The Learning University

SERTIFIKAT

3.9.5/UN32.2/TT/2015

Diberikan Kepada

ARNASYITHA YULIANTI SOELISTYA

Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya

dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa

yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

Pelabelan Total Super (a,d) Sisi Antimagic Pada Graf Shackle (F6, B1, n) Untuk Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic

Malang, 5 September 2015

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si

NIP. 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Ery Hidayanto, M.Si

NIP. 196609051992031004

Super (a,d)-edge Antimagic Total Labeling of Shackle (F_6, B_2, n) for Developing a Polyalphabetic Cryptosystem

Arnasyitha Yulianti Soelistya[2], Dafik[1,2], Arif Fatahillah[2]
[1]CGANT - University of Jember
[2]Mathematics Education Department - University of Jember
arnasyithays@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, fatahillah767@gmail.com

Abstract

A graph G of order p and size q is called an (a, d)-edge-antimagic total if there exist a bijection $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, p + q\}$ such that the edge-weights, $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv), uv \in E(G)$, form an arithmetic sequence with first term a and common difference d. Such a graph is called super if the smallest possible labels appear on the vertices. In this paper we study a super edge-antimagic total labeling of Graph Shackle (F_6, B_2, n) and we will use it to develop a polyalphabetic cryptosystem.

Keywords : super edge antimagic total, polyalphabetic cryptosystem, graph shackle (F_6, B_2, n).

Introduction

Perkembangan Ilmu Pengetahuan dan Teknologi semakin menakjubkan. Seolah - olah tidak dapat dikendalikan oleh manusia, mengingat begitu cepat kemajuannya. Aplikasi dari ilmu pengetahuan yang mengembangkan teknologi pun semakin berkembang. Salah satunya adalah matematika yang merupakan dasar dari semua ilmu pengetahuan. Banyak permasalahan dan kegiatan dalam hidup kita yang harus diselesaikan dengan menggunakan ilmu matematika seperti menghitung, mengukur, dan lain-lain.

Matematika sebagai ilmu ratu dari ilmu pengetahuan yang mendasari pengembangan ilmu-ilmu lainnya, mempunyai peranan penting terhadap segala aspek kehidupan manusia, tak terkecuali dalam perkembangan kemajuan teknologi. Salah satu cabang matematika yang menarik untuk ditulis lebih lanjut adalah matematika diskrit, dalam pokok bahasan tentang pelabelan graf. Salah satu jenis tipe pelabelan graf adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic (SEATL). Dalam penelitian ini akan diinvestigasi pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada Graf Shackle (F_6, B_2, n) konektif. Graf Shackle (F_6, B_2, n) merupakan famili dari graf kipas yang di shackle dengan graf buku sebanyak n dimana $n \geq 1$ dan n ganjil. Hasil-hasil penelitian terkait ini dapat ditemukan di [4, 5, 6, 7].

Pelabelan total super(a, d)-sisi *antimagic* (SEATL) adalah salah satu pengembangan kriptosistem. Kriptosistem merupakan suatu teknik di dalam menjaga keamanan data dan informasi supaya tidak dapat diketahui dan dibaca oleh pihak yang tidak berwenang [3] [8] [9] [10]. Hal ini lebih dikenal dengan nama proses enkripsi. Data atau pesan yang asli sering disebut sebagai *plaintext* dan data yang telah dienkripsi disebut sebagai *chipertext*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui pelabelan total super(a, d)-sisi *antimagic* pada graf Shackle (F_6, B_2, n) dan penerapan dalam mengembangkan kriptosistem *polyal–phabetic.*

Useful Lemma

Sebuah graf memiliki pelabelan (a, d)-sisi *antimagic* jika terdapat sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, ..., p\}$ disebut pelabelan titik (a, d)-sisi *antimagic* jika himpunan bobot $W(uv) = f(u) + f(v)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, ..., a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d = 0$ keduanya adalah bilangan bulat. Sedangkan pelabelan total super(a, d)-sisi *antimagic* (SEATL) adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, ..., p+q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(t)(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d = 0$ keduanya bilangan bulat [1] [12].

Dalam bagian ini disajikan sebuah teorema penting terkait dengan pelabelan graf pada total super (a, d)-sisi antimagic untuk graf Shackle (F_6, B_2, n). Teorema tersebut yaitu kardinalitas graf Shackle (F_6, B_2, n) dengan jumlah n selalu ganjil. Teorema ini memberikan ide bagaimana penelitian ini dikembangkan.

Graf Shackle $(F_{1,6}; C_4^1; n)$ adalah sebuah graf yang memiliki bentuk menarik yang dikembangkan dari graf kipas. Ide munculnya graf Shackle (F_6, B_2, n) ini berasal dari pengembangan graf kipas yang saling digabungkan serta dihubungkan dengan graf B_2 sebanyak n, sehingga satu graf kipas saling terhubung dengan graf kipas yang lain. Dari pengembangan tersebut maka terbentuklah Graf Shackle (F_6, B_2, n). Graf Shackle (F_6, B_2, n) memiliki himpunan *vertex*, $V = \{x_i, y_j, z_i; 1 \le i \le n; 1 \le j \le n + 2\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \le i \le n\} \cup \{y_i y_{i+1}, x_i y_i, x_i y_{i+1}, y_i z_i, y_{i+1} z_i; 1 \le i \le n + 1\}$.

Dalam [2] batas atas nilai beda d pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dapat ditentukan dengan membuktikan lemma berikut ini:

Lemma 1 *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic maka $d \le \frac{2p+q-5}{q-1}$.*

Proof. Misalkan dalam suatu graf terdapat himpunan titik $\alpha(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan himpunan label sisi $\alpha(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, ..., p + q\}$. Graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi *antimagic* dengan pemetaan $\alpha : V(G) \bigcup E(G) \longrightarrow$

$\{1, 2, 3..., p + q\}$ dengan p adalah jumlah titik dan q jumlah sisi. Bobot total dari pelabelan graf tersebut diperoleh dengan menjumlahkan 2 titik yang bersisian dengan labelnya, misalkan himpunan bobot tersebut kita tuliskan $W = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$. Maka nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil adalah penjumlahan dua titik terkecil dengan label sisi terkecil dan dapat dituliskan : $\alpha(x) + \alpha(xy) + \alpha(y) = 1 + (p + 1) + 2 = p + 4$.

Karena a adalah bobot sisi terkecil dan $p+4$ adalah nilai minimum bobot sisi terkecil maka $a = p + 4$, akan tetapi jika dua titik yang bersisian yang dijumlahkan bukan 1 dan 2 maka terdapat kemungkinan jika $a > p+4$, sehingga dapat ditulis :$p + 4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar diperoleh dari jumlah 2 label titik terbesar dan label sisi terbesar atau dapat ditulis $(p - 1) + (p + q) + p = 3p + q - 1$.

Akibatnya:

$$\begin{aligned} a + (q-1)d &\leq 3p + q - 1 \\ d &\leq \frac{3p + q - 1 - (p + 4)}{q - 1} \\ d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \end{aligned}$$

Dari Lemma 1, telah terbukti dan diperoleh nilai $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ dari berbagai jenis atau famili graf.

The Result

Hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait dengan pelabelan graf terhadap total super (a, d)-sisi antimagic graf Shackle (F_6, B_2, n) untuk $n > 4$ dan n ganjil. Seperti yang telah dibahas sebelumnya bahwa penelitian ini dikembangkan dari graf kipas yang saling digabungkan serta dihubungkan dengan graf B_2 sebanyak n.

Jika Shackle (F_6, B_2, n) memiliki pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic untuk $p = 3n + 4$ and $q = 6n + 5$, berdasarkan lemma 1 batas atas nilai d adalah $d \leq 2$ atau $d \in \{0, 1, 2\}$. Lemma 2 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antimagic pada $6n + 5$

Lemma 2 *Ada pelabelan titik* $(3, 1)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* (F_6, B_2, n) *jika* $n > 1$ *dan* n *ganjil.*

Bukti. Labeli titik graf Shackle (F_6, B_2, n) dengan fungsi bijektif α_1 yang didefinisikan sebagai pelabelan $\alpha_1 : V(F_6, B_2, n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 3n+4\}$ maka pelabelan α_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x_i) &= \begin{cases} 3n+3i-16, & \text{untuk i ganjil} \\ 3n+3i-15, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\
\alpha_1(y_i) &= 3n+3i-17 \\
\alpha_1(z_j) &= \begin{cases} 3n+3i-15, & \text{untuk i ganjil} \\ 3n+3i-16, & \text{untuk i genap} \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika w_{α_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik α_1, maka rumusan dari w_{α_1} untuk sebarang i, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w^1_{\alpha_1}(x_i x_{i+1}) &= 6i+2 \\
w^2_{\alpha_1}(y_i y_{i+1}) &= 6i-1 \\
w^3_{\alpha_1}(x_i y_i) &= 6i-3, \quad \text{untuk i ganjil} \\
w^4_{\alpha_1}(x_i y_i) &= 6i-2, \quad \text{untuk i genap} \\
w^5_{\alpha_1}(x_i y_{i+1}) &= 6i, \quad \text{untuk i ganjil} \\
w^6_{\alpha_1}(x_i y_{i+1}) &= 6i+1, \quad \text{untuk i genap} \\
w^7_{\alpha_1}(y_i z_i) &= 6i-2, \quad \text{untuk i ganjil} \\
w^8_{\alpha_1}(y_i z_i) &= 6i-3, \quad \text{untuk i genap} \\
w^9_{\alpha_1}(y_{i+1} z_i) &= 6i+1, \quad \text{untuk i ganjil} \\
w^{10}_{\alpha_1}(y_{i+1} z_i) &= 6i, \quad \text{untuk i genap}
\end{aligned}$$

Rumusan tersebut membentuk himpunan $\bigcup_{r=1}^{10} w^r_{\alpha_1} = \{3, 4, 5, \ldots, 6n+5\}$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa α_1 adalah suatu pelabelan titik $(3, 1)$. □

◇ **Teorema 1** *Ada pelabelan total super* $(9n + 12, 0)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* (F_6, B_2, n) *untuk* $n \geq 1$ *dan* n *ganjil.*

Proof. Gunakan pelabelan titik α_1 untuk melabeli titik graf Shackle (F_6, B_2, n), kemudian definisikan label sisi $\alpha_2 : E(F_6, B_2, n) \rightarrow \{3n+5, 3n+6, \ldots, 6n+5\}$, sehingga label sisi α_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n) dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_2(x_i x_i + 1) &= 9n - 6i + 10 \\
\alpha_2(y_i y_i + 1) &= 9n - 6i + 13 \\
\alpha_2(x_i y_i) &= \begin{cases} 6i-3, & \text{untuk i ganjil} \\ 6i-2, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\
\alpha_2(x_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 6i, & \text{untuk i ganjil} \\ 6i+1, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\
\alpha_2(y_i z_i) &= \begin{cases} 6i-2, & \text{untuk i ganjil} \\ 6i-3, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\
\alpha_2(y_{i+1} z_i) &= \begin{cases} 6i+1, & \text{untuk i ganjil} \\ 6i, & \text{untuk i genap} \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika w_{α_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf Shackle (F_6, B_2, n) berdasarkan penjumlahan bobot sisi dengan label sisinya maka w_{α_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot sisi EAVL w_{α_1} dan rumus label sisi α_2, sehingga dapat dituliskan sebagai: $\bigcup_{r=1}^{10} w_{\alpha_2}^r = \{9n+12,\ 9n+12,\ \ldots,\ 9n+12\}$. Dapat disimpulkan bahwa graf Shackle (F_6, B_2, n) dengan $n \geq 1$ dan n ganjil, mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = 9n+12$ dan $d = 0$, dengan kata lain graf Shackle (F_6, B_2, n) mempunyai Pelabelan Total Super $(9n + 12, 0)$-sisi antimagic. $\square$

$\diamond$ **Teorema 2** *Ada pelabelan total super* $(6n - 10, 2)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* (F_6, B_2, n) *untuk* $n \geq 1$ *dan* n *ganjil.*

Proof. Gunakan pelabelan titik α_1 untuk melabeli titik graf Shackle $(F_6, B_2, 5)$, kemudian definisikan label sisi $\alpha_3 : E(F_6, B_2, 5) \to \{3n + 5, 3n + 6, \ldots, 6n + 5\}$, sehingga label sisi α_3 untuk pelabelan total super $(a, 2)$-sisi antimagic pada graf Shackle $(F_6, B_2, 5)$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_3(x_i x_i + 1) &= 6n + 6i - 11 \\
\alpha_3(y_i y_i + 1) &= 6n + 6i - 14 \\
\alpha_3(x_i y_i) &= \begin{cases} 6n + 6i - 16, & \text{untuk i ganjil} \\ 6n + 6i - 15, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\
\alpha_3(x_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 6n + 6i - 13, & \text{untuk i ganjil} \\ 6n + 6i - 12, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\
\alpha_3(y_i z_i) &= \begin{cases} 6n + 6i - 15, & \text{untuk i ganjil} \\ 6n + 6i - 16, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\
\alpha_3(y_{i+1} z_i) &= \begin{cases} 6n + 6i - 12, & \text{untuk i ganjil} \\ 6n + 6i - 13, & \text{untuk i genap} \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika w_{α_3} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total berdasarkan pelabelan α_3 maka w_{α_3} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL dan rumus label sisi α_3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha_3}^1(x_i x_{i+1}) &= 6n + 12i - 9 \\
w_{\alpha_3}^2(y_i y_{i+1}) &= 6n + 12i - 15 \\
w_{\alpha_3}^3(x_i y_i) &= 6n + 12i - 19, \quad \text{untuk i ganjil} \\
w_{\alpha_3}^4(x_i y_i) &= 6n + 12i - 17, \quad \text{untuk i genap} \\
w_{\alpha_3}^5(x_i y_{i+1}) &= 6n + 12i - 13, \quad \text{untuk i ganjil} \\
w_{\alpha_3}^6(x_i y_{i+1}) &= 6n + 12i - 11, \quad \text{untuk i genap} \\
w_{\alpha_3}^7(y_i z_i) &= 6n + 12i - 17, \quad \text{untuk i ganjil} \\
w_{\alpha_3}^8(y_i z_i) &= 6n + 12i - 19, \quad \text{untuk i genap}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{9}_{\alpha_3}(y_{i+1}z_i) &= 6n+12i-11, \quad \text{untuk i ganjil} \\ w^{10}_{\alpha_3}(y_{i+1}z_i) &= 6n+12i-13, \quad \text{untuk i genap} \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi $w_{\alpha_3} = \{w^1_{\alpha_3}, w^2_{\alpha_3}, w^3_{\alpha_3}, \ldots, w^{10}_{\alpha_3}\}$, dapat diperhatikan bahwa bobot sisi terkecil terdefinisikan oleh $w^3_{\alpha_3}$ untuk $i = 1$, bobot sisi terkecil kedua selanjutnya terdefinisi oleh $w^7_{\alpha_3}$ untuk $i = 1$, dan seterusnya sehingga diperoleh rangkaian bilangan dengan bobot sisi terbesar yang terletak pada $w^6_{\alpha_3}$ untuk $i = n + 1$. Selanjutnya nilai tiap batas rumusan bobot definisi w_{α_3} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $6n - 10$ yang didapat dari subtitusi nilai $i = 1$ pada $w^3_{\alpha_3}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 2, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{t=1}^{10} w^t_{\alpha_3} = \{6n - 10,\ 6n - 8,\ 6n - 6\ \ldots, 9n + 9\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Shackle (F_6, B_2, n) memiliki pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = 6n - 10$ dan $d = 2$ atau graf Shackle (F_6, B_2, n) mempunyai Super $(6n - 10, 2)$- EAT; $n > 1$ dan n ganjil. Sehingga terbukti bahwa pelabelan total $\alpha_3(x_ix_i+1)$, $\alpha_3(y_iy_{i+1})$, $\alpha_3(x_iy_i)$ untuk i genap maupun ganjil, $\alpha_3(x_iy_{i+1})$ untuk i genap atau ganjil, $\alpha_3(y_iz_i)$ untuk i genap dan ganjil dan $\alpha_3(y_{i+1}z_i)$ untuk i genap dan ganjil adalah pelabelan total super $(a, 2)$-sisi antimagic jika $n > 1$ dan n ganjil. □

◇ **Teorema 3** *Ada pelabelan total super* $(6n + 10, 1)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* (F_6, B_2, n) *untuk* $n \geq 1$ *dan* n *ganjil*

Proof. Gunakan pelabelan titik α_1 untuk melabeli titik graf Shackle $(F_6, B_2, 5)$, kemudian definisikan label sisi $\alpha_4 : E(F_6, B_2, 5) \to \{3n + 5, 3n + 6, \ldots, 6n + 5\}$, sehingga label sisi α_4 untuk pelabelan total super $(a, 2)$-sisi antimagic pada graf Shackle $(F_6, B_2, 5)$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_4(x_ix_i+1) &= 9n-3i+10 \\ \alpha_4(y_iy_i+1) &= 6n-3i+9 \\ \alpha_4(x_iy_i) &= \begin{cases} 6n-3i+10, & \text{untuk i ganjil} \\ 9n-3i+12, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\ \alpha_4(x_iy_{i+1}) &= \begin{cases} 9n-3i+11, & \text{untuk i ganjil} \\ 6n-3i+8, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\ \alpha_4(y_iz_i) &= \begin{cases} 9n-3i+12, & \text{untuk i ganjil} \\ 6n-3i+10, & \text{untuk i genap} \end{cases} \\ \alpha_4(y_{i+1}z_i) &= \begin{cases} 6n-3i+8, & \text{untuk i ganjil} \\ 9n-3i+11, & \text{untuk i genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Jika w_{α_4} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total berdasarkan pelabelan α_4 maka w_{α_4} untuk sebarang i dapat diperoleh rumusan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll} w^1_{\alpha_4}(x_ix_{i+1}) & = & 9n+3i+12 & \\ w^2_{\alpha_4}(y_iy_{i+1}) & = & 6n+3i+8 & \\ w^3_{\alpha_4}(x_iy_i) & = & 6n+3i+7, & \text{untuk i ganjil} \\ w^4_{\alpha_4}(x_iy_i) & = & 9n+3i+10, & \text{untuk i genap} \\ w^5_{\alpha_4}(x_iy_{i+1}) & = & 9n+3i+11, & \text{untuk i ganjil} \\ w^6_{\alpha_4}(x_iy_{i+1}) & = & 6n+3i+9, & \text{untuk i genap} \\ w^7_{\alpha_4}(y_iz_i) & = & 9n+3i+10, & \text{untuk i ganjil} \\ w^8_{\alpha_4}(y_iz_i) & = & 6n+3i+7, & \text{untuk i genap} \\ w^9_{\alpha_4}(y_{i+1}z_i) & = & 6n+3i+9, & \text{untuk i ganjil} \\ w^{10}_{\alpha_4}(y_{i+1}z_i) & = & 9n+3i+11, & \text{untuk i genap} \end{array}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi $w_{\alpha_4} = \{w^1_{\alpha_4}, w^2_{\alpha_4}, w^3_{\alpha_4}, \ldots, w^{10}_{\alpha_4}\}$, dapat diperhatikan bahwa bobot sisi terkecil terdefinisikan oleh $w^3_{\alpha_4}$ untuk $i = 1$, bobot sisi terkecil kedua selanjutnya terdefinisi oleh $w^5_{\alpha_4}$ untuk $i = 1$, dan seterusnya sehingga diperoleh rangkaian bilangan dengan bobot sisi terbesar yang terletak pada $w^{10}_{\alpha_4}$ untuk $i = n + 1$. Selanjutnya nilai tiap batas rumusan bobot definisi w_{α_4} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $6n + 10$ yang didapat dari subtitusi nilai $i = 1$ pada $w^3_{\alpha_4}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 1, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{t=1}^{10} w^t_{\alpha_4} = \{6n + 10, 6n + 11, 6n + 12 \ldots, 9n + 8\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Shackle (F_6, B_2, n) memiliki pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = 6n + 10$ dan $d = 1$ atau graf Shackle (F_6, B_2, n) mempunyai Super $(6n + 10, 1)$- EAT; $n > 1$ dan n ganjil. Sehingga terbukti bahwa pelabelan total $\alpha_4(x_ix_i+1)$, $\alpha_4(y_iy_{i+1})$, $\alpha_4(x_iy_i)$ untuk i genap maupun ganjil, $\alpha_4(x_iy_{i+1})$ untuk i genap atau ganjil, $\alpha_4(y_iz_i)$ untuk i genap dan ganjil dan $\alpha_4(y_{i+1}z_i)$ untuk i genap dan ganjil adalah pelabelan total super $(a, 1)$-sisi antimagic jika $n > 1$ dan n ganjil. □

◇ **Teorema 4** *Ada pelabelan total super* $(9n + 12, 0)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* $(F_6, B_2, 5)$ *untuk pengembangan polyalphabetic kriptosistem dengan pesan berupa kalimat "Perubahan PIN HP adek adalah Papa" menjadi ciphertext: zgewzdonsdodndwzdzd.*

Proof. Didata huruf dan angka yang digunakan dalam pesan dengan mengabaikan spasi dan tanda baca yaitu a, d, h, i, l, m, n, dan p. Setelah itu dibangunlah diagram pohon (*tree diagram*) dari graf Shackle $(F_6, B_2, 5)$ yang berakar di label

1 dengan dilengkapi label sisinya dan konversikan huruf alpabet atau huruf yang digunakan sesuai urutan abjad.

Selanjutnya letakkan huruf-huruf yang digunakan sesuai urutan abjad, dan urutkan label sisinya, kemudian pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi a=mod(154251,26)=19, d=mod(154249644,26)=16, h=mod(152446741938, 26)=10, i=mod(1542496438371232,26)=6, l=mod(15424964383712311427,26)= 25, m=mod(15424964383712311425,26)=23, n=mod(152446740103413291526,2 6)=16, dan p=mod(152446740103413281623,26)=19.

Selanjutnya dikombinasikan dengan label titik terakhir untuk menghindari terjadinya kesamaan bilangan diantara dua *ciphertext* dan diubah dalam bentuk modulo 26 lagi, sehingga menjadi a=mod(419,26)=3, d=mod(716,26)=14, h=mod(1010,26)=22, l=mod(1625,26)=13, m=mod(1823,26)=3, n=mod(1616,2 6)=4, dan p=mod(1819,26)=25. Dengan proses substitusi pesan ke dalam *ciphertext* tanpa spasi dan tanda baca, maka *ciphertext* pesan "PIN HP adek adalah Papa" adalah zgewzdonsdodndwzdzd.

Conlcluding Remarks

Pada makalah ini telah terbukti bahwa

- Ada pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n) jika $n > 1$ dan n ganjil.
- Ada pelabelan total super $(9n + 12, 0)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n) untuk $n \geq 1$ dan n ganjil.
- Ada pelabelan total super $(6n - 10, 2)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n) untuk $n \geq 1$ dan n ganjil.
- Ada pelabelan total super $(6n - 10, 1)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n) untuk $n \geq 1$ dan n ganjil.
- Ada pelabelan total super $(9n + 12, 0)$-sisi antimagic pada graf Shackle $(F_6, B_2, 5)$ untuk pengembangan polyalphabetic kriptosistem dengan pesan berupa kalimat "Perubahan PIN HP adek adalah Papa" menjadi *ci–phertext*: zgewzdonsdodndwzdzd.

References

[1] Chartrand, G, and Ping Zhang. 2012.*Introductory Graph Theory*. United Stated of America: Dover Publication, inc.

[2] Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph* (Doctoral dissertation, University of Ballarat).

[3] Dafik. 2015. *Pidato Ilmiah Pengukuhan Guru Besar*. Jember: Repository UNEJ.

[4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic labeling of the union of stars, *Australasian Journal of Combinatorics*, **42** (2008), 4909-4915.

[5] Dafik, Slamin, Fitriana Eka R, Laelatus Sya'diyah, Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs, *Proceeding of IICMA 2013*, Indoms - UGM Yogyakarta, Indonesia.

[6] Dafik, Alfin Fajriatin, Kunti Miladiyah F, Super Antimagicness of a Well-defined Graph, *Saintifika*, **Vol 14, No 1** (2012) 106–118

[7] Djoni Budi Sumarno, D Dafik, Kiswara Agung Santoso, Super (a, d)-Edge Antimagic Total Labeling of Connected Ferris Wheel Graph, *Jurnal Ilmu Dasar*, **Vol 15, No 2** (2014), 123–130

[8] Muktyas, Indra Bayu, and Kiki A. Sugeng. *Pemanfaatan Pelabelan Graceful pada Symmetric Tree untuk Kriptografi Polyalphabetic*. Institute Teknologi Sepuluh November (ITS). 2014.

[9] Ongko, Erianto. 2013. *Aplikasi Pembelajaran Kriptografi Klasik dengan Visual Basic .NET*. Medan: STMIK IBBI.

[10] Palupi, Retno. 2008. *Kriptosistem Kunci Asimetrik Menggunakan Algoritma Genetika Pada Data Citra*. (Vol 1 No 1).

[11] Pearson, E. 2006. *Introduction To Cryptography With Coding Theory*. America: United States of America.

[12] Sugeng, K. A., and Miller, M. 2006. *Super edge-antimagic total labelings*. Utilitas Mathematica, 71, 131-141.