SERTIFIKAT

3.9.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada

DEVI EKA WARDANI MEGANINGTYAS

Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

ON R-DYNAMIC COLORING OF GRAPH OPERATION OF CYCLE AND PATH

Malang, 5 September 2015

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si
NIP. 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si
NIP. 196609061992031004

UNIVERSITAS NEGERI MALANG
FMIPA

On r-dynamic Coloring of Operation Product of Cycle and Path Graphs

D.E.W. Meganingtyas[1], Dafik[2,4], Slamin[3,4]
[1]Department of Mathematics - University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
[3]Department of Information System - University of Jember
[4]CGANT - University of Jember
deviekawm@gmail.com; d.dafik@gmail.com; slamin@unej.ac.id

2010 Mathematics Subject Classification: 05C69

Abstract

Let G be a simple, connected and undirected graph. Let r, k be natural numbers. By a proper k-coloring of a graph G, we mean a map $c : V(G) \rightarrow S$, where $|S| = k$, such that any two adjacent vertices receive different colors. An r-dynamic k-coloring is a proper k-coloring c of G such that $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ for each vertex v in $V(G)$, where $N(v)$ is the neighborhood of v and $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ for a vertex subset S. The r-dynamic chromatic number, written as $\chi_r(G)$, is the minimum k such that G has an r-dynamic k-coloring. It was introduced by Montgomery. Note that the 1-dynamic chromatic number of graph is equal to its chromatic number, denoted by $\chi(G)$, and the 2-dynamic chromatic number of graph has been studied under the name a dynamic chromatic number, denoted by $\chi_d(G)$. By simple observation it is easy to see that $\chi_r(G) \leq \chi_{r+1}(G)$, however $\chi_{r+1}(G) - \chi_r(G)$ does not always have the same difference. Thus, finding an exact values of $\chi_r(G)$ is significantly useful. In this paper, we will show some exact values of $\chi_r(G)$ when G is an operation product of cycle and path graphs.

Keywords: r-dynamic coloring, r-dynamic chromatic number, graph operations.

Pendahuluan

Pewarnaan graf merupakan kasus khusus dari pelabelan graf, yaitu memberikan warna pada graf sehingga memenuhi syarat pewarnaan graf. Ada 2 (dua) macam pewarnaan pada graf, yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Adapun pewarnaan graf yang menjadi topik kajian pada penelitian ini yaitu pewarnaan titik.

Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik yang berada dalam suatu graf sedemikian hingga tidak ada warna yang sama antardua titik yang bertetangga. Selain itu, jumlah warna yang digunakan pada pewarnaan graf adalah jumah warna paling sedikit digunakan (minimum). Pada graf G, jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai graf G disebut sebagai bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\mathcal{X}(G)$. Pada perkembangannya, penelitian tentang pewarnaan titik pada graf tidak hanya sebatas pada pewarnaan titik biasa, tapi juga terdapat pewarnaan titik lainnya yang disebut dengan pewarnaan dinamis yang akhirnya juga berkembang menjadi pewarnaan r-dinamis. Bilangan kromatik r-dinamis, dinotasikan dengan $\chi_r = \chi_r(G)$, merupakan nilai k yang minimal yang diperoleh agar graf G memenuhi kondisi pewarnaan k-warna r-dinamis.

Pewarnaan r-dinamis diperkenalkan oleh Montgomery. Pewarnaan ini dapat diaplikasikan pada permasalahan jaringan. Contohnya dalam jaringan komunikasi, misalnya dalam suatu ruangan, komputer yang berdekatan harus diberikan sumber daya yang berbeda. Untuk meningkatkan aksesibilitas sumber daya, setiap komputer harus dapat menemukan banyaknya sumber daya yang ada di sekitarnya. Jika semua komputer yang berada di sekitarnya diharuskan memiliki sumber daya yang berbeda, maka sumber daya yang digunakan terlalu banyak. Pewarnaan r-dinamis dapat diaplikasikan pada kasus ini untuk dapat menentukan banyaknya sumber daya yang dibutuhkan sedemikian hingga penggunaan sumber daya tersebut menjadi efektif.

Penelitian-penelitian mengenai pewarnaan dinamis cukup banyak dilakukan oleh peneliti, beberapa diantaranya adalah Lai dan Montgomery (2002) dalam artikelnya yang berjudul "*Dynamic Coloring of Graphs*", Kim (2012) dalam penelitiannya yang berjudul "*Dynamic Coloring and List Dynamic Coloring of Planar Graphs*". Kang, dkk. (2014) melakukan penelitian berjudul "*On r-dynamic Coloring of Grids*" dan Jahanbekam, dkk. (2014) juga melakukan penelitian berjudul "*On $r-$-dynamic Coloring of Graphs*". Mereka mengkaji pewarnaan r-dinamis pada graf yang sebelumnya telah diperkenalkan oleh Montgomery. Hasil penelitian terkait ini terdapat pada [3, 6].

Pada penelitian ini akan dikaji mengenai pewarnaan r-dinamis dan bilangan kromatiknya pada graf-graf hasil operasi dari graf sikel dan lintasan. Penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian-penelitian sebelumnya yang mengkaji tentang pewarnaan r-dinamis. Adapun operasi graf yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi *join*, hasil kali *Cartesian*, dan *crown* antara graf sikel dan lintasan.

Hasil dan Pembahasan

Definisi 1 *Pewarnaan r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

1. *jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan*
2. *$\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.*

Observasi 1 $\chi_r(G) \geq \min\{\triangle(G), r\} + 1$

Observasi 2 *Jika $\chi_r(G) \leq r$ maka $\chi_r(G) = \min\{\triangle(G), r\}$*

Teorema 1 *Misalkan G merupakan graf hasil operasi join antara P_n dan C_m. Jika $n \geq 2$, $m \geq 3$, dan $r \geq 6$ maka bilangan kromatik r-dinamis graf G adalah sebagai* *berikut:*

$$\chi_r(P_n + C_m) = \begin{cases} r+m-2, & \text{untuk } 3 \le m \le r-2, \\ 2r-3, & \text{untuk } m \text{ lainnya,} \end{cases}$$

Bukti. $P_n + C_m$ merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(P_n + C_m) = \{x_i; 1 \le i \le n\} \cup \{y_j; 1 \le j \le m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n + C_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \le i \le n-1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y1; 1 \le j \le m-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \le i \le n; 1 \le j \le m\}$. Dengan demikian, $p = |V(P_n + C_m)| = n+m, q = |E(P_n + C_m)| = nm+n+m-1, \triangle$ $(P_n + C_m) = m+2$.

Berdasarkan Observasi 1, $\chi_r(P_n + C_m) \ge \min\{\triangle\ (P_n + C_m), r\} + 1 = \{m+2, r\} + 1$. Berikan pewarnaan titik pada $P_n + C_m$, yaitu $c : V(P_n + C_m) \to \{1, 2, \dots, k\}$ dimana $n \ge 2$ dan $m \ge 3$, dengan fungsi sebagai berikut:

$$c(x_i) = i \mod (r-2), 1 \le i \le n$$

$$c(y_j) = \begin{cases} j \mod (r-3) + r - 2, & \text{untuk } 1 \le j \le m-2, \\ 2r-4, & \text{untuk } j = m-1, \\ 2r-3, & \text{untuk } j = m \end{cases}$$

Dengan menggunakan fungsi pewarnaan tersebut, terlihat bahwa $\chi_r(P_n + C_m) = r+m-2$ untuk $3 \le m \le r-2$ dan $\chi_r(P_n + C_m) = 2r-3$ untuk nilai m yang lain.

Teorema 2 *Misalkan G merupakan graf hasil operasi korona antara P_n dan C_m, yaitu $C_m \odot P_n$. Jika $n \ge 2$, $m \ge 3$, dan $r \ge 4$ maka bilangan kromatik r-dinamis graf G adalah sebagai berikut:*

$$\chi_r(C_m \odot P_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \ne 5, n = 1, \\ 5, & \text{untuk } n = 2 \text{ dan } m = 5, n = 1, \\ n+3, & \text{untuk } 3 \le n \le r-3, \\ r+1, & \text{untuk } n \text{ lainnya,} \end{cases}$$

Bukti. $C_m \odot P_n$ merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(C_m \odot P_n) = \{x_i; 1 \le i \le m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \odot P_n) = \{x_i x_{i+1}, x_m x_1; 1 \le i \le m-1\} \cup \{y_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \le i \le m; 1 \le j \le n-1\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \le i \le m; 1 \le j \le n\}$. Dengan demikian, $p = |V(C_m \odot P_n)| = m(n+1), q = |E(C_m \odot P_n)| = m(2n+1) - n, \triangle\ (C_m \odot P_n) = n+2$.

Berdasarkan Observasi 1, $\chi_r(C_m \odot P_n) \ge \min\{\triangle\ (C_m \odot P_n), r\} + 1 = \{n+2, r\} + 1$. Pembuktian ini akan dibedakan kedalam tiga kasus.

- **Kasus 1:** $m = 3 \mod 3$.

  Berikan pewarnaan titik pada $C_m \odot P_n$, yaitu $c : V(C_m \odot P_n) \to \{1, 2, \dots, k\}$ dimana $n \ge 2$ dan $m \ge 3$, dengan fungsi sebagai berikut:

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1 \mod 3, \\ 2, & \text{untuk } i = 2 \mod 3, \\ 3, & \text{untuk } i = 3 \mod 3, \end{cases}$$

dimana $1 \leq i \leq m$.

$$c(y_{i,j}) = \left\{ \begin{array}{ll} 3 + j \mod (r-2), & \text{untuk } 1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

- **Kasus 2:** $m = 4 \mod 3$.
  Berikan pewarnaan titik pada $C_m \odot P_n$, yaitu $c : V(C_m \odot P_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dimana $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, dengan fungsi sebagai berikut:

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1 \mod 3, 1 \leq i \leq m-1, \\ 2, & \text{untuk } i = 2 \mod 3, 1 \leq i \leq m-1, \\ 3, & \text{untuk } i = 3 \mod 3, 1 \leq i \leq m-1, \\ 4, & \text{untuk } i = m. \end{cases}$$

$$c(y_{i,j}) = \begin{cases} 3 + j \mod (r-2), & \text{untuk } 1 \leq j \leq n-r+3, 2 \leq m \leq m-2, \\ (c(x_i) + j \mod 3) \mod 4, & \text{untuk } 1 \leq j \leq n-r+3, m = 1, m-1, m. \\ j - n + r + 1, & \text{untuk } n-r+4 \leq j \leq n. \end{cases}$$

- **Kasus 3:** $m = 5 \mod 3$.
  Berikan pewarnaan titik pada $C_m \odot P_n$, yaitu $c : V(C_m \odot P_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dimana $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, dengan fungsi sebagai berikut:

$$c(x_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } m = 5, \\ i \mod 3, & \text{untuk } 1 \leq m \leq m-8, \\ i \mod 4, & \text{untuk } m-7 \leq m \leq m. \end{cases}$$

  dimana $1 \leq i \leq n$.

$$c(y_{i,j}) = \begin{cases} 3 + j \mod (r-2), & \text{untuk } 1 \leq j \leq n-r+3, 2 \leq m \leq m-2, \\ (c(x_i) + j \mod 3) \mod 4, & \text{untuk } 1 \leq j \leq n-r+3, m = 1, m-1, m. \\ j - n + r + 1, & \text{untuk } n-r+4 \leq j \leq n. \end{cases}$$

  dimana $1 \leq i \leq n$.

Dengan menggunakan fungsi pada ketiga kasus di atas, terlihat bahwa bilangan kromatik r-dinamis pada hasil operasi $C_m \odot P_n$ sesuai dengan yang tertulis pada Teorema 2.

Teorema 3 *Misalkan G merupakan graf hasil operasi korona antara P_n dan C_m, yaitu $P_n \odot C_m$. Jika $n \geq 2$, $m \geq 3$, dan $r \geq 6$ maka bilangan kromatik r-dinamis graf G adalah sebagai berikut:*

$$\chi_r(P_n \odot C_m) = \begin{cases} m + 3, & \text{untuk } 3 \leq m \leq r-3, \\ r + 1, & \text{untuk } m \text{ lainnya}, \end{cases}$$

Bukti. $P_n \odot C_m$ merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(P_n \odot C_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \odot C_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j} y_{i,j+1}, y_{i,m} y_{i,1}; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq$

$n-1\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$. Dengan demikian, $p = |V(P_n \odot C_m)| = n(m+1), q = |E(P_n \odot C_m)| = n(2m+1)-1, \triangle\ (P_n \odot C_m) = m+2$.

Berdasarkan Observasi 1, $\chi_r(P_n \odot C_m) \geq \min\{\triangle\ (P_n \odot C_m), r\}+1 = \{m+2, r\}+1$. Berikan pewarnaan titik pada $P_n \odot C_m$, yaitu $c : V(P_n \odot C_m) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ dimana $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, dengan fungsi sebagai berikut:

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1 \mod 3, \\ 2, & \text{untuk } i = 2 \mod 3, \\ 3, & \text{untuk } i = 3 \mod 3, \end{cases}$$

dimana $1 \leq i \leq m$.

$$c(y_{i,j}) = \begin{cases} c(x_i) + j \mod (r+1), m \leq m-1, & \\ c(x_i) + j \mod 5, & \text{untuk } 1 \leq j \leq m-r+4, m \geq r, \\ j - n + r + 1, & \text{untuk } m-r+5 \leq j \leq m, m \geq r. \end{cases}$$

dimana $1 \leq i \leq n$.

Dengan menggunakan fungsi pada ketiga kasus di atas, terlihat bahwa bilangan kromatik r-dinamis pada hasil operasi $P_n \odot C_m$ sesuai dengan yang tertulis pada Teorema 3.

Penutup

Telah dilakukan penelitian terkait dengan bilangan kromatik r-dinamis pada hasil operasi graf sikel dan lintasan, yakni untuk *join* graf dan korona. Hasil penelitian yang dilakukan juga dapat dikembangkan pada hasil operasi graf-graf lainnya sehingga didapat karakterisasi bilangan kromatik r-dinamis pada hasil operasi graf.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1982. *Graph Theory with Application.* USA: Elsevier Science Publishing Co., Inc.

[2] Chartrand, Gary dan Zhang, Ping. 2009. *Chromatic Graph Theory.* USA: CRC Press.

[3] Desy Tri Puspasari, Dafik Dafik, Slamin Slamin, Pewarnaan Titik pada Graf Khusus: Operasi dan Aplikasinya, **Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik**, **Vol. 2, Issue 1**, (2014), 50-58

[4] Eka W.M., Devi dan Dafik. 2014. *Pelabelan Total Super (a,d)-sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Bintang dengan Teknik Pewarnaan Titik.* Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Vol. 1 No. 1: Universitas Jember.

[5] Gallian, Joseph A. 2014. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics 17.

[6] Harsya Alfian Yulia, Dafik Dafik, Ika Hesti Agustin, Bilangan Kromatik pada Pengoperasian Graf Lintasan dengan Graf Lingkaran, **Proceeding of International Workshop on Mathematics UAD**, (2014), 1-18

[7] Jahanbekam, Sogol, dkk. *On r-dynamic Coloring of Graphs*, to appear.

[8] Kang, Ross, dkk. *On r-dynamic Coloring of Grids*, to appear.

[9] Kim, Seong-Jin, dkk. 2012. *Dynamic Coloring and List Dynamic Coloring of Planar Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Seoul: Konkuk University.

[10] Lai, Hong-Jian dan Montgomery, Bruce. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Morgantown: West Virginia University.

[11] Lai, Hong-Jian, dkk. 2003. *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. Ars Combinatoria 68 pp. 193-201.

[12] Taherkhani, A. 2014. *r-Dynamic Chromatic Number of Graphs*. preprint (arXiv:1401.6470v1 [math.CO], 24 Jan 2014).