	$\chi_2 = 3$	Wulandari. 2015

2.6 Aplikasi Pewarnaan Titik

Graf digunakan untuk mendeskripsikan permasalahan-permasalahan dan menggambarkannya secara jelas. Graf juga digunakan untuk mempermudah menyelesaikan berbagai macam persoalan yang sulit dipecahkan dengan perhitungan dan pertimbangan biasa. Inti dari pengaplikasian graf adalah bagaimana cara membaca permasalahan, kemudian mendefinisikan apa yang menjadi objek diskrit yang kemudian akan menjadi titik-titik dari graf yang akan dibangun untuk menggambarkan permasalahan yang akan diselesaikan. Apabila telah didapatkan titik-titik, maka akan mudah untuk membangun graf dengan memberi sisi pada titik-titik yang saling berhubungan. Teori graf dapat diterapkan di berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya aplikasi pewarnaan graf dalam pengaturan warna lampu lalu lintas di perempatan jalan sehingga mencegah terjadinya tabrakan di perempatan jalan tersebut.

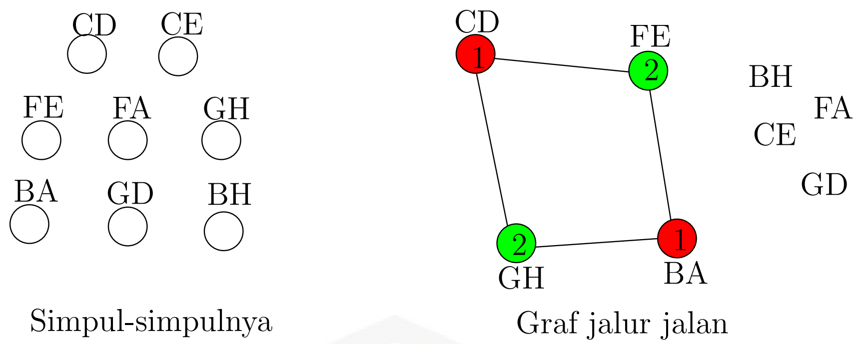
Gambar 2.19 menunjukkan sebuah perempatan jalan yang mempunyai 4 buah lampu lalu lintas. Lampu lalu lintas pada jalan C dan B menyala secara bersamaan, begitu juga dengan lampu lalu lintas pada jalan F dan G menyala bersamaan. Apabila lampu lalu lintas pada jalan C dan B menyala hijau, maka jalur yang boleh digunakan adalah dari C ke D dan B ke A. Selain itu jalur



Gambar 2.19 Skema Perempatan Jalan

langsung belok kiri diperbolehkan. Hal yang sama juga terkait dengan lampu lalu lintas pada jalan F dan G. Dalam penelitian ini, kita harus menentukan jalur mana yang bisa berjalan dengan memberi lampu hijau di tempat tertentu dan memberi lampu merah pada jalan lain untuk berhenti agar tidak terjadi tabrakan.

Untuk menyelesaikan permasalahan dalam pengaturan lampu lintas tersebut, dapat menggunakan konsep pewarnaan titik pada teori graf. Diketahui bahwa jalur yang bisa digunakan untuk melintas adalah dari C ke D, B ke A, F ke E, G ke H, G ke D, C ke E, F ke A, dan B ke H. Setelah mengetahui jalur mana saja yang bisa dilewati, berikut langkah-langkah untuk mengatur pewarnaan lampu lalu lintas menggunakan konsep pewarnaan titik yaitu, menentukan titik atau simpul-simpul sebagai tanda jalan yang bisa dilewati, menghubungkan simpul-simpul tersebut dengan sebuah garis sebagai tanda jalan yang dilewati tidak saling bertabrakan, memberi warna pada simpul-simpul tersebut dengan aturan warna yang digunakan harus sedikit mungkin, warna yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama, sedangkan yang tidak saling terhubung boleh diwarnai dengan warna yang sama. Langkah untuk menentukan simpul-simpul sebagai jalur yang bisa dilewati dan representasi grafnya dapat dilihat pada gambar 2.20.



Gambar 2.20 Representasi Graf

Dari hasil pengelompokan di atas, di dapat 2 kondisi yang berbeda pada pewarnaan lampu lintas di perempatan jalan. Kondisi pertama didapat bahwa saat lampu lalu lintas pada jalan BE dan FA berwarna merah, maka lampu lalu lintas pada jalur FE, GH, FA, GD, CE, dan BH bewarna hijau atau dapat berjalan. Dan pada saat lampu lalu lintas pada jalur GH dan FE berwarna merah, maka lampu lalu lintas pada jalur CD, BA, FA, GD, CE, dan BH akan berwarna hijau dan dapat berjalan secara bergantian. Dengan menerapkan hasil penelitian di atas, maka lampu lalu lintas kendaraan pada perempatan jalan tersebut tidak akan bertabrakan (Desy, et al.,2014). Gambar 2.21 menunjukkan 2 kondisi pada pewarnaan lampu lalu lintas.

Kondisi lampu lalu lintas 1

Lampu merah	BE, FA
Lampu hijau	FE, GH, GD, CE, BH

Kondisi lampu lalu lintas 2

Lampu hijau	GH, FE
Lampu merah	BE, FA, GD, CE, BH

Gambar 2.21 Kondisi Pengaturan Lampu Lalu Lintas

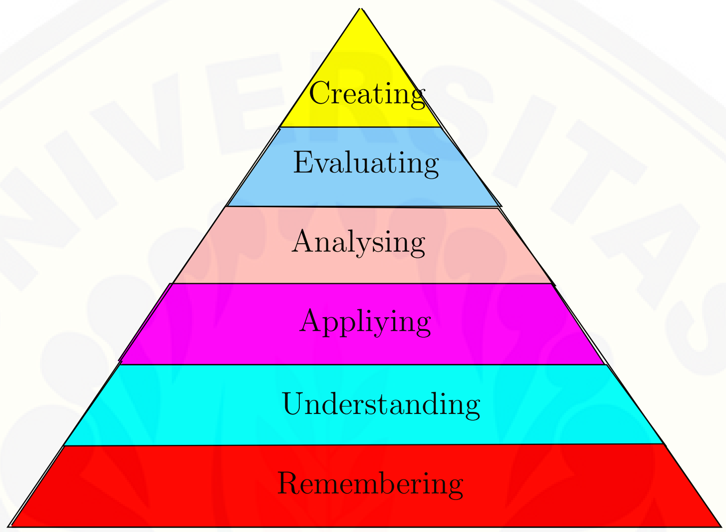
2.7 Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi

Confisius seorang filusuf dari China (dalam Ulfa dan Eddy) mengemukakan suatu prinsip yang menarik dalam dunia pendidikan mengenai 3 slogan seorang siswa dalam menerima suatu pelajaran yaitu, What I hear, I forget, What I see, I remember, dan What I do, I understand. Hal ini menunjukkan bahwasannya ketika kita belajar dan mempraktekkan "do" maka kita akan mengerti tentang apa yang kita pelajari. Hal itu dikarenakan kita terlibat dalam berbagai proses berfikir. Keterlibatan dalam berbagai proses berfikir berarti harus menguasai keterampilan berpikir dari tingkat rendah (Lower Order Thinking Skill - LOTS) sampai keterampilan berpikir tingkat tinggi (Higher Order Thinking Skill - HOTS). LOTS adalah keterampilan berpikir yang hanya menuntut seseorang untuk mengingat, memahami, dan mengaplikasikan sesuatu rumus atau hukum(A. Thomas, G. Thorne dalam Ulfa dan Eddy). Sedangkan HOTS adalah keterampilan yang lebih dari sekedar mengingat, memahami dan mengaplikasikan.

Berpikir adalah aktifitas mencurahkan daya pikir untuk maksud tertentu. Berpikir adalah identitas yang memisahkan status kemanusiaan manusia dengan lainnya. Karenanya sejauhmana manusia pantas disebut manusia dapat dibedakan dengan sejauhmana pula manusia tersebut menggunakan pikirannya. Menurut Santrock (2008), berpikir melibatkan kegiatan memanipulasi dan mentrasnformasi informasi dalam memori. Kita berpikir untuk membentuk konsep, menalar, berpikir secara kritis membuat keputusan, berpikir secara kreatif dan memecahkan masalah. Berpikir tingkat tinggi (Higher Order Thinking Skill) termasuk juga berpikir kritis, berpikir logika, refleksi, metakognisi, dan berpikir kreatif. Berpikir tingkat tinggi ini berkaitan dengan taksonomi bloom yang dimulai dari tahapan menganalisis, evaluasi dan menciptakan.

Taksonomi Bloom mengklasifikasikan kemampuan berpikir menjadi enam kategori, dari yang sederhana (pengetahuan) sampai komplek, diantaranya meliputi: pengetahuan, pemahaman, aplikasi, analisis, sintesis, dan evaluasi. Kemudian perkembangan selanjutnya Anderson L, and Krathwohl, D. (2001) dan para ahli psikologi aliran kognitivisme merevisi level takonomi ini menjadi *remembering*, *understanding*, *applying*, *analyzing*, *evaluating*, dan *creating*. Hasil revisi dari

Anderson and Krathwohl inilah yang kemudian dengan mudah diterima oleh banyak saintisi dan praktisi sehingga keberadaannnya selalu menjadi rujukan dari perkembangan teori pembelajaran. Dalam perkembangannya tiga tingkatan dalam Taksonomi Bloom, yaitu : *remembering*, *understanding*, dan *applying* dikategorikan ke dalam *recalling and processing* yaitu *Lower Order Thinking Skill*(LOTS), sedangkan tiga lainnya, yaitu : *analyzing*, *evaluating*, dan *creating* dikategorikan ke dalam *creative thinking* yaitu *Higher Order Thinking Skill* (HOTS) (Dafik, 2015). Tahapan dalam Taksonomi Bloom disajikan pada gambar 2.22.



Gambar 2.22 Tahapan Taksonomi Bloom

Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja kunci dari ranah kognitif yang telah direvisi: (Utari, R :10)

1. Mengingat adalah kemampuan menyebutkan kembali informasi/ pengetahuan yang tersimpan di dalam ingatan. Kata kerja kuncinya: mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, menemukan kembali, menyatakan, mengulang, mengurutkan, menamai, menempatkan, dan menyebutkan.

2. Memahami adalah kemampuan memahami instruksi dan menegaskan pengertian/ makna ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk

lisan, tertulis maupun grafik/ diagram. Kata kerja kuncinya: menerangkan, menjelaskan, menterjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, mengubah, dan memperkirakan.

3. Menerapkan adalah kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kata kerja kuncinya: memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, dan mempraktekkan.

4. Menganalisis adalah kemampuan memisahkan konsep kedalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata kerja kuncinya: mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan, menunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisihkan menjadi beberapa bagian, mengorganisir, dan mengkerangkakan.

5. Mengevaluasi adalah kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja kuncinya: menilai, mengevaluasi, menjustifikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, dan menyeleksi.

6. Mengkreasi adalah kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinil. Kata kerja kuncinya: merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengmbangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, dan menghasilkan karya.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif, yaitu jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif menggunakan prinsip- prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada terkait dengan bilangan kromatik pada pewarnaan titik. Setiap langkah pada penelitian ini akan dikaitkan dengan 6 tahapan taksonomi Bloom untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi. Tahapan-tahapan dalam taksonomi Bloom yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisa, mengevaluasi, dan menciptakan.

Langkah pertama dalam penelitian ini adalah mengembangkan graf hasil operasi dari dua buah graf khusus, selanjutnya menentukan kardinalitas dari hasil pengembangan graf khusus tersebut. Sebelum melakukan pewarnaan titik, peneliti menentukan batas atas bilangan kromatik yang akan diterapkan pada pewarnaan titik. Langkah selanjutnya yaitu melabeli atau melakukan pewarnaan titik pada graf hasil operasi dan menentukan bilangan kromatik *r-dynamic vertex coloring* serta fungsi pewarnaan titiknya. Langkah terakhir dari proses penelitian ini adalah menganalisa kaitan antara *r-dynamic vertex coloring* dengan 6 tahapan dalam taksonomi Bloom dalam mencapai $Higher\ Order\ Thinking\ Skill$.

3.2 Rancangan Penelitian

Adapun teknik dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
2. menerapkan operasi pada graf - graf khusus yang telah ditentukan;

3. menentukan kardinalitas graf-graf khusus yang telah dioperasikan;

4. menerapkan pewarnaan titik pada graf - graf khusus yang telah dioperasikan;

5. memeriksa keoptimalan bilangan kromatik, apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan titik pada graf;

6. menentukan *r-Dynamic Vertex Coloring* dari pewarnaan setiap titik;

7. menentukan fungsi berdasarkan keteraturan dari bilangan kromatik;

8. fungsi yang telah didapatkan kemudian dibuktikan sehingga menjadi sebuah teorema;

9. menganalisa kaitan dalam setiap langkah penelitian dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking Skill*).

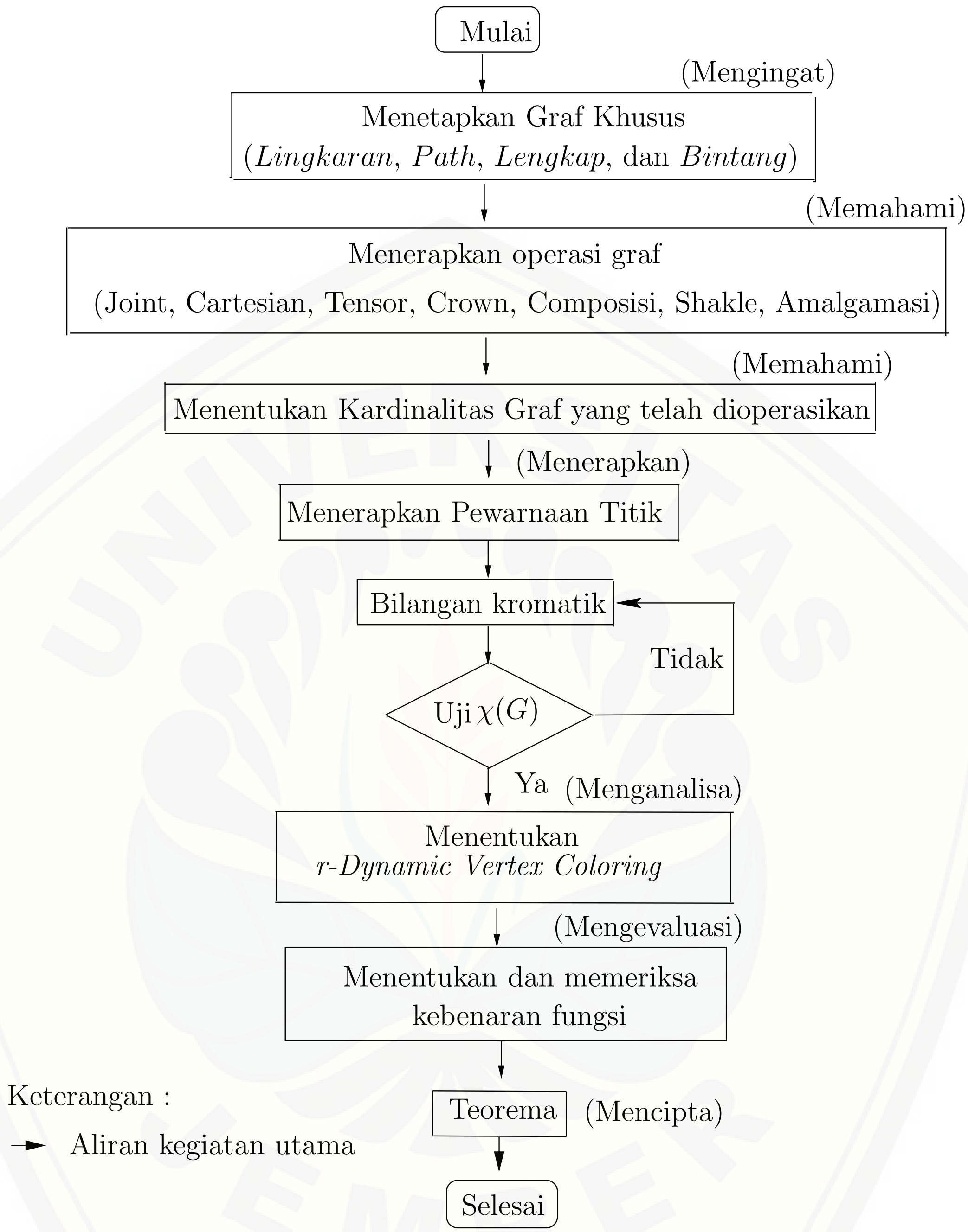
Adapun cara yang digunakan dalam menentukan pewarnaan titik adalah dengan menggunakan *Greedy Algorithm* sebagai berikut:

1. Pilih titik tertentu (lebih baik pilih titik awal sesuai dengan notasi dari titik sebuah graf);

2. Warnai titik tertentu tersebut dengan warna 1 dan dilanjutkan ke titik-titik lainnya sedemikian hingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama;

3. Warnai sisa titik-titik lainnya dengan warna 2 sedemikian hingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama;

4. Lanjutkan dengan teknik yang sama dengan warna lebih besar satu tingkat di atasnya sampai semua titik terwarnai dan warnanya adalah mencapai χ dimana χ adalah warna terbesar yang minimal. Maka χ sebagai bilangan kromatik pewarnaan titik.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

3.3 Observasi

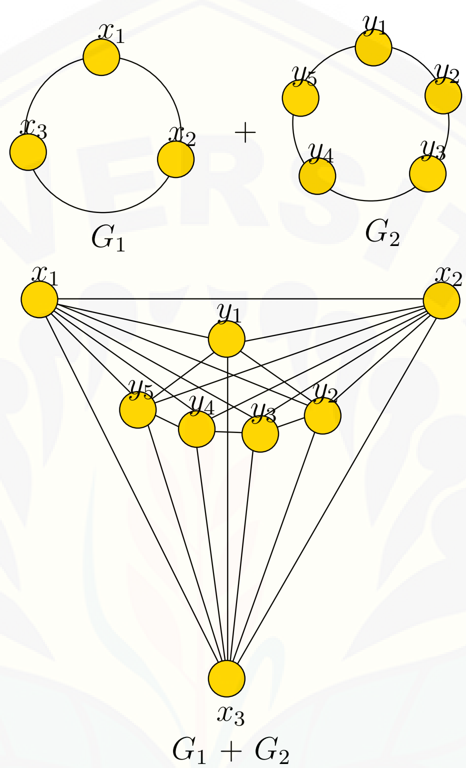
Sebelum penelitian lanjutan pada operasi graf khusus, telah dilakukan observasi awal sebagai pedoman observasi selanjutnya. Namun observasi awal ini dapat berubah. Berikut hasil observasi pengembangan operasi graf *joint* $(C_n + C_m)$ dan *Crown Product* $(C_n \odot C_m)$:

3.3.1 Observasi pada graf dengan operasi *Joint* $(C_n + C_m)$

Misal diketahui graf lingkaran (C_n) dengan $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_i x_i + 1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$ dan graf lingkaran (C_m) dengan $V(C_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{x_i x_i + 1; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_m x_1\}$. Operasi *joint* dari C_n dan C_m yang dinotasikan dengan $C_n + C_m$, $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(C_n + C_m) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $E(C_n + C_m) = \{x_i x_i + 1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j y_j + 1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_m y_1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $|V(C_n + C_m)| = n + m$, dan $|E(C_n + C_m)| = n + nm + m$.

Bukti. Sesuai dengan definisi 2.4.1, dijelaskan bahwa *Graph Joint* (G_1+G_2) *Joint* dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G = G_1+G_2$, adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup xy|x \in V(G_1), v \in V(G_2)$. Dengan demikian didapatkan $V(C_n + C_m) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $E(C_n + C_m) = \{x_i x_i + 1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j y_j + 1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_m y_1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $|V(C_n+C_m)| = n+m$, dan $|E(C_n+C_m)| = n + nm + m$.

Gambar 3.2 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $C_n + C_m$ diawali dengan menggambar graf lingkaran (C_n), kemudian menggambar graf lingkaran (C_m) yang berada di dalam graf lingkaran (C_n). Setelah itu setiap titik pada graf lingkaran (C_n) dihubungkan ke semua titik pada graf lingkaran (C_m). Graf $(C_n + C_m)$ dapat diekspan dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut.



Gambar 3.2 Graf hasil operasi *Joint* $(C_n + C_m)$

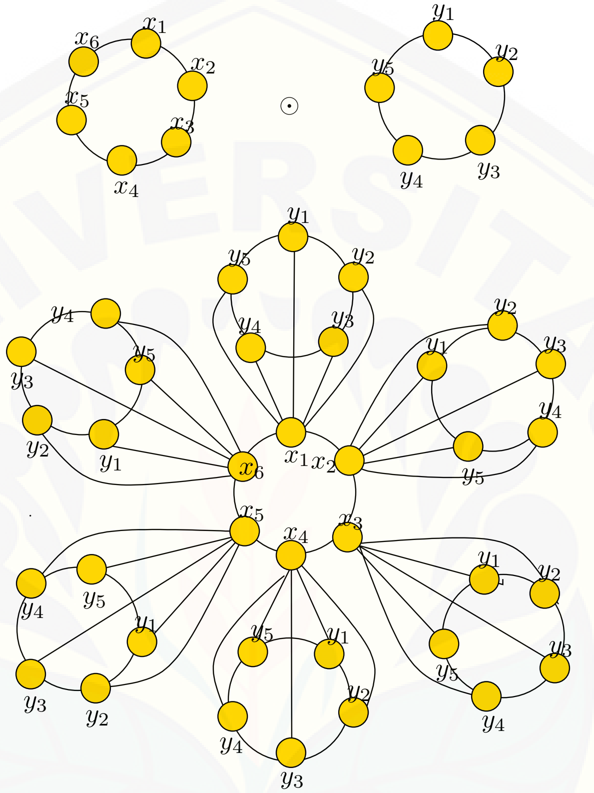
3.3.2 Observasi pada graf dengan operasi *Crown Product* ($C_n \odot C_m$)

Misal diketahui graf lingkaran (C_n) dengan $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_ix_i + 1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nx_1\}$ dan graf lingkaran (C_m) dengan $V(C_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{x_ix_i + 1; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_mx_1\}$. Operasi *Crown Product* dari C_n dan C_m yang dinotasikan dengan $C_n \odot C_m$, $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(C_n \odot C_m) = \{x_i, x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(C_n \odot C_m) = \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nx_1\} \cup \{x_ix_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_mx_1\}$, $|V(C_n \odot C_m)| = n(1+m)$, dan $|E(C_n \odot C_m)| = n(1+2m)$.

Bukti. Sesuai dengan definisi 2.4.2 menjelaskan bahwa *Graph Crown Product* $G \odot H$ dari dua graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, ..., H_{|V(G)|}$ dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i, i = 1,2,3,... ,$V(G)$. Maka graf ($C_n \odot C_m$) dapat diilustrasikan dengan gambar 3.3. Dengan demikian didapatkan $V(C_n \odot C_m) = \{x_i, x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(C_n \odot C_m) = \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nx_1\} \cup \{x_ix_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_mx_1\}$, $|V(C_n \odot C_m)| = n + nm$, dan $|E(C_n \odot C_m)| = n + 2mn$.

Gambar 3.3 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf ($C_n \odot C_m$) diawali dengan menggambar graf lingkaran (C_n), kemudian menggambar graf lingkaran (C_m) sebanyak titik pada graf lingkaran (C_n). Kemudian setiap titik ke-i pada graf lingkaran (C_n) dihubungkan ke setiap titik pada duplikat ke-j dari graf lingkaran (C_m).

Adapun observasi dan pembahasan lebih lanjut terkait *r-dynamis vertex coloring* pada graf hasil operasi *Joint* $[(C_n + C_m),\ (S_n + P_m),\ dan\ (K_n + P_m)]$, *Crown Product* $[(C_n \odot C_m),\ (P_n \odot S_m),\ dan\ (P_n \odot K_m)]$, *Tensor Product* $[(C_n \otimes C_m),\ dan\ (K_n \otimes P_m)]$, *Cartesian Product* $[(C_n \square C_m),\ (S_n \square P_m),\ dan\ (K_n \square P_m)]$, *Composition* $[(C_n[C_m]), (S_n[P_m])\ dan\ (K_n[P_m])]$, *Amalgamation* $[Amal(C_n, v = 1, r),\ (C_n + P_m, v = 1, r),\ dan\ (K_n + P_m, v = 1, r)]$, dan *Shackel* $[Shack(C_n + P_m, v = 1, r), (P_n + P_m, v = 1, r),\ dan\ Shack(K_n + P_m, v = 1, r)]$ akan disajikan dalam bab selanjutnya.



Gambar 3.3 Graf hasil operasi *Crown Product* $(C_n \odot C_m)$