SERTIFIKAT

3.5.9/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada

NOVRI ANGGRAENI

Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

Super (a,d)-H-Antimagic Total Covering of Amalgamation Wheel Graph for Construction of Cryptosystem Polyalphabetic

Malang, 5 September 2015

[illegible] Universitas Negeri Malang

[illegible] Markus Diantoro, M.Si
NIP 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si
NIP 196509061992031004

Super $(a, d) - \mathcal{H}-$Antimagic Total Selimut pada Amalgamasi Graf Roda untuk Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic
(Super $(a, d) - \mathcal{H}-$Antimagic Total Covering of Amalgamation Wheel Graph for Constructing of Polyalphabetic Cryptosystem)

Novri Anggraeni[1], Dafik[1,3], Slamin[2,3]

[1]Mathematics Education Department - University of Jember
[2]System Information Department - University of Jember
[3]CGANT- University of Jember
novrianggraeni93@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, slamin@unej.ac.id

2010 Mathematics Subject Classification: 05C78

Abstract

A graph $G(V, E)$ has a $\mathcal{H}$-covering if every edge in E belongs to a subgraph of G isomorphic to $\mathcal{H}$. An (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering is a total labeling λ from $V(G) \cup E(G)$ onto the integers $\{1, 2, 3, ..., |V(G) \cup E(G)|\}$ with the property that, for every subgraph A of G isomorphic to $\mathcal{H}$ the $\sum A = \sum_{v \in V(A)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(A)} \lambda(e)$ forms an arithmetic sequence. A graph that admits such a labeling is called an (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering. In addition, if $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, ..., |V|\}$, then the graph is called $\mathcal{H}$-super antimagic graph. In this paper we study $\mathcal{H}$-covering of amalgamation of wheel graph and also to develop polyalphabetic chiper of cryptosystem from a secret massage.

Keywords: S$\mathcal{H}$-super antimagic total covering, wheel graph, and *cryptosystem.*

Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi (iptek) yang semakin maju dan kompleks membawa perubahan diberbagai bidang ilmu pengetahuan. Perkembangan iptek yang semakin maju ini dilandasi oleh perkembangan ilmu pengetahuan matematika. Dimana konsep dan prinsip matematika banyak digunakan sebagai alat bantu dalam penerapan bidang-bidang ilmu lain maupun dalam perkembangan matematika itu sendiri. Salah satu cabang ilmu matematika yang dapat dikembangkan adalah matematika diskrit yang memuat teori graf dalam kajiannya. Teori graf memiliki beragam aplikasi diberbagai bidang ilmu dalam kehidupan sehari-hari seperti pemecahan masalah jaringan komputer, pencarian rute terpendek, jaringan telepon.

Pelabelan antimagic adalah pengembangan dari pelabelan magic yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990) [9]. Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G yang memiliki verteks sebanyak $v_G = |V| = |V(G)|$ dan $e_G = |E| = |E(G)|$ disebut antimagic, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan $\{1, 2, \ldots, e_G\}$ sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total $\mathcal{H}-$magic dengan menggunakan konsep selimut-$\mathcal{H}$. Suatu selimut dari G adalah $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf $\mathcal{H}_\rangle$, untuk suatu $i\epsilon$ $\{1, 2, ..., k\}$. Jika untuk setiap $i\epsilon\{1, 2, \ldots, k\}$, $\mathcal{H}_\rangle$ isomorfik dengan suatu subgraf H, maka $\mathcal{H}$ dikatakan suatu selimut$-\mathcal{H}$ dari G.

Salah satu penelitian tentang pelabelan total selimut pernah dikembangkan oleh Inayah dkk (2009) [10], yaitu pelabelan selimut $\mathcal{H}-$antimagic, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}-$antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlah yang merupakan deret aritmatika $\{a, a + d, a + 2d+, \ldots, +a + (t-1)d\}$. Pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}-$antimagic dikatakan sebagai fungsi bijektif karena label selimut pada suatu graf tersebut selalu berbeda dan berurutan. Hasil-hasil penelitian terkait ini dapat ditemukan di [2, 14].

Pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}-$antimagic total selimut pada amalgamasi graf roda merupakan dasar pengembangan dari kriptosistem *polyalphabetic chiper*. *Polyalphabetic chiper* merupakan salah satu teknik pengenkripsian huruf alfabet yang berbentuk teks kode rahasia dalam kriptosistem. Tujuan pengembangan kriptosistem *polyalphabetic chiper* ini adalah agar pesan atau informasi tidak dapat dimengerti maknanya oleh pihak lain yang tidak berwenang, sehingga keamanan data dan informasi dapat terjaga dengan baik.

Oleh karena itu, penelitian ini akan membuat suatu *polyalphabetic chiper* yang didasari pada pelabelan selimut pada amalgamasi graf roda. Kalimat yang akan diubah yaitu kalimat yang mengandung huruf saja. Jika terdapat kalimat yang mengandung angka maka angka tersebut akan diubah ke dalam bentuk alfabet. Artikel ini akan menjelaskan tentang total selimut pada amalgamasi graf roda. Akan ditentukan kardinalitas dan teorema-teorema tentang super antimagic total selimut, kemudian akan dikembangkan ke dalam pembuatan *polyalphabetic chiper*. Dari uraian tersebut maka penulis menulis judul artikel **"Super $(a, d) - \mathcal{H}-$Antimagic Total Covering of Amalgamation Wheel Graph for Constructing of Polyalphabetic Cryptosystem"**.

Lemma yang Digunakan

Amalgamasi graf roda adalah sebuah graf yang diperoleh dari hasil operasi graf roda berhingga yang memiliki satu titik pusat atau titik terminal. Graf ini adalah salah satu contoh graf *well-defined* yang masih belum ditemukan pelabelannya. Amalgamasi graf roda adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan $Amal(W_n, v, m)$ dengan order $n = 3$ sehingga himpunan titik $V(Amal(W_3, v, m)) = \{P\} \cup \{x_{ij}, 1 \leq i \leq$

$m, 1 \leq j \leq 3\}$ dan himpunan sisi $E(Amal(W_3, v, m)) = \{Px_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_{ij}x_{ij+1}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_{i1}x_{i3}\}$, $p_G = |V|{=}3m + 1$, $q_G = |E|{=}6m$, $p_{(Amal(W_3,v,m))} = 4$, dan $q_{(Amal(W_3,v,m))} = 6$.

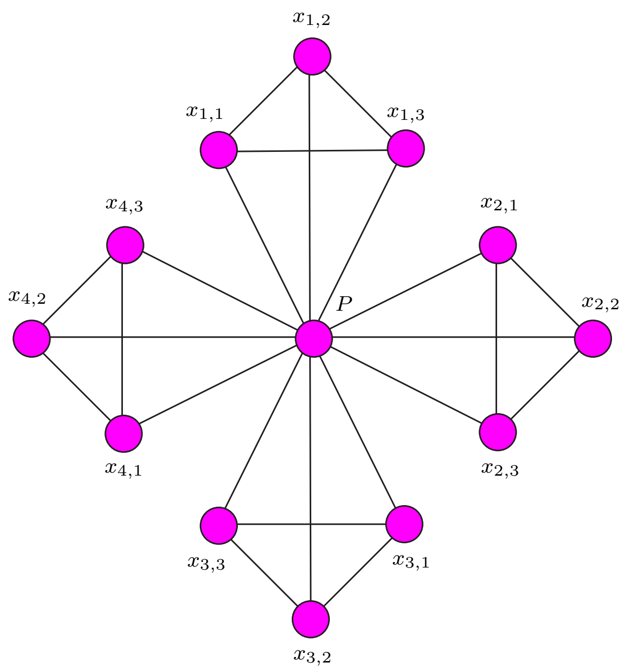

Figure 1: Amalgamasi Graf Roda $Amal(W_3,\ v,\ 4)$

Berdasarkan uraian diatas, untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total selimut (a, d)-$\mathcal{H}$-*antimagic* dapat ditentukan dengan lemma berikut:

Lemma 1 *[3] Jika sebuah graf G (V, E) adalah pelabelan total selimut $(a, d) - \mathcal{H}$-antimagic super, maka $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ untuk $s = |\mathcal{H}_\rangle|$, $H \subseteq G$ yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$, $p_G = |V(G)|$, $q_G = |E(G)|$, $p_H = |V(H)|$, $q_H = |E(H)|$.*

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, \ldots, p + q\}$. Misalkan graf $(p_G$,$q_G)$ mempunyai pelabelan total selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic super dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, p + q\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil. Karena graf G (V, E) adalah $(a, d) - \mathcal{H}$-antimagic, bobot-$\mathcal{H}$ terkecil adalah tidak lebih kecil daripada $1 + 2 + \cdots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \cdots + (p_G + q_H)$ dan bobot-$\mathcal{H}$ terbesar adalah tidak lebih besar daripada $p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \cdots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \cdots + (p_G + q_G - (q_H - 1))$, sehingga diperoleh:

untuk nilai terkecil berlaku:

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+p_H+(p_G+1)+(p_G+2)+\ldots+(p_G+q_H) &\leq a\\
\frac{p_H}{2}(1+p_H)+q_Hp_G+\frac{q_H}{2}(1+q_H) &=\\
\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+q_Hp_G+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2} &\leq a
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
a+(s-1)d &\leq p_G+p_G-1+p_G-2+...+(p_G-(p_H-1))+(p_G+q_G)\\
&\quad +(p_G+q_G-1)+(p_G+q_G-2)+...+(p_G+q_G-(q_H-1))\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(1+(p_H-1))+q_Hp_G+q_Hq_G\\
&\quad -\frac{q_H-1}{2}(1+(q_H-1))\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)\\
(s-1)d &\leq p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)-a\\
&\leq p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)-\\
&\quad (\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+q_Hp_G+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2})\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H^2}{2}+\frac{p_H}{2}+q_Hq_G-\frac{q_H^2}{2}+\frac{q_H}{2}-(\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2})\\
&= p_Hp_G+q_Hq_G-p_H^2-q_H^2\\
&= p_Hp_G-p_H^2+q_Hq_G-q_H^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H\\
d &\leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan total selimut (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic super dari berbagai famili graf. (Dafik, 2014) □

Sehingga batas atas d untuk penelitian ini adalah :

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1} \\
&\leq \frac{(3m+1-4)4 + (6m-6)6}{m-1} \\
&\leq \frac{(3m-3)4 + (6m-6)6}{m-1} \\
&\leq \frac{48m-48}{m-1} \\
&\leq \frac{48(m-1)}{m-1} \\
&\leq 48
\end{aligned}$$

Hasil Penelitian

Total Selimut

Hasil dari penelitian didapatkan beberapa teorema terkait dengan pelabelan graf terhadap super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut untuk amalgamasi graf roda berorder 3 yaitu menentukan kardinalitas, menentukan nilai beda d, menentukan fungsi titik, fungsi bobot titik, fungsi sisi, fungsi bobot total selimut, dan pembuatan *polyalphabetic* untuk suatu pesan rahasia. Berikut akan diuraikan hasil dari penelitian berupa teorema beserta pembuktiannya terkait total selimut pada amalgamasi graf roda.

Theorem 1 *Jika amalgamasi graf roda berorder 3 adalah super antimagic total selimut maka amalgamasi graf roda memiliki super* $(21m + 106, 9)$*-antimagic total selimut untuk* $m \geq 4$.

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf roda dengan fungsi f_1 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_1(P) = 1$$

$$f_1(x_{ij}) = i + (j-1)m + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 3$$

f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan amalgamasi graf roda berorder 3 ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, 3m + 1\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan label titik W_3 yang menjadi selimut pada amalgamasi graf roda, maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= (f_1(P)) + \bigcup_{j=1}^{3}(f_1(x_{i,j})) \\ &= 1 + \bigcup_{j=1}^{3}(i + (j-1)m + 1)) \\ &= 1 + (3i + 3m + 3) \\ &= 3i + 3m + 4 \end{aligned}$$

Himpunan bobot titik selimut di atas adalah $w_{f_1} = \{19, 22, 25, 28 \ldots, 3m + 16\}$ membentuk barisan aritmatika dengan $d = 3$. Karena $U_m = a + (m-1)b = 19 + (m-1)3 = 3m + 16$ maka terbukti bahwa fungsi bobot selimut $w_{f_1} = 3i$. Selanjutnya untuk membentuk total selimut, diperlukan label sisi. Labeli sisi pada amalgamasi graf roda berorder 3 dengan fungsi bijektif f_1 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(Px_{ij}) = 2m + i - mj + 1; 1 \le i \le m; 1 \le j \le 3$$

$$f_1(x_{ij}x_{ij+1}) = m + i + mj + 17; 1 \le i \le m; 1 \le j \le 2$$

$$f_1(x_{i1}x_{i3}) = m + i + 29$$

Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf roda berorder 3 berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_1} dan rumus label sisi f_1 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_1} &= w_{f_1} + \bigcup_{j=1}^{3} f_1(Px_{ij}) + \bigcup_{j=1}^{2} f_1(x_{ij}x_{ij+1}) + f_1(x_{i1}x_{i3}) \\ &= (3m + 3i + 4) + (6m + 3i + 27) + (2m + 2i + 46) + (m + i + 29) \\ &= 12m + 9i + 106 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_1} = \{12m + 115, 12m + 124, 12m + 133, 12m + 142 \ldots, 21m + 106\}$. Karena $U_m = a + (m-1)b = 12m + 115 + (m-1)9 = 21m + 106$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(21m + 106, 9) - \mathcal{H}-$antimagic super pada amalgamasi graf roda berorder 3 dinotasikan dengan $Amal(W_3, v, m)$ untuk $m \ge 4$. □

Theorem 2 *Jika amalgamasi graf roda berorder 3 adalah super antimagic total selimut maka amalgamasi graf roda memiliki super* $(21m + 103, 7)$*-antimagic total selimut untuk* $m \ge 4$.

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf roda dengan fungsi f_2 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_2(P) = 1$$

$$f_2(x_{ij}) = i + (j-1)m + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 3$$

f_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan amalgamasi graf roda berorder 3 ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, 3m+1\}$. Jika w_{f_2} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan label titik W_3 yang menjadi selimut pada amalgamasi graf roda, maka fungsi bijektif w_{f_2} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_2} &= (f_2(P)) + \bigcup_{j=1}^{3}(f_2(x_{i,j})) \\ &= 1 + \bigcup_{j=1}^{3}(i + (j-1)m + 1)) \\ &= 1 + (3i + 3m + 3) \\ &= 3i + 3m + 4 \end{aligned}$$

Himpunan bobot titik selimut di atas adalah $w_{f_2} = \{19, 22, 25, 28 \ldots, 3m+16\}$ membentuk barisan aritmatika dengan $d = 3$. Karena $U_m = a + (m-1)b = 19 + (m-1)3 = 3m + 16$ maka terbukti bahwa fungsi bobot selimut $w_{f_2} = 3i$. Selanjutnya untuk membentuk total selimut, diperlukan label sisi. Labeli sisi pada amalgamasi graf roda berorder 3 dengan fungsi bijektif f_2 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_2(Px_{ij}) = 2m + i + mj + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 3$$

$$f_2(x_{ij}x_{ij+1}) = m + i + mj + 17; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 2$$

$$f_2(x_{i1}x_{i3}) = 3m - i + 26$$

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf roda berorder 3 berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_2} dan rumus label sisi f_1 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= w_{f_2} + \bigcup_{j=1}^{3} f_2(Px_{ij}) + \bigcup_{j=1}^{2} f_2(x_{ij}x_{ij+1}) + f_2(x_{i1}x_{i3}) \\ &= (3m + 3i + 4) + (6m + 3i + 27) + (2m + 2i + 46) + (3m - i + 26) \\ &= 14m + 7i + 103 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_1} = \{14m + 110, 14m + 117, 14m + 124, 14m + 131 \ldots, 21m + 103\}$. Karena $U_m = a + (m-1)b = 14m + 110 +$

$(m-1)7 = 21m + 103$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut$(21m + 103, 7) - \mathcal{H}-$antimagic super pada amalgamasi graf roda berorder 3 dinotasikan dengan $Amal(W_3, v, m)$ untuk $m \geq 4$. □

Theorem 3 *Jika amalgamasi graf roda berorder 3 adalah super antimagic total selimut maka amalgamasi graf roda memiliki super* $(23m + 92, 5)$*-antimagic total selimut untuk* $m \geq 4$.

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf roda dengan fungsi f_3 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_3(P) = 1$$

$$f_3(x_{ij}) = i + (j-1)m + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 3$$

f_3 adalah fungsi bijektif yang memetakan amalgamasi graf roda berorder 3 ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, 3m + 1\}$. Jika w_{f_3} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan label titik W_3 yang menjadi selimut pada amalgamasi graf roda, maka fungsi bijektif w_{f_3} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_3} &= (f_3(P)) + \bigcup_{j=1}^{3}(f_3(x_{i,j})) \\ &= 1 + \bigcup_{j=1}^{3}(i + (j-1)m + 1)) \\ &= 1 + (3i + 3m + 3) \\ &= 3i + 3m + 4 \end{aligned}$$

Himpunan bobot titik selimut di atas adalah $w_{f_3} = \{19, 22, 25, 28 \ldots, 3m + 16\}$ membentuk barisan aritmatika dengan $d = 3$. Karena $U_m = a + (m-1)b = 19 + (m-1)3 = 3m + 16$ maka terbukti bahwa fungsi bobot selimut $w_{f_3} = 3i$. Selanjutnya untuk membentuk total selimut, diperlukan label sisi. Labeli sisi pada amalgamasi graf roda berorder 3 dengan fungsi bijektif f_3 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_3(Px_{ij}) = 2m + i + mj + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 3$$

$$f_3(x_{ij}x_{ij+1}) = 3m - i + mj + 14; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 2$$

$$f_3(x_{i1}x_{i3}) = 3m + i + 21$$

Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf roda berorder 3 berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka

W_{f_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_3} dan rumus label sisi f_3 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W_{f_3} &= w_{f_3} + \bigcup_{j=1}^{3} f({}_3Px_{ij}) + \bigcup_{j=1}^{2} f_3(x_{ij}x_{ij+1}) + f_3(x_{i1}x_{i3}) \\
&= (3m + 3i + 4) + (6m + 3i + 27) + (6m - 2i + 40) + (3m + i + 21) \\
&= 18m + 5i + 92
\end{aligned}
$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_3} = \{18m + 97, 18m + 102, 18m + 107, 18m + 112 \ldots, 23m + 92\}$. Karena $U_m = a + (m-1)b = 18m + 97 + (m-1)5 = 23m + 92$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(23m+92, 5)-\mathcal{H}-$antimagic super pada amalgamasi graf roda berorder 3 dinotasikan dengan $Amal(W_3,\ v,\ m)$ untuk $m \geq 4$. □

Aplikasi

Salah satu aplikasi pelabelan graf seperti pelabelan total selimut dapat digunakan dalam pengembangan kriptosistem *polyalphabetic chiper*. Misalnya kalimat rahasia yang akan dikirim adalah "2011 adalah PIN brankas Papa". Permasalahan ini adalah termasuk bagian aplikasi total selimut dalam *cryptography*. *Cryptography* adalah sebuah teknik merubah *plaintext* (kalimat pesan) ke dalam *chipertext* (kalimat rahasia yang akan dikembangkan) [13]. Pelabelan total selimut yang akan digunakan untuk merubah pesan tersebut adalah amalgamasi graf roda ($Amal(W_n, v, m)$)dengan $d = 9$.

Setelah melakukan pelabelan pada amalgamasi graf roda, dilanjutkan dengan mendata huruf dan angka yang digunakan dalam pesan dengan mengabaikan spasi dan tanda baca. Angka yang digunakan dalam pesan diubah kedalam bentuk alfabet yaitu "dua nol satu satu adalah pin brankas papa". Huruf yang akan digunakan dalam pesan adalah a, b, d, h, i, k, l, n, o, p, r, s, t, dan u. Huruf-huruf tersebut akan disusun membentuk diagram pohon (*tree diagram*) yang berakar pada label 1 (titik terminal pada amalgamasi graf roda) dengan dilengkapi label sisi dan label titik sedemikian hingga total selimutnya membentuk barisan aritmatika.

Letakkan huruf-huruf yang digunakan dalam pesan sesuai dengan urutan abjad (peletakkan abjad dimulai dari posisi paling kiri) dan urutkan label sisinya. Kemudian pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 yang mengkombinasikan label titik dan label sisi terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi $a = mod(1142266, 26) = 8$, $b = mod(11423010, 26) = 14$, $d = mod(1153277, 26) = 21$, $h = mod(11533111, 26) = 5$, $i = mod(1164, 26) = 20$, $k = mod(1175, 26) = 5$, $l = mod(1186, 26) = 16$, $n = mod(1197, 26) = 1$, $o = mod(1208, 26) = 12$, $p = mod(1219, 26) = 23$, $r = mod(12210, 26) = 16$, $s = mod(12311, 26) = 13$, $t = mod(12412, 26) = 10$, dan $u = mod(12513, 26) = 7$.

Kemudian hasil dari modulo tersebut didapati beberapa kesamaan bilangan diantara *ciphertext* yaitu $h = 5 = k$ dan $l = 16 = r$, maka dilanjutkan dengan menggunakan label titik terakhir pada setiap kesamaan bilangan untuk menghindari terjadinya kesamaan bilangan antara dua *chipertext*. Sehingga menjadi $h = mod(115, 26) = 11$, $k = mod(55, 26) = 3$, $l = mod(616, 26) = 18$, dan $r = mod(1016, 26) = 2$.

Kombinasi titik dan sisi tersebut diubah kedalam bentuk modulo 26, maka diperoleh *polyalphabetic cipher* yaitu a=i, b=o, d=v, h=l, i=u, k=d, l=s, n=b, o=m, p=x, r=c, s=n, t=k, dan u=h. Oleh karena itu, dengan menggunakan proses substitusi pesan kedalam *chipertext* tanpa spasi dan tanda baca, maka *cipertext* dari pesan "duanolsatusatuadalahpinbrankaspapa" adalah "vhibmsnikhnikhivisilxubocibdinxixi".

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

- Amalgamasi Graf Roda memiliki super $(21m + 106, 9)$-antimagic total selimut untuk $m \geq 4$;
- Amalgamasi Graf Roda memiliki super $(21m + 103, 7)$-antimagic total selimut untuk $m \geq 4$;
- Amalgamasi Graf Roda memiliki super $(23m + 92, 5)$-antimagic total selimut untuk $m \geq 4$;
- Amalgamasi Graf Roda memiliki super $(21m + 106, 9)$-antimagic total selimut untuk $m \geq 4$ dan aplikasi kriptosistem *polyalphabetic* untuk pesan "duanolsatusatuadalahpinbrankaspapa" adalah "vhibmsnikhnikhivisilxubocibdinxixi".

References

[1] A.E. Hader,A. N. M Salman, An A_M-Supermagic Decomposition Of The Cartesian Product Of a Path and Sun, Artikel, 2013.

[2] AK Purnapraja, R Hidayat, Cycle-Super Antimagicness of Connected and Disconnected Tensor Product of Graphs, *Procedia Computer Science*, **74**, (2015), 9399

[3] Dafik, M. Miller, J.Ryan and M.Baca, On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, Discrite Math, (To appear).

[4] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs, University of Ballarat, 2007.

[5] Dafik, Slamin, Wuria, Super (a, d) $-H-$ Antimagic Total Covering of Shackle Graph,Working Paper, FKIP UNEJ, 2015.

[6] Gallian, J.A. 2007. "dynamic Survey DS6: Graph Labeling" Electronic J. Combinatorics. DS6. (online): http://mathword.wolfram.com/www.combinatorics.-org/surveys/ds6.pdf. Diakses tanggal 27 Juni 2015.

[7] Joseph A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, University of Minnesota, 1997.

[8] M. Baca, Y. Lin, M. Miller and M.Z. Youssef, Edge-antimagic graphs, Discrete Math, 2007.

[9] N. Hartsfield and G. Ringel, Supermagic and antimagic graphs, J. Rec. Math., 1989.

[10] Nur Inayah, Pelabelan $(a, d) - H$-Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf, Disertasi, Not Publicated, Institut Teknologi Bandung, 2013.

[11] Ongko, Erianto. 2013. *Aplikasi Pembelajaran Kriptografi Klasik dengan Visual Basic .NET*. Medan: STMIK IBBI.

[12] Palupi, Retno. 2008. *Kriptosistem Kunci Asimetrik Menggunakan Algoritma Genetika Pada Data Citra*. (Vol 1 No 1)

[13] Pearson, E. 2006. *Introduction To Cryptography With Coding Theory*. America: United States of America

[14] Sherly Citra Wuni, Ika Hesti Agustin, Dafik, Super (a,d)-H-Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill, *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014* **Vol 1, No 1** (2014), 161–168

[15] W.D. Wallis, E.T. Baskoro, M. Miller and Slamin, Edge-magic total labelings, Austral, J. Combin., 2000.