The Learning University

SERTIFIKAT

3.9.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada

Nindya Laksmita Dewi

UNIVERSITAS NEGERI JEMBER

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

The r-Dynamic Chromatic Number of Special Graph Operations

Malang, 5 September 2015

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si
NIP. 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si
NIP. 196609061992031004

The r-Dynamic Chromatic Number of Special Graph Operations

Nindya Laksmita[2], Dafik[1,2], A.I. Kristiana[1,2]

[1]CGANT- University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
nindyalaksmita@yahoo.com; arikakristiana@gmail.com

2010 Mathematics Subject Classification: 05C69

Abstract

Let G be a simple, connected and undirected graph. Let r, k be natural number. By a proper k-coloring of a graph G, we mean a map $c : V(G) \rightarrow S$, where $|S| = k$, such that any two adjacent vertices receive different colors. An r-dynamic k-coloring is a proper k-coloring c of G such that $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ for each vertex v in $V(G)$, where $N(v)$ is the neighborhood of v and $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ for a vertex subset S . The r-dynamic chromatic number, written as $\chi_r(G)$, is the minimum k such that G has an r-dynamic k-coloring. In this paper, we will show some exact values of $\chi_r(G)$ when G is an operation of special graphs.

Keywords: r-dynamic coloring, chromatic number, shackle, graph operations.

Pendahuluan

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan *(colouring)*. Terdapat tiga macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik *(vertex colouring)*, pewarnaan sisi *face colouring*, dan pewarnaan wilayah *region colouring*.

Pewarnaan titik *(vertex colouring)* adalah pemberian warna pada titik-titik graf dimana dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Selain itu, jumlah warna yang digunakan pada pewarnaan graf adalah jumah warna paling sedikit digunakan (minimum). Pada graf G, jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai graf G disebut sebagai bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\mathcal{X}(\mathcal{G})$. Pada perkembangannya, penelitian tentang pewarnaan titik pada graf tidak hanya sebatas pada pewarnaan titik biasa, tapi juga terdapat pewarnaan titik lainnya yang disebut dengan pewarnaan dinamis yang akhirnya juga berkembang menjadi pewarnaan r-dinamis.

Penelitian-penelitian mengenai pewarnaan dinamis cukup banyak dilakukan oleh peneliti, beberapa diantaranya adalah Lai dan Montgomery (2002) dalam artikelnya yang berjudul "*Dynamic Coloring of Graphs*", Kim (2012) dalam penelitiannya yang berjudul "*Dynamic Coloring and List Dynamic Coloring of Planar Graphs*". Kang, dkk. (2014) melakukan penelitian berjudul "*On r-dynamic Coloring of Grids*" dan Jahanbekam, dkk. (2014) juga melakukan penelitian berjudul "*On r−-dynamic Coloring of Graphs*". Mereka mengkaji pewarnaan r-dinamis pada graf yang sebelumnya telah diperkenalkan oleh Montgomery. Hasil penelitian terkait ini terdapat pada [1, 3].

Pada penelitian ini akan dikaji mengenai pewarnaan r-dinamis pada graf-graf hasil operasi dan graf sikel. Penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian-penelitian sebelumnya yang mengkaji tentang nilai kromatik r-dinamis pada operasi graf dan shackle.

Teorema yang Digunakan

Theorem 1 (Vizing Theorem). *Jika G adalah graph sederhana, maka bilangan kromatik pewarnaan titiknya $\chi(G)$ berada pada interval ini $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Theorem 2 *[9] If $diam(G) = 2$, then $\chi_2(G) \leq \chi(G) + 2$, with equality holds only when G is a complete bipartite graph or C_5.*

Theorem 3 *[9] If G is a k-chromatic graph with diameter at most 3, then $\chi_2(G) \leq 3k$, and this bound is sharp when $k \geq 2$.*

In term of the maximum degree of graph, the r-dynamic of graph satisfies as follows

Observation 1 *[9] $\chi_r(G) \geq min\{\Delta(G), r\} + 1$, and this is sharp. If $\Delta(G) \leq r$ then $\chi_r(G) = min\{\Delta(G), r\}$.*

Theorem 4 *[9] $\chi_r(G) \leq r\Delta(G) + 1$, with equality for $r \geq 2$ if and only if G is r-regular with diameter 2 and girth 5.*

Let G^2 denote the graph obtained from G by adding edges joining nonadjacent vertices that have a common neighbor, Jahanbekam *et. al* [9] proved the following.

Observation 2 *[9] $\chi(G) \leq \chi_d(G) \leq \chi_3(G) \leq \cdots \leq \chi_{\Delta(G)}(G) = \chi(G^2)$.*

The last, for graph operations of cartesian product, we have the following

Theorem 5 *[9] If $\delta(G) \geq r$ then $\chi_r(G \Box H) = max\{\chi(G), \chi(H)\}$.*

Hasil Penelitian

Berikut ini akan disajikan beberapa temuan baru terkait nilai kromatik *r-dinamis* pada operasi graf diantaranya adalah $Shackle(F_4, e, n)$, dan $G = P_n \bigodot P_m$. Hasil penelitian dalam artikel ini berupa teorema, yang dalam hal ini terdapat dua teorema kemudian disertai bukti-bukitinya. Teorema pertama terkait dengan $Shackle(F_4, e, n)$.

Theorem 1 *Jika* $G = Shackle(F_4, e, n)$ *untuk* $n \geq 2$ *, nilai kromatik* $r - dinamis$ *dari graf* G *adalah* $\chi(G) = \chi_d(G) = 3$, $\chi_3(G) = 4$, $\chi_4(G) = 5$, $\chi_r(G) = 6$

Bukti. Graf $Shackle(F_4, e, n)$ memiliki himpunan titik $V = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_iy_i;\ 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_iz_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_iz_i;\ 1 \leq i \leq n+\} \cup \{y_iy_{i+1};\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1}z_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i+1}z_i;\ 1 \leq i \leq n\}$. Kemudian order dan sizenya adalah masing-masing $p = |V| = 3n + 2$ dan $q = |E| = 6n + 1$, derajad tertingginya $\Delta(G) = 5$. Sesuai dengan batas atas bilangan kromatik $r - dinamis$ untuk graf $Shackle(F_4, e, n)$ adalah $\chi_r(G) \geq min\{\Delta(G), r\} + 1 = \{5, r\} + 1$, sehingga untuk graf $Shackle(F_4, e, n)$, dengan $\Delta(G) = 5$ berlaku $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 = 6$. Pertama akan dibuktikan $\chi(G) = \chi_d(G) = 3$.

Fungsi titik $Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \geq 2$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n \\ 2; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 2; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 1; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} 3; & ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \geq 2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 3$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi(G) = \chi_d(G) = 3$.

Kedua akan dibuktikan $\chi_3(G) = 4$. Fungsi titik $Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \geq 2$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; & ;\ 1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 2; & i \equiv 5 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 3; & i \equiv 3 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 4; & i \equiv 4 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} 2; & i \equiv 4 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 3; & i \equiv 5 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 4; & i \equiv 3 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \geq 2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 4$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi_3(G) = 4$.

Ketiga akan dibuktikan $\chi_4(G) = 5$. Fungsi titik $Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \geq 2$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; & i \equiv 5 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 3; & i \equiv 3 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 5; & i \equiv 4 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 2, & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 4, & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} 1; & i \equiv 4 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \\ 3; & i \equiv 5 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \\ 5; & i \equiv 3 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \ge 2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 5$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi_4(G) = 5$.

Keempat akan dibuktikan $\chi_r(G) = 6$. Fungsi titik $Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \ge 2$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; & i \equiv 5 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \\ 2; & i \equiv 3 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \\ 5; & i \equiv 4 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 1; & i \equiv 3 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \\ 2; & i \equiv 5 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \\ 4; & i \equiv 4 \text{ (mod 3)},\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} 3; & i = \text{ganjil};\ 1 \le i \le n-1 \\ 6; & i = \text{genap};\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = Shackle(F_4, e, n)$ untuk $n \ge 2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 6$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi_n(G) = 6$.

Theorem 2 *Jika $G = P_n \bigodot P_m$ Untuk $m \ge 2$ dan $n \ge 2$, nilai kromatik (r-dinamis)dari graf G adalah $\chi(G) = \chi_d(G) = 3$, $\chi_3(G) = 4$, $\chi_4(G) = 5$, $\chi_r(G) = 2m + 1$*

Bukti. Graf $G = P_n \bigodot C_m$ memiliki himpunan titik $V = \{x_i, x_{ij}; 1 \le i \le n; 1 \le j \le m\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1};\ 1 \le i \le n-1\} \cup \{x_i x_{ij};\ 1 \le i \le n; 1 \le j \le m\}$ $\cup\{x_{ij} x_{ij+1};\ 1 \le i \le n; 1 \le j \le m-1, \}$. Kemudian order dan sizenya adalah masing-masing $p = |V| = n(1+m)$ dan $q = |E| = 2mn - 1$, derajad tertingginya $\Delta(G) = m+2$. Sesuai dengan batas atas bilangan kromatik $r-dinamis$ untuk graf $P_n \bigodot C_m$ adalah $\chi_r(G) \ge min\{\Delta(G), r\} + 1 = \{m+2, r\} + 1$, sehingga untuk graf $P_n \bigodot P_m$, dengan $\Delta(G) = m+2$ berlaku $\chi(G) \le \Delta(G) + 1 = m+3$. Pertama akan dibuktikan $\chi(G) = \chi_d(G) = 3$.

Fungsi titik $P_n \odot P_m$ untuk $n \ge 2$ dan $m = 2$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & i = \text{ganjil};\ 1 \le i \le n-1 \\ 2, & i = \text{genap};\ 2 \le i \le n \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & i = \text{genap};\ 2 \le i \le n, j = \text{ganjil};\ 1 \le j \le m-2 \\ 2, & i = \text{ganjil};\ 1 \le i \le n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \le j \le m-2 \\ 3, & i = \text{ganjil};\ 1 \le i \le n-1, j = \text{genap};\ 2 \le j \le m-1 \\ 3, & i = \text{genap};\ 2 \le i \le n, j = \text{genap};\ 2 \le j \le m-1 \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = P_n \odot P_m$ untuk $n \ge 2$ dan $m = 2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 3$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi(G) = \chi_d(G) = 3$.

Kedua akan dibuktikan $\chi_3(G) = 4$. Fungsi titik $P_n \odot P_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 2$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 2, & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 3, & 2 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 4, & 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = P_n \odot P_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 4$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi_3(G) = 4$.

Ketiga akan dibuktikan $\chi_r(G) = 4$. Fungsi titik $P_n \odot P_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 2$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; & i \equiv 5 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 2; & i \equiv 4 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \\ 3; & i \equiv 3 \pmod 3,\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 4, & 2 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 5, & 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = P_n \odot P_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 2$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 5$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi_r(G) = 5$. Jika pada graf $G = P_n \odot P_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ maka $\chi_r(G) = 2m + 1$

Kesimpulan

Dari penelitian diatas dapat disimpulkan bahwa:

$$\chi_r(Shackle(F_4, e, n)) = 6$$

$$\chi_r(P_n \odot P_m) = 2m + 1$$

References

[1] Desy Tri Puspasari, Dafik Dafik, Slamin Slamin, Pewarnaan Titik pada Graf Khusus: Operasi dan Aplikasinya, **Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik**, **Vol. 2, Issue 1**, (2014), 50-58

[2] J.L. Gross, J. Yellen and P. Zhang, *Handbook of Graph Theory*, Second Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2014

[3] Harsya Alfian Yulia, Dafik Dafik, Ika Hesti Agustin, Bilangan Kromatik pada Pengoperasian Graf Lintasan dengan Graf Lingkaran, **Proceeding of International Workshop on Mathematics UAD**, (2014), 1-18

[4] S.J. Kim and W.J. Park, List dynamic coloring of sparse graphs, *Combinatorial optimization and applications. Lect. Notes Comput. Sci.* 6831 (Springer, 2011), 156 162.

[5] S.J. Kim, S. J. Lee, and W.J. Park, Dynamic coloring and list dynamic coloring of planar graphs. *Discrete Applied Math.* 161 (2013), 22072212.

[6] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam, On the dynamic chromatic number of graphs, *Combinatorics and graphs. Contemp. Math.* 531 (Amer. Math. Soc. 2010), 118.

[7] B. Montgomery, Dynamic Coloring of Graphs. *Ph.D Dissertation*, West Virginia University, 2001.

[8] H.J. Lai, B. Montgomery, and H. Poon, Upper bounds of dynamic chromatic number. Ars Combin. 68 (2003), 193201.

[9] S Jahanbekam, J Kim, O Suil, D.B. West, On r-dynamic Coloring of Graphs, 2014, In Press

[10] R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1941), 194197.