



um  
The Learning  
University

# SERTIFIKAT

3.6.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada  
**SISKA BINASTUTI**  
Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

## PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya  
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa  
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

### Judul Makalah

Super  $(a, d)$  - Face Antimagic Total Labeling of Shackle  $(C_5, e, n)$  Graph

Malang, 5 September 2015



Dr. Markus Diantoro, M.Si

Dr. Markus Diantoro, M.Si

NIP. 196612211991031001



Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si

NIP. 196609061992031004

**Pelabelan Total Super  $(a, d)$  - Face Antimagic  
dari Graf Shackle  $(C_5, e, n)$   
(*Super  $(a, d)$  - Face Antimagic Total Labeling  
of Shackle  $(C_5, e, n)$  Graph*)**

**Siska Binastuti<sup>1,2</sup>, Dafik<sup>1,2</sup>, Arif Fatahillah<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Mathematics Education Department - University of Jember

<sup>2</sup>CGANT - University of Jember

siskabinastuti@rocketmail.com, d.dafik@gmail.com,

fatahillah767@gmail.com

**Abstract**

Let  $G$  be a simple graph of order  $p$ , size  $q$  and face  $r$ . The graph  $G$  is called a super  $(a, d)$  - face antimagic total labeling, if there exist a bijection  $f : V(G) \cup E(G) \cup F(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q + r\}$  such that the set of  $s$ -sided face weights,  $W_s = \{a_s, a_s + d, a_s + 2d, \dots, a_s + (r_s - 1)d\}$  form an arithmetic sequence with first term  $a$ , common difference  $d$ , where  $a$  and  $d$  are positive integers  $s$  and  $r_s$  is the number of  $s$ -sided faces. Such a graph is called super if the smallest possible labels appear on the vertices. The type of Face Antimagic Labeling is  $(1, 1, 1)$ . In this paper we will study a Super  $(a, d)$  - Face Antimagic of Shackle  $(C_5, e, n)$  Graph and we will use it to develop a polyalphabetic chryptosystem.

**Keywords:** Super  $(a, d)$ -face antimagic total labeling, face antimagic labeling.

## Introduction

Sejak dua ratus tahun lalu, telah ada pokok bahasan teori graf yang memiliki terapan sampai saat ini. Teori graf tersebut digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek. Menurut catatan sejarah, seorang matematikawan Swiss, L.Euler pada tahun 1736 membuat jurnal pertama kali tentang teori graf yang membahas tentang masalah jembatan Konigsberg. Dengan perubahan jaman, teori graf semakin luas dan beragam. Seorang matematikawan Koi Weng Ling memiliki konsep tentang pelabelan.([14])

Terdapat beberapa jenis pelabelan dalam graf, salah satunya yaitu pelabelan total face pada graf. Sebuah pelabelan face graf disebut super-antimagic jika untuk setiap bilangan bulat positif  $s$ ,  $s$ -sisi bobot wajah membentuk deret aritmetika dengan sebuah beda. ([5],[2],[4],[6],[7],[8],[4],[10],[13])

Batasan pada pelabelan total face dari Graf  $G = (V, E, F)$  yaitu graf tanpa loop dan sisi ganda, di mana  $V$ ,  $E$  dan  $F$  menyatakan titik, sisi dan *face*(wajah), dimana  $|V(G)| = p$ ,  $|E(G)| = q$  dan  $|F(G)| = r$  adalah jumlah titik, sisi dan *face* (wajah). Pelabelan total face dari suatu graf memiliki label tipe  $(1, 1, 1)$  yaitu dengan memberikan label dari  $1, 2, \dots, p + q + r$  ke titik, sisi dan *face* (wajah) dari graf  $G$  sedemikian hingga bahwa

setiap  $V, E$  dan  $F$  menerima tepat satu label dan setiap nomor yang digunakan tepat sekali sebagai label. Hasil penelitian terkait ini terdapat pada [7, 2, 8].

Akhir-akhir ini telah berkembang aplikasi dari pelabelan graf yaitu pengembangan kriptosistem polyalpbabetic. Pengembangan kriptosistem polyalpbabetic tersebut dapat diaplikasikan pada pelabelan total selimut satu graf dalam cryptography.([14]) Artikel ini berkaitan dengan masalah pelabelan titik, sisi dan *face* (wajah) dari graf. Sebuah bobot wajah adalah jumlah dari label wajah dan label titik dan tepi sekitar wajah itu.([10],[12],[13])

Makalah ini mengkaji keberadaan super  $d$ -antimagic pelabelan untuk graf Shackle  $(C_5, e, n)$  pada  $d$  tertentu. Dalam hal ini, artikel ini dikhususkan untuk belajar super  $(a, d)$  face antimagic pelabelan tipe  $(1, 1, 1)$  untuk Graf Shackle  $(C_5, e, n)$ .

## Useful Lemma

Graf shackle  $(C_5, e, n)$  adalah graf yang memiliki  $V(E) = \{x_i, y_i, z_j, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n\}$ ,  $E(H) = \{x_i x_{i+1}, y_i z_i, y_{i+1} z_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i, 1 \leq i \leq n+1\}$ ,  $p_G = |V| = 3n+2$ ,  $q_G = |E| = 4n+1$ ,  $p_H = 5$ , dan  $q_H = 5$ . Berikut Gambar 1 dari Graf *Shackle*  $(C_5, e, n)$ .

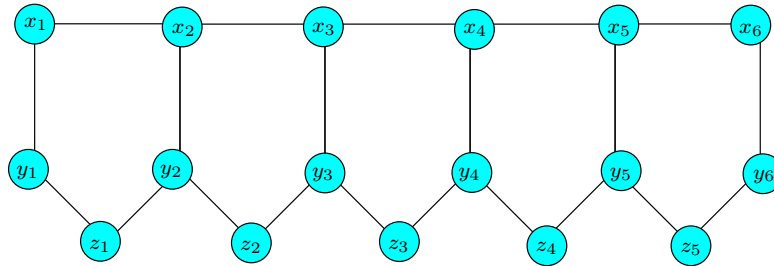


Figure 1: Graf *Shackle*  $(C_5, e, n)$

Lemma yang digunakan pada pelabelan total face dari graf Shackle  $(C_5, e, n)$ , sebagai berikut :([7])

Jika graf  $G_n(V, E)$  adalah super  $(a, d)$  face antimagic total maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{r - 1}$$

untuk  $s = |G_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$

**Bukti.** dimana  $a$  merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku ;

$$1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) + (p_G + q_G + 1) \leq a$$

$$\frac{p_H}{2}(1 + p_H) + \frac{q_H}{2}(p_G + 1 + p_G + q_H) + (p_G + q_G + 1) \leq a$$

$$\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + (p_G + q_G + 1) \leq a$$

Sedangkan nilai terbesar berlaku

$$\begin{aligned}
(r-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + r) - a \\
(r-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + r) - \\
&\quad \left( \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + (p_G + q_G + 1) \right) \\
(r-1)d &\leq p_G p_H - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + r - \left( \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + 1 \right) \\
(r-1)d &\leq p_G p_H - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + r - \frac{p_H}{2} - \frac{p_H^2}{2} - \frac{q_H}{2} - \frac{q_H^2}{2} - 1 \\
(r-1)d &\leq p_H p_G + q_H q_G - \frac{2p_H^2}{2} - \frac{2q_H^2}{2} - 1 + r \\
(r-1)d &\leq p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 - 1 + r \\
(r-1)d &\leq (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + r \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + r}{r - 1}
\end{aligned}$$

Jadi, untuk  $s = |H_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$  terbukti bahwa

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + r}{r - 1}$$

Sehingga lemma pada Graf Shackle  $(C_5, e, n)$ , dengan  $p_G = |V|=3n+2$ ,  $q_G = |E|=4n+1$ ,  $p_H = 5$ , dan  $q_H = 5$  sebagai berikut;

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{((3n+2) - 5)5 + ((4n+1) - 5)5 - 1 + n}{n - 1} \\
d &= \frac{(3n-3)5 + (4n-4)5 - 1 + n}{n - 1} \\
d &= \frac{(n-1)3.5 + (n-1)4.5 + (n-1)}{n - 1} \\
d &= \frac{(n-1)15 + (n-1)20 + (n-1)1}{n - 1} \\
d &= \frac{(n-1)(15 + 20 + 1)}{n - 1} \\
d &\leq 36
\end{aligned}$$

## The Results

### Super Face $d$ -Antimagic Total Labeling

Dalam bagian ini akan disajikan pelabelan super face  $d$ -antimagic dengan tipe  $(1, 1, 1)$  untuk Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dan beberapa  $d$  yang mungkin. Hasil dari penelitian ini berupa teorema untuk  $d = 1, 2, 3, 4, 5$  Hasil dari penelitian ini didapatkan teorema terkait face labeling graf untuk Graf Shackle  $(C_5, e, n)$

◇ **Teorema 0.1.** *Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(40n + 26, 1)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .*

**Bukti.** Labeli titik Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_1$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= i; 1 \leq i \leq n+1 \\ f(y_i) &= n+i+1; 1 \leq i \leq n+1 \\ f(z_i) &= 2n+i+2; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_1$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_1 : V(C_5, e, n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n+2\}$ . Misal  $w_{f_1}$  adalah bobot sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_1} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n.$$

Labeli sisi  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_1$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(y_{i+1}z_i) &= 5n - 2i + 3; 1 \leq i \leq n, \\ f(y_i z_i) &= 5n - 2i + 4; 1 \leq i \leq n, \\ f(x_i x_{i+1}) &= 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n, \\ f(x_i y_i) &= 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n+1, \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_1$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_1 : E(C_5, e, n) \rightarrow \{3n+3, 3n+4, \dots, 7n+3\}$ . Misal  $W_{f_1}$  adalah bobot total sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $W_{f_1} = 33n + 22; 1 \leq i \leq n$

Labeli face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_1$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_1(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_1$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_1 : f(C_5, e, n) \rightarrow \{7n+4, 7n+5, \dots, 8n+3\}$ . Misal  $WF_{f_1}$  adalah bobot total face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $WF_{f_1} = w_{f_1} + W_{f_1} + f_1(f_i) = 40n + 25 + i$ . Apabila  $WF_{f_1}$  diuraikan untuk  $1 \leq i \leq n$  maka diperoleh himpunan  $WF_{f_1} = \{40n+26, 40n+27, \dots, 41n+25\}$ . Terbukti bahwa Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(40n+26, 1)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$

◇ **Teorema 0.2.** *Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(38n + 28, 2)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .*

**Bukti.** Labeli titik Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_2$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= i; 1 \leq i \leq n+1 \\ f(y_i) &= n+i+1; 1 \leq i \leq n+1 \\ f(z_i) &= 2n+i+2; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_2$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_2 : V(C_5, e, n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 2\}$ . Misal  $w_{f_2}$  adalah bobot sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_2} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n.$$

Labeli sisi  $C_n$  dengan fungsi  $f_2$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(y_{i+1}z_i) = 4n - i + 3,$$

$$f(y_i z_i) = 5n - i + 3,$$

$$f(x_i x_{i+1}) = 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n,$$

$$f(x_i y_i) = 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n + 1,$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_2$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_2 : E(C_5, e, n) \rightarrow \{3n + 3, 3n + 4, \dots, 7n + 3\}$ . Misal  $W_{f_2}$  adalah bobot total sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $W_{f_2} = 31n + i + 23; 1 \leq i \leq n$

Labeli face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_2$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_2(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_2$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_2 : f(C_5, e, n) \rightarrow \{7n + 4, 7n + 5, \dots, 8n + 3\}$ . Misal  $WF_{f_2}$  adalah bobot total face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $WF_{f_2} = w_{f_2} + W_{f_2} + f_2(f_i) = 38n + 2i + 26$ . Apabila  $WF_{f_2}$  diuraikan untuk  $1 \leq i \leq n$  maka diperoleh himpunan  $WF_{f_2} = \{38n + 28, 38n + 30, \dots, 420n + 26\}$ . Terbukti bahwa Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(38n + 28, 2)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .

◇ **Teorema 0.3.** *Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(39n + 27, 3)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .*

**Bukti.** Labeli titik Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_3$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x_i) = i; 1 \leq i \leq n + 1$$

$$f(y_i) = n + i + 1; 1 \leq i \leq n + 1$$

$$f(z_i) = 2n + i + 2; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_3$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_3 : V(C_5, e, n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 2\}$ . Misal  $w_{f_3}$  adalah bobot sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_3} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n.$$

Labeli sisi  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_3$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(y_{i+1}z_i) = 4n - i + 3,$$

$$\begin{aligned}
f(y_i z_i) &= 5n - i + 3, \\
f(x_i x_{i+1}) &= 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n, \\
f(x_i y_i) &= 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n + 1,
\end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_3$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_2 : E(C_5, e, n) \rightarrow \{3n + 3, 3n + 4, \dots, 7n + 3\}$ . Misal  $W_{f_3}$  adalah bobot total sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $W_{f_3} = 32n + 2i + 21; 1 \leq i \leq n$

Labeli face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_3$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_3(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_3$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_3 : f(C_5, e, n) \rightarrow \{7n + 4, 7n + 5, \dots, 8n + 3\}$ . Misal  $WF_{f_3}$  adalah bobot total face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $WF_{f_3} = w_{f_2} + W_{f_2} + f_2(f_i) = 39n + 3i + 24$ . Apabila  $WF_{f_3}$  diuraikan untuk  $1 \leq i \leq n$  maka diperoleh himpunan  $WF_{f_3} = \{39n + 27, 39n + 30, \dots, 42n + 24\}$ . Terbukti bahwa Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(39n + 27, 3)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .

◇ **Teorema 0.4.** *Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(37n + 29, 4)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .*

**Bukti.** Labeli titik Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_4$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= i; 1 \leq i \leq n + 1 \\
f(y_i) &= n + i + 1; 1 \leq i \leq n + 1 \\
f(z_i) &= 2n + i + 2; 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_4$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_4 : V(C_5, e, n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 2\}$ . Misal  $w_{f_4}$  adalah bobot sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $w_{f_4} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n$ .

Labeli sisi  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_4$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(y_{i+1} z_i) &= 4n - i + 2; 1 \leq i \leq n, \\
f(y_i z_i) &= 4n - i + 3; 1 \leq i \leq n, \\
f(x_i x_{i+1}) &= 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n, \\
f(x_i y_i) &= 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n + 1,
\end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_4$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_4 : E(C_5, e, n) \rightarrow \{3n + 3, 3n + 4, \dots, 7n + 3\}$ . Misal  $W_{f_4}$  adalah bobot total sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $W_{f_4} = 29n + 5i + 21; 1 \leq i \leq n$ . Labeli face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_4$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_4(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$



Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_4$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_4 : f(C_5, E, n) \rightarrow \{7n + 4, 7n + 5, \dots, 8n + 3\}$ . Misal  $WF_{f_4}$  adalah bobot total face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $WF_{f_4} = w_{f_4} + W_{f_4} + f_4(f_i) = 37n + 4i + 25$ . Apabila  $WF_{f_4}$  diuraikan untuk  $1 \leq i \leq n$  maka diperoleh himpunan  $WF_{f_4} = \{37n + 29, 37n + 33, \dots, 41n + 25\}$ . Terbukti bahwa Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(37n + 29, 4)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$

◇ **Teorema 0.5.** *Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(38n + 28, 5)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .*

**Bukti.** Labeli titik Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_5$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= i; 1 \leq i \leq n + 1 \\ f(y_i) &= n + i + 1; 1 \leq i \leq n + 1 \\ f(z_i) &= 2n + i + 2; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_5$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_5 : V(C_5, e, n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 2\}$ . Misal  $w_{f_5}$  adalah bobot sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $w_{f_5} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n$ .

Labeli sisi  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_5$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(y_{i+1}z_i) &= 4n - i + 2; 1 \leq i \leq n, \\ f(y_i z_i) &= 4n - i + 3; 1 \leq i \leq n, \\ f(x_i x_{i+1}) &= 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n, \\ f(x_i y_i) &= 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n + 1, \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_5$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_5 : E(C_5, E, n) \rightarrow \{3n + 3, 3n + 4, \dots, 7n + 3\}$ . Misal  $W_{f_5}$  adalah bobot total sisi super face antimagic total Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $W_{f_5} = 31n + 4i + 20; 1 \leq i \leq n$ . Labeli face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  dengan fungsi  $f_5$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_5(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa  $f_5$  adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan  $f_5 : f(C_5, e, n) \rightarrow \{7n + 4, 7n + 5, \dots, 8n + 3\}$ . Misal  $WF_{f_5}$  adalah bobot total face Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  untuk  $n \geq 5$ , maka dapat diturunkan sebagai berikut:  $WF_{f_5} = w_{f_5} + W_{f_5} + f_5(f_i) = 38n + 5i + 23$ . Apabila  $WF_{f_5}$  diuraikan untuk  $1 \leq i \leq n$  maka diperoleh himpunan  $WF_{f_5} = \{38n + 28, 38n + 33, \dots, 43n + 23\}$ . Terbukti bahwa Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(38n + 28, 5)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$ .



## Useful Application

Berdasarkan hasil penelitian diatas,terdapat aplikasi dari graf tersebut yaitu tentang pengkodean yang sekarang sedang marak berkembang.Akhir-akhir ini telah berkembang aplikasi dari pelabelan graf yaitu pengembangan kriptosistem *polyalphabetic*. Misalnya pada kalimat rahasia yang akan dikirim adalah pin atm mama adalah 551212. Permasalahan ini termasuk bagian aplikasi total pelabelan selimut satu graf dalam *cryptography*. Pelabelan selimut graf merupakan bagian dari pelabelan total Super  $(a, d)$ -face *antimagic*. *Cryptography* adalah sebuah teknik merubah dari *plaintext* (kalimat pesan) ke dalam *ciphertext* (kalimat rahasia yang akan dikembangkan). *Ciphertext* merupakan bentuk pesan yang tersandi ke bentuk lain yang tidak dapat dipahami. Pelabelan yang digunakan untuk mengubah pesan tersebut yaitu pelabelan total selimut pada Graf *Shackle*  $C_n$  seperti pada gambar 2 dengan  $d = 2$ .

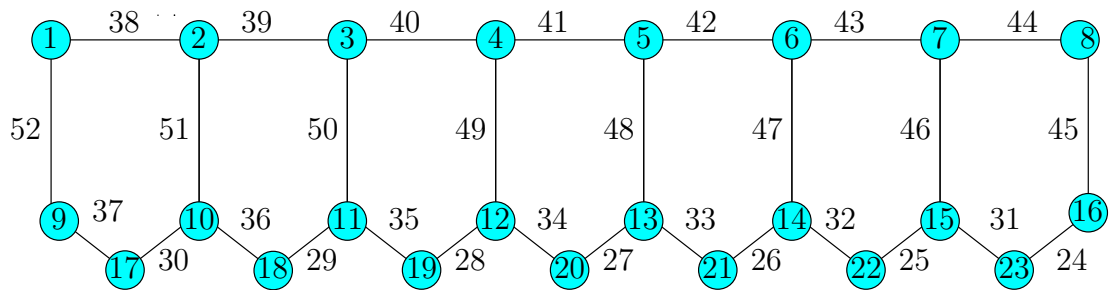


Figure 2: Pelabelan selimut Graf *Shackle*  $(C_5, e, n)$

Setelah melabeli Graf *Shackle*  $(C_5, e, n)$ , dilanjutkan dengan mendata huruf dan angka yang digunakan dalam pesan dengan mengabaikan spasi dan tanda baca. Angka yang digunakan dalam pesan di ubah dalam bentuk alphabet yaitu menjadi "pin atm mama adalah 551212". Huruf yang digunakan adalah a,d,h, i,l,m,n,p,s,t,u . Gambar 3 adalah diagram pohon yang berakar di label 3 dengan dilengkapi label sisinya.

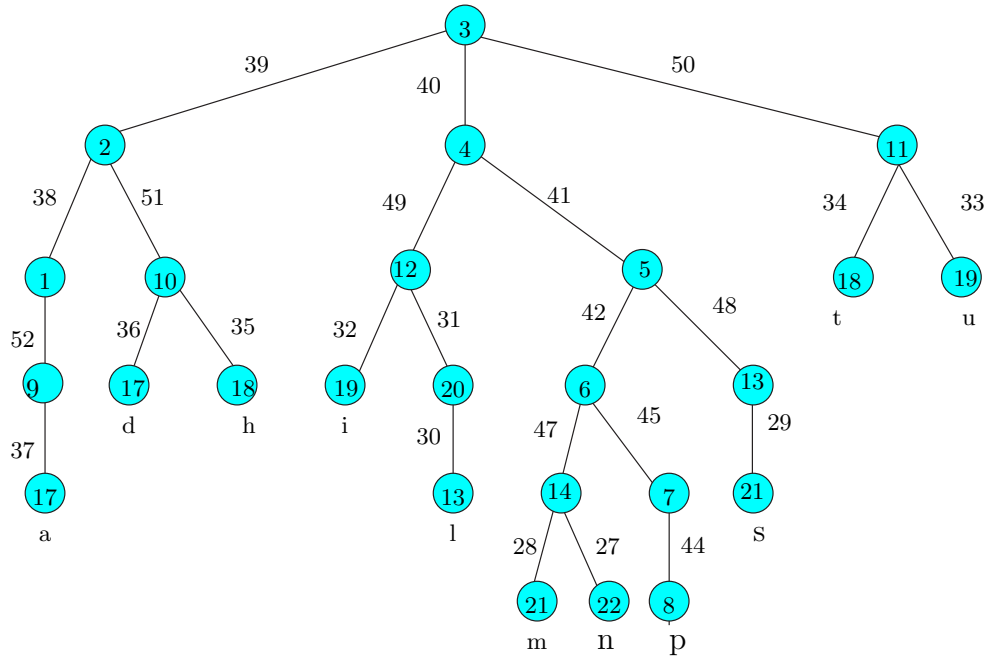


Figure 3: Diagram Tree untuk membangun ciphertext

Letakkan huruf-huruf yang digunakan dalam pesan sesuai dengan abjad (abjad awal diletakkan di ujung kanan), dan urutkan label sisinya. Kemudian pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi  $a = \text{mod}(39385237, 26) = 21$ ,  $d = \text{mod}(395136, 26) = 14$ ,  $h = \text{mod}(395135, 26) = 13$ ,  $i = \text{mod}(404932, 26) = 8$ ,  $l = \text{mod}(40493130, 26) = 2$ ,  $m = \text{mod}(4041424728, 26) = 16$ ,  $n = \text{mod}(4041424727, 26) = 15$ ,  $p = \text{mod}(4041424544, 26) = 14$ ,  $s = \text{mod}(40414829, 26) = 13$ ,  $t = \text{mod}(5034, 26) = 16$ , dan  $u = \text{mod}(5033, 26) = 15$ .

Kemudian hasil modulo tersebut dikombinasikan dengan label titik terakhir untuk menghindari terjadinya kesamaan bilangan diantara *ciphertext*. Dituliskan sebagai berikut  $a = 1721$ ,  $d = 1714$ ,  $h = 1813$ ,  $i = 198$ ,  $l = 132$ ,  $m = 2116$ ,  $n = 1515$ ,  $p = 2314$ ,  $s = 2313$ ,  $t = 1816$ ,  $u = 1915$ . Kombinasi titik dan sisi tersebut di ubah dalam bentuk modulo 26, sehingga diperoleh *ciphertext* yaitu a=g, d=y, h=t, i=q, l=c, m=k, n=h, p=a, s=z, t=w, u=r. Oleh karena itu, dengan menggunakan proses substitusi pesan kedalam *ciphertext* tanpa spasi dan tanda baca, maka *ciphertext* pesan "pin atm mama adalah 551212" menjadi "aqhgwkkkggygcgtcqkqcqkgzgwryrgzgwryrg". ;

## Concluding Remarks

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat pelabelan super face  $d$ -antimagic dengan tipe  $(1, 1, 1)$  untuk Graf Shackle  $(C_5, e, n)$

- Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(40n + 26, 1)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$

- Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(38n + 28, 2)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$
- Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(39n + 27, 3)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$
- Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(37n + 29, 4)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$
- Graf Shackle  $(C_5, e, n)$  memiliki pelabelan super  $(38n + 28, 5)$  face antimagic total untuk  $n \geq 5$

## References

- [1] AK Purnapraja, R Hidayat, Cycle-Super Antimagicness of Connected and Disconnected Tensor Product of Graphs, *Procedia Computer Science*, **74**, (2015), 9399
- [2] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Baca, On super  $(a; d)$ -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, 309 (2009), 4909-4915..
- [3] Dafik Dafik, A.I. Kristiana, S. Setiawani, K.M.F. Azizah, Generalized Shackled of Fans is a Super  $(a, d)$ -edge-antimagic Total Graph, **Journal of Graph Labeling**, **Vol. 2, Issue 1**, (2016), 59-68
- [4] K.A. Sugeng, M. Miller, Y. Lin and M. Baca, Face antimagic labelings of prisms, *Utilitas Math.*, 71 (2006), 269-286.
- [5] M. Baca, F. Bertault, J.A. MacDougall, M. Miller, R. Simanjuntak and Slamini, Vertex-antimagic total labelings of graphs, *Discuss Math.*, Graph Theory 23 (2003), 67-83.
- [6] M. Baca, F. Bashir and A. Semanicova, Face antimagic labelings of antiprisms, *Utilitas Math.*, (To appear)
- [7] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat, 2007.
- [8] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Baca, On super  $(a; d)$ -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math*, (To appear).
- [9] Nur Rahmawati, Dekomposisi graf Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall, 2008.
- [10] Y. Lin, Slamini, M. Baca and M. Miller, On  $d$ -antimagic labelings of prisms, *Ars Combin*, 72 (2004), 6576.
- [11] Dafik, Alfin Fajriatin, Kunti Miladiyah F, Saintifika (Jurnal Ilmu Pendidikan MIPA dan MIPA), 14 No. 1, (2012) (106 - 118).
- [12] Y. Lin and K.A. Sugeng, Face antimagic labelings of plane graphs  $P_a^b$ , *Ars Combin*. 80 (2006), (259-273).

- [13] Baca, M., Baskoro, E.T., Cholily,, Y.M., Jendrol, S., Lin, Y., Miller, L., Ryan, J., Simanjuntak, R., Slamin., and Sugeng, K.A. (2005), Conjectures and open problems on face antimagic evaluations on graphs. , MIHMI , 11, No. 2, (175-192).
- [14] D.B. West, An Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, 1996.