SERTIFIKAT

3.9.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada

DESY TRI PUSPASARI

Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

On r-Dynamic Coloring for Graph Operation of Cycles

Malang, 5 September 2015

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si
NIP. 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si
NIP. 196609061992031004

On r-Dynamic Coloring for Operation Product of Cycle and Cycle Graphs

Desy Tri Puspasari[2], Dafik[1,2], Slamin[1,3]

[1]CGANT- University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
[3]Department of Information System - University of Jember
desytripuspasari@gmail.com; d.dafik@unej.ac.id; slamin@unej.ac.id

2010 Mathematics Subject Classification: 05C69

Abstract

For integer $k, r > 0, (k, r)$ -coloring of graph G is a proper coloring on the vertices of G by k-colors such that every vertex v of degree $d(v)$ is adjacent to vertices with at least $min\{d(v), r\}$ different color. Graph coloring provides a model. By a proper k -coloring of graph G, we mean a map $c : V(G) \rightarrow S$, where $|S| = k$, such that any two adjacent vertices are different color. An r -dynamic k -coloring is a proper k -coloring c of G such that $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ for each vertex v in $V(G)$, where $N(v)$ is the neighborhood of v and $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ for a vertex subset S . The r-dynamic chromatic number, written as $\chi_r(G)$, is the minimum k such that G has an r-dynamic k-coloring. Note the 1-dynamic chromatic number of graph is equal to its chromatic number, denoted by $\chi(G)$, and the 2-dynamic chromatic number of graph denoted by $\chi_d(G)$. By simple observation with a greedy coloring algorithm, it is easy to see that $\chi_r(G) \leq \chi_{r+1}(G)$, however $\chi_{r+1}(G) - \chi_r(G)$ does not always have the same difference. Thus finding an exact values of $\chi_r(G)$ is significantly useful. In this paper, we investigate the some exact value of $\chi_r(G)$ when G is for an operation product of cycle and cycle graphs.

Keywords: r-dynamic coloring, r-dynamic chromatic number, graph operations.

Introduction

Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan permasalahannya. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu. Salah satu pokok bahasan yang dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan (*colouring*). Permasalahan mendasar dalam pewarnaan graf ini adalah menentukan warna minimal yang dibutuhkan untuk mewarnai sebarang graf, yang kemudian disebut dengan *chromatic number*. Vizing (1964) telah menunjukkan bahwa sebarang graf dapat diwarnai dengan warna maksimal adalah $\Delta(G)+1$, dimana $\Delta(G)$ adalah derajad maksimum sebuah graf. Pewarnaan graf merupakan bidang kajian yang sangat menarik dalam graf, kajiannya terutama ditujukan pada pewarnaan graf-graf khusus seperti graf lengkap, graf lingkaran, graf petersen dan generalisasinya, graf prisma dan anti prisma, graf buku segi-n, graf jejaring dan termasuk graf operasi seperti *joint* graf, *cartesian product*, *cross product*, *crown product*, dan *composition of graph* [3]. Bahkan perkembangan terkini kajian ini diperluas menjadi $r - dynamyc\ colouring$.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf yang sederhana, terhubung, dan tidak berarah dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, serta $d(v)$ adalah derajat dari setiap titik v di $V(G)$. Derajat maksimum dan minimum dari graf G masing-masing dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan $\delta(G)$. Untuk bilangan bulat $k, r > 0; (k, r)$ pewarnaan graf G adalah pewarnaan yang tepat pada setiap titik dari graf G dengan k warna sehingga setiap titik v dengan derajat $d(v)$ berdekatan dengan titik dengan setidaknya $min\{d(v), r\}$ warna yang berbeda [9]. Dengan k pewarnaan dari graf G, kita memetakan $c : V(G) \Rightarrow S$, dimana $|S| = k$, sehingga setiap dua simpul yang berdekatan memiliki warna yang berbeda. Sebuah r-dinamis dengan k warna adalah tepat k pewarnaan tepat c dari graf G sehingga $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ untuk setiap titik v di $V(G)$, dimana $N(v)$ adalah lingkungan v dan $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ untuk setiap titik bagian dari S [4, 7]. Bilangan kromatik r-dinamis, dituliskan dengan $\chi_r(G)$ adalah nilai minimum k sehingga graf G memiliki r-dinamis k-warna. Perhatikan bahwa bilangan kromatik 1-dinamis dari sebuah graf adalah sama dengan jumlah warna graf itu sendiri, dan dilambangkan dengan $\chi(G)$, dan bilangan kromatik 2-dinamis diperkenalkan oleh $Montgomery$ dengan nama dinamis bilangan kromatik, dilambangkan dengan $\chi_d(G)$. Dia mengatakan $\chi_2(G) \leq \chi(G) + 2$ ketika G adalah graf sederhana, yang tetap terbuka. Akbari membuktikan spekulasi Montgomery untuk graf bipartit sederhana. Lai, Montgomery, dan Poon membuktikan $\chi_2(G) \leq \Delta(G) + 1$ ketika $\Delta(G) \geq 3$ dan tidak ada unsur 5-siklus C_5. Kim membuktikan $\chi_d(G) \leq 4$ untuk graf planar G dengan ketebalan minimal 7, dan $\chi_d(G) \leq k$ ketika $k \geq 4$ dan tingkat rata-rata G memiliki nilai maksimum paling $\frac{4k}{k+2}$ (baik hasil yang tajam). Kim membuktikan $\chi_2(G) \leq 4$ saat G adalah planar dan tidak ada unsur C_5 dan juga $\chi_d \leq 5$ setiap kali graf G adalah planar[6, 8, 7].

Jelas, $\chi(G) \leq \chi_2(G)$, tapi itu ditunjukkan bahwa perbedaan antara jumlah kromatik dan dinamis bilangan kromatik bisa sewenang-wenang besar. Namun, itu menduga bahwa untuk graf biasa perbedaannya adalah paling banyak 2. Juga, hal itu terbukti di [8], jika G adalah bipartit sebuah k grafik biasa, $k \geq 3$ dan $n < 2^k$, maka $\chi_2 \leq 4$. Beberapa sifat pewarnaan dinamis dipelajari di [5, 6, 8]. Hal itu terbukti di [10], untuk graf terhubung G, jika $\Delta(G) \leq 3$, maka $\chi_2(G) \leq 4$ kecuali $G = C_5$, dalam hal ini $\chi_2(C_5) = 5$ dan jika $\Delta(G) \geq 4$ maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Hasil penelitian terkait ini terdapat pada [1, 2].

A Useful Lemma

Berikut ini adalah lemma yang digunakan untuk menentukan pewarnaan dinamik dari sebuah graf. Lemma ini mengkarakteristikan istilah batas atas dari diameter sebuah graf.

Theorem 1 *[9] Jika $diam(G) = 2$, maka $\chi_2(G) \leq \chi(G) + 2$, jika dan hanya jika ketika G adalah graf bipartit lengkap atau C_5.*

Theorem 2 *[9] Jika G adalah sebuah k-bilangan kromatik graf dengan diameter paling banyak 3, maka $\chi_2(G) \leq 3k$, dan batas ini jelas ketika $k \geq 2$.*

Istilah derajat maksimum sebuah graf, r-dynamic graf memenuhi sebagai berikut:

Observation 1 *[9] $\chi_r(G) \geq min\{\Delta(G), r\} + 1$, dan ini jelas. Jika $\Delta(G) \leq r$ maka $\chi_r(G) = min\{\Delta(G), r\}$.*

Theorem 3 *[9] $\chi_r(G) \leq r\Delta(G) + 1$, untuk sama dengan $r \geq 2$ jika dan hanya jika G adalah r-regular dengan diameter 2 dengan ketebalan 5.*

Misalkan G^2 mendefinisikan graf yang diperoleh dari G dengan menambahkan sisi dan gabungan titik yang tidak bersisihan yang mempunyai tetangga., Jahanbekam *et. al* [9] terbukti sebagai berikut.

Observation 2 *[9] $\chi(G) \leq \chi_d(G) \leq \chi_3(G) \leq \cdots \leq \chi_{\Delta(G)}(G) = \chi(G^2)$.*

Terakhir untuk operasi cartesian product sebuah graf, kita mempunyai sebagai berikut:

Theorem 4 *[9] If $\delta(G) \geq r$ maka $\chi_r(G \square H) = max\{\chi(G), \chi(H)\}$.*

The Results

Berikut ini adalah hasil pada pewarnaan r-dynamic untuk beberapa operasi dari graf khusus. Selain menunjukkan r-dynamic bilangan kromatik, kami juga akan menunjukkan warna $c(v \in V(G))$ sebagai kejelasan. Beberapa operasi graf yang digunakan dalam artikel ini adalah $C_n + C_m, C_n \square C_m, C_n \otimes C_m, C_n[C_m], C_n \odot C_m, shack(C_n \square C_m, v, s), amal(C_n, v, s)$

Theorem 5 *Misalkan G adalah joint C_n dan C_m. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik r-dynamic dari G adalah*
Untuk n ganjil

$$\chi(C_n + C_m) = \chi_d(C_n + C_m) = \chi_3(C_n + C_m) = \chi_4(C_n + C_m) \begin{cases} 5, & \textit{untuk } m \textit{ ganjil} \\ 6, & \textit{untuk } m \textit{ genap} \end{cases}$$

Untuk n genap

$$\chi(C_n + C_m) = \chi_d(C_n + C_m) = \chi_3(C_n + C_m) \begin{cases} 4, & \textit{untuk } m \textit{ genap} \\ 5, & \textit{untuk } m \textit{ ganjil} \end{cases}$$

Proof. Graf $C_n + C_m$ dengan himpunan titik $V(C_n + C_m)$= $\{x_i; 1 \le i \le n\} \cup \{y_j; 1 \le j \le m\}$ dan $E(C_n+C_m)$= $\{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \le i \le n-1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \le j \le m-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m\}$. Maka $p = |V(C_n + C_m)| = n + m, q = |E(G)| = nm + n + m$ dan $\Delta(C_n + C_m) = m + 3$. Berdasarkan observasi 1, batas bawah dari bilangan kromatik r-dynamic $\chi_r(C_n+C_m) \ge min\{\Delta(C_n+C_m), r\}+1 = \{m+3, r\}+1$. Definisi pewarnaan titik $c : V(C_n+C_m) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ untuk $n \ge 3$ dan $m \ge 3$ sebagai berikut:
Untuk n ganjil

$$c(x_i) = \begin{cases} 1,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ ganjil} \\ 2,\ 1 \le i \le n-1,\ i \text{ genap} \\ 3,\ i = n \end{cases} \qquad c(y_j) = \begin{cases} 4,\ 1 \le j \le m,\ j \text{ ganjil} \\ 5,\ 1 \le j \le m-1,\ j \text{ genap} \\ 6,\ j = m \end{cases}$$

Untuk n genap

$$c(x_i) = \begin{cases} 1,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ ganjil} \\ 2,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ genap} \end{cases} \qquad c(y_j) = \begin{cases} 3,\ 1 \le j \le m,\ j \text{ ganjil} \\ 4,\ 1 \le j \le m-1,\ j \text{ genap} \\ 5,\ j = m \end{cases}$$

Hal ini mudah untuk mengetahui bahwa $c : V(C_n + C_m) \to \{1, 2, \ldots, 5\}$ dan $c : V(C_n + C_m) \to \{1, 2, \ldots, 6\}$, untuk n ganjil dan $c : V(C_n + C_m) \to \{1, 2, \ldots, 4\}$ dan $c : V(C_n+C_m) \to \{1, 2, \ldots, 5\}$ untuk n genap, adalah warna yang tepat. Maka, $\chi(C_n + C_m) = 4$ untuk n m genap dan $\chi(C_n + C_m) = 5$ untuk n ganjil genap m ganjil dan $\chi(C_n + C_m) = 6$ untuk n ganjil m genap. Berdasarkan definisi, ketika $min\|c(N(v))|,$ untuk setiap $v \in V(C_n+C_m)\} = 4$, mengimplikasikan $\chi(C_n+C_m) = \chi_d(C_n+C_m) = \chi_3(P_n+C_m) = \chi_4(P_n+C_m)$ untuk n ganjil m genap ganjil dan ketika $min\|c(N(v))|,$ untuk setiap $v \in V(C_n+C_m)\} = 3$, mengimplikasikan $\chi(C_n+C_m) = \chi_d(C_n + C_m) = \chi_3(P_n + C_m)$ untuk n genap m genap ganjil. Sehingga terbukti. □

Open Problem 1 *Misalkan G adalah joint C_n and C_m. Untuk $n \ge 3$ dan $m \ge 3$, menentukan bilangan kromatik r-dynamic dari graf G ketika $r \ge 3$.*

Theorem 6 *Misalkan G adalah hasil cartesian dari C_n dan C_m. Untuk $n \ge 3$ dan $m \ge 3$, bilangan kromatik r-dynamic dari graf G adalah*

$$\chi(C_n \Box C_m) = \chi_d(C_n \Box C_m) = \quad 3, \quad \textit{untuk } n\ m \textit{ ganjil genap}$$
$$\chi(C_n \Box C_m) = \quad 2, \quad \textit{untuk } n\ m \textit{ genap}$$

Proof. Graf $C_n \Box C_m$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(C_n \Box C_m) = \{x_i; 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m\}$ dan $E(C_n \Box C_m) = \{x_{i,j}x_{i,j+1};\ 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m-1; x_m x_1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j};\ 1 \le i \le n-1;\ 1 \le j \le m; x_n x_1\}$. Maka $|V(C_n \Box C_m)| = nm$ dan $|E(C_n \Box C_m)| = 2nm$ dan $\Delta(P_n + C_m) = 4$. Berdasarkan observasi 1, batas bawah dari bilangan kromatik r-dynamic $\chi_r(C_n \Box C_m) \ge min\{\Delta(C_n \Box C_m), r\} + 1 = \{4, r\} + 1$. Definisi pewarnaan titik $c : V(C_n \Box C_m) \to \{1, 2, \dots, k\}$ untuk $n \ge 3$ and $m \ge 3$ sebagai berikut:
Untuk n genap m genap

j ganjil

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ ganjil} \\ 2,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

j genap

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ genap} \\ 2,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Untuk n ganjil m genap ganjil

j ganjil

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \le i \le n-1,\ i \text{ ganjil} \\ 2,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ genap} \\ 3,\ i = n \end{cases}$$

j genap

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ i = n \\ 2,\ 1 \le i \le n-1,\ i \text{ ganjil} \\ 3,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$j = m$

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \le i \le n-1,\ i \text{ genap} \\ 2,\ i = n \\ 3,\ 1 \le i \le n,\ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Hal ini mudah untuk mengetahui bahwa $c : V(C_n \Box C_m) \to \{1, 2\}$ untuk n m genap dan $c : V(C_n \Box C_m) \to \{1, 2, 3\}$, untuk n m ganjil genap, adalah warna ynag tepat. Berdasarkan definisi, ketika $min\|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(C_n \Box C_m)\} = 1$, mengimplikasikan $\chi(C_n \Box C_m) = 2$ untuk n genap m genap dan ketika $min\|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(C_n \Box C_m)\} = 2$, mengimplikasikan $\chi(C_n \Box C_m) = \chi_d(C_n \Box C_m) = 3$ untuk n m genap ganjil. Sehingga pembuktian di atas terbukti. □

Open Problem 2 *Misalkan G adalah hasil cartesian dari C_n dan C_m. Untuk $n \ge 3$ dan $m \ge 3$, menentukan bilangan kromatik r-dynamic dari graf G ketika $r \ge 1$.*

Theorem 7 *Misalkan G adalah hasil dari operasi tensor C_n dan C_m. Untuk $n \ge 3$ dan $m \ge 3$, bilangan kromatik r-dynamic dari of G adalah $\chi(C_n \otimes C_m) = 2$ untuk m genap dan $\chi(C_n \otimes C_m) = \chi_d(C_n \otimes C_m) = 3$ untuk m ganjil.*

Proof. Graf $C_n \otimes C_m$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V= \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E= \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+2,j+1}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i-2,j+1}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j+3}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j-3}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i-2,j+3}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+2,j-3}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-3\}$. Maka $|V(C_n \otimes C_m)| = nm$ and $|E(C_n \otimes C_m)| = 2nm - 4n - 3m + 6$ and $\Delta(C_n \otimes C_m) = 4$. Berdasarkan observasi 1, batas bawah dari bilangan kromatik r-dynamic $\chi_r(C_n \otimes C_m) \geq min\{\Delta(C_n \otimes C_m), r\} + 1 = \{4, r\} + 1$. Definisi pewarnaan titik $c : V(C_n \otimes C_m) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ untuk $n \geq 3$ and $m \geq 3$ sebagai berikut:
Untuk m genap

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq j \leq m, \ j \text{ ganjil} \\ 2, \ 1 \leq j \leq m, \ i \text{ genap} \end{cases}$$

Untuk m ganjil

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq j \leq m, \ j \text{ ganjil} \\ 2, \ 1 \leq j \leq m-1, \ i \text{ genap} \\ 3, \ j = m \end{cases}$$

Hal ini mudah untuk mengetahui bahwa $c : V(C_n \otimes C_m) \to \{1\}$ untuk m genap dan $c : V(C_n \otimes C_m) \to \{1, 2\}$ untuk m ganjil adalah pewarnaan yang tepat. Sesuai definisi, ketika ketika $min\|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(C_n \otimes C_m)\} = 1$, mengimplikasikan $\chi(C_n \otimes C_m) = 2$ untuk m genap dan ketika $min\|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(C_n \otimes C_m)\} = 2$, mengimplikasikan $\chi(C_n \otimes C_m) = \chi_d(C_n \otimes C_m) = 3$ untuk m ganjil. Sehingga pembuktian di atas terbukti. □

Open Problem 3 *Misalkan G adalah hasil tensor dari C_n dan C_m. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, menentukan bilangan kromatik r-dynamic dari graf G ketika $r \geq 1$.*

Theorem 8 *Misalkan G adalah komposisi dari graf C_n pada C_m. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik r-dynamic dari G adalah*

$$\chi(C_n[C_m]) = \chi_d(C_n[C_m]) = \chi_3(C_n[C_m]) = \quad 4, \textit{ untuk } n \ m \textit{ genap} \ .$$

$$\chi(C_n[C_m]) = \chi_d(C_n[C_m]) = \chi_5(C_n[C_m]) = \quad 6, \textit{ untuk } n \ m \textit{ ganjil genap} \ .$$

$$\chi(C_n[C_m]) = \chi_d(C_n[C_m]) = \chi_8(C_n[C_m]) = \quad 9, \textit{ untuk } n \textit{ ganjil } m \textit{ ganjil} \ .$$

Proof. Graf $C_n[C_m]$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V= \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ and $E(C_n[C_m])= E= \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+2,j+1}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i-2,j+1}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j+3}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j-3}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i-2,j+3}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+2,j-3}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m-3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i,j+1}; \ 1 \leq$

$i \leq n;\ 1 \leq j \leq m-1; x_m x_1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j};\ 1 \leq i \leq n-1;\ 1 \leq j \leq m; x_n x_1\}$. Maka $|V(C_n[C_m])| = nm$ and $|E(C_n[C_m])| = 4nm - 4n - 3m + 6$ dan $\Delta(C_n[C_m]) = 8$. Melalui observasi 1, batas bawah bilangan kromatik r-dynamic $\chi_r(C_n[S_m]) \geq min\{\Delta(C_n[C_m]), r\} + 1 = \{8, r\} + 1$. Definisi pewarnaan titik $c : V(C_n[C_m]) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ untuk $n \geq 3$ and $m \geq 3$ sebagai berikut:
Untuk n genap m genap

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \\ 4, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

Untuk n m genap ganjil

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 5, & 1 \leq j \leq m-1\ j \text{ ganjil } i = n \\ 6, & 1 \leq j \leq m-1\ j \text{ genap } i = n \end{cases}$$

Untuk n ganjil m ganjil

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 7, & i = n;\ 1 \leq j \leq m\ j \text{ ganjil} \\ 8, & i = n;\ 1 \leq j \leq m\ j \text{ genap} \\ 9, & i = n\ j = m \end{cases}$$

Hal ini mudah untuk mengetahui bahwa $c : V(C_n[S_m]) \to \{1, 2, 3\}$ untuk n genap m genap dan $c : V(C_n[S_m]) \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk n m ganjil genap dan $c : V(C_n[S_m]) \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ untuk n ganjil m ganjil adalah pewarnaan yang tepat. Sesuai definisi, $min\{|c(N(v))|, \text{ untuk setiap } v \in V(C_n[S_m])\} = 3$, mengimplikasikan $\chi(C_n[S_m]) = \chi_d(C_n[S_m]) = \chi_3(C_n[S_m]) = 4$ untuk n genap m genap dan ketika $min\{|c(N(v))|, \text{ untuk setiap } v \in V(C_n[S_m])\} = 5$, mengimplikasikan $\chi(C_n[S_m]) = \chi_d(C_n[S_m]) = \chi_3(C_n[S_m]) = \chi_4(C_n[S_m]) = \chi_5(C_n[S_m]) = 6$ untuk n m ganjil genap dan $min\{|c(N(v))|, \text{ untuk setiap } v \in V(C_n[S_m])\} = 8$, mengimplikasikan $\chi(C_n[S_m]) = \chi_d(C_n[S_m]) = \chi_3(C_n[S_m]) = \chi_4(C_n[S_m]) = \chi_5(C_n[S_m]) = \chi_6(C_n[S_m]) = \chi_7(C_n[S_m]) = \chi_8(C_n[S_m]) = 9$ untuk n ganjil m ganjil. Sehingga pembuktian di atas terbukti. □

Open Problem 4 *Misalkan G adalah hasil operasi kompsisi dari C_n pada C_m. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, menentukan bilangan kromatik r-dynamic dari G ketika $r \geq 3$.*

Theorem 9 *Misalkan graf G adalah hasil operasi crown product dari C_n dan C_m. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik r-dynamic dari G adalah*

$$\chi(C_n \odot C_m) = \chi_d(C_n \odot C_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

Proof. Graf $C_n \odot C_m$ adalah graf terhubung ynag mempunyai himpunan titik $V = \{x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_m x_1\}$. Maka $|V| = n(1+m)$ dan $|E| = n(1+2m)$ dan $\Delta(C_n \odot C_m) = 8$. Berdasarkan pada observasi 1, batas bawah dari bilangan kromatik r-dynamic $\chi_r(C_n \odot C_m) \geq min\{\Delta(C_n \odot C_m), r\} + 1 = \{8, r\} + 1$. Definisi pewarnaan titik $c : V(C_n \odot C_m) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ untuk $n \geq 3$ and $m \geq 3$ sebagai berikut:
Untuk m genap

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, \ i \text{ genap} \\ 3, & i = n \end{cases} ; \ c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 2, & 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j \ ganjil \\ 3, & 1 \leq j \leq m, \ j \text{ genap} \end{cases}$$

Untuk m ganjil

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, \ i \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \\ 3, & i = n \end{cases} ; \ c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, \ i \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, \ j \text{ genap} \\ 4, & i = n \end{cases}$$

Hal ini mudah untuk mengetahui bahwa $c : V(C_n \odot C_m) \rightarrow \{1, 2\}$ untuk m genap atau m ganjil. Maka, $\chi(C_n \odot C_m) = 3$ untuk m genap dan $\chi(C_n \odot C_m) = 4$ untuk m ganjil. Berdasarkan definisi, ketika $min\{|c(N(v))|, \text{ untuk setiap } v \in V(C_n \odot C_m)\} = 3$, ini mengimplikasikan $\chi(C_n \odot C_m) = \chi_d(C_n \odot C_m) = 3$ untuk m genap dan ketika $min\{|c(N(v))|, \text{ untuk setiap } v \in V(C_n \odot C_m)\} = 4$, ini dapat mengimplikasikan $\chi(C_n \odot C_m) = \chi_d(C_n \odot C_m) = 4$ untuk m ganjil . Pembuktian ini terbukti. □

Open Problem 5 *Misalkan G adalh sebuah graf hasil dari operasi crown product dari C_n dan C_m. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, menentukan bilangan kromatik r-dynamic dari G ketika $r \geq 2$.*

Theorem 10 *Misalkan G adalah shackle dari hasil operasi cartesian C_n and C_m. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik r-dynamic dari G adalah*

$$\chi(shack(C_n \square C_m, v, s)) = \quad 2, \text{ untuk } n \text{ genap } m \text{ genap } .$$

$$\chi(shack(C_n \square C_m, v, s)) = \chi_d(shack(C_n \square C_m, v, s)) = \quad 3, \text{ untuk } n \ m \text{ genap ganjil } .$$

Proof. *Shackle* dari operasi cartesian C_n dan C_m, dinotasikan dengan $shackle(C_n \square C_m, v, s)$, adalah graf terhubung yang memunyai himpunan titik $V(C_n \square C_m) = \{x_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$ dan $E(C_n \square C_m) = \{x_{i,j}^k x_{i,j+1}^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1; x_m^k x_1^k\} \cup \{x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; x_n^k x_1^k\}$. Maka $|V(C_n \square C_m)| = nmr$ dan $|E(C_n \square C_m)| = 2mn + r$ dan $\Delta(C_n \square C_m) = 6$. Berdasarkan observasi 1, batas bawah dari bilangan kromatik r-dynamic $\chi_r(shack(C_n \square C_m, v, s)) \geq min\{\Delta(shack(C_n \square C_m, v, s)), r\} + 1 = \{6, r\} + 1$. Definisi pewarnaan titik $c : V(shack(C_n \square C_m, v, s)) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ sebagai berikut:

Untuk n genap m genap

j ganjil

$$c(x_{i,j}^k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

j genap

$$c(x_{i,j}^k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Untuk n ganjil m genap ganjil

j ganjil

$$c(x_{i,j}^k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq r,\ i \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ genap} \\ 3, & i = n \end{cases}$$

j genap

$$c(x_{i,j}^k) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$j = m$

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq k \leq r, \imath = n \\ 3, & 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Hal ini mudah untuk mengetahui bahwa $c : V(C_n \Box C_m) \rightarrow \{1, 2\}$ untuk n m genap dan $c : V(C_n \Box C_m) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, untuk n m ganjil genap, adalah warna yang tepat. Berdasarkan definisi, ketika $min\|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(C_n \Box C_m)\} = 1$, mengimplikasikan $\chi(C_n \Box C_m) = 2$ untuk n genap m genap dan ketika $min\|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(C_n \Box C_m)\} = 2$, mengimplikasikan $\chi(C_n \Box C_m) = \chi_d(C_n \Box C_m) = 3$ untuk n m genap ganjil. Sehingga pembuktian di atas terbukti. □

Open Problem 6 *Misalkan G adlah shackle dari hasil cartesian C_n and C_m. Untuk $n \geq 3$ and $m \geq 3$, menentukan bilangan kromatik r-dynamic dari G when $r \geq 1$.*

Theorem 11 *Misalkan G adalah amalgamasi dari C_n. Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik r-dynamic dari G adalah*

$$\chi(Amal(C_n, v, s)) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Proof. Amalgamasi dari C_n, dinotasikan dengan $amal(C_n, v, s)$, adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(amal(C_n))= \{A, x_{i,j}; 1 \le i \le m;\ 1 \le j \le n\}$ and $E(amal(C_n, v, s))= \{Ax_{i,j}; 1 \le i \le n,\ j = m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1; 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m-1}$. Maka $|V(amal(C_n, v, s))| = 2n + 1$ and $|E(amal(C_n, v, s))| = 3n$ and $\Delta(amal(C_n, v, s)) = 6$. Berdasarkan observasi 1, batas bawah dari bilangan kromatik r-dynamic $\chi_r(amal (C_n, v, s)) \ge min\{\Delta(amal(C_n, v, s)), r\} + 1 = \{6, r\} + 1$. Definisi pewarnaan titik $c : V(amal(C_n, v, s)) \to \{1, 2, \dots, k\}$ untuk $n \ge 3$ sebagai berikut:

$$c(A) = 1$$

Untuk n genap

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \le j \le m,\ j \text{ genap} \\ 2,\ 1 \le j \le m,\ j \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c(x_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \le j \le m-1,\ j \text{ genap} \\ 2,\ 1 \le j \le m,\ j \text{ ganjil} \\ 3,\ j = m \end{cases}$$

Jelas $c : V(amal(C_n, v, s)) \to \{1\}$, untuk n genap dan n ganjil, adalah pewarnaan yang jelas. Maka, untuk n genap, $\chi(amal(C_n, v, s)) = 2$ dan untuk n ganjil, $\chi(amal(C_n, v, s)) = 3$. Berdasarkan definisi, ketika $min\{|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(amal(C_n, v, s)\} = 1$, maka kita hanya memiliki $\chi(amal(C_n, v, s)) = 2$ untuk n genap dan ketika $min\{|c(N(v))|$, untuk setiap $v \in V(amal(C_n, v, s)\} = 1$, maka kita hanya memiliki $\chi(amal(C_n, v, s)) = 3$ untuk n ganjil. Sehingga pembuktian tersebut terbukti. □

Open Problem 7 *Misalkan G adalah amalgamasi dari C_n. Untuk $n \ge 3$, menentukan bilangan kromatik r-dynamic dari G ketika $r \ge 1$.*

Conclusions

Kita telah mempelajari pewarnaan r-dynamic dari beberapa operasi graf. Hasil penelitian menunjukkan untuk masimg-masing operasi graf, tidak diperoleh semua nilai dari r. Oleh karena itu, kami meninggalkan *open problem* untuk pembaca.

References

[1] Desy Tri Puspasari, Dafik Dafik, Slamin Slamin, Pewarnaan Titik pada Graf Khusus: Operasi dan Aplikasinya, **Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik**, **Vol. 2, Issue 1**, (2014), 50-58

[2] Harsya Alfian Yulia, Dafik Dafik, Ika Hesti Agustin, Bilangan Kromatik pada Pengoperasian Graf Lintasan dengan Graf Lingkaran, **Proceeding of International Workshop on Mathematics UAD**, (2014), 1-18

[3] J.L. Gross, J. Yellen and P. Zhang, *Handbook of Graph Theory*, Second Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2014

[4] S.J. Kim and W.J. Park, List dynamic coloring of sparse graphs, *Combinatorial optimization and applications. Lect. Notes Comput. Sci.* 6831 (Springer, 2011), 156 162.

[5] S.J. Kim, S. J. Lee, and W.J. Park, Dynamic coloring and list dynamic coloring of planar graphs. *Discrete Applied Math.* 161 (2013), 22072212.

[6] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam, On the dynamic chromatic number of graphs, *Combinatorics and graphs. Contemp. Math.* 531 (Amer. Math. Soc. 2010), 118.

[7] B. Montgomery, Dynamic Coloring of Graphs. *Ph.D Dissertation*, West Virginia University, 2001.

[8] H.J. Lai, B. Montgomery, and H. Poon, Upper bounds of dynamic chromatic number. Ars Combin. 68 (2003), 193201.

[9] S Jahanbekam, J Kim, O Suil, D.B. West, On r-dynamic Coloring of Graphs, 2014, In Press

[10] R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1941), 194197.